

LP 22 – Rétroaction et oscillations

11 juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L2

Bibliographie

- | | |
|--|-----------------------------------|
| ➤ <i>Précis Bréal Électronique PSI</i> , Brenders | → gros de la leçon |
| ➤ <i>HPrépa Électronique I</i> , Brebec | → gros de la leçon et PLL |
| ➤ <i>Expériences d'électronique</i> , Duffait | → rapidité vs temps de réponse |
| ➤ <i>Électronique expérimentale</i> , Krob | → oscillateur de Wien |
| ➤ <i>Optique</i> , Houard | → explications sur le laser He-Ne |
| ➤ <i>LP 22 2018</i> , Mangeolle, Rose | → Le sang |

Prérequis

- Filtres linéaires
- Notations de Laplace
- Amplificateur opérationnel
- Interféromètre de Fabry-Pérot

Expériences

- ☞ Naissance des oscillations dans l'oscillateur à pont de Wien
- ☞ Rôle des non-linéarités dans l'oscillateur à pont de Wien

Table des matières

1	Systèmes bouclés linéaires	2
1.1	Fonction de transfert	2
1.2	Exemple : l'amplificateur non inverseur	3
2	Conséquences de la rétroaction	4
2.1	Gain et bande passante	4
2.2	Réponse dynamique	4
2.3	Sensibilité aux fluctuations	5
3	Oscillateurs quasi-sinusoidaux	5
3.1	Stabilité d'un système bouclé linéaire	5
3.2	Condition de Barkhausen	5
3.3	Exemple : l'oscillateur à pont de Wien	6
4	Questions et commentaires	6
4.1	Questions	6
4.2	Commentaires	6

Introduction

En électronique on a étudié que des circuits linéaires, comme les filtres, dont la sortie dépend de l'entrée par une équation différentielle linéaire. En notation de Laplace on les décrit par une fonction de transfert $H(p) = \frac{s(p)}{e(p)}$

À une entrée donnée on peut connaître l'unique sortie si l'on connaît parfaitement $H(p)$.

Pour une voiture par exemple, la fonction de transfert qui à une certaine puissance fournie par le moteur associe la vitesse de rotation des roues dépend de nombreux paramètres comme la pente ou le nombre de passagers. En utilisant une boucle de rétroaction on peut *asservir* le système et s'assurer que la sortie est conforme à une consigne.

Un tel système est le régulateur de vitesse, qui est constitué d'un capteur tachymétrique qui mesure la vitesse de rotation des roues pour ajuster la puissance du moteur afin de stabiliser la vitesse

1 Systèmes bouclés linéaires

1.1 Fonction de transfert

Un système bouclé comporte d'abord une chaîne directe qui donne la sortie en fonction de l'entrée. Cette sortie est récupérée et traverse la boucle de retour pour être comparée à l'entrée (les signes + et - sur la figure 1 indiquent bien qu'il s'agit d'un comparateur). La différence entre les deux est appelée l'erreur.

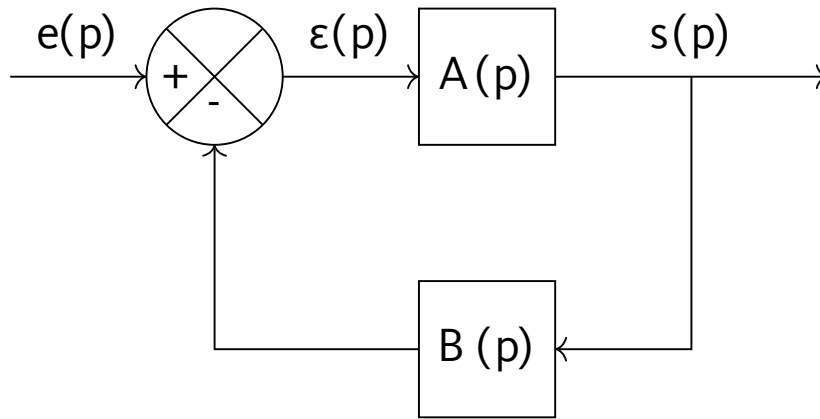


Fig. 1 : Schéma d'un système bouclé

Notons que la présence du - est juste une convention, on peut toujours mettre un - dans la boucle de rétroaction et avoir un additionneur.

Dans l'idée, si la sortie est trop grande (par rapport à nos attentes fixées par A et B) la boucle de retour induira une grande rétroaction négative ainsi la sortie finira par se stabiliser à une valeur inférieure.

Il faut bien noter que c'est un raisonnement avec les mains et qu'en ARQS la sortie ne revient pas modifier l'entrée, tout se fait instantanément.

On s'attend toujours à avoir un système linéaire même si il est bouclé ainsi on devrait pouvoir le modéliser par une simple fonction de transfert $H(p)$ pour pouvoir considérer dans la suite ce système comme une boîte noire. Et en effet on peut écrire :

$$s(p) = A(p)\varepsilon(p) = A(p)[e(p) - B(p)s(p)] \quad (1.1)$$

$$s(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}e(p) \quad (1.2)$$

On en déduit la fonction de transfert du système bouclé :

$$H_{BF}(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)} \quad (1.3)$$

La fonction de transfert en boucle fermée peut donc s'exprimer en fonction de celle en boucle ouverte H_{BO} . Dans la limite où le retour est petit cette expression montre que le système bouclé se comporte comme le système sans boucle de retour ($H(p) = A(p)$), avec une correction $(1 + AB)^{-1}$ apportée par la boucle de retour.

↓ Maintenant que nous avons vu ces considérations théoriques regardons un cas concret, l'amplificateur non inverseur.

1.2 Exemple : l'amplificateur non inverseur

L'amplificateur non inverseur est le système électronique suivant :

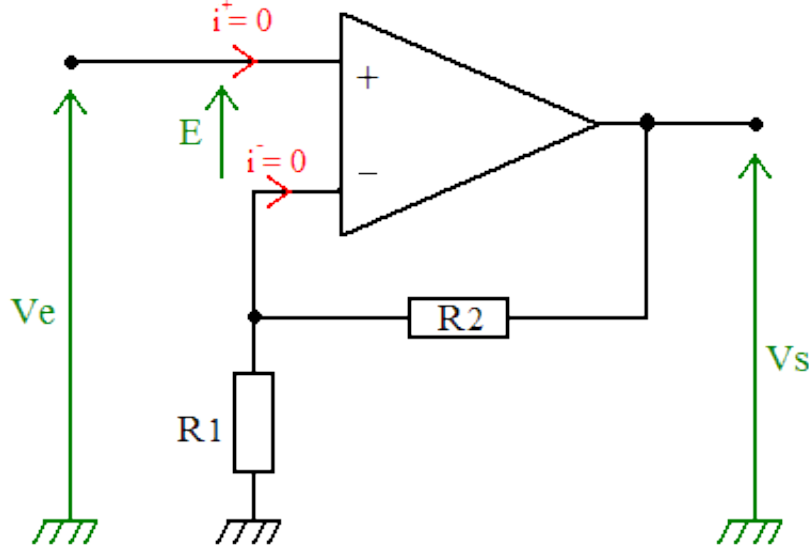


Fig. 2 : Schéma de l'amplificateur non inverseur

Rappelons qu'en fonctionnement dynamique la réponse de l'amplificateur opérationnel est :

$$s(p) = \frac{\mu}{1 + \frac{p}{\omega_{AO}}} (e_+(p) - e_-(p)) \quad (1.4)$$

On remarque ainsi que l'AO se comporte comme un comparateur suivi d'un filtre passe bas du premier ordre de pulsation de coupure ω_{AO} et de gain statique μ .

OdG : $\mu = 2 \cdot 10^5$ et $\omega_{AO} = 50 \text{ rad/s}$ soit $f_{AO} = 8 \text{ Hz}$.

Revenons à notre système bouclé. On pourrait essayer de calculer la sortie en fonction de l'entrée à l'aide de plusieurs théorèmes de Millman mais il y a plus astucieux. L'amplificateur non inverseur est un système bouclé avec un comparateur suivi d'une chaîne directe (l'AO) et muni d'une chaîne de retour qui est un pont diviseur de tension. On a donc :

$$A(p) = \frac{\mu}{1 + \frac{p}{\omega_{AO}}}; B(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (1.5)$$

À ce stade on peut donc affirmer qu'il s'agit bien d'un système à rétroaction négative qui peut être vu comme un système asservi. On va donc calculer la fonction de transfert du système.

On a :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{\frac{\mu}{1 + \frac{p}{\omega_{AO}}}}{1 + \frac{\mu}{1 + \frac{p}{\omega_{AO}}} \times \frac{R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{\mu}{1 + \frac{p}{\omega_{AO}} + \frac{\mu R_1}{R_1 + R_2}} \quad (1.6)$$

En posant $H_0 = \frac{\mu}{1 + \frac{\mu R_1}{R_1 + R_2}}$ et $\omega_0 = \omega_{AO} \left(1 + \frac{\mu R_1}{R_1 + R_2} \right)$ on obtient :

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \quad (1.7)$$

On remarque que la fonction de transfert est très similaire à celle du cas non bouclé. C'est toujours un filtre passe bas d'ordre 1, mais avec des caractéristiques différentes.

↓ Voyons maintenant quelles conséquences a la rétroaction sur l'exemple de l'amplificateur non inverseur et plus généralement sur n'importe quel système bouclé.

2 Conséquences de la rétroaction

2.1 Gain et bande passante

Remarquons pour commencer que nous sommes dans le cas d'un système bouclé avec un grand gain en chaîne directe $\mu = 10^5$ ainsi tant que $\mu \gg 1/|B|$ on peut écrire en toute généralité :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \simeq \frac{1}{B(p)} \quad (2.1)$$

Ainsi le gain du système bouclé ne dépend presque plus que de la boucle de retour. Comme le but d'un amplificateur non inverseur est généralement d'amplifier on prendra $B(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} < 1$.

OdG : on prendra typiquement $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ ainsi on aura $B(p) \simeq 1/100$ et $H(p) \simeq 100$, on a bien un amplificateur (et on a bien $\mu|B| \gg 1$).

On aurait pu avoir cette discussion sans avoir calculé $H(p)$ qui nous donne tout de même des informations comme le comportement passe bas.

Concernant le gain, on a déjà tout dit :

$$H_0 \simeq \frac{R_1 + R_2}{R_1} \simeq 100 \quad (2.2)$$

Ainsi la rétroaction a fortement diminué le gain, d'un facteur proche de 2000 ! Par contre, dans le même temps la fréquence de coupure a été multipliée du même facteur :

OdG : $\omega_0 = 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ soit $f_0 = 16 \text{ kHz}$

Ainsi la rétroaction permet d'augmenter la bande passante (ce qui est généralement une bonne chose), au prix d'une diminution du gain du même facteur (on parle de conservation du produit gain-bande).

2.2 Réponse dynamique

Quelle influence a la rétroaction sur la réponse dynamique ? Considérons donc la réponse à un échelon.

Le temps de réponse est donné par $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ pour les systèmes d'ordre 1. Il est donc grandement réduit par la rétroaction, elle accroît la rapidité du système.

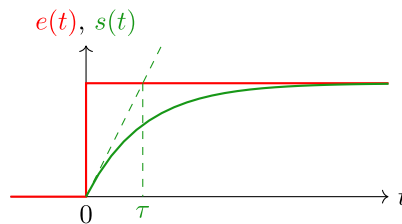


Fig. 3 : Réponse à échelon pour un système d'ordre 1.

Le contre-coup de cette rapidité qui apparaît avec les systèmes d'ordre 2 c'est le dépassement, d'autant plus grand que la réponse est rapide qui peut poser des problèmes en ingénierie (usure, casse). Quant au régulateur de vitesse, on veut passer de 60 km h^{-1} à 80 km h^{-1} sans passer par un pic à 100 km h^{-1} .

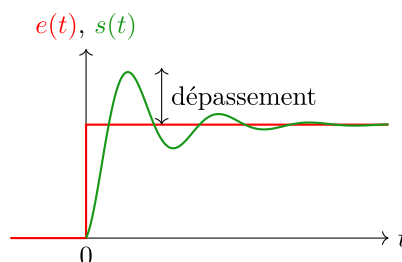


Fig. 4 : Réponse à un échelon avec dépassement

2.3 Sensibilité aux fluctuations

Supposons que la fonction $A(p)$ fluctue beaucoup au cours du temps (la route monte puis descend alternativement par exemple), à puissance du moteur constante, la vitesse des roues pourra prendre des valeurs très diverses. Est-ce-que ces fluctuations vont affecter la vitesse du véhicule ou l'asservissement est-il suffisamment performant ?

Si $A(p)$ fluctue de ΔA , et que la chaîne de retour ne fluctue pas alors

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta A(1 + AB) - AB\Delta A}{(1 + AB)^2} \frac{1 + AB}{A} = \frac{\Delta A}{A} \frac{1}{1 + AB} \quad (2.3)$$

Par rapport à la chaîne directe sans asservissement, les fluctuations sont atténuées d'un facteur $1 + AB$, généralement grand, pour l'amplificateur non inverseur c'est toujours le facteur 2000. Ainsi pour $\Delta A/A = 1$ (énorme), $\Delta H/H = 0.05\%$.

3 Oscillateurs quasi-sinusoidaux

3.1 Stabilité d'un système bouclé linéaire

On prend la convention de la rétroaction positive qui correspond au schéma suivant :

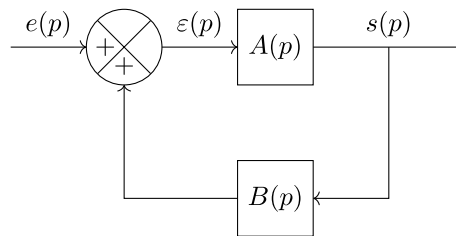


Fig. 5 : Schéma de boucle à rétroaction positive

On rappelle que ce n'est qu'une convention car $B(p)$ pourrait absorber le $-$. La fonction de transfert est alors

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)} \quad (3.1)$$

L'équation, en notation de Laplace qui gouverne l'évolution du système est alors :

$$(1 - A(p))B(p)s(p) = A(p)e(p) \quad (3.2)$$

Que se passe-t-il quand on ne met pas d'entrée ($e = 0$) ? Le système est-il stable ? Les petites fluctuations, inévitables, vont-elles s'atténuer ou s'amplifier, conduisant à une divergence de la sortie ?

Pour $e = 0$ on peut résoudre l'équation différentielle par

$$s(t) = \sum_{i=1}^N a_i \exp\{p_i t\} \quad (3.3)$$

où les p_i sont les racines de $1 - A(p)B(p)$.

Les modes instables sont ceux pour lesquels $\text{Re}\{p_i\} > 0$.

3.2 Condition de Barkhausen

Le critère de Barkhausen va nous permettre de dire à partir de quel moment on passe d'une situation stable à une situation instable, c'est-à-dire de partie réelle négative à positive. On cherche donc des racines de partie réelle nulle à $1 - A(p)B(p)$, c'est à dire des racines du type $p = j\omega$: comme c'est pratique, on revient à la notation réelle. La condition de Barkhausen s'énonce donc ainsi

$$A(j\omega)B(j\omega) = 1 \quad (3.4)$$

C'est une condition sur des nombres complexes qui porte donc deux informations, une sur le module et une sur la phase.

Comme

$$H = \frac{1}{1 - AB} = A \sum_{k=0}^{\infty} (AB)^k, \quad (3.5)$$

on interprète ça en terme d'amplification le long d'un tour de boucle (pour le module) et d'interférences constructives (pour la phase), en se souvenant du Fabry-Pérot.

On peut alors faire l'analogie avec le laser Helium-Néon tirée du Houard. On détaille ce qui joue le rôle d'amplification/atténuation, où intervient l'interférence constructive, etc.



Appliquons toutes ces considérations théoriques à un système réel, l'oscillateur à pont de Wien

3.3 Exemple : l'oscillateur à pont de Wien

La fonction de transfert est avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, dans le Krob la convention de signe est spéciale,

$$AB(j\omega) = \frac{\frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{3}}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)/3} \quad (3.6)$$

La condition de Barkhausen est alors $\omega = \omega_0$. On s'attend à une sinusoïde parfaite en sortie, à la fréquence ω_0 , à condition que le module vaille 1, ce qui revient à $R_2 = 2R_1$.

☛ Naissance des oscillations

On s'est placé à $R_2 \leq 2R_1$ avec une boîte à décade (avec des boutons qui tournent ça permet en faisant tourner juste un peu le bon bouton de voir apparaître les oscillations). On règle l'oscilloscope en mode single en faisant tous les réglages (trigger, échelle horizontale) au préalable pour que cette étape soit rapide et démonstrative, on voit apparaître les oscillations et c'est joli.

On voit à droite de l'écran que l'AO sature. C'est important car ce sont les non-linéarités qui permettent d'enrichir le signal en relâchant la condition de Barkhausen. Ce qui compte d'après le critère de Nyquist c'est d'avoir $R_2 > 2R_1$, en gros on veut une bonne amplification qui ne concerne pas juste ω_0 mais aussi d'autres fréquences.

☛ Rôle des non-linéarités

On refait l'expérience en dépassant plus franchement $2R_1$, on observe une distorsion du régime permanent. On constate que la croissance des oscillations est beaucoup plus rapide, c'est lié au fait que plus R_2 dépasse $2R_1$ plus la partie réelle des racines de $AB - 1$ est grande dans les positifs et plus la divergence est rapide dans le régime transitoire.

Conclusion

On a vu dans cette leçon deux applications très différentes des systèmes bouclés : pour l'asservissement à l'aide de rétroactions négatives et pour au contraire fabriquer des oscillateurs à l'aide de rétroactions positives. Une application dont on n'a pas parlé est la boucle à verrouillage de phase qui ne rétroagit pas sur l'amplitude mais sur la phase. C'est une rétroaction non linéaire.

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

•

4.2 Commentaires

•