

LC30 – RAYONNEMENT DIPOLAIRE ÉLECTRIQUE

20 Novembre 2020

Valentin Dorel & Antoine Chauchat

Niveau : L2

Commentaires

Bibliographie

- ✦ *Cap Prépa Physique PC-PC**, **Renvoizé** →
- ✦ *Électromagnétisme*, **Pérez** →
- ✦ Cours de Jérémy Ferrand *Électromagnétisme* →
2020

Prérequis

- Électromagnétisme dans le vide
- Définitions des Potentiel scalaire et potentiel vecteur
- Notion d'ARQS

Expériences

- ✦ Diffusion de Rayleigh dans une cuve d'eau avec du lait ou du thiosulfate

Table des matières

1	Le Dipôle Oscillant	2
1.1	Hypothèses et cadre	2
1.2	Calcul du potentiel vecteur	2
1.3	Expression du champ électromagnétique	3
1.4	Comportement énergétique	4
2	Application : la diffusion de Rayleigh	5
2.1	Modèle simple d'interaction avec un nuage électronique	5
2.2	Le ciel est bleu	6
3	Questions et commentaires	7

Introduction

Nous avons vu dans les cours précédents la propagation d'ondes électromagnétiques dans différents milieux. Néanmoins, on ne s'est pas intéressé à la source de ces ondes.

Pour comprendre la création de ces ondes il va falloir s'intéresser à ce qu'on appelle un dipôle oscillant. Ceci nous permettra de comprendre également un autre phénomène : l'interaction entre une onde électromagnétique (la lumière) et de la matière neutre (le ciel), interaction qui rend le ciel bleu la journée et rouge lors du coucher du soleil.

1 Le Dipôle Oscillant

1.1 Hypothèses et cadre

On se place tout d'abord dans un cas très général : On considère un domaine \mathcal{D} de l'espace contenant des charges et des courants variables. On va essayer de trouver les champs électromagnétiques émis par ce domaine.

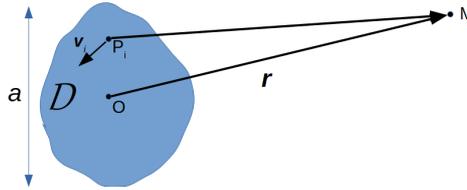


FIGURE 1 – Schéma du domaine \mathcal{D} étudié. La charge q_i au point P_i à une vitesse \mathbf{v}_i .

Tout d'abord on va noter les charges q_i et leur vitesse \mathbf{v}_i . On introduit les potentiels vecteurs \mathbf{A} et V et on utilise la jauge de Lorentz $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$. On connaît alors \mathbf{A} selon la formule des potentiels retardés

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \in \mathcal{D}} \frac{q_i \mathbf{v}_i \left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{P}_i \mathbf{M}\|}{c} \right)}{\|\mathbf{P}_i \mathbf{M}\|}$$

Pour pouvoir résoudre ce problème on va devoir formuler trois hypothèses :

- **Charges non relativistes** : On considère que $\|\mathbf{v}_i\| \ll c$. Si on considère un mouvement périodique de pulsation ω alors comme $v_i \sim r_i \omega$, on note a la taille typique de la distribution, la vitesse est majorée par $a\omega$. Donc la condition de mouvement non relativiste s'écrit $\omega a \ll c$. On pose $\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega}$, la condition non-relativiste se réécrit $\lambda \gg a$.
- **Hypothèse dipolaire** : Soit a la taille typique du domaine \mathcal{D} et O le barycentre des charges, on se place alors à une distance $r = \|\mathbf{O} \mathbf{M}\| \gg a$. On va pouvoir faire un développement multipolaire.
- **ARQS des sources** : On suppose que le retard du signal reçu des différents points de la source sont égaux. Par exemple soient P_1 et P_2 deux points de \mathcal{D} distants de a . Le déphasage temporel entre les deux signaux est alors typiquement a/c . Si on note τ le temps typique de variation des charges et courants, on suppose alors que :

$$\frac{a}{c} \ll \tau \iff a \ll c\tau \iff a \ll \lambda$$

C'est la condition de mouvement non-relativiste.

1.2 Calcul du potentiel vecteur

Grâce à nos trois hypothèses on va pouvoir trouver une expression de \mathbf{A} . En effet l'hypothèse dipolaire nous permet de dire que $\frac{1}{\|\mathbf{P} \mathbf{M}\|} \simeq \frac{1}{\|\mathbf{O} \mathbf{M}\|}$ et l'ARQS des sources nous permet de remplacer $\|\mathbf{P} \mathbf{M}\|$ par $\|\mathbf{O} \mathbf{M}\|$ dans la dépendance temporelle de \mathbf{j} et \mathbf{v}_i . Ainsi :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \in \mathcal{D}} \frac{q_i \mathbf{v}_i \left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{O} \mathbf{M}\|}{c} \right)}{\|\mathbf{O} \mathbf{M}\|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{O} \mathbf{M}\|} \sum_{i \in \mathcal{D}} q_i \mathbf{v}_i \left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{O} \mathbf{M}\|}{c} \right)$$

Avec $t' = t - \frac{\|\mathbf{O} \mathbf{M}\|}{c}$ on peut écrire :

$$\mathbf{v}_i \left(t - \frac{\|\mathbf{O} \mathbf{M}\|}{c} \right) = \frac{d}{dt'} [\mathbf{r}_i \left(t - \frac{\|\mathbf{O} \mathbf{M}\|}{c} \right)]$$

D'où :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{OM}\|} \frac{d}{dt'} \left[\sum_{i \in \mathcal{D}} q_i \mathbf{r}_i \left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c} \right) \right]$$

Or le moment dipolaire de la distribution est défini par :

$$\mathbf{P}(t') = \sum_i q_i \mathbf{r}_i(t')$$

Ainsi on trouve l'expression suivante de \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{P}}(t')}{\|\mathbf{OM}\|}$$

1.3 Expression du champ électromagnétique

On se place dans le cadres des hypothèses précédentes : ainsi on connaît \mathbf{A} et on peut calculer le champ magnétique car $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$. Pour trouver \mathbf{E} on intégrera l'équation de Maxwell-Ampère. Pour le calcul, on va fixer le moment dipolaire selon l'axe z , ainsi $\mathbf{P}(t') = P(t')\mathbf{e}_z$. Par linéarité des équation de Maxwell cela n'est pas une perte de généralité. Ainsi on a :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{P}(t')}{\|\mathbf{OM}\|} \mathbf{e}_z$$

On va se placer en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et on notera θ l'angle que fait le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ avec l'axe z .

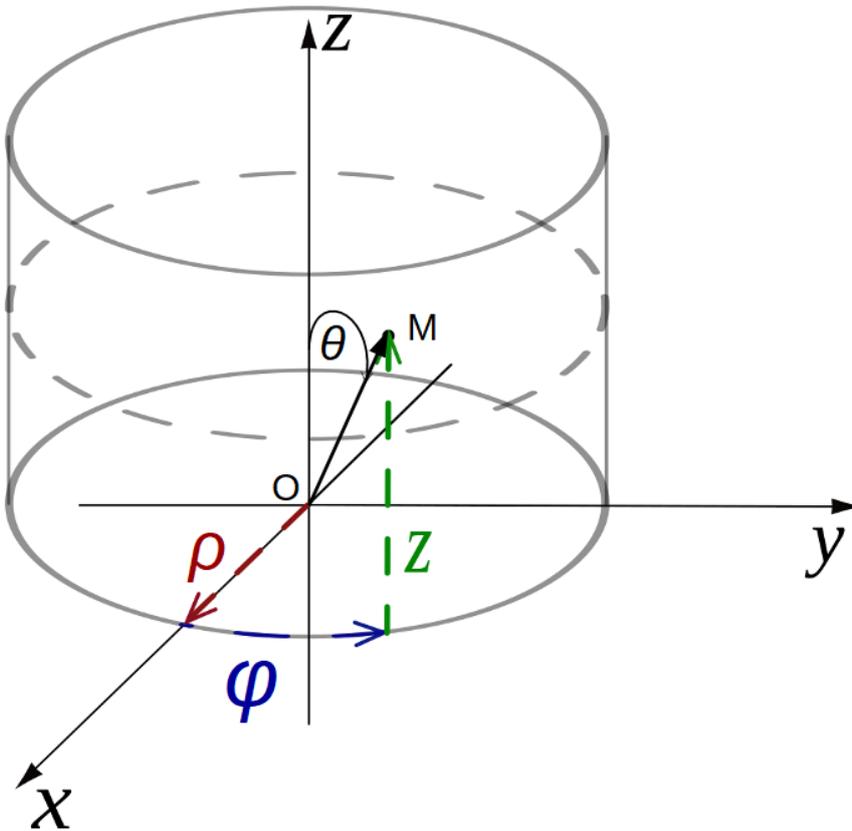


FIGURE 2 – Système de coordonnées utilisées.

On a :

$$\mathbf{B}(M, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(M, t) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\phi$$

Or $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$, $t' = t - r/c$, $\sin \theta = \rho/r$ d'où :

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \sin \theta \Rightarrow \frac{\partial \dot{p}}{\partial \rho} = -\frac{\ddot{p} \sin \theta}{c}$$

On trouve ainsi :

$$\mathbf{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\ddot{\mathbf{p}}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{p}}}{r^2} \right) \wedge \mathbf{e}_r$$

On voit que à grande distance le champ est principalement dû à l'accélération des charges.

Dans la zone où on calcule les champs, on est hors de \mathcal{D} et ainsi les courants sont nuls, donc l'intégration de l'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\mathbf{E}(M, t) = \mathbf{E}(M, 0) + c^2 \int_0^t dt'' \nabla \wedge \mathbf{B}(M, t'')$$

Le calcul (très long, cf Pérez) donne :

$$\mathbf{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[2 \cos \theta \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} \right) + \frac{Q_{\text{tot}}}{r^2} \right] \mathbf{e}_r + \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right] \mathbf{e}_\theta$$

Ici Q_{tot} est la charge totale contenue dans la distribution et est ainsi constante.

D'après nos hypothèses on a $a \ll c\tau$ et $a \ll r$. On va donc maintenant faire une hypothèse comparant $c\tau$ et r . On va se placer dans la **zone de rayonnement** : on suppose $a \ll c\tau \ll r$ ce qui veut dire qu'on se place à très grande distance d'observation. On a alors :

$$\mathbf{B}(M, t) \simeq \frac{\ddot{p}(t') \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \mathbf{e}_\varphi \qquad \mathbf{E}(M, t) \simeq \frac{\ddot{p}(t') \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_\theta$$

Ces champs ont plusieurs caractéristiques importantes à retenir :

- Décroissance lente en $1/r$
- Anisotropes et nuls sur l'axe du moment dipolaire
- Dépendance temporelle en t' , le champ se propage à grande distance selon \mathbf{e}_r à une vitesse c
- Champs localement orthogonaux avec une structure d'onde plane
- Ce champ à grande distance est généré par les dérivées secondes de p , ainsi il n'existe que si les charges sont accélérées.

1.4 Comportement énergétique

On va maintenant chercher à calculer le vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi}$ dans la zone de rayonnement. Comme $\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}$, dans notre cas on trouve :

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{p}^2(t') \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \mathbf{e}_r$$

La puissance rayonnée est bien anisotrope, la dépendance en $1/r^2$ nous assure la conservation de l'énergie.

Pour mesurer cette anisotropie on trace ce qu'on appelle un **diagramme de rayonnement**, ce qui consiste dans le tracé de la fonction :

$$F(\theta, \varphi) = \frac{\|\mathbf{\Pi}(r, \theta, \varphi, t')\|}{\|\mathbf{\Pi}_{\text{max}}(r, \theta_{\text{max}}, \varphi_{\text{max}}, t')\|}$$

Dans notre cas :

$$F(\theta, \varphi) = \sin^2(\theta)$$

On a ici deux lobes symétriques. On peut maintenant s'intéresser à la puissance rayonnée à travers une sphère de centre O :

$$\mathcal{P}(t) = \iint_{\text{sphère}} \mathbf{\Pi}(r', t) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta \frac{\ddot{p}^2(t') \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} = \frac{\ddot{p}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^3} \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \sin^3 \theta$$

l'intégrale valant $4/3$, on obtient :

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\ddot{p}^2(t')}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

On a vu que une distribution de charges accélérées est une source d'ondes électromagnétiques localement planes. Maintenant nous allons nous intéresser à un modèle concret de charges oscillantes : c'est le cas de la **diffusion de Rayleigh**.

2 Application : la diffusion de Rayleigh

2.1 Modèle simple d'interaction avec un nuage électronique

On considère un atome soumis à un champ électrique \mathbf{E}_{ext} . On va raisonner classiquement. La masse du noyau est très supérieure à celle des électrons, on ne considère que le mouvement des électrons. On suppose les électrons répartis de façon sphérique (en volume dans une boule de rayon a) autour du noyau pour simplifier les calculs. On note $\mathbf{r} = \mathbf{PN}$ la différence de position entre le barycentre des charges positives et négatives. On applique la relation fondamentale de la dynamique à la sphère électronique.

$$Zm_e\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{P/N} + (-Ze)\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{\text{mag}} + \mathbf{F}_{\text{dissip}} \quad (1)$$

Si $\lambda \gg a$, a la taille du nuage électronique on peut écrire $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\text{ext}}(t)$.

On néglige le terme magnétique si la vitesse des particules est très petite devant la vitesse de phase de l'onde.

On prend une dissipation linéaire $\mathbf{F}_{\text{dissip}} = \frac{-m_e}{\tau}\mathbf{v}$.

Calculons l'interaction entre noyau et nuage électronique $\mathbf{F}_{P/N} = -\mathbf{F}_{N/P}$. Or

$$\mathbf{F}_{N/P} = +Ze\mathbf{E}_{\text{boule}}(P) \quad (2)$$

Par le théorème de Gauss on trouve que

$$\mathbf{E}_{\text{boule}} = -\frac{Ze}{4\pi a^3 \epsilon_0} \mathbf{NP} \quad (3)$$

$$\text{donc } \mathbf{F}_{P/N} = \frac{-(Ze)^2}{4\pi a^3 \epsilon_0} \mathbf{PN} \quad (4)$$

Le PFD s'écrit alors

$$Zm_e\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Z^2 e^2}{4\pi a^3 \epsilon_0} \mathbf{r} - Ze\mathbf{E}_{\text{ext}} - \frac{Zm_e}{\tau} \dot{\mathbf{r}} \quad (5)$$

On introduit le moment dipolaire $\mathbf{P} = -Ze\mathbf{NP} = -Ze\mathbf{r}$ et on pose

$$\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m_e} \quad (6)$$

Application numérique $\omega_0 \sim 10^{16}$

$$\ddot{\mathbf{P}} + \frac{1}{\tau}\dot{\mathbf{P}} + \omega_0^2\mathbf{P} = \frac{Ze^2}{m_e}\mathbf{E}_{\text{ext}} \quad (7)$$

Considérer les électrons une boule uniformément chargée revient à faire un modèle d'électrons élastiquement liés. On passe en fréquentiel on trouve

$$\mathbf{P}_\omega = \frac{Ze^2/m_e}{\underbrace{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}}_{\alpha(\omega)}} \mathbf{E}_\omega \quad (8)$$

On peut distinguer alors trois régimes différents, de Rayleigh, de résonance et de Thomson. La puissance totale rayonnée par un dipôle est alors

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4 |E_\omega|^2 |\alpha(\omega)|^2 \quad (9)$$

2.2 Le ciel est bleu

Dans le domaine visible les pulsations sont inférieures à $5 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$. Comme le facteur de qualité est grand (par exemple 10^8 pour le Césium) et que $\omega_0 \sim 10^{16}$, on est dans le régime de Rayleigh. la puissance rayonnée est alors

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{\alpha_0^2}{12\pi c^3 \epsilon_0} |E_\omega|^2 \omega^4 \quad (10)$$

La puissance rayonnée est proportionnelle à ω^4 donc 4 fois plus importante pour le bleu que pour le rouge. Les dipôles absorbent une partie du rayonnement et le réémettent sous forme de rayonnement dipolaire.

Quand on observe directement le soleil on observe le rayonnement qu'il reste après interaction avec les dipôles, il est privé en hautes pulsations, il est donc rouge. Plus l'épaisseur de l'atmosphère traversée est grande plus il est appauvri et plus il apparaît rouge. C'est le coucher du soleil. Quand on observe le ciel on observe donc ce rayonnement dipolaire, il est apparaît donc bleu. Remarquons que la lumière du ciel est polarisée alors que la lumière du soleil est non polarisée. En effet si le soleil on regarde au zénith comme en [Figure 3](#) et que le soleil est rasant alors on observe une lumière polarisée suivant \mathbf{u}_x .

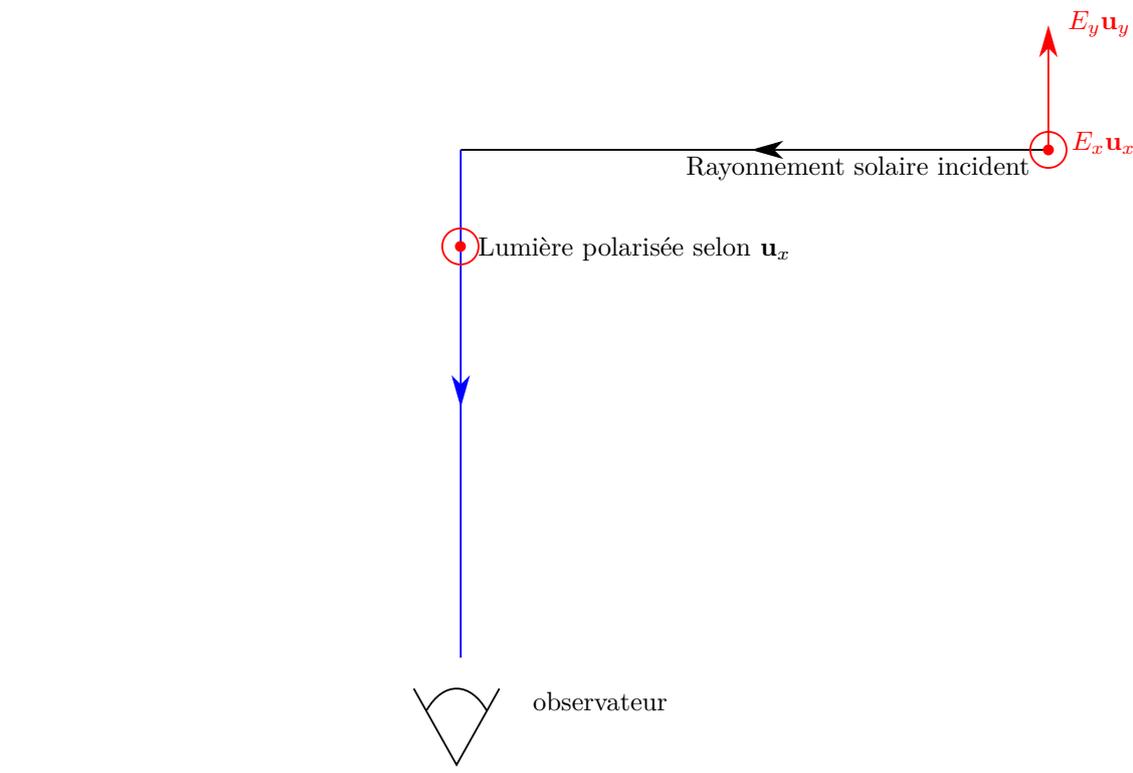


FIGURE 3 – Illustration de la polarisation de la lumière du ciel



Diffusion de Rayleigh dans une cuve contenant du lait ou du thiosulfate de sodium

🔗 voir hyperlien

⌚ 5 minutes

[Thiosulfate coucher de soleil](#)



Conclusion

Les charges *accélérées* rayonnent de l'énergie, c'est due à la vitesse finie de la lumière.

- Décroissance lente en $1/r$, conservation de la puissance
- Anisotropes et nuls sur l'axe du moment dipolaire
- Dépendance temporelle en t' , le champ se propage à grande distance selon \mathbf{e}_r à une vitesse c
- Champs localement orthogonaux avec une structure d'onde plane
- Ce champ à grande distance est généré par les dérivées secondes de p , ainsi il n'existe que si les charges sont accélérées.

Ouverture : Le rayonnement dipolaire est très utile en télécommunication. Il permet la réalisation simple d'antennes émettrices et réceptrices

3 Questions et commentaires

Questions

- Tu peux réexpliquer la réaction qu'il se passe dans ton bécher ?
- C'est quoi l'ordre de grandeur de a dans le cas de l'atmosphère ?
- Tes approximations du coup elles sont vérifiées ?
- Tu connais la fréquence typique du WiFi ou du GPS ? C'est quoi l'avantage de travailler à ces fréquences ?
- Tu connais la notion de résistance de rayonnement ?
- Tu dirais quoi à des personnes qui ont peur de la 5G ?
- C'est quoi l'ordre de grandeur des fréquences utilisées en général avec les antennes ?
- Dans le spectre en longueur d'onde elles se placent où ces fréquences ?
- Si tu utilises une voiture téléguidée il faut placer l'antenne comment ?
- C'est quoi la structure de l'onde émise par une antenne ?
- Dans ton schéma de G en fonction de $\log(\omega)$ c'est quoi les ordres de grandeurs des pulsations de séparation ?
- Tu peux réexpliquer pourquoi le ciel est bleu ?
- Tu peux tracer le spectre du soleil ?

Commentaires

- Le plan est bien
- Il faut être plus rigoureux sur les notations notamment les flèches sur les vecteurs
- Efface le tableau plus lentement
- Lorsque que tu simplifie les différents termes de l'expression du champ électrique passe plus de temps à l'expliquer. C'est plus important d'expliquer les simplifications que les calculs qui permettent d'arriver aux expressions des champs.
- Dans ton modèle d'interaction précise bien que c'est les charges qui se déplacent.
- Explique mieux le schéma pour la polarisation de la lumière du ciel
- ça manque d'ordre de grandeurs
- La résistance de rayonnement dans le cas des antennes c'est proportionnel à al/λ^2 avec l la taille de l'antenne, ça permet des explications à la main.
- ça a duré 38 minutes donc tu peux prendre ton temps
- Il faut savoir mieux motiver ses choix.

Agrégation de physique : fiche de correction de leçon 2020

Nom : **Antoine CHAUCHAT**

Correcteur.trice.s : **Lauren ROSE**

Anne-Emmanuelle BADER

Note : **12,5**

Numéro et titre de la leçon (écrire LPxx, ou Dxx si docteur) :

LP30 Rayonnement dipolaire électrique .

Structure de la leçon (juge la forme)				
Gestion du temps (durée visée 40 min)	X			
Qualité de l'introduction ? (Est-elle présente, est-elle de qualité)		X		
Le plan de la leçon apparaît-il clairement ? (la structure de la leçon apparaît-elle lors de la présentation)	X			
Qualité de la conclusion ? (Est-elle présente, est-elle de qualité)	X			
Gestion du tableau (écriture, orthographe, axes sur les graphiques, ...)			X	
Diversité des supports de communication	X			
Attitude (communication verbale, dynamisme, interaction avec les correcteur.trice.s ...)		X		

Cohérence de la leçon (juge le fond)				
Est-elle dans le sujet ?	X			
Son contenu est-il suffisant ?	X			
Son articulation est-elle bonne ?		X		
Est-elle contextualisée ?			X	
Pertinence des choix didactiques ? (choix des exemples, des calculs à faire ou non, ...)			X	
Illustration expérimentale (présence et pertinence)	X			
Illustration informatique (présence et pertinence)				

Approche expérimentale (si format docteur)				
Choix de l'expérience				
Durée de l'approche expérimentale				
Réalisation de la mesure en direct				
Analyse et traitement des résultats				
Discussion des sources d'erreur et des incertitudes				

Réponse aux questions				
Sur les choix relatifs à la leçon	X			
Sur la culture connexe à la présentation		X		
Sur la partie expérimentale (LP docteur)				

Commentaires éventuels au dos : **Il serait nécessaire que le jury adhère plus à la démarche proposée. Utiliser les ordres de grandeur pour contextualiser - Il faut plus faire ressortir ce qui est important.**