

LP 31 – Présentation de l'optique géométrique par le principe de Fermat

11 juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L3

Bibliographie

✍ *LP 31 2021*, **Lucas Gey et Sylvio Rossetti** → Merci les zigotos

Prérequis

- Mécanique lagrangienne
- Optique géométrique
- Acoustique
- Vecteur de Poynting

Expériences



Table des matières

1	Principe de Fermat	2
1.1	Approximation du rayon lumineux	2
1.2	Chemin optique et différentielle	2
1.3	Énoncé du principe de Fermat	3
2	Lois de l'optique géométrique	4
2.1	Milieu homogène isotrope	4
2.2	Principe de retour inverse de la lumière	4
2.3	Lois de Snell-Descartes	5
2.3.1	Réflexion :	5
2.3.2	Réfraction	5
2.4	Stigmatisme	6
3	Milieux non homogènes	7
3.1	Équation des rayons lumineux	7
3.2	Mirages	8
3.3	Fibre Optique	9
4	Questions et commentaires	11
4.1	Questions	11
4.2	Commentaires	11

Introduction

☛ Déviation d'un laser dans une cuve stratifiée

Il paraît très intuitif qu'un « rayon lumineux » se propage en ligne droite comme le Laser par exemple. C'est pour ça qu'en optique géométrique on trace des droites pour étudier les systèmes optiques. Qu'est-ce qui est à l'origine de ces comportements ? Mais si je fait passer le laser dans une cuve stratifiée, les rayons sont courbes. Alors pourquoi on a toujours fait des rayons rectiligne jusqu'à présent ?

On va montrer qu'on a besoin d'un seul principe, le principe de Fermat.
Introduisons donc ce principe :

1 Principe de Fermat

Pour commencer on va revenir sur la notion de rayon lumineux qui nous semble intuitive mais qui correspond à une approximation qu'il faut maîtriser.

1.1 Approximation du rayon lumineux

On sait que la lumière est une onde électromagnétique. Les récepteurs, tels que nos yeux sont sensibles à la valeur moyenne du vecteur de Poynting. C'est donc ce vecteur que nous allons utiliser pour décrire la lumière.

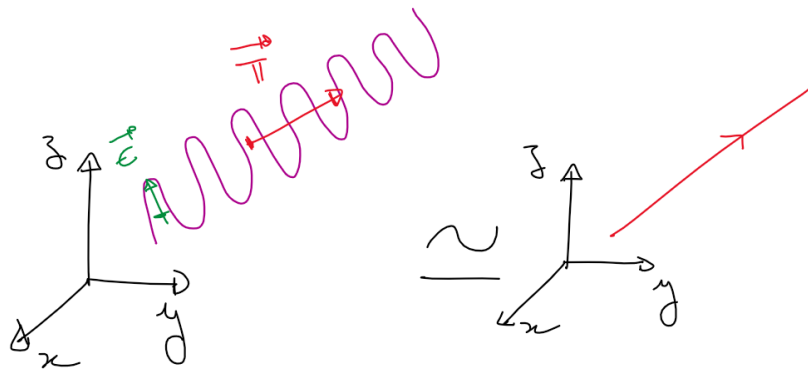


Fig. 1 : Modélisation d'un rayon lumineux.

Pour se faire l'idée de ce qu'est un rayon lumineux on peut utiliser un laser.

Lorsqu'il y a diffraction la notion de rayon lumineux n'a plus de sens et on n'utilise plus l'optique géométrique. Pour pouvoir négliger la diffraction on se place dans le cas où $\lambda \ll D$ où D est la distance caractéristique de notre système. Ainsi on peut résumer l'approximation d'un rayon lumineux dans l'optique géométrique par :

Rayon lumineux : ligne tangente à la direction de l'énergie (vecteur de Poynting) et tant que $\lambda \ll D$.

Remarque :

Il peut être intéressant de se demander comment appliquer le formalisme de l'optique géométrique à d'autres systèmes, par exemple l'acoustique. C'est possible, cependant il faudra faire attention à l'approximation des milieux continus qui doit rester tout le temps vraie, cela rajoute une contrainte à basse λ .

1.2 Chemin optique et différentielle

Fermat, après l'approche de l'optique géométrique par Descartes énonce le principe suivant : « La lumière choisit le trajet dont le temps est le plus court ». C'est un principe de minimisation et nous allons voir comment on peut l'exprimer plus formellement. On verra également qu'il est nécessaire de légèrement le reformuler.

Mais avant cela il faut comprendre sa signification. Une manière simple est l'analogie du maître nageur. Le sauveteur va sauver la personne le plus vite en choisissant bien son trajet. C'est exactement comme la lumière.

Commençons à faire un peu de formalisme. On va commencer par caractériser le « trajet ». Le temps de trajet entre un point A et un point B s'écrit :

$$\Delta t = \int_{t(A)}^{t(B)} dt \quad (1.1)$$

Or on sait que $v = c/n$ on peut donc opérer un changement de variable $c dt = ds$ avec s l'abscisse curviligne :

$$\Delta t = \frac{1}{c} \int_A^B n ds \quad (1.2)$$

Plutôt que de raisonner en temps ce qui est peu parlant géométriquement on va plutôt introduire une distance, le *chemin optique* qui correspond à la distance que parcourrait la lumière dans le vide pendant la même durée) :

$$(AB) = c \Delta t = \int_A^B n ds \quad (1.3)$$

On a donc une quantité qui caractérise le trajet d'un rayon : le chemin optique. Minimiser le temps de trajet revient donc à minimiser ce chemin. Pour pouvoir le faire mathématiquement on a donc besoin de pouvoir écrire sa différentielle.

Différentielle de chemin optique : On considère un rayon lumineux allant de A à B . On déplace B de dB jusqu'en $B' = B + dB$. On a un nouveau chemin et $d(AB) = (AB') - (AB)$. On considère le cas d'un milieu homogène

On a $d\vec{B} = \vec{AB}' - \vec{AB}$ or à l'ordre 1 $\vec{AB}' \cdot \vec{u}_{AB} \simeq AB' \cos \theta \simeq AB'$. Ainsi :

$$d(AB) \simeq (\vec{AB}' - \vec{AB}) \cdot \vec{u}_{AB} \quad (1.4)$$

D'où l'expression :

$$d(AB) \simeq d\vec{B} \cdot \vec{u}_{AB} \quad (1.5)$$

Avant de se lancer dans les calculs remarquons quelque chose **Figure 2**.

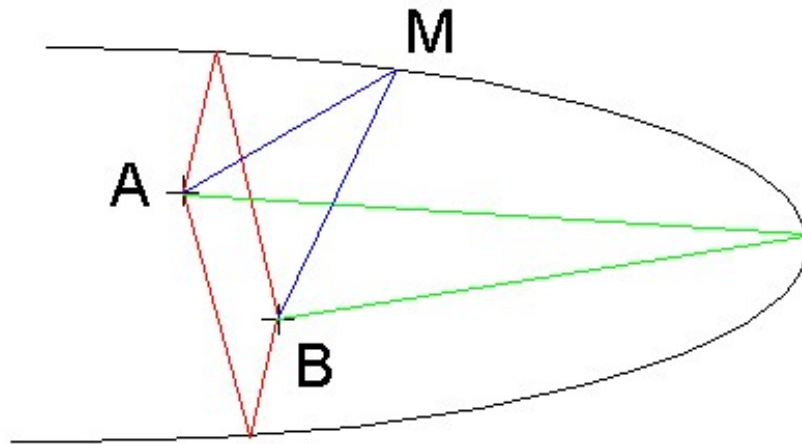


Fig. 2 : Miroir parabolique

On observe que le chemin rouge qui est de longueur maximal est l'un des chemins possibles pour un rayon lumineux allant de A à B en se réfléchissant sur le miroir. Ainsi « minimal » n'est peut être pas le bon terme.

1.3 Énoncé du principe de Fermat

Il nous faut donc changer l'énoncé du principe. On arrive à l'énoncé actuel du principe de Fermat :

Le chemin optique est stationnaire.

Essayons de voir ce que cela veut dire. Prenons un chemin C reliant deux points A et B et un chemin proche C' obtenu en modifiant légèrement C . Le chemin C est dit *stationnaire* ou *extrémal* si tout chemin C' considéré est plus court que C ou si tout chemin C' considéré est plus long que C .

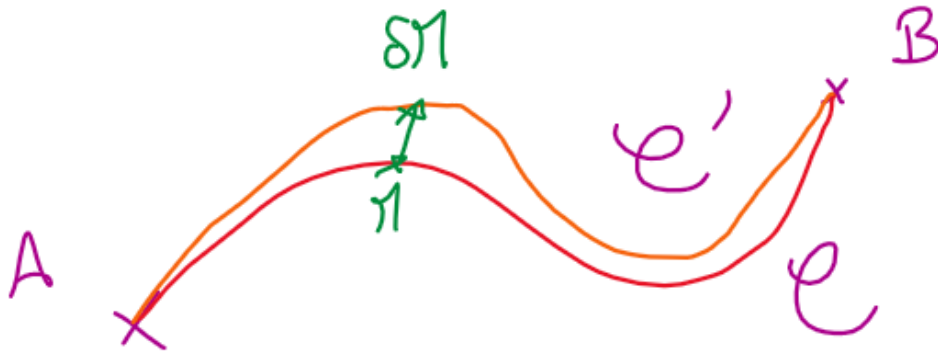


Fig. 3 : Stationnarité

On veut donc extrémaliser le chemin optique. Cela nous rappelle un autre domaine de la physique, les équation d'Euler Lagrange obtenues par extrémalisation de l'action :

L'extrémalisation de $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$ implique l'équation d'Euler Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.6)$$

On peut faire le tableau suivant en notant v la norme de $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

	Mécanique	Optique géométrique
Action	$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt$	$S = \int_A^B n ds = \int_{t_a}^{t_b} n(\vec{r}) v dt$
Lagrangien	$\mathcal{L} = T - U$	nv

Tab. 1 : Analogies

Ici, S est directement le chemin optique que l'on va donc rendre stationnaire.

2 Lois de l'optique géométrique

On va retrouver les lois de l'optique géométrique à l'aide de ce principe.

2.1 Milieu homogène isotrope

Dans un milieu homogène isotrope d'indice n le chemin optique entre deux points A et B s'écrit :

$$(AB) = n \int_A^B ds \quad (2.1)$$

Cette quantité est minimale pour une ligne droite, le chemin le plus court entre deux points est une droite.

2.2 Principe de retour inverse de la lumière

On va retrouver ce principe. Pour cela si on montre que pour n quelconque le chemin de A à B ou de B à A sont de même chemin optique alors ils seront tous deux extrémaux et vérifieront le principe de Fermat.

$$(AB) = \int_A^B n ds = - \int_B^A n ds \quad (2.2)$$

En posant $s' = -s$ ce qui correspond à faire le chemin en sens inverse :

$$(AB) = \int_B^A n ds' = (BA) \quad (2.3)$$

2.3 Lois de Snell-Descartes

2.3.1 Réflexion :

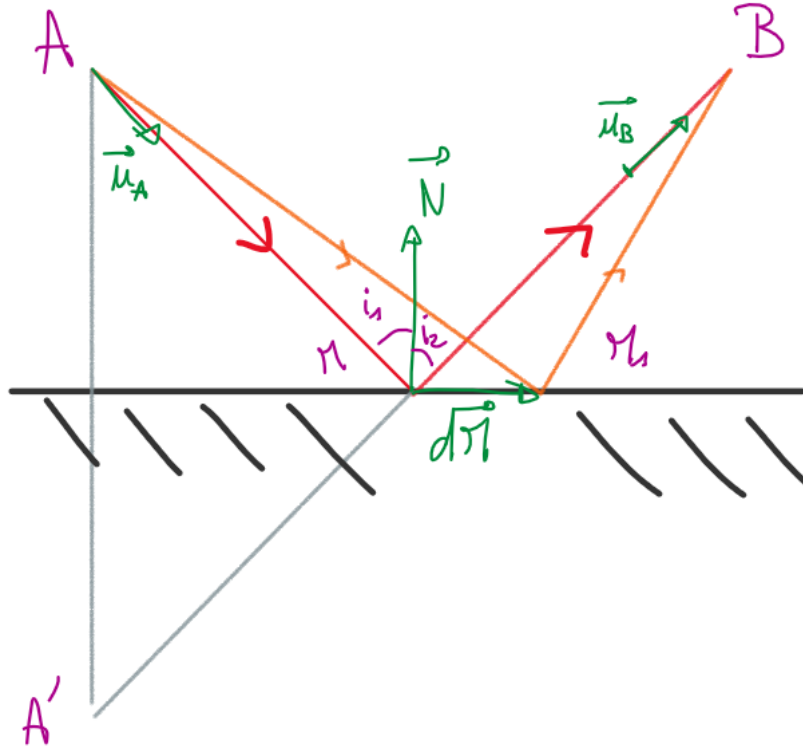


Fig. 4 : Réflexion

Pour déterminer le trajet prédit par le principe de Fermat on va déplacer le point M comme montré figure Figure 4. On a :

$$(AB) = n(AM + MB) \quad (2.4)$$

La stationnarité du chemin revient à :

$$d(AB) = 0 \iff dAM + dMB = 0 \quad (2.5)$$

En réutilisant l'expression trouvée pour la différentielle du chemin on arrive à :

$$d\vec{M} \cdot \mathbf{u}_A - d\vec{M} \cdot \mathbf{u}_B = 0 \implies d\vec{M} \cdot (\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B) = 0 \quad (2.6)$$

Ceci a deux conséquences :

- $d\vec{M}$ étant tangente à la surface on sait que $\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B$ est dirigé selon la normale à la surface. Donc en définissant le plan d'incidence par $(\mathbf{u}_A, \vec{N})$, le rayon sortant appartient à ce plan.
- En réécrivant l'équation avec les angles d'incidence et de réflexion on a :

$$\sin i_1 = \sin i_2 \implies i_1 = i_2 \quad (2.7)$$

2.3.2 Réfraction

La situation considérée est représentée Figure 5.

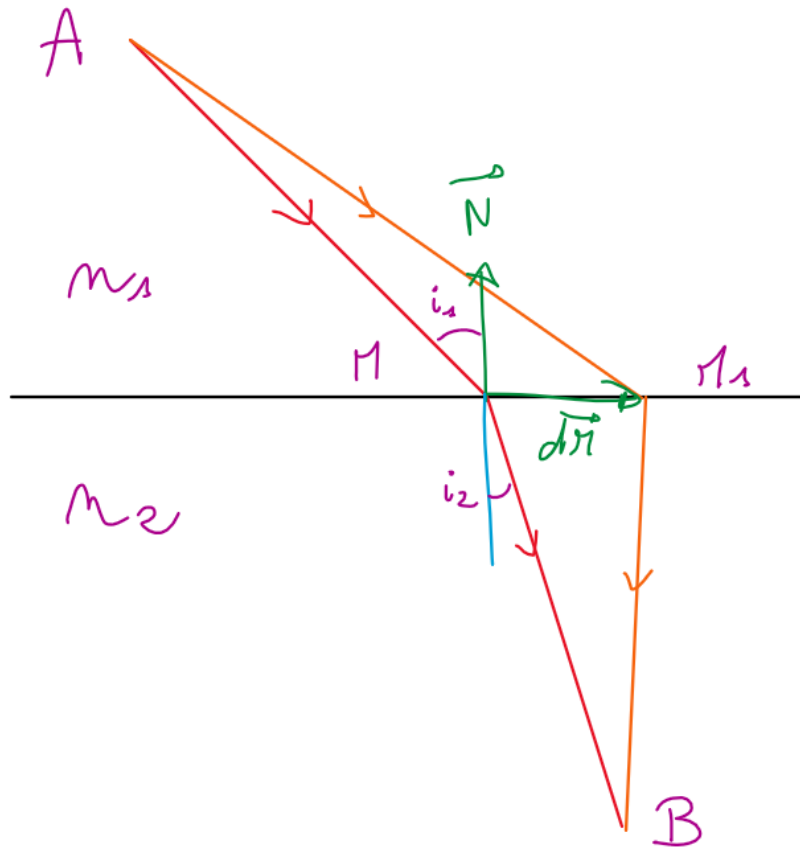


Fig. 5 : Réfraction

Avec le même raisonnement que précédemment on obtient :

$$(n_1 \mathbf{u}_A - n_2 \mathbf{u}_B) \cdot d\vec{M} = 0 \quad (2.8)$$

On retrouve que le rayon réfracté appartient au plan d'incidence, et on obtient de plus :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad (2.9)$$

2.4 Stigmatisme

Système stigmatique : un système est dit stigmatique si l'image d'un point A est un point A' . Autrement dit tous les rayons passant par A passent par A' . Le principe de Fermat nous indique donc que tous ces rayons ont le même chemin optique.

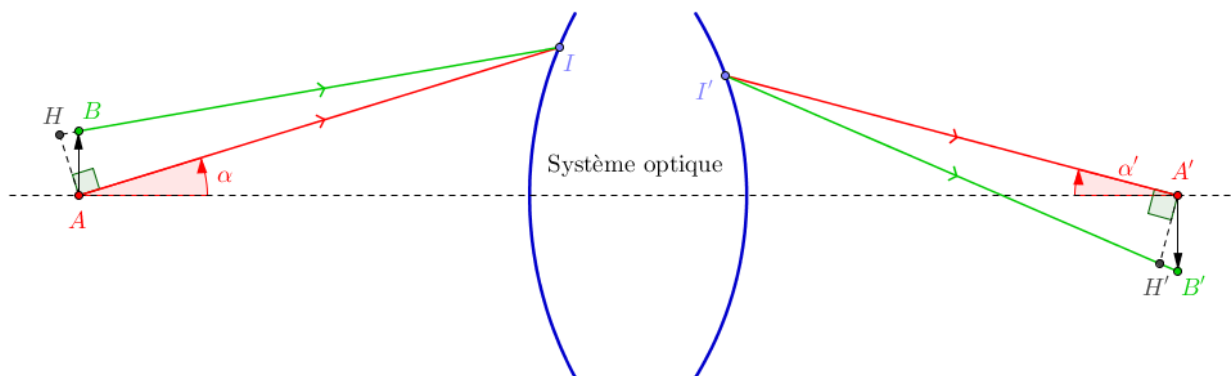


Fig. 6 : Schéma pour Abbe

Retrouvons la condition des sinus d'Abbe à partir de ce qu'on vient d'établir :

Le système est stigmatique donc, par le principe de Fermat, pour tous les rayons issus de A , le chemin optique pour arriver en A' ne dépend pas du rayon. C'est de même pour B et B' .

$$\begin{cases} L_{AA'} = K \\ L_{BB'} = K' \end{cases} \quad (2.10)$$

La différence entre les deux chemins est donc indépendante également des rayons choisis.

$$L_{AA'} - L_{BB'} = K'' \quad (2.11)$$

Or,

$$L_{AA'} - L_{BB'} = n(\overline{AI} - \overline{BI}) + n'(\overline{I'A'} - \overline{I'B'}). \quad (2.12)$$

Comme B est proche de A on écrit

$$\begin{cases} \overline{AI} = \overline{AH} + \overline{HI} \simeq \overline{HI} \\ \overline{A'I'} = \overline{A'H'} + \overline{H'I'} \simeq \overline{H'I'} \end{cases} \quad (2.13)$$

Ainsi

$$L_{AA'} - L_{BB'} = n\overline{HB} - n'\overline{H'B'} = n\overline{AB} \sin \alpha - n'\overline{A'B'} \sin \alpha' \quad (2.14)$$

On se place sur le rayon $\alpha = 0$. Le rayon n'est pas dévié donc $\alpha' = 0$. Donc $K'' = 0$ et on en déduit la condition des sinus d'Abbe

$$n\overline{AB} \sin \alpha - n'\overline{A'B'} \sin \alpha' = 0. \quad (2.15)$$

3 Milieux non homogènes

3.1 Équation des rayons lumineux

Pour un milieu non homogène on peut toujours appliquer le principe de Fermat et on doit donc rendre stationnaire le chemin optique. On note $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ et donc $v = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|$.

$$L(AB) = \int_A^B n \, ds = \int_A^B n(\vec{r}(t)) v \, dt. \quad (3.1)$$

Pour cela, on peut utiliser un outil de la mécanique analytique : l'équation d'Euler-Lagrange, en identifiant le Lagrangien

$$\mathcal{L} = n(\vec{r}(t))v. \quad (3.2)$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial v_i} (nv) \right) &= \frac{\partial}{\partial r_i} (nv) \\ \frac{d}{dt} \left(n \frac{v_i}{v} \right) &= \frac{\partial n}{\partial r_i} v \quad \text{en utilisant} \quad v = \sqrt{v_j v_j} \\ \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left(n \frac{\vec{v}}{v} \right) &= \nabla n \end{aligned}$$

Donc comme $ds = v \, dt$ et $\mathbf{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ la direction du rayon on obtient l'équation du rayon lumineux.

$$\frac{d}{ds} (n\mathbf{u}) = \nabla n \quad (3.3)$$

On peut réécrire l'équation des rayons en

$$\frac{dn}{ds} \mathbf{u} + n \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \nabla n. \quad (3.4)$$

Ça nous dit que ∇n est une combinaison linéaire de $\mathbf{u}$ et $\frac{d\mathbf{u}}{ds}$. donc ∇n appartient au demi-plan vers l'intérieur de la courbure (car $\frac{d\mathbf{u}}{ds}$ est vers l'intérieur et n est positif). Donc les rayons lumineux se courbent vers les plus forts gradients. On le voit dans la [Figure 7](#)

Cette courbure des rayons décrit l'expérience initiale et nous permet d'expliquer les mirages.

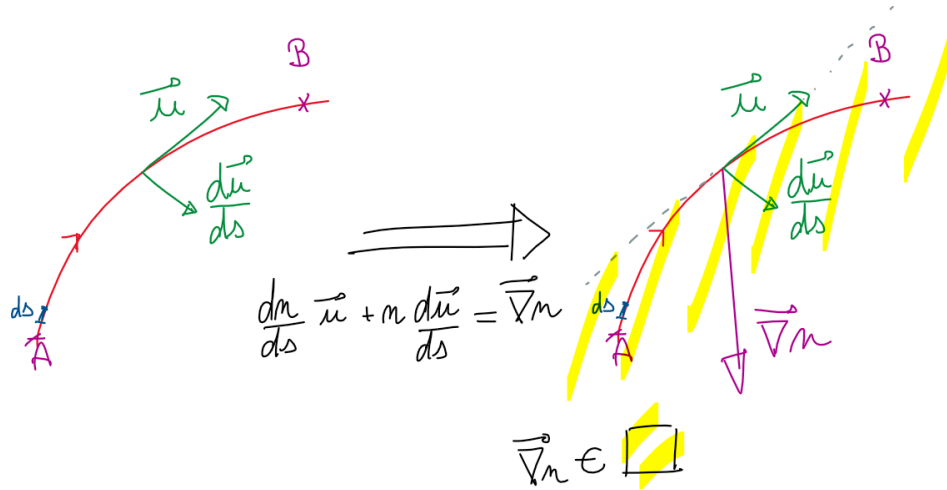


Fig. 7 : Schéma de la courbure des rayons vers les hauts indices.

3.2 Mirages

On considère un milieu tel que $n(z) = n_0 \sqrt{1 + \frac{z}{z_0}}$. Ce peut être le cas dans un gaz avec un gradient de température. On peut écrire l'équation des rayons et calculer chaque terme. On cherche la trajectoire $z(x)$ du rayon lumineux.

$$\nabla n = \frac{n_0^2}{2z_0 n(z)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Évaluons le terme $\frac{d}{ds}(n\mathbf{u})$. On remarque qu'en considérant le rayon dans le plan (Oxz) , et en remarquant que $\mathbf{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ est unitaire on peut écrire

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Où θ est l'angle que fait le rayon lumineux avec l'horizontale donc

$$\tan \theta = \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (3.7)$$

De plus on a

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.8)$$

Dans la direction (Ox) l'équation aux rayons lumineux s'écrit donc

$$\frac{d}{ds}(n \cos \theta) = 0 \quad (3.9)$$

On l'intègre en $n(z) \cos \theta = \text{cst.}$

Dans la direction (Oz) on a :

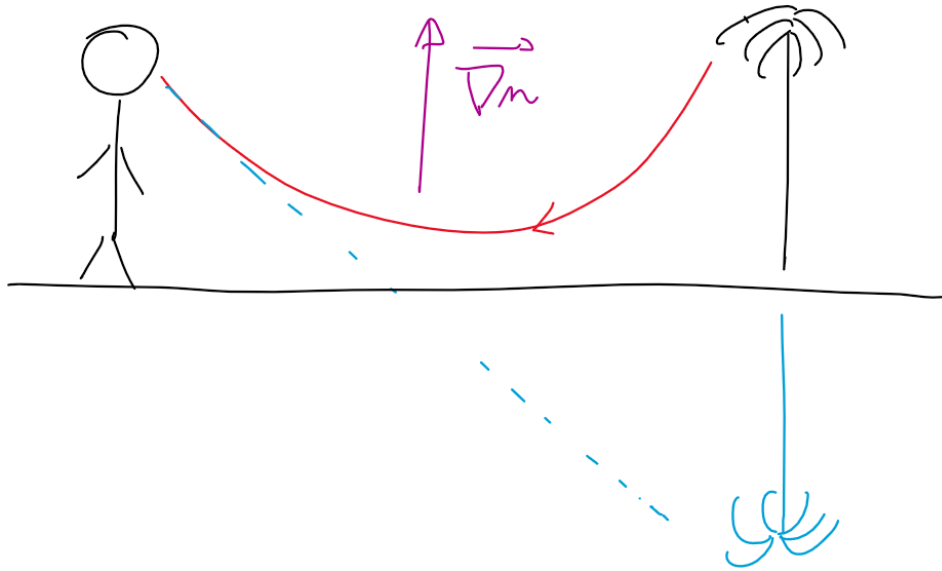


Fig. 8 : Mirage inférieur

$$\frac{n_0^2}{2z_0 n(z)} = \frac{d}{ds}(n \sin \theta) \quad (3.10)$$

$$= \frac{d}{ds} \left(n \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad \text{car} \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad (3.11)$$

$$= n(z) \cos \theta \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad \text{car} \quad n(z) \cos \theta = \text{cst} \quad (3.12)$$

$$= n(z) \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (3.13)$$

$$\frac{n_0^2}{2z_0} = K^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{n_0^2}{2z_0 K^2} \quad (3.15)$$

$$\boxed{z = \frac{n_0^2}{2z_0 K^2} x^2 + Ax + B} \quad (3.16)$$

Les rayons ont donc une trajectoire parabolique, ceci explique les mirages. Il peut y avoir des mirages inférieurs (Figure 8), ou des miroirs supérieurs (Figure 9)

3.3 Fibre Optique

Si l'indice n'est pas homogène on peut donc courber les rayons. On considère maintenant deux milieux l'un contre l'autre de telle sorte que l'indice varie linéairement, on a alors le profil de la Figure 10. C'est le principe de la fibre à gradient d'indice. On fait pas de calcul, on présente le schéma et on dit qu'on peut guider comme ça, si on veut on peut dire que ça améliore la transmission d'info par rapport à une fibre à saut d'indice.

Conclusion

On a vu que l'optique géométrique tenait dans un seul principe d'extrémalisation et donc on a pu retrouver toutes les lois qu'on utilise habituellement. On retrouve une analogie avec le principe de moindre action en mécanique analytique. Le formalisme permet d'étudier des milieux non homogènes pour expliquer les mirages et les fibres optiques.

Si on enlève l'hypothèse $\lambda \ll D$ on observe de la diffraction !

On le montre avec le laser.

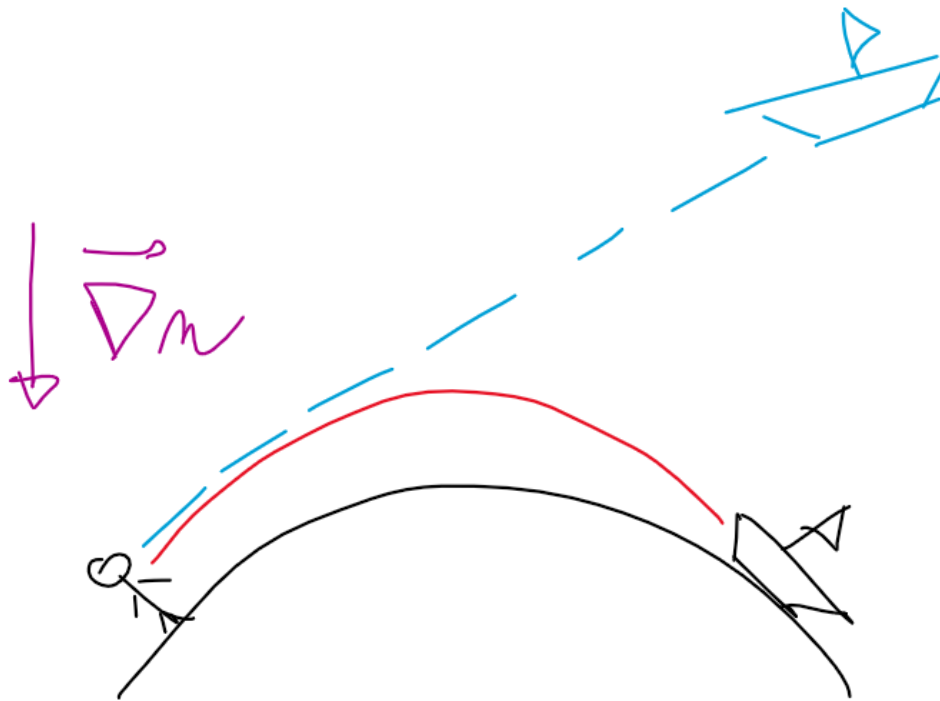


Fig. 9 : Mirage supérieur

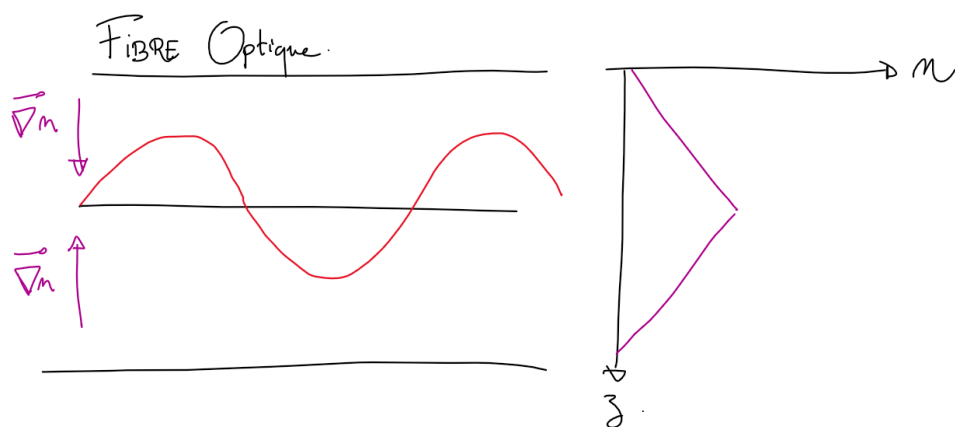


Fig. 10 : Fibre à gradient d'indice

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

-

4.2 Commentaires

-