

LP 24 – Ondes progressives, ondes stationnaires

11 juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L2

Bibliographie

↗ *LP 24 2021*, Cléments de la Salle et Col-léaux

Prérequis

- Principe fondamental de la dynamique et mécanique classique
- Électrocinétique

Expériences

- ☞ Corde de Melde
- ☞ Fente d'Young

Table des matières

1 Généralités	2
1.1 Notion d'onde	2
1.2 Mise en équation dans des cas simples	2
1.2.1 La corde de Melde	2
1.2.2 Le câble coaxial	4
1.3 Analogies	5
2 Ondes progressives	5
2.1 Observations	5
2.2 Solutions de l'équation de d'Alembert	5
2.3 Aspects énergétiques	6
3 Ondes stationnaires	6
3.1 Des ondes progressives aux ondes stationnaires	7
3.2 Modes propres	7
3.3 Énergie d'un mode	8
3.4 Régime forcé	8
4 Questions et commentaires	9
4.1 Questions	9
4.2 Commentaires	9

Introduction

Aujourd'hui on va s'intéresser à la notion d'ondes en physique. C'est un sujet de premier plan car il est présent dans tous les domaines de la physiques

Motivation

Illustrer les vagues à la surface de l'eau. Exciter la corde de Melde. Évoquer l'acoustique. Montrer les fentes d'Young ou la diffraction par une fente

1 Généralités

1.1 Notion d'onde

Définition physique : Une onde est un champ dont l'évolution est décrite par une équation aux dérivées partielles.

Définition pratique : Une onde est la propagation d'une perturbation dans l'espace à travers le temps.

Exemples :

- Corde de Melde : on peut faire une démo avec une corde qu'on excite à la main : hauteur de la corde.
- Ondes de surface : hauteur de la surface
- Ondes acoustiques : champ de pression
- Onde électromagnétique : amplitude des champs \vec{E} , \vec{B} .

La deuxième définition est grosso modo celle de Wikipedia. En fait elle correspond à l'intuition qu'on en a mais le but de cette leçon est de montrer qu'une telle définition est trop restrictive car elle ne prend notamment pas en compte un type d'onde (stationnaire :o).

1.2 Mise en équation dans des cas simples

1.2.1 La corde de Melde

Motivation :

On secoue la corde, hop il y a un truc qui part. On peut même s'amuser à la secouer sinusoïdalement pour gagner du temps.

Hypothèses :

- On néglige la pesanteur et la torsion de la corde. La corde est considérée inextensible.
- On ne considère que les forces de tension.
- La masse linéique de la corde est notée μ .
- On considère que l'on est aux petits angles $\alpha(x, t) = \frac{dy(x, t)}{dx} \ll 1$. On ne considère que des déplacements selon l'axe \mathbf{e}_y , l'accélération selon \mathbf{e}_x est nulle.
- Ainsi $\sin \alpha \simeq \alpha$ et $\cos \alpha \simeq 1$

Ainsi :

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \simeq dx \quad (1.1)$$

On peut maintenant appliquer le principe fondamental de la dynamique selon les axes \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y .

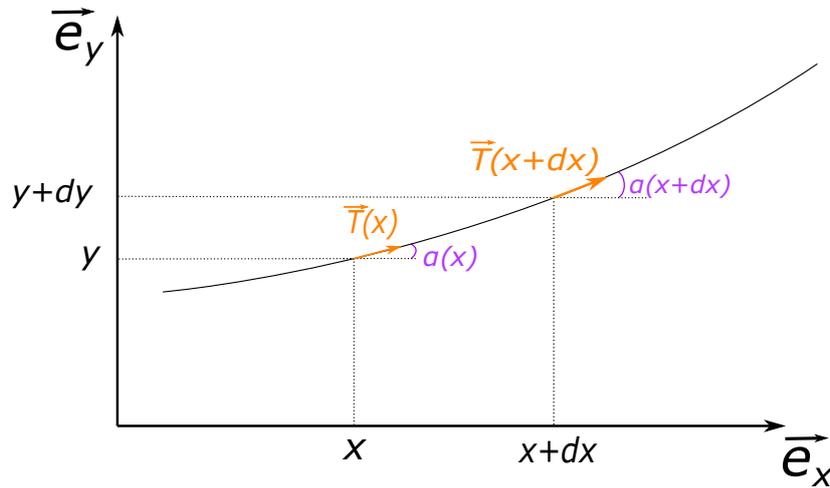


Fig. 1 : Modèle étudié de la corde vibrante

Selon l'axe e_x on a :

$$\mu dx a_x = 0 = T(x + dx, t) \cos \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t) \implies \frac{\partial T \cos \alpha}{\partial x} = 0 \tag{1.2}$$

$$T(x, t) \cos \alpha(x, t) = \text{cste} \implies T(x, t) = \text{cste} = T_0 \tag{1.3}$$

Selon l'axe e_y on a :

$$\mu dx a_y = T(x + dx, t) \sin \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \sin \alpha(x, t) \tag{1.4}$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 (\sin \alpha(x + dx, t) - \sin \alpha(x, t)) \tag{1.5}$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 (\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)) \implies \mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \tag{1.6}$$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \tag{1.8}$$

Ce type d'équation est appelée *équation de d'Alembert*.

Remarques :

- Elle est caractéristique de la propagation d'un type d'ondes particulières : les ondes *non dispersives*. Ces ondes ne changent pas de forme lors de leur propagation et vérifient la relation $\lambda = \frac{c}{\nu}$ déjà vue dans le cas de la lumière.
- L'espace et le temps semblent jouer des rôles similaires. Ceci correspond à l'intuition qu'on peut avoir de la propagation d'une perturbation : prendre deux photos à $t = 0$ mais de deux points de vue espacés de d correspond à prendre deux photos du même point de vue mais aux instants $t = -d/v$ et $t = 0$.
- La dérivée seconde par rapport au temps est gage de réversibilité. Si $y(t)$ est solution alors $y(-t)$ l'est également. En effet si on filme la propagation de l'onde le long de la corde et que l'on passe le film à l'envers ça ressemble toujours à une propagation d'onde.

| Les ondes mécaniques c'est bien, mais ce ne sont pas les seules.



1.2.2 Le câble coaxial

Le but est de maintenant voir la puissance des analogies. De plus ça nous permettra de voir les premiers aspects énergétiques qui nous resserviront pour la suite.

On a vu dans un cours précédent que l'on peut modéliser un câble coaxial par une inductance linéique Λ et une capacité linéique Γ selon le schéma Figure 2.

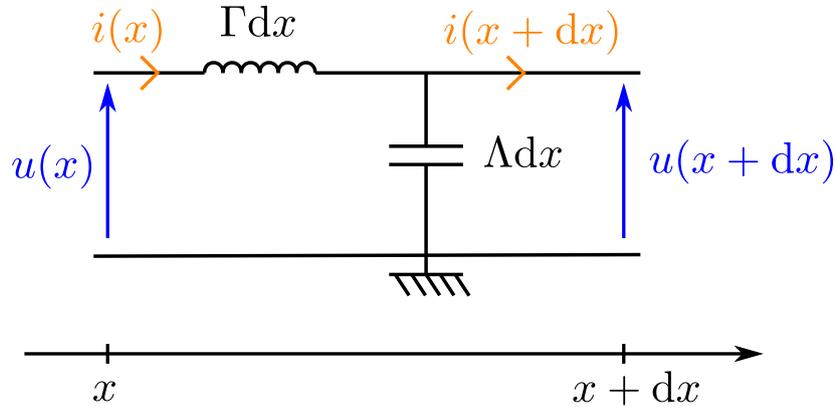


Fig. 2 : Modélisation du câble

On peut écrire la loi des mailles :

$$u(x + dx) = u(x) - \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.9)$$

Et la loi des noeuds :

$$i(x) = i(x + dx) + \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.10)$$

Ainsi on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.11)$$

En dérivant la première équation par rapport à x et en y réinjectant la seconde on trouve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma \Lambda}} \quad (1.12)$$

On retrouve l'équation de d'Alembert pour u , on peut de même la retrouver pour i .

D'autre part on peut calculer l'énergie linéique comme :

$$e = \frac{1}{2} \Lambda i^2 + \frac{1}{2} \Gamma u^2 \quad (1.13)$$

La variation temporelle d'énergie est donc :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \Lambda i \frac{\partial i}{\partial t} + \Gamma u \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.14)$$

En réutilisant les formules établies (loi des mailles et des noeuds) on a :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -i \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial i}{\partial x} \quad (1.15)$$

On identifie alors la puissance $P = ui$ et ainsi :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (1.16)$$

Remarque :

Il s'agit de l'équation de conservation de l'énergie 1D dans laquelle $P \mathbf{e}_x$ joue le rôle de vecteur transportant l'énergie.

1.3 Analogies

On a déjà vu l’analogie entre la corde vibrante et le câble coaxial. On va y rajouter les ondes acoustiques et électromagnétiques que l’on étudiera plus tard cette année. On peut alors établir alors le tableau des analogies :

	Corde vibrante	Câble coaxial	Acoustique	Électromagnétisme
Grandeurs couplées	v_y et T_y	i et u	\vec{v}_1 et p_1	\vec{E} et \vec{B}
Équations	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
Vitesse	$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$	$c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma\Lambda}}$	$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0\chi S}}$	$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}}$
Puissance	$P = T_y \cdot v_y$	$P = u \cdot i$	$P = \langle p_1 \vec{v}_1 \rangle$	$P = \left\langle \left \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right \right\rangle$
Densité d'énergie	$e = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$	$e = \frac{1}{2}\Gamma u^2 + \frac{1}{2}\Lambda i^2$	$e = \frac{1}{2}\rho_0 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}\chi s p_1^2$	$e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$

Tab. 1 : Analogies

Ce qui est intéressant c’est aussi de voir que chaque cas fait intervenir un *couplage* de deux grandeurs (y, T et u, i) entre deux champs. C’est ce couplage qui est à l’origine de l’établissement de d’Alembert.

2 Ondes progressives

2.1 Observations

Avant de se plonger dans les calculs de résolution de l’équation, on va voir comment s’arranger « à la physicienne ».

Quand on excite la corde temporairement, la perturbation ne change pas de forme mais se déplace simplement le long de son axe à une vitesse c . On prend une photo de la corde à un instant $t = 0$. On note alors $y(x, 0)$ son profil. On peut prévoir simplement son profil à l’instant $t > 0$, ce sera le même mais décalé d’une distance ct

$$y(x, t) = y(x - ct, 0). \tag{2.1}$$

C’est équivalent à la deuxième remarque faite sur l’équation de D’Alembert. De même, on peut imaginer que si la perturbation se déplace dans le sens opposé, cela revient à changer c en $-c$ et on aurait alors

$$y(x, t) = y(x + ct, 0). \tag{2.2}$$

Ceci nous amène à penser que les variables $u = x - ct$ et $v = x + ct$ jouent des rôles particuliers.

2.2 Solutions de l’équation de d’Alembert

On effectue donc le changement de variable $(x, t) \rightarrow (u, v)$

$$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} = c \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \right) \end{cases} \tag{2.3}$$

L’équation de d’Alembert devient alors

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} y = 0. \tag{2.4}$$

On peut intégrer par rapport à v :

$$\frac{\partial}{\partial v} y = f(u), \tag{2.5}$$

où $f(u)$ est une fonction quelconque dérivable, on peut nommer $F(u)$ une de ses primitives de sorte que la deuxième intégration donne

$$\begin{aligned}y(u, v) &= F(u) + G(v) \\y(x, t) &= F(x - ct) + G(x + ct),\end{aligned}$$

où F et G sont deux fonction \mathcal{C}^2 à une variable.

On a donc montré que toutes les solutions se mettent sous la forme d'une somme d'un profil F se déplaçant à c dans le sens des x croissants et d'un profil G se déplaçant à la même vitesse mais dans le sens opposé. Ce sont ces ondes que l'on appelle *propagative*.

Onde propagative Il s'agit d'une onde qui ne dépend que des seuls paramètres $x - ct$ et $x + ct$.

2.3 Aspects énergétiques

Une onde propagative transmet de l'énergie à la vitesse c . C'est-à-dire que la puissance et l'énergie sont aussi des ondes propagatives (en tant que fonction d'ondes propagatives c'est naturel).

Exemple Pour le câble coaxial,

$$P(x, t) = u(x - ct)i(x - ct) = P(x - ct). \quad (2.6)$$

De même pour l'énergie.

Prenons une onde propagative allant dans la direction des x croissants. Alors on peut écrire que $e(x, t) = e(x - ct) = e(u)$, l'énergie linéique. De même P est fonction de u . On va faire un bilan !

On considère une portion entre x et $x + dx$. Durant dt , il rentre une énergie $P(x - ct) dt$ et il sort une énergie $P(x + dx - ct) dt$. La variation d'énergie de cette tranche est

$$\frac{\partial e}{\partial t} dx dt. \quad (2.7)$$

La conservation de l'énergie s'écrit donc

$$P(x - ct) dt - P(x + dx - ct) dt = \frac{\partial e}{\partial t} dx dt. \quad (2.8)$$

Ce qui se réécrit

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial e}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Donc

$$-P'(u) = -ce'(u). \quad (2.10)$$

Finalement, $P = ce$.

Pour une onde se propageant dans les x décroissants, $P = -ce$

3 Ondes stationnaires



Corde de Melde pour introduire le rôle des Conditions aux Limites

On vient d'étudier la décomposition d'une onde en ondes progressives. Nous allons maintenant nous intéresser à une nouvelle définition à l'aide des *ondes stationnaires*. À ce stade, il est important de noter que les ondes stationnaires et les ondes progressives ne sont pas en opposition : il s'agit juste de deux familles de fonctions sur lesquelles on peut décomposer tout solution l'équation de d'Alembert.

3.1 Des ondes progressives aux ondes stationnaires

Onde stationnaire Une onde est dite stationnaire si son expression fait intervenir les variables spatiales et temporelles de manière séparée. On écrit alors, en toute généralité : $s(\vec{x}, t) = f(\vec{x}), g(t)$.

Cherchons maintenant une solution de l'équation de d'Alembert sous forme d'une onde stationnaire. Pour simplifier les calculs nous nous placerons dans un problème 1D avec donc $y(x, t) = f(x)g(t)$. En injectant cet ansatz dans l'équation de d'Alembert on obtient

$$g \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{c^2} f \frac{d^2 g}{dt^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dt^2} = c^2 \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2}. \quad (3.1)$$

On a donc deux fonctions de deux variables différentes qui sont égales, les deux sont donc égales à une constante. Si cette constante est nulle, alors l'onde n'existe pas, inintéressant, si cette constante est positive les solutions en exponentielles croissantes ne vérifient pas les conditions aux limites. La constante est donc négative et homogène à des s^{-1} . On la notera donc $-\omega^2$. Il vient donc un système de deux équations.

$$\begin{cases} \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dt^2} = -\omega^2 & \implies g(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi) \\ \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} = -k^2 & \implies f(x) = \beta \cos(kx + \varphi) \end{cases} \quad (3.2)$$

On obtient donc l'ensemble des solutions en onde stationnaire

$$\boxed{y(x, t) = y_0 \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \phi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.} \quad (3.3)$$

On vérifie bien que les variables x et t sont séparées ! De plus, les points vérifiant $y(x, t) = 0 \forall t$ sont appelés *nœuds de vibration* et les points x d'amplitude maximale sont appelés *ventres de vibration*.

Lien entre ondes progressives et ondes stationnaires On utilise la formule de trigonométrie

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos a - b + \cos a + b], \quad (3.4)$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$y(x, t) = \frac{y_0}{2} [\cos(kx + \omega t + \varphi + \phi) + \cos(kx - \omega t + \varphi - \phi)] \quad (3.5)$$

Ainsi une onde stationnaire peut toujours s'écrire comme la somme de deux ondes progressives harmoniques de même amplitude, de même pulsation mais de sens opposés. Par un raisonnement analogue dont la réalisation est laissée au soin du lecteur, toute onde progressive harmonique peut s'écrire comme la somme de deux ondes stationnaires.

À la vue de l'équivalence entre les deux descriptions, il est donc naturel de se demander quel type de description choisir. Pour cela on se base sur les conditions aux limites. Si elles imposent un nœud de vibration quelque part, on choisira la description en ondes stationnaires dont la forme en produit facilite la prise en compte du nœud de vibration.

3.2 Modes propres

Considérons les solutions trouvées précédemment. La résolution avec les conditions aux limites $y(0, t) = y(L, t) = 0 \forall t$, donne avec L la longueur de la corde

$$\varphi = 0, k_n = \frac{n\pi}{L}, \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, n \in \mathbb{N}^* \quad (3.6)$$

On a ici une structure en *modes* indicés par n . Cette quantification provient des conditions aux limites. Avec la définition de $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ on obtient une condition de quantification sur la longueur de la corde :

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2}{n} L.} \quad (3.7)$$

Un mode de vibration n'est alors possible que si la longueur d'onde associée est un sous-multiple de la longueur de la corde. Il est important de noter que l'origine de cette structure en modes provient directement des conditions aux limites, ces mêmes conditions qui ont nécessité l'utilisation des ondes stationnaires. On peut généraliser ce résultat : toute onde stationnaire solution de l'équation de d'Alembert possède une structure en modes.

On obtient alors l'ensemble de tous les modes propres de la corde :

$$y_n(x, t) = y_{0,n} \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, f_n = n \frac{c}{2L} \quad (3.8)$$

On fait des jolis schémas pour représenter les différents modes, on explique le lien entre n et le nombre de nœuds.

Melde

Sans exciter sinusoidalement la corde en une extrémité, on peut l'attacher des deux côtés et constater que si on pince la corde en $L/2$ et qu'on excite la corde le mode 2 reste même après avoir relâché entièrement la corde.

3.3 Énergie d'un mode

Par analogie directe avec le câble coaxial, on peut donner l'expression de l'énergie linéique $e(x, t)$:

$$e(x, t) = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (3.9)$$

Pour un mode n avec $y_n(x, t) = y_{0,n} \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$ on a :

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \omega_n^2 y_{0,n}^2 \sin^2(k_n x) \sin^2(\omega_n t + \phi_n) \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = k_n^2 y_{0,n}^2 \cos^2(k_n x) \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \quad (3.11)$$

L'énergie linéique de la corde vaut donc :

$$e(x, t) = \frac{\mu}{2} \omega_n^2 y_{0,n}^2 \sin^2(k_n x) \sin^2(\omega_n t + \phi_n) + \frac{T_0}{2} k_n^2 y_{0,n}^2 \cos^2(k_n x) \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \quad (3.12)$$

On intègre ensuite cette expression sur toute la longueur de la corde pour avoir l'énergie totale d'une mode, E_n . Pour cela on utilise les formules d'intégration $\int_0^L \sin^2(k_n x) dx = \int_0^L \cos^2(k_n x) dx = \frac{L}{2}$. On arrive alors à l'expression :

$$E_n = \frac{T_0}{4L} (n\pi)^2 y_{0,n}^2 = \text{cste}(n) \quad (3.13)$$

L'énergie d'un mode propre est donc une constante dépendant juste de l'ordre du mode mais pas du temps. Sans apport d'énergie ni dissipation (cas de l'équation de d'Alembert) l'énergie d'un mode ne varie ni dans le temps ni dans l'espace.

On se rappelle qu'une onde stationnaire peut être vue comme la somme de deux ondes progressives se propageant dans des sens opposés. On a vu en [section 2](#) qu'une onde progressive propageait de l'énergie dans son sens de propagation. En faisant le bilan pour une onde stationnaire on arrive à une énergie totale nulle : *une onde stationnaire ne propage pas d'énergie.*

3.4 Régime forcé

On se place maintenant en régime forcé, la corde est excitée sinusoidalement à une de ses extrémités. Par exemple, l'extrémité $x = 0$ reste fixée grâce à un système masse-poulie. En supposant la poulie parfaite (pas de dissipation d'énergie) et la masse m immobile cette masse impose à la corde une tension $T_0 = mg$. En $x = L$ la corde est reliée à un pot vibrant imposant à cette extrémité un mouvement :

$$y(x = L, t) = A_0 \cos \omega t \quad (3.14)$$

La solution générale à ce problème est $y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \phi)$ et la prise en compte des CL permet d'écrire :

$$y(x, t) = y_0 \frac{\cos \omega t}{\sin kL} \sin kx \quad (3.15)$$

On remarque que pour $kL = n\pi \iff \omega = n \frac{\pi c}{L}$ on a $y(x, t) \rightarrow \infty$

Il y a apparition du phénomène de *résonance* lorsque la pulsation d'excitation correspond à une pulsation propre du système.

Évidemment en pratique l'amplitude de l'onde ne diverge pas : la corde n'est pas infiniment extensible, il existe des pertes d'énergie par frottement, l'hypothèse des petits angles n'est plus valable etc.

En réalité la résonance est caractérisée par un *transfert d'énergie maximal* au système.

Conclusion

Dans cette leçon on a introduit l'équation de d'Alembert à travers deux exemples. On a vu deux classes de solutions à cette équation, les ondes propagatives et les ondes stationnaires. Ces solutions sont équivalentes mais elles chacune s'applique plus facilement dans certains cas.

On verra dans un prochain cours la relation de dispersion de l'équation de d'Alembert et en quoi elle la caractérise. Enfin on verra également des équation d'ondes plus complexes faisant intervenir de l'atténuation ou de la dispersion.

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

-

4.2 Commentaires

-