LP 21 – Induction électromagnétique

11 juin 2021
Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L1

Bibliographie

✍ *LP 21 2020*, **Cléments de la Salle et Col-⟶ léaux**

Prérequis

- Équations de Maxwell
- Solénoïde infini

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

Aimant dans une bobine
On met en évidence l'apparition d'une tension uniquement quand l'aimant bouge.

On a vu qu'un courant créait un champ magnétique, ça peut paraître peu étonnant qu'on puisse faire l'inverse. Mais attention il faut une variation de champ. De plus c'est Maxwell-Faraday qui est responsable de ça pas Maxwell-Ampère donc c'est pas du tout évident en fait

On se propose d'étudier l'induction dans cette leçon et on verra que c'est très utilisé.

1 Électromagnétisme et induction

1.1 Cadre de l'étude

On se place dans l'ARQS magnétique :

- On néglige la propagation des ondes électromagnétiques devant les variations des champs
- On suppose $\left\|\vec{\mathbf{j}}\right\| \gg \rho c$ et $c\left\|\vec{\mathbf{B}}\right\| \gg \left\|\vec{\mathbf{E}}\right\|$.
- Pas d'accumulation de charges : $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}} = 0$
- Seule équation de Maxwell qui change : on enlève le courant de déplacement dans Maxwell-Ampère.

1.2 Force électromotrice et loi de Faraday

On considère un circuit $\mathcal{C}$ fermé. On l'oriente sur un schéma. Dans l'expérience introductive on a soumis un tel circuit à un champ magnétique variable $\vec{\mathbf{B}}(t)$.

Définition : Force électromotrice Les charges q soumises à un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ vont se mettre en mouvement sous l'effet de la force de Lorentz $\vec{\mathbf{F}}$. La résultante de cette force pour 1 C sur le circuit est appelée *force électromotrice*

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}}. \tag{1.1}$$

On utilise le terme de « force » électromotrice mais elle a la dimension d'une tension et c'est comme ça qu'il faut la voir.

On peut expliciter cette force électromotrice :

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} \tag{1.2}$$
$$= \iint_S \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} \tag{1.3}$$
$$= \iint_S -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} \tag{1.4}$$
$$\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}},} \tag{1.5}$$

où S est une surface quelconque ayant pour support le contour $\mathcal{C}$ et $\mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}$ est orienté selon la convention choisie pour $\mathcal{C}$ et la règle de la main droite. On le représente sur un schéma.

On retrouve dans la précédente équation le flux magnétique à travers la surface S :

$$\phi = \iint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}. \tag{1.6}$$

On obtient alors la loi de Faraday, loi fondamentale de l'induction.

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}. \tag{1.7}$$

Loi de Lenz Le signe $-$ traduit le principe de modération de Lenz, le courant induit dans le circuit fermé par la force électromotrice va s'opposer à la variation du flux. Il va créer un champ magnétique de sens opposé à la variation du champ extérieur. On illustre ça avec un joli schéma.

1.3 Deux types d'induction

La démonstration précédent s'est faite dans le cas où le champ magnétique variait mais que le circuit ne bougeait pas. Mais on a vu aussi qu'on pouvait faire bouger le circuit dans un champ constant dans la manip d'intro. En fait les deux phénomènes sont strictement équivalents, ils décrivent la même réalité mais les calculs se font différemment. Ces deux façons de voir le phénomène ont chacun leur nom :

- Circuit immobile dans un champ magnétique variable, c'est l'induction de Neumann.
- Circuit mobile dans un champ constant, c'est l'induction de Lorentz.

Circuit équivalent La variation du flux faisant apparaître une tension dans le circuit, on peut donc modéliser ça par un circuit équivalent. On garde le formalisme d'électrocinétique, mais on rajoute un générateur parfait de tension e. On fait un schéma pour montrer les conventions d'orientations.

2 Couplage électromagnétique

2.1 Auto-induction

On a vu dans un chapitre précédent qu'un courant électrique pouvait créer un champ magnétique propre, pour rappelle, dans un solénoïde de densité linéique de spire $n = \frac{N}{l}$ de section S et d'axe $\mathbf{z}$.

$$\vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{p}} = \mu_0 n i \mathbf{z}. \tag{2.1}$$

Or on vient de voir qu'une variation du flux magnétique peut entraîner la création d'une différence de potentiel, en particulier le champ électrique créé par ce solénoïde lui-même !

Inductance propre On définit l'inductance propre d'un composant L comme le flux qu'il est capable de produire pour un certain courant i qu'on lui impose.

$$\phi = Li \tag{2.2}$$

Dans le cas du solénoïde infini, le flux total est égal à N fois le flux à travers une spire :

$$\phi = Li = NB_{\mathrm{p}}S \implies L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S. \tag{2.3}$$

Si on fait circuler un courant variable, on va créer un flux variable donc une tension aux bornes du composant :

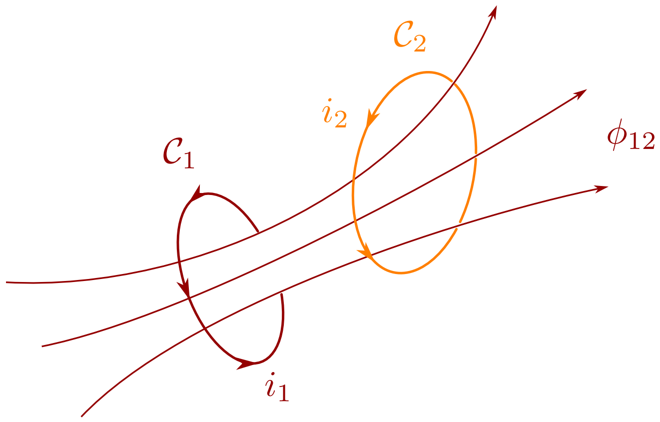
$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{2.4}$$

On retrouve la tension aux bornes d'un bobine d'inductance propre L qu'on étudie depuis toujours dans les petites classes. Le signe $-$ provient du fait que dans le circuit équivalent, on modélise l'apparition de la force électromotrice par un générateur, donc en convention ? générateur. Or pour une bobine on donne plutôt la tension en convention récepteur.

Inception La question qu'on s'est tous déjà posé : mais si un courant crée un champ qui crée un courant. Alors ce courant peut-il créer un champ (qui va lui aussi créer un courant et... AAAAAAH). Et bien la réponse est oui. Voilà. Mais bon c'est négligeable donc ça va.

2.2 Inductance mutuelle

De même, si on place côte-à-côte deux circuits, l'un peut créer un champ qui va induire un courant dans l'autre, et réciproquement. Le coefficient qui lie le flux de 2 sur 1 ϕ_{21} au courant 2 i_2 s'écrit de la même forme que dans le cas d'une induction propre :



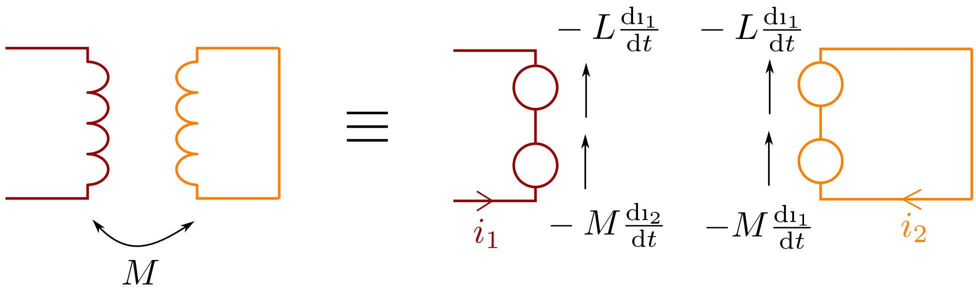


Fig. 1 : Schéma équivalent, évidemment il y a une erreur, un i_2 est devenu un i_1.

$$\phi_{21} = M_21i_2$$
$$\phi_{12} = M_12i_1$$

Le théorème de Neumann assure que la situation est symétrique $M_{12} = M_{21} = M$ alors

$$\phi_{21} = Mi_2$$
$$\phi_{12} = Mi_1.$$

On peut alors définir les forces électromotrices :

$$e_1 = -M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$e_2 = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

On représente alors le schéma équivalent en Figure 1.

Induction mutuelle
Montrer que la circulation d'un courant variable fait apparaître un courant dans l'eautre circuit fermé sur lui-même. On peut montrer que M dépend de la distance

Application au transformateur Les tensions dans chaque circuit sont en convention récepteur

$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{2.5}$$
$$u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \tag{2.6}$$

La puissance magnétique est $u_2i_1 + u_2i_2$ donc l'énergie magnétique stockée est

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \geq 0. \tag{2.7}$$

En posant $x = \frac{i_1}{i_2}$ il vient

$$\frac{1}{2}L_1 x^2 + Mx + \frac{1}{2}L_2 \geq 0. \tag{2.8}$$

Cela implique, par le discriminant que

$$\boxed{|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}}. \tag{2.9}$$

Pour un transformateur parfait, $M^2 = L_1 L_2$. Ainsi les équations se rééecrivent

$$\frac{u_1}{L_1} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{2.10}$$

$$\frac{u_2}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \tag{2.11}$$

Comme $L \propto N^2$ on retrouve le résultat de conversion d'un transformateur

$$\frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2}. \tag{2.12}$$

3 Courants de Foucault

3.1 Principe

Soit un matériau conducteur de conductivité γ soumis à un champ magnétique crée par des *sources extérieures* et dépendant du temps que l'on note $\vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{ext}}(t)$.

L'équation de Maxwell-Faraday nous permet de voir que cela implique l'existence d'un champ électrique induit $\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}}$:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{ext}}}{\partial t} \tag{3.1}$$

En prenant alors en compte la conductivité *finie* du matériau on voit l'apparition d'un vecteur densité de courant induit $\vec{\mathbf{j}}_{\mathrm{F}} = \gamma \vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}}$.

Dans un matériau conducteur réel (bloc de fer) de conductivité γ soumis à un champ extérieur B_{ext} il y a apparitions de courants induits appelés *courants de Foucault* :

$$\vec{\mathbf{j}}_{\mathrm{F}} = \gamma \vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{ext}}}{\partial t} \tag{3.2}$$

Loi d'Ohm :

La loi d'Ohm se généralise comme :

$$\vec{\mathbf{j}} = \gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}}) \tag{3.3}$$

On va faire un exemple pour bien comprendre : un conducteur cylindrique de rayon R et de hauteur h de volume $V = \pi R^2 h$ soumis à un champ extérieur $\vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{ext}} = B_{\mathrm{ext}}\mathbf{e}_z = B_0\cos(\omega t)\mathbf{e}_z$. Pour trouver le champ électrique induit $\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}}$ nécessaire à la détermination des courants de Foucault il faut regarder les symétries et invariances du problème : $\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{i}}$ ne dépend pas de θ. En assimilant le champ en chaque point au champ extérieur, on a en un point M distant de r de l'axe on peut utiliser Maxwell-Faraday et trouver le champ le champ $\vec{\mathbf{E}}_i$:

$$\vec{\mathbf{E}}_i = -\frac{1}{2}r\frac{\mathrm{d}B_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\theta \tag{3.4}$$

Ce qui permet de trouver les courants de Foucault :

$$\vec{\mathbf{j}}_F = -\gamma\frac{1}{2}r\frac{\mathrm{d}B_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\theta = -\gamma\frac{1}{2}r\omega B_0\sin(\omega t)\mathbf{e}_\theta \tag{3.5}$$

Remarques :

- On peut représenter les courants de Foucault sur un schéma, ils sont notamment plus forts loin de l'axe.
- Le champ magnétique crée par ces courants est opposé à la cause de ces courants i.e. le champ extérieur $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$: rôle du signe $-$ dans la loi de Faraday et Loi de Lenz !
- On a fait le calcul à l'ordre 1 : on n'a pas pris en compte ce nouveau champ magnétique (il est négligeable mais il est la).

On peut calculer la puissance dissipée par effet Joule par ces courants :

$$\langle P \rangle = \left\langle \int_V \vec{\mathbf{j}}_F \cdot \vec{\mathbf{E}}_{\text{i}} \mathrm{d}\tau \right\rangle = \frac{1}{\gamma} \int_V \left\langle \vec{\mathbf{j}}_{\text{F}}^2 \right\rangle r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z \tag{3.6}$$

$$\langle P \rangle = \gamma \omega^2 B_0^2 \left\langle \sin^2(\omega t) \right\rangle \frac{2\pi}{4} \frac{R^4}{4} L \tag{3.7}$$

En identifiant le volume $V = \pi R^2 L$, la puissance volumique dissipée par effet Joule est :

$$\frac{\langle P \rangle}{V} = \frac{\gamma \omega^2 B_0^2 R^2}{16} \tag{3.8}$$

Notons ben qu'il s'agit d'une énergie *dissipée* et qu'ainsi elle peut être source de pertes. Typiquement dans les transformateurs, elle est une source de pertes non négligeables. Pour essayer de minimiser les pertes on peut agir de deux façons :

- Jouer sur ω car ces pertes sont en ω^2. Attention car la pulsation intervient également dans l'expression de l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{1}{\gamma \mu_0 \omega}}$ qui détermine la pénétration du champ électromagnétique dans le conducteur.
- Jouer sur la surface sur laquelle les courants de Foucault peuvent se développer. Pour les limiter on peut limiter cette surface, comme c'est fait dans les transformateurs : c'est le feuilletage Figure 2.

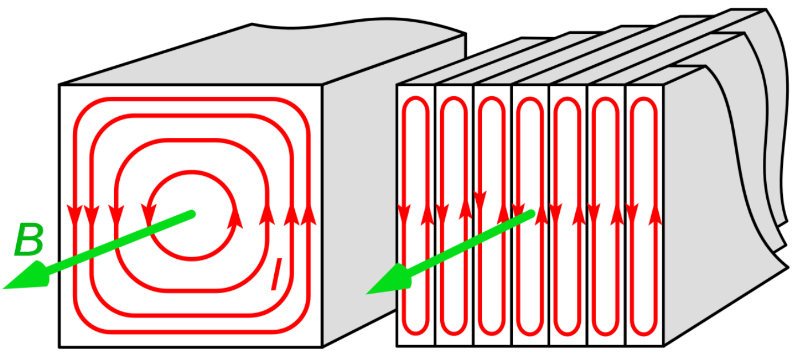


Fig. 2 : Feuilletage du transformateur

Dans les transformateurs ces courants de Foucault nous gênent mais on peut également les mettre à profit.

3.2 Chauffage par induction

La puissance dissipée par les courants de Foucault peut être utilisée à bon escient, et notamment pour le chauffage : tout le monde a déjà entendu parler des plaques de cuisine à induction. Eh bien c'est les courants de Foucault Figure 3.

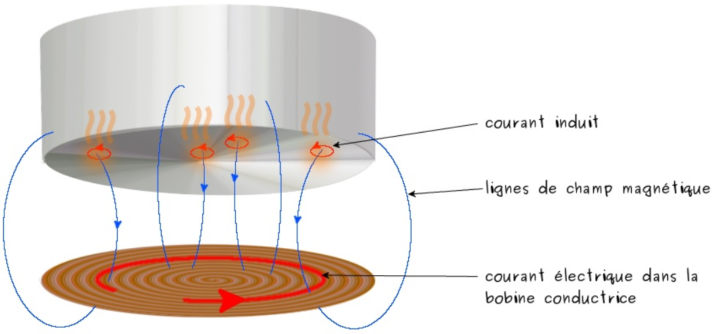


Fig. 3 : Chauffage par induction

Une bobine située au centre de la plaque crée un champ magnétique variable, c'est *l'inducteur*. Le fond de la casserole, qui doit être en métal conducteur est donc parcouru par des courants de Foucault qui réchauffent l'eau en dissipant de la puissance par effet Joule.

Remarques :

- Ces plaques nécessitent donc une casserole en métal conducteur et ont un fond épais pour maximiser l'intensité des courants de Foucault et donc l'échauffement.
- La plaque elle même n'est pas chauffée, mais attention elle est en contact avec la casserole qui chauffe.
- Les plaques actuelles détectent le champ induit par les courants de Foucault pour détecter la présence d'une casserole et ainsi arrêter de produire un champ magnétique quand il n'y a pas de casserole.
- Même principe pour les chargeurs sans fils de portable (on récupère juste le courant).
- Très bon rendement (80 à $90\,\%$). Les pertes sont dues à l'effet Joule dans la bobine de l'inducteur.

3.3 Freinage par induction

On change d'induction cette fois ci c'est le conducteur qui bouge dans un champ constant. Mais le principe reste le même et il va y avoir apparition de courants de Foucault. La force de Laplace sur ces courants va produire une force qui va ralentir le mouvement du disque Figure 4 (faire le raisonnement quali ou invoquer la loi de Lenz).

R

Remarques :

- Breveté en 1903 et première réalisation 1936
- Dépend de la vitesse instantané et ne permet pas l'arrêt , il doit être utilisé en parallèle d'un autre système de freinage classique.
- Pas de contact donc pas d'usure mécanique.
- Par contre l'énergie perdue par effet Joule (échauffement), on ne peut pas la récupérer comme sur les véhicules classiques.

Chute d'un aimant dans un tube conducteur
Bien préciser et montrer que le cuivre n'est pas magnétique et que l'effet vient donc bien des courants de Foucault.

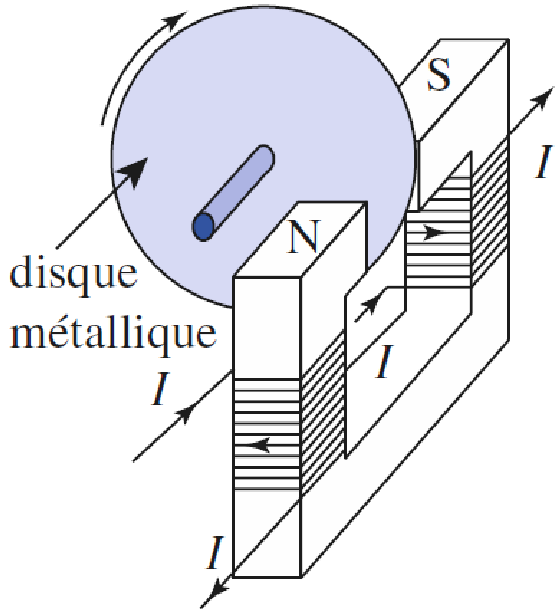


Fig. 4 : Système de freinage par induction

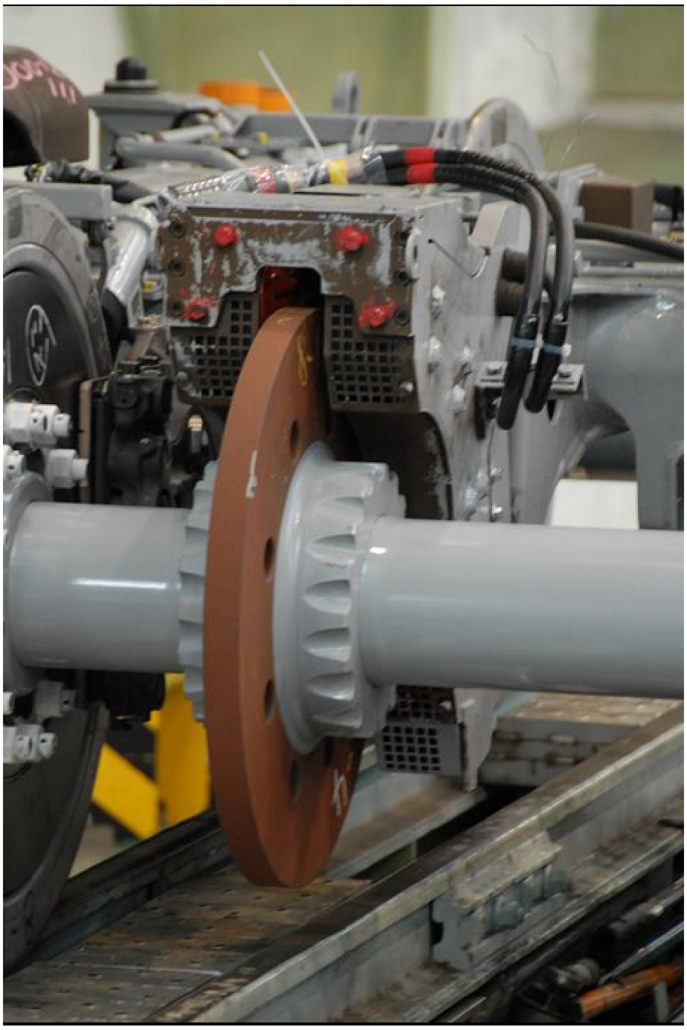


Fig. 5 : Système réel de freinage par induction

Conclusion

Dans cette leçon on a donc montré l'origine du phénomènes d'induction à l'aide des équations de Maxwell dans l'ARQS magnétique. C'est un phénomène très important qui peut être source de problème par les courants de Foucault mais qui peut être surtout très utile comme on l'a vu. Une application majeure est la conversion de puissance électromécanique.

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

•

4.2 Commentaires

•