

# LP 29 – Ondes électromagnétiques dans les conducteurs

11 juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

## Niveau : L2

## Bibliographie

 ,

→

## Prérequis

- Équation de Maxwell
- Équation de la chaleur

## Expériences



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Cadre de la conduction</b>	<b>2</b>
1.1	Modèle de Drüde et loi d'Ohm locale . . . . .	2
1.2	Électroneutralité . . . . .	3
1.3	ARQS . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Limite basse fréquence : les métaux</b>	<b>4</b>
2.1	Mise en équation . . . . .	4
2.2	Résolution . . . . .	4
2.3	Applications . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Limite haute fréquence : les plasmas</b>	<b>5</b>
3.1	Mise en équation . . . . .	5
3.2	Relation de Klein-Gordon . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Questions et commentaires</b>	<b>7</b>
4.1	Questions . . . . .	7
4.2	Commentaires . . . . .	7

## Introduction

L'étude des ondes électromagnétiques dans le vide a permis, en utilisant les équations de Maxwell, de regarder la propagation des ondes qui obéissent à une équation de D'Alembert. Pour de nombreuses applications comme la conduction électrique, il faut regarder la propagation des ondes dans les milieux conducteurs.

Un milieu est dit conducteur quand les électrons peuvent s'y déplacer librement, par opposition aux isolants dans lesquels ils sont liés aux noyaux.

## 1 Cadre de la conduction

### 1.1 Modèle de Drüde et loi d'Ohm locale

On cherche à relier la densité volumique de courant  $\vec{j}$  au champ imposé  $\vec{E}$  à travers la conductivité  $\sigma$  et la *loi d'Ohm locale* :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1.1)$$

Pour cela on va développer le modèle de Drüde. **Hypothèses :**

- Les électrons sont les seuls responsables de la conductivité, ainsi si leur densité est  $n$  et leur vitesse moyenne  $\vec{v}$  alors :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} \quad (1.2)$$

(hypothèse justifiée par le fait que  $m_e \ll m_{\text{ions}}$ )

- Pas d'interaction entre les électrons.
- On modélise l'interaction avec le solide par des chocs et on note  $\tau$  le libre temps de vol ( $\tau \sim 1 \times 10^{-14}$  s). On peut modéliser cela par un terme de frottement en  $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$
- Les électrons sont soumis au champ électrique  $\vec{E}$
- Électrons non relativistes, pas d'effet quantique

En toute généralité, le PFD appliqué à un électron dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen conduit à :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau}\vec{v} - e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.3)$$

Faisons le rapport en ordre de grandeur de la force magnétique sur la force électrique. D'après la relation de structure  $B \sim \frac{kE}{\omega} \sim \frac{E}{c}$

$$\frac{|\vec{v} \times \vec{B}|}{|\vec{E}|} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v}{c} \ll 1 \quad (1.4)$$

car les électrons sont non relativistes. On néglige donc la force magnétique.

On a donc :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v} - e\vec{E} \quad (1.5)$$

On se place en régime forcé avec un champ électrique à la pulsation  $\omega$  on passe donc en grandeurs complexes ce qui nous donne :

$$m_e i\omega \vec{v} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v} - e\vec{E} \quad (1.6)$$

Ainsi on a :

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m_e(i\omega\tau + 1)}\vec{E} \quad (1.7)$$

D'où :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \quad \text{et} \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m_e} \quad (1.8)$$

On vient de trouver une conductivité complexe qui dépend de la pulsation. Chacun de ces aspects aura son importance. La suite de la leçon consistera à notamment dégager les limites de faibles et grandes pulsations.

## 1.2 Électroneutralité

Bien qu'un courant circule dans un métal, il reste neutre. Pour étudier cela mathématiquement on va se servir de l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \tag{1.9}$$

On se place en régime forcé et on utilise la loi d'Ohm locale :

$$i\omega\rho + \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{1.10}$$

Et en utilisant l'équation de Maxwell Gauss on arrive à :

$$\left(-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0\tau}\right)\rho = 0 \tag{1.11}$$

On retrouve la forme complexe d'une équation différentielle du second degré où  $\tau$  apparaît comme un temps de relaxation c'est à dire le temps pendant lequel l'excès de charge se neutralise. Pendant ce temps la charge subit des oscillations, de moins en moins intense ( $Q \sim 100$ ) ce qu'on peut visualiser [Figure 1](#).

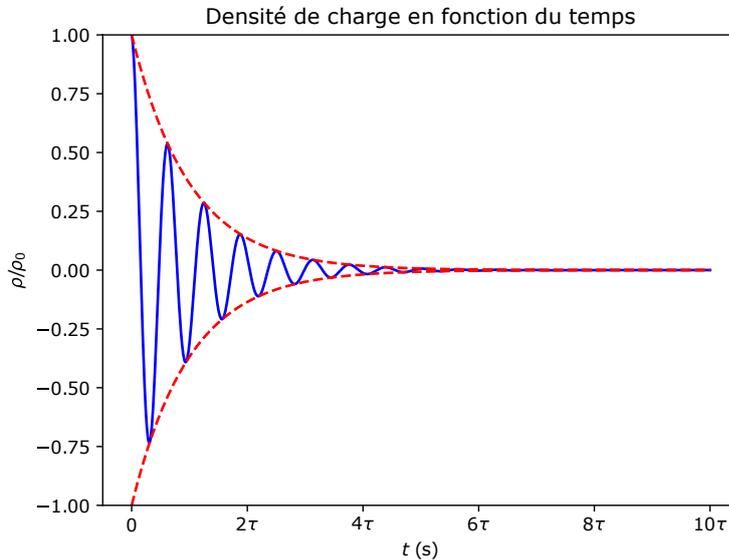


Fig. 1 :

Pour faire l'hypothèse d'électroneutralité il faut donc se placer à  $\omega \ll \frac{1}{\tau}$  ce qui numériquement revient à  $\omega \ll 1 \times 10^{14}$  rad/s.

## 1.3 ARQS

Une autre hypothèse qui peut nous être utile est celle de l'ARQS, ce qui revient à négliger le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell Ampère. Examinons cela en ordre de grandeur :

$$\xi = \frac{|\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}|}{|\mu_0 \vec{j}|} \sim \frac{\epsilon_0\omega}{|\sigma|} \tag{1.12}$$

On voit que pour négliger le courant de déplacement  $\xi \ll 1$  il faut une pulsation assez faible. Plaçons nous dans le cas le plus défavorable pour nous c'est à dire  $\omega\tau \gg 1$ . On a alors :

$$\xi = \frac{\epsilon_0\omega 2\tau}{\sigma_0} = \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e\epsilon_0}} \tag{1.13}$$

On a fait intervenir la pulsation caractéristique  $\omega_p$  dite *pulsation plasma*. L'ARQS n'est vérifié que pour  $\omega \ll \omega_p$ .

**OdG :**

Dans le cas d'un métal on a  $n \sim 1 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$  et ainsi  $\omega_p \sim 1 \times 10^{16} \text{ rad/s}$ . L'hypothèse d'électroneutralité est alors perdue avant l'ARQS, c'est l'électroneutralité la condition la plus restrictive cf Figure 2

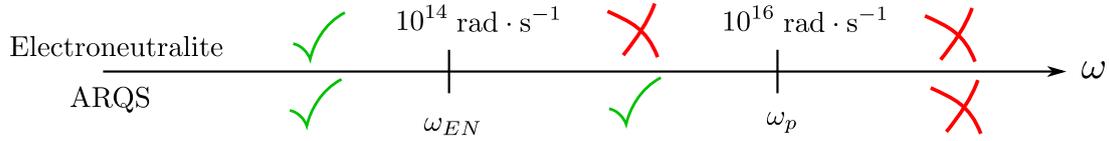


Fig. 2 : Pulsations caractéristiques du système

## 2 Limite basse fréquence : les métaux

### 2.1 Mise en équation

Selon la forme trouvée pour la conductivité  $\underline{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau}$ . Donc dans la limite des basses fréquences,  $\omega\tau \ll 1$  avec  $\tau \simeq 10^{-14} \text{ s}$  cela correspond à  $\omega \ll 10^{14} \text{ rad s}^{-1}$ . C'est une condition facilement vérifiée. L'étude que nous allons faire n'est donc pas uniquement théorique. On retrouve aussi la condition d'électroneutralité et de l'ARQS.

Tout d'abord  $\underline{\sigma}(\omega) = \sigma_0$  Il n'y a plus de dépendance en  $\omega$ . La loi d'Ohm locale peut s'écrire directement dans l'espace temporel  $\vec{\mathbf{j}} = \sigma_0 \vec{\mathbf{E}}$ . Les équations de Maxwell s'écrivent donc, dans le cadre des basses fréquences

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{électroneutralité} \qquad \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} = \mu_0 \sigma_0 \vec{\mathbf{E}} \quad \text{ARQS} \qquad (2.2)$$

En invoquant le  $\nabla \times \nabla \times$  tout puissant on obtient l'équation qui régit  $\vec{\mathbf{E}}$ .

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \qquad (2.3)$$

Ce n'est plus une équation de d'Alembert, mais une équation de diffusion !

↓ *Tachons de résoudre cette équation de diffusion pour voir ce qu'elle a à nous dire*

### 2.2 Résolution

On se place dans le cadre d'une OPPM transverse qui se propage selon l'axe  $z$  et qui rencontre l'interface air/métal en  $z = 0$ . En notation complexe,

$$\vec{\mathbf{E}}(z, t) = \underline{E}(z) \exp\{i\omega t\} \mathbf{x}. \qquad (2.4)$$

On injecte cette expression de  $\vec{\mathbf{E}}$  dans l'équation de diffusion et on obtient l'équation suivante sur  $\underline{E}(z)$ .

$$\frac{d\underline{E}}{dz} = i\omega\mu_0\sigma_0 \underline{E}(z). \qquad (2.5)$$

Donc

$$\underline{E}(z) = A \exp\left\{(1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}} z\right\} + B \exp\left\{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}} z\right\}. \qquad (2.6)$$

Il faut maintenant interroger les conditions aux limites qui interdisent la divergence en  $z \rightarrow +\infty$  et impliquent  $\vec{\mathbf{E}} = E_0 \exp\{i\omega t\} \mathbf{x}$  en  $x = 0$ . Donc  $A = 0$  et  $B = E_0$ . On a alors l'expression finale du champ électrique, en notation réelle :

$$\vec{\mathbf{E}} = E_0 \exp\left\{-\frac{x}{\delta}\right\} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \mathbf{x}. \qquad (2.7)$$

On a noté  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_0}}$  l'épaisseur de peau. Il s'agit de la longueur caractéristique de pénétration de l'onde dans le métal, on considère qu'à partir de  $z \simeq 5\delta$ , l'onde est nulle. On a donc une onde progressive qui est atténuée lors de sa propagation. L'onde n'est pas évanescence.

Le modèle du métal parfait (conductivité électrique infinie, neutre et champ électrique nul à l'intérieur) correspond donc à la limite  $\delta \rightarrow 0$  du métal réel. Mathématiquement on voit bien l'équivalence entre  $\sigma_0 \rightarrow \infty$  et  $\delta \rightarrow 0$ . Physiquement, comme  $\delta$  représente la longueur de pénétration de l'onde dans le métal, alors  $\delta \rightarrow 0$  correspond à une situation où le champ électrique ne pénètre jamais dans le métal, d'où un métal parfait.

## 2.3 Applications

On considère le courant dans un fil de cuivre,  $\sigma_0 \simeq 10^7 \text{ S m}^{-1}$ , de diamètre  $a = 0,5 \text{ mm}$ . Le courant électrique ne circule que dans la partie du câble où le champ électrique est non-nul, ce qui correspond à l'épaisseur de peau.

- $f = 50 \text{ kHz} \implies \delta = 9,8 \text{ mm} \gg a$ , l'atténuation avec l'effet de peau n'est pas visible.
- $f = 100 \text{ kHz} \implies \delta = 0,2 \text{ mm}$  on est à la limite d'uniformité
- $f = 100 \text{ MHz} \implies \delta = 6,6 \mu\text{m}$ , le courant circule sur une épaisseur très faible du câble

Dans ce dernier cas, comme la section effectivement traversée par le courant change  $S = \pi a^2 \rightarrow S' = 2\pi a\delta \ll S$  alors la résistance du câble change aussi  $R' = \frac{L}{\sigma_0 S'} \gg R$ . L'effet de peau augmente la résistance d'un fil à haute fréquence, ce accentue l'effet Joule notamment. La résistance est proportionnelle à  $\frac{1}{\delta}$ , elle est donc proportionnelle à  $\sqrt{\omega}$

On considère un micro-ondes. Les ondes utilisées ont une fréquence de 2,45 GHz, d'où  $\delta \simeq 3 \mu\text{m}$ . En pratique, les parois métalliques du micro-onde sont donc largement assez épaisse pour isoler l'extérieur de l'appareil. Seul problème, la paroi vitrée qui n'est pas métallique et pour laquelle l'effet de peau n'existe pas. L'isolation de cette paroi est réalisée avec un grillage métallique aux mailles suffisamment fines pour stopper les ondes EM.

## 3 Limite haute fréquence : les plasmas

### 3.1 Mise en équation

On considère des ondes planes progressives

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 \exp\{i(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\}. \quad (3.1)$$

Ça permet de passer des équations en  $t$  aux équations en  $\omega$  sans scrupule.

Selon la forme trouvée pour la conductivité, lorsqu'on se place à haute fréquence,  $\omega\tau \gg 1$  on remarque

$$\sigma = \frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1 + i\omega\tau} = -\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}. \quad (3.2)$$

On retrouve la *pulsation plasma* définie comme

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}. \quad (3.3)$$

On observe que tout se passe comme si on avait oublié le terme de frottement dans le modèle de Drude. En effet, avec une pulsation très grande, le régime stationnaire n'a pas le temps de se mettre en place, le terme inertiel est donc dominant.

Puisque l'on compare  $\omega$  à  $1/\tau$  qui peut être vu comme le temps typique de relaxation pour l'électronneutralité, cette hypothèse est mise à défaut.

On écrit alors

$$0 = i\omega\rho + \nabla \cdot \vec{\mathbf{j}} \quad (3.4)$$

$$= i\omega\rho - i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} \quad (3.5)$$

$$= (\omega^2 - \omega_p^2)\rho \quad (3.6)$$

Donc pour  $\omega \neq \omega_p$ ,  $\rho = 0$ .

La relation d'Ohm devient alors

$$\vec{\mathbf{j}} = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{\mathbf{E}} \implies \frac{\partial \vec{\mathbf{j}}}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega_p^2 \vec{\mathbf{E}}. \quad (3.7)$$

Les équations sont alors

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad (3.9)$$

On peut s'intéresser à la puissance volumique dissipée dans le milieu :

$$P = -\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}}. \quad (3.10)$$

Comme  $\vec{\mathbf{j}}$  et  $\vec{\mathbf{E}}$  sont en quadrature de phase ( $\sigma$  imaginaire pur) alors en moyenne, il n'y a pas de puissance échangée

$$\langle P \rangle = 0. \quad (3.11)$$

## 3.2 Relation de Klein-Gordon

On utilise le saint  $\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbf{E}}$  et on trouve l'équation de propagation

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{\mathbf{E}} = 0. \quad (3.12)$$

On obtient la relation de dispersion

$$\vec{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2). \quad (3.13)$$

On distingue alors deux cas :

- $\omega > \omega_p$  Dans ce cas,  $\vec{\mathbf{k}}$  est réel et il y a propagation dispersive avec

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + (ck)^2}. \quad (3.14)$$

Il y a dispersion car la vitesse de phase n'est pas égale à la vitesse de groupe. On remarque que pour  $\omega$  vraiment grande, la relation revient vers quelque chose de non dispersif. On peut lancer le programme `dispersion.py`.

- $\omega < \omega_p$  Ceci implique  $\vec{\mathbf{k}}$  est imaginaire pur, donc il n'y a plus de propagation mais seulement de l'atténuation. On parle d'onde évanescence. L'énergie ne se propage plus, il y a réflexion totale.

En radio on communique parfois en grandes ondes, donc à basses fréquences (200 kHz pour RTL). Ces fréquences se réfléchissent sur l'ionosphère, assimilable à un plasma de coupure 10 MHz. Par contre la modulation de fréquence se fait à des fréquences plus grandes qui peuvent s'échapper à travers l'ionosphère.

À l'inverse le système GPS doit envoyer un signal qui peut traverser l'ionosphère, le système GPS utilise des signaux dont la porteuse est de l'ordre du GHz. Cette fréquence est bien supérieure à la fréquence plasma et donc le signal GPS peut parcourir l'ionosphère.

De plus la variation de vitesse de groupe qu'introduit l'ionosphère par rapport au vide induit une correction à apporter pour estimer la distance d'un satellite à la cible à positionner de l'ordre de la dizaine de mètres. C'est donc une variation à prendre en compte.

Si on note  $h$  la hauteur de l'ionosphère et  $f$  la fréquence de travail alors,

$$\delta x \sim \frac{hf_p^2}{2f^2}. \quad (3.15)$$

Application numérique : en considérant  $h \sim 700$  km on trouve  $\delta x \sim 15$  m. Ainsi c'est une erreur à prendre en compte, ce qui est évidemment fait.

## Conclusion

On a vu que l'étude des milieux conducteurs a fait apparaître une conductivité complexe dépendant de la pulsation. On a dégagé deux limites correspondant au métal et au plasma. Dans le premier cas on est arrivé à une équation de diffusion faisant donc apparaître une longueur caractéristique que l'on a appelé épaisseur de peau. Dans le second cas on a abouti à une relation de dispersion mettant en lumière un comportement dispersif et un comportement de réflexion totale. On a notamment vu l'importance de ce genre d'étude pour les radiocommunications et les GPS.

## 4 Questions et commentaires

### 4.1 Questions

- 

### 4.2 Commentaires

-