I. 1.

Loi de Stefan - Boltzmann

On calcule la densité volumique d'énergie :

$$\underset{\mathrm{J/m^3}}{u} = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^{+\infty}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}\,d\nu \underset{x=\frac{h\nu}{kT}}{=} \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\cdot\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{x^3\,dx}{e^x-1}}_{\frac{\pi^4}{15}} = \frac{8}{15}\cdot\frac{\pi^5}{c^3}\cdot\frac{1}{h^3}\cdot(k_BT)^4$$

$$\underset{\mathrm{W/m^2}}{\varphi} = \frac{c\cdot u}{4} = \sigma T^4 \qquad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3c^2}$$

↑ constante de Stefan - Boltzmann

Température de la Terre

Hypothèses :
- pas d'atmosphère
- Terre : corps gris à l'équilibre radiatif
  - albédo A : absorbe fraction $(1-A)$ du rayonnement et réfléchi le reste
  - émissivité $\varepsilon = 1$

ODG 0,31

$$P_{reçue} = (1-A)\cdot\frac{\pi R_T^2}{4\pi d_{TS}^2}\cdot P_S = 4\pi\cdot R_T^2\cdot\sigma\cdot T_0^4$$

surface apparente

dilution sphérique isotrope

équilibre radiatif

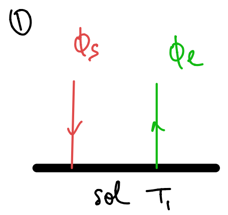
$$\hookrightarrow \boxed{T_0 = \left(\frac{(1-A)\pi \cancel{R_T^2}\cdot P_S}{16\pi^2 d_{TS}^2\cdot\cancel{R_T^2}\cdot\sigma}\right)^{\frac14} = \left(\frac{(1-A)}{4}\cdot\frac{R_S^2}{d_{TS}^2}\right)^{\frac14}T_S}$$

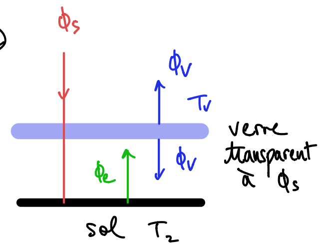
indép. R_T.

AN : $T_0 = 255$ K trop petit
$= -18°C$

Effet de serre

Avec atmosphère hyp : (i) l'atmosphère (l'eau) absorbe tout le rayonnement à $\lambda_{max} \sim 10\,\mu m$ de la Terre
(ii) ______ laisse passer le rayonnement à $\lambda_{max} \sim 500\, nm$ du Soleil.

① 

② 

Situation ① : équilibre radiatif du sol $\rightarrow \Phi_s = \Phi_e = \sigma T_1^4$
$\rightarrow T_0 = \left(\frac{\Phi_s}{\sigma}\right)^{1/4}$

Situation ② : équilibre radiatif du sol $\rightarrow$ $\begin{cases} \Phi_s + \Phi_v = \Phi_e \\ \Phi_e = 2\Phi_v \end{cases}$
du verre $\rightarrow$

$\rightarrow \Phi_s = \Phi_v \rightarrow \Phi_e = 2\Phi_s = \sigma T_2^4 \rightarrow \boxed{T_2 = \left(\frac{2\Phi_s}{\sigma}\right)^{1/4} \simeq 1{,}2\, T_1}$

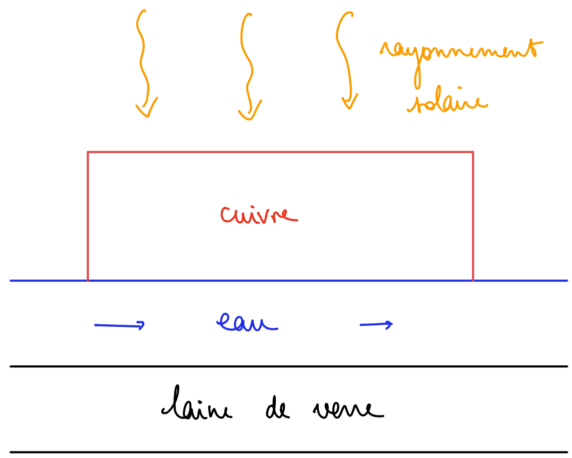
$T_1 = 2^{1/4} . T_0 = 303\ K$ soit $30°C$ mieux mais trop chaud

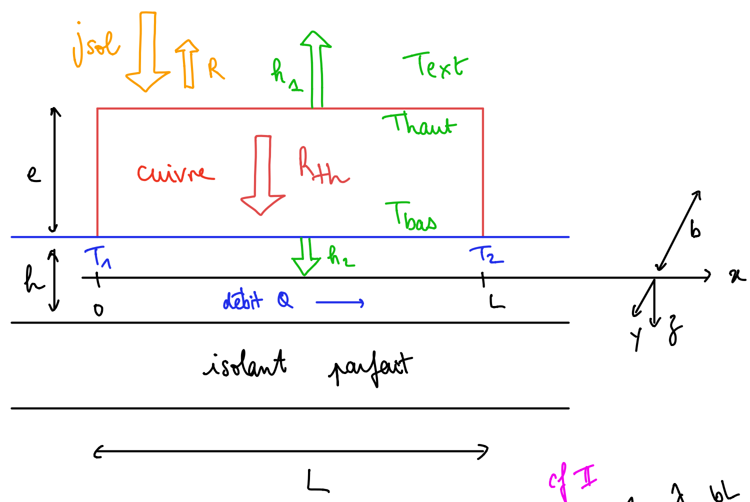
Amélioration du modèle :
* l'eau de l'atmosphère absorbe l'IR du Soleil
* l'ozone ______ l'UV du Soleil
* vaporisation des océans

III. 1.

$$\Phi_{solide \to fluide} = \frac{\lambda}{\delta} S (T_s - T_f) > 0 \quad \text{le signe est bon}$$

$$\Phi_{solide \to fluide} = h \, S (T_s - T_f)$$





cf I

$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{\lambda}{e} \cdot bL$$

puissance utile

face haut

Bilan au cuivre (conservation de la puissance transmise) div $\vec{j} = 0$ en régime stationnaire

$$(1-R)\, j_{sol} \cdot bL + j_{ext \to solide} \cdot bL = (T_{haut} - T_{bas}) / R_{th} \equiv P_{solide \to fluide}$$

$$(1-R)\, j_{sol} \cdot bL + h_1 (T_{ext} - T_{haut}) \cdot bL \overset{(1)}{=} \frac{(T_{haut} - T_{bas})}{R_{th}} \overset{(2)}{=} \underbrace{\int h_2 (T_{bas} - T(x)) \, b \, dx}_{h_2 (T_{bas} - \bar{T}) \cdot bL}$$

vérif. signe

température moyenne

Régime stationnaire → équilibre des flux sur la surface du haut
convention des flux positifs suivant les flèches

$$\Phi_{sol} + \Phi_{ext \to cuivre} = \Phi_{cuivre}$$ vérif. signe

(1) $$(1-R)\, j_{sol} \cdot S + h_1 (T_{ext} - T_{haut}) \cdot S = \frac{(T_{haut} - T_{bas})}{R_{th}}$$

équilibre des flux sur la surface du bas

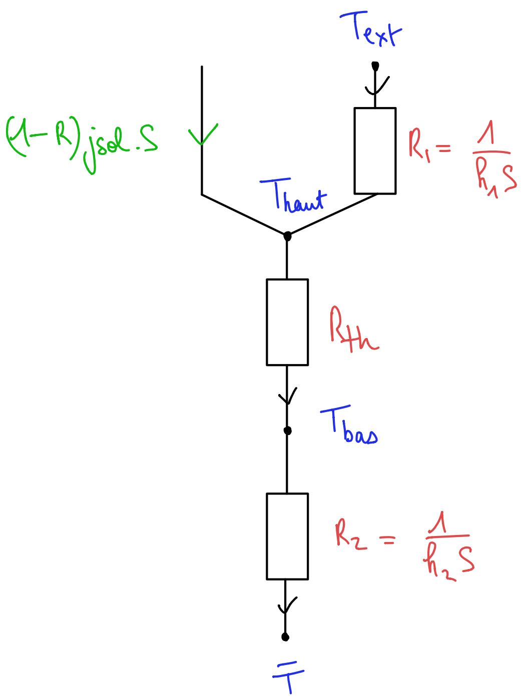
$$\Phi_{cuivre} = \int_0^L dx . b \; j_{cuivre \to eau}$$

(2) $$\frac{(T_{haut} - T_{bas})}{R_{th}} = \int_0^L dx . b .\, h_2 (T_{bas} - T(x)) = h_2 . \frac{b.L}{S} . (T_{bas} - \bar{T})$$

↑ température moyenne

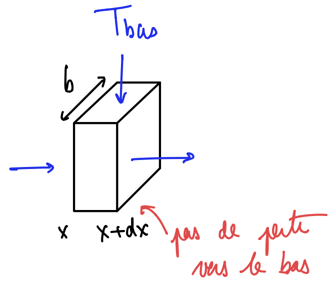
$$\bar{T} = \frac{1}{L} \int_0^L dx\, T(x)$$

on a traduit l'égalité des flux dans le schéma



Comment calculer $\bar{T}$?

Bilan au fluide sur une tranche dx



régime stationnaire :

volumique

$$\delta^2 U = 0 = Q\cdot\rho\cdot c\cdot T(x)\,dt - Q\rho c\, T(x+dx)\,dt + h_2\left(T_{bas} - T(x)\right) b \cdot dx\; dt = 0$$

massique

sur dx
en dt

$$-Q\rho c \frac{\partial T}{\partial x} + h_2\left(T_{bas} - T(x)\right) b = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{\ell} = \frac{T_{bas}}{\ell} \qquad \boxed{\ell = \frac{c\rho Q}{b h_2}}$$

débit

longueur caract

efficacité du transfert

$$T(x) = T_{bas} + \alpha e^{-\frac{x}{\ell}} = T_{bas} + (T_1 - T_{bas})\, e^{-\frac{x}{\ell}}$$

CI $T(0) = T_1$

$$\bar{T} = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, T(x) = \frac{1}{L}\int_0^L dx \left(T_{bas} + (T_1 - T_{bas})\right) e^{-\frac{x}{\ell}}$$

$$\bar{T} = T_{bas} + \frac{1}{L}\left[(T_1 - T_{bas})\, e^{-\frac{x}{\ell}} (-\ell)\right]_0^L = T_{bas} - \frac{\ell}{L}\underbrace{(T_1 - T_{bas})}_{<0}\left[\underbrace{e^{-\frac{L}{\ell}} - 1}_{<0}\right]$$

on a bien $\bar{T} < T_{bas}$

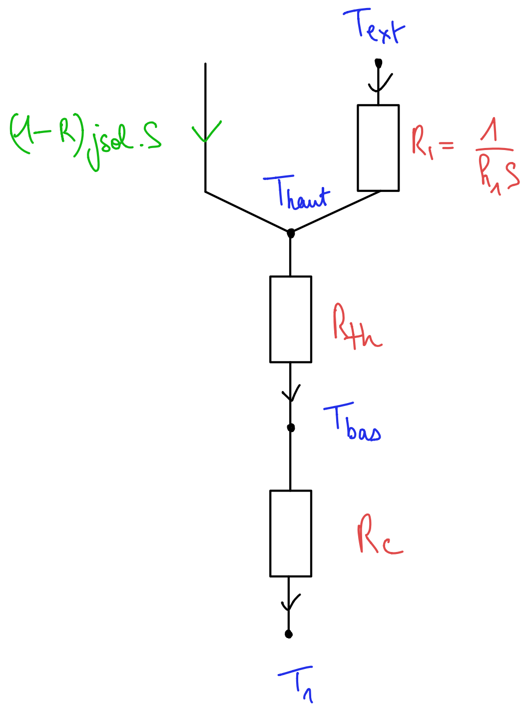
Ainsi $$\frac{T_{haut} - T_{bas}}{R_{th}} \overset{(2)}{=} h_2\left(T_{bas} - \bar{T}\right).S = \underbrace{\overbrace{h_2.S.\frac{\ell}{L}}^{c.\rho.Q}\left(1 - e^{-\frac{L}{\ell}}\right)}_{\frac{1}{R_c}}.\left(T_{bas} - T_1\right) = \frac{T_{bas} - T_1}{R_c}$$

$\frac{1}{R_c}$ résistance du canal

rendement $$\eta = \frac{\phi_{solide \to fluide}}{\phi_{sol}} = \frac{h_2\left(T_{bas} - \bar{T}\right)}{j_{sol}} = h_2 \ell . b\, \frac{\left(T_{bas} - T_1\right)}{\varphi_{sol}}\left[1 - e^{-\frac{L}{\ell}}\right] > 0$$

seule inconnue

nouveau schéma équivalent



à déterminer

pont diviseur de tension à $T_{bas} - T_1$: $$T_{bas} - T_1 = (T_{haut} - T_1)\,\frac{R_c}{R_c + R_{th}}$$

Théorème de Millman en T_{haut} : $$T_{haut} = \frac{\frac{T_1}{R_c + R_{th}} + (1-R)\,\phi_{sol} + \frac{T_{ext}}{R_1}}{\frac{1}{R_c + R_{th}} + \frac{1}{R_1}}$$

AN.

panneau accumulateur carré	$b = L = 1$ m	
épaisseur	$e = 1$ mm	
en cuivre	$\lambda = 390$ W/m/K	
	$R = 0.05$	
couplage solide − gaz (naturel)	$h_1 = 10$ W/m²/K	
solide − liquide (forcé)	$h_2 = 10^3$ W/m²/K	
température d'arrivée	$T_1 = 330$ K	
extérieure	$T_{ext} = 300$ K	
densité de flux incident du soleil	$j_{sol} = 1$ kW/m²	
fluide : eau	$c = 4{,}18$ kJ/kg/K	
débit massique	$Q_{\ell} = 1$ kg/s	

$R_{th} = 3.10^{-6}$ K/W

$R_c = 1.10^{-3}$ K/W

$\ell = 4$ m

→ $T_{haut} - T_1 = 8.10^{-1}$ K

$T_{bas} - T_1 = 8.10^{-1}$ K

$T_{haut} - T_{bas} = 2.10^{-3}$ K

$\boxed{\eta = 0.7}$