

LP 26 – Propagation avec dispersion

11 juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau :

Bibliographie



Prérequis

Expériences

- Équation de d'Alembert
- vitesse de phase
- Analyse de Fourier
- Câble coaxial sans pertes
- Plasma
- milieu diélectrique et électron élastiquement lié



Table des matières

1 Propagation dans un câble coaxial	2
1.1 Observations	2
1.2 Modèle du câble coaxial réel	2
2 Étude du phénomène de dispersion	3
2.1 Notion de paquet d'onde	3
2.2 Vitesses de groupe et de phase	4
2.3 Étalement	5
3 Exemples de dispersion	5
3.1 Milieu diélectrique	6
3.2 Plasma	7
3.3 Ondes gravito capillaires	7
4 Questions et commentaires	8
4.1 Questions	8
4.2 Commentaires	8

Introduction

👤 Dispersion de la lumière par un prisme

L'objectif est de commencer la leçon par une mise en évidence expérimentale du phénomène étudié dans la leçon : la dispersion. On regarde la séparation des longueurs d'ondes par le prisme.

1 Propagation dans un câble coaxial

1.1 Observations

👤 Dispersion dans un coax

On envoie un pulse rectangulaire dans un coax de 100 m et on observe que le signal en sortie n'a plus la même forme. Développons un modèle permettant de rendre compte de ce phénomène.

1.2 Modèle du câble coaxial réel

Pourquoi le câble *réel*? Parce que par rapport au modèle (idéal) on rajoute des termes de perte : la résistance linéique traduit des pertes dans le conducteur et une conductance linéique traduit le caractère imparfait de l'isolant. Le schéma du tronçon infinitésimal correspondant est représenté [Figure 1](#).

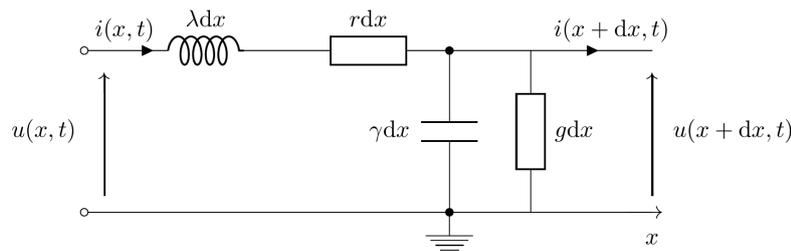


Fig. 1 : Modèle du câble coaxial réel (attention c'est marqué γ au lieu de Γ .)

On utilise la même méthode ainsi on applique la loi des mailles et la loi des noeuds à un tronçon infinitésimal du câble :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -gu - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ri - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.2)$$

que l'on combine pour retrouver l'équation de propagation sur u , celle de i est identique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (g\Lambda + r\Gamma)u \quad (1.3)$$

On cherche une solution harmonique $u(x, t) = u_0 \cos(\omega t - \underline{k}x)$. En injectant cette solution dans l'équation obtenue on trouve :

$$-\underline{k}^2 + \Gamma \Lambda \omega^2 = rg + j\omega(r\Gamma + g\Lambda) \quad (1.4)$$

qui peut se réécrire en utilisant $c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma \Lambda}}$:

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - rg + j(\Lambda \omega g + r\omega \Gamma) \quad (1.5)$$

On vient de trouver la relation de dispersion, qui est plus complexe que dans le cas de l'équation de d'Alembert. On peut en tirer une conclusion importante : $\underline{k} \in \mathbb{C}$ d'où la notation. On note $\underline{k} = k_1 - jk_2$ (le $-$ est une convention). Ainsi l'onde obtenue n'est pas une OPPM car \underline{k} est complexe. On peut exprimer u en fonction de k_1 et k_2 :

$$u(x, t) = u_0 \exp(-k_2 x) \cos(\omega t - k_1 x) \quad (1.6)$$

On voit notamment que k_2 est responsable de l'atténuation de l'onde. On voit également avec notre écriture de \underline{k} qu'il faut modifier notre définition de la vitesse de phase. En effet on ne peut dériver un nombre complexe pour trouver une vitesse. On voit que c'est la partie réelle de \underline{k} , k_1 qui est responsable de la propagation de l'onde. On re-définit alors la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{\omega}{\Re(\underline{k})} \quad (1.7)$$

Or dans le cas général k_1 n'est pas proportionnel à ω . En effet ici on trouve :

$$k_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(\frac{\omega^2}{c^2} - rg)^2 + (\Lambda\omega g + r\omega\Gamma)^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - rg}{2}} \quad (1.8)$$

La relation de dispersion et l'expression de k_1 que l'on a obtenue est complexe (lol c'est la partie réelle) et on se doute bien que la vitesse de phase dépend de la pulsation. *C'est ce qu'on appelle la dispersion.* Chaque mode se déplace à une vitesse de phase différente.

Cela explique l'observation expérimentale initiale : le pulse rectangulaire est composé de plusieurs fréquences qui ne se propagent pas à la même vitesse et sa forme est donc modifiée.

Condition de Heaviside :

L'objectif du câble coaxial est de transmettre des signaux le plus fidèlement possible. On peut se demander si il existe une condition particulière pour limiter la dispersion. Pour cela on cherche une solution de la forme $u(x, t) = f(t - \frac{x}{c}) \exp(-x/\delta)$ qui est une solution prenant en compte l'atténuation de l'onde mais pas sa dispersion. En injectant cette condition :

$$g\Lambda = r\Gamma \quad (1.9)$$

Cette condition est nommée *condition de Heaviside* et les constructeurs essayent de la respecter le plus fidèlement possible.

2 Étude du phénomène de dispersion

2.1 Notion de paquet d'onde

On vient de mener l'étude pour une onde monochromatique et on a montré que de manière générale on pouvait écrire une relation de dispersion $\omega = \omega(\underline{k})$ qui conduisait à une décomposition de \underline{k} en partie réelle et imaginaire.

- La partie réelle est responsable de la propagation puisqu'on retrouve une fonction propagative dépendant de $\omega t - k_1 x$.
- La partie imaginaire de \underline{k} est responsable de l'atténuation.

Mais une onde réelle n'est pas monochromatique, ne serait-ce que parce qu'elle a une durée de vie finie. Il faut donc considérer des ondes réelles non pas comme monochromatiques mais plutôt comme somme d'ondes monochromatiques. On appelle cela un *paquet d'onde*.

Forme complexe d'un paquet d'onde vu comme la somme d'onde monochromatiques :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega)x)) d\omega \quad (2.1)$$

Remarque :

On intègre aussi sur les pulsations négatives parce qu'on est en complexe.

Ainsi dans ce paquet chaque fréquence va suivre sa propre évolution indépendamment des autres.

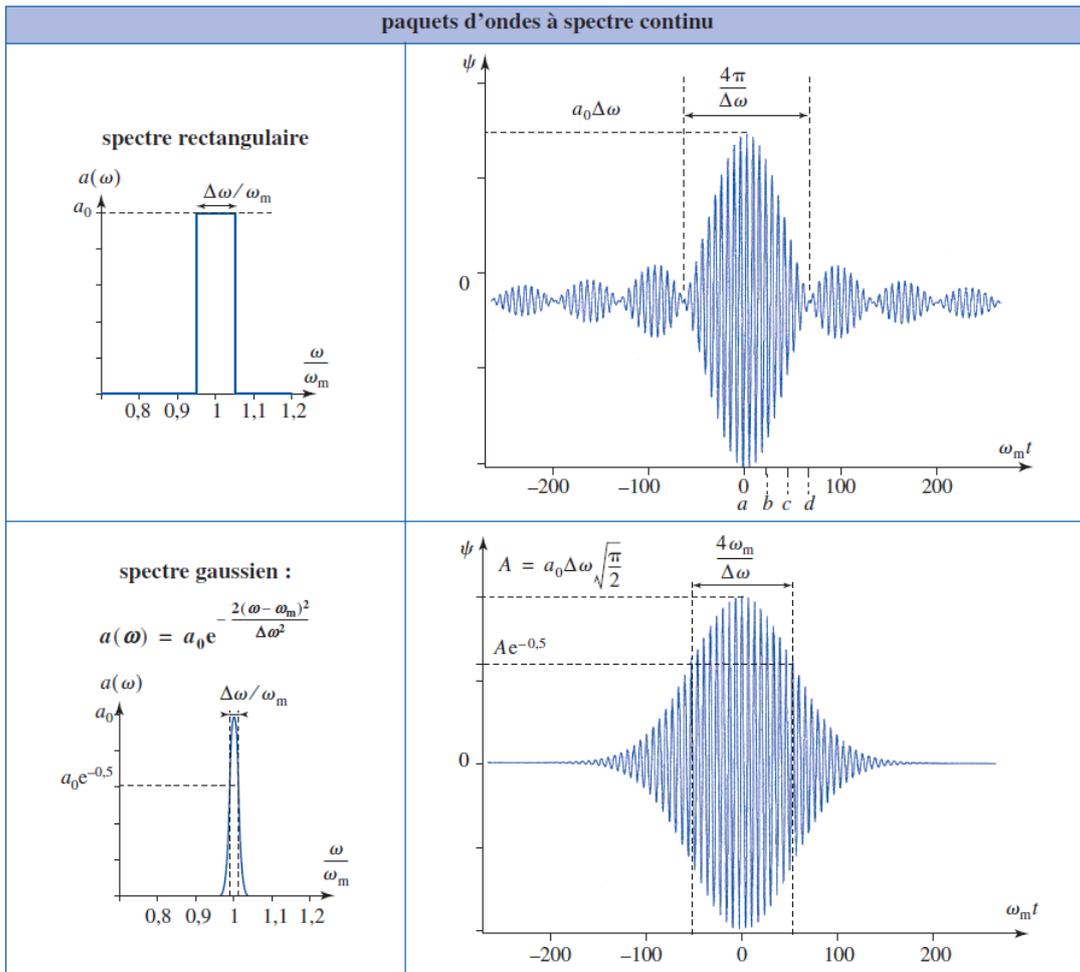


Fig. 2 : Deux exemples de paquet d'onde. Le spectre représente l'amplitude de chaque pulsation.

2.2 Vitesses de groupe et de phase

Ainsi l'évolution d'un tel paquet est bien plus complexe à décrire que pour une seule fréquence. Pour comprendre ce qui se passe on va se rapprocher du cas monochromatique en supposant que le spectre est très piqué autour de ω_0 . Notons $\Delta\omega$ l'extension spatiale de ce paquet :

$$u(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} u_0(\omega) \exp(j(\omega t - k(\omega)x)) d\omega \quad (2.2)$$

Alors autour de ω_0 on peut écrire puisque $\Delta\omega \ll \omega_0$:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{dk}{d\omega}_{\omega_0} \quad (2.3)$$

On remarque que $\frac{dk}{d\omega}_{\omega_0}$ est homogène à l'inverse d'une vitesse on note donc :

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega}_{\omega_0} \quad k_0 = k(\omega_0) \quad (2.4)$$

De sorte que :

$$\exp(j(\omega t - kx)) = \exp\left(j(\omega - \omega_0)\left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right) \exp(j(\omega_0 t - k_0 x)) \quad (2.5)$$

On peut donc sortir un terme de l'intégrale et obtenir :

$$u(x, t) = \exp(j(\omega_0 t - k_0 x)) \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} u_0(\omega) \exp\left(j(\omega - \omega_0)\left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right) d\omega \quad (2.6)$$

L'amplitude complexe se met donc sous la forme :

$$u(x, t) = \underbrace{A_e \left(t - \frac{x}{v_g} \right)}_{\text{enveloppe}} \underbrace{\exp \left(j\omega_0 \left(t - \frac{x}{v_\varphi} \right) \right)}_{\text{phase}} \quad (2.7)$$

On trouve un terme d'enveloppe et un terme de phase. L'enveloppe se déplace à la vitesse v_g c'est pourquoi on l'appelle *vitesse de groupe* :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.8)$$

La phase se déplace à une vitesse que l'on appelle donc *vitesse de phase* :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad (2.9)$$

Lien avec les interférences

cf leçon des éléments

C'est le moment des **simulations!** On commence par l'animation GeoGebra qui ne prends pas en compte l'étalement et qui colle donc plus à ce que l'on veut dire.

Important :

C'est bien la vitesse de groupe qui porte l'information ! On voit sur les simulations que même si la vitesse de phase est plus grande elle "s'éteint" à l'avant de l'enveloppe. Il n'y a donc pas de problème si la vitesse de phase dépasse c tant que v_g reste en dessous !

Définition : Dispersion normale et anormale On parle de *dispersion normale* si $v_\varphi > v_g$ et de *dispersion anormale* sinon.

Illustrer avec le lien GeoGebra.

2.3 Étalement

Cette partie doit être d'après les Cléments traité brièvement car elle est hors-programme.

Ce qu'on a dit précédemment prédit qu'on a juste une phase qui glisse dans l'enveloppe qui se translate. Or on observe que l'enveloppe change de forme. On retrouve ce résultat en poussant le développement limité à l'ordre 2.

$$k = k_0 + (\omega - \omega_0) \frac{1}{v_g} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \alpha \quad (2.10)$$

Dans l'intégrale on aura alors un terme en :

$$\exp \left(j(\omega - \omega_0) \left(t - \frac{x}{v_g} \right) \right) - \frac{i}{2} (\omega - \omega_0)^2 \alpha x \quad (2.11)$$

Et par transformée de Fourier inverse une gaussienne donne une gaussienne en temps, et en définissant $P = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ l'écart type est en \sqrt{Px} ne pas trop détailler ce genre de baïls. Si il y a des questions, on peut décrire l'évolution de l'enveloppe A_e (avec ce terme de second ordre) comme :

$$i \frac{\partial A_e}{\partial t} + P \frac{\partial^2 A_e}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \xi = x - v_g t \quad (2.12)$$

En fait cette équation reste valable même si on considère des ordres supérieurs. La forme fait penser à Schrödinger.

Mais dès lors on comprends que la vitesse de groupe ne décrit bien la propagation que pour de *faibles dispersions*.

3 Exemples de dispersion

Dans cette partie, on présente différentes relations de dispersion. Il ne s'agit pas de les établir (il y a déjà des calculs en première partie), mais bien de les discuter.

1. On donne la relation de dispersion.

2. On calcule v_ϕ et v_g
3. On distingue si c'est de la dispersion normale ou anormale.
4. On précise si les petites longueurs d'onde vont plus lentement ou moins lentement
5. On utilise une simulation.

3.1 Milieu diélectrique

Rappel Un matériau diélectrique est un matériau qui possède un moment dipolaire permanent ou susceptible d'en acquérir un lorsqu'on lui applique un champ électrique.

Rappelons les équations de Maxwell dans un Diélectrique Linéaire Homogène Isotrope sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{0}} + \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \\ \vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{\mathbf{E}} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

En utilisant la transformation $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2$ on obtient l'équation d'onde

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} + \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \vec{\mathbf{0}} \quad (3.2)$$

Cela correspond à une relation de dispersion

$$k^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2, \quad (3.3)$$

avec $n = \sqrt{\epsilon_r}$. L'expression de n^2 est donc nécessaire à l'étude de la dispersion et est donnée par le modèle de l'électron élastiquement lié dont on rappelle les résultats à travers les expressions de $\epsilon_r \in \mathbb{C}$ et $n = n' + jn''$ tel que $n^2 = \epsilon_r$.

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{1}{\tau}\omega} \quad (3.4)$$

$$n' = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad (3.5)$$

On remarque $n = n'(\omega) + jn''(\omega)$ avec n' l'indice optique qui apparaît dans $k_1 = n' \frac{2\pi}{\lambda}$. Ainsi, k_1 a la même dépendance en ω que n' et c'est peu linéaire. Il y a donc dispersion. Cette dispersion peut se voir d'une nouvelle façon par rapport aux discussions précédentes sur les vitesses, il s'agit de la détermination de la loi de Cauchy :

Si on se place en dehors du domaine d'absorption, loin de ω_0 on a $n'' = 0$ et $n' = n$, tout se passe comme si n , χ_E et ϵ_r étaient réels. On retrouve la notion de l'indice optique.

On a alors

$$n'^2 - 1 = \chi'_E = \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \quad (3.6)$$

On effectue un développement limité en $\frac{\omega}{\omega_0}$ donc

$$n' \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right) = A + \frac{B}{\lambda^2}. \quad (3.7)$$

On retrouve la loi de Cauchy ! Dans le visible ça donne $n(\lambda) = 1 + 1,36 \times 10^{-4} + \frac{1,06 \times 10^{-18}}{\lambda^2}$. Le λ_0 trouvé est de 88 nm, donc loin du visible.

Cette dépendance de l'indice optique avec la longueur d'onde explique les observations expérimentales avec le réseau et les arcs-en-ciel au passage.

3.2 Plasma

On a déjà établi la relation de dispersion pour un plasma :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}. \quad (3.8)$$

On a déjà parlé des ondes évanescentes, rentrons dans le détail de la dispersion :

$$\frac{1}{v_\phi} = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \quad (3.9)$$

En différenciant la relation de Klein-Gordon on obtient

$$2k dk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \implies v_\phi v_g = c^2. \quad (3.10)$$

Finalement

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} \quad (3.11)$$

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \quad (3.12)$$

C'est de la dispersion normale et v_g croît avec k donc les petites longueurs d'onde avancent plus vite que les grandes. On peut l'illustrer avec un code.

3.3 Ondes gravito capillaires

La relation de dispersion des ondes gravito-capillaires est

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}\right) \tanh kh = gk \left(1 + (l_c k)^2\right) \tanh kh. \quad (3.13)$$

Donc

$$v_\phi = \frac{g}{k} \left(1 + (l_c k)^2\right) \tanh kh. \quad (3.14)$$

La longueur $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ est la longueur capillaire, longueur à partir de laquelle la tension de surface se fait sentir. On peut se restreindre aux ondes de gravités

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (3.15)$$

En eau peu profonde on retrouve une relation non dispersive !

$$\tanh kh \simeq kh \implies \omega = \sqrt{gh}k \implies v_\phi = v_g = \sqrt{gh}. \quad (3.16)$$

En haut profonde on a $\tanh kh \simeq 1$:

$$v_\phi \sqrt{\frac{g}{k}} = 2v_g. \quad (3.17)$$

Il s'agit d'une dispersion normale. La vitesse de groupe décroît quand k augmente donc les grandes longueurs d'ondes vont plus vite que les petites contrairement à Klein-Gordon. On montre cette [vidéo](#)

Conclusion

On a étudié dans cette leçon la dispersion propre à un milieu et vu ses conséquences notamment sur un paquet d'onde. Elle peut être utile comme dans le cas d'un prisme ou néfaste.

Il existe aussi de la dispersion dite inter-modale.

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

-

4.2 Commentaires

-