

LP 35 – Diffraction de Fraunhofer

11 juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L3

Bibliographie

↗ *LP 35 2020*, Cléments de la Salle et Col-léaux →

Prérequis

•

Expériences

☞

Table des matières

1	Principe de Huygens - Fresnel	2
1.1	Formulations historique et mathématique	2
1.2	Régime de Fraunhofer	4
1.3	Obtention expérimentale	5
2	Figure de diffraction	5
2.1	Retour sur la fente simple	5
2.2	Généralisation	6
2.3	Propriétés de la figure de diffraction	7
3	Optique de Fourier	7
3.1	Filtrage optique	7
3.2	Limite de résolution	8
4	Questions et commentaires	8
4.1	Questions	8
4.2	Commentaires	8

Introduction

Diffraction vient du latin *diffringere* qui veut dire briser en morceaux. Il est naturel d'avoir donné un tel nom à ce phénomène puisque partant d'un unique rayon on observe plusieurs tâches sur un écran.

Démo

Avec une fente de largeur réglable et un laser, on montre l'influence de la largeur de la fente.

Ce phénomène ne peut être décrit par l'optique géométrique. On se place donc dans le modèle de l'optique scalaire. L'onde est modélisée par un champ scalaire A qui renseigne sur l'état vibratoire de chaque point de l'espace (on oublie notamment la polarisation).

On remarque de plus que ce phénomène n'apparaît que lorsque la taille de l'objet se rapproche de la longueur d'onde (le laser ne diffracte pas lorsqu'il passe par une porte).

Définition : la *diffraction* est le comportement des ondes lorsqu'elles rencontrent un obstacle ou une ouverture.

1 Principe de Huygens - Fresnel

1.1 Formulations historique et mathématique

Christian Huygens voit la lumière comme une onde. Il imagine qu'elle se propage de proche en proche à la manière d'une onde sonore. La question qu'il se pose est la suivante. Étant donné la forme d'un front d'onde à un instant, est-il possible de prévoir la forme de ce front d'onde après une certaine durée dt . Pour y répondre il formule dans son *Traité de la lumière* en 1690 le principe suivant :

Tout point d'un front d'onde se comporte comme une source secondaire d'ondelettes sphériques telles qu'à un instant plus tard le front d'onde soit l'enveloppe de ces ondelettes.

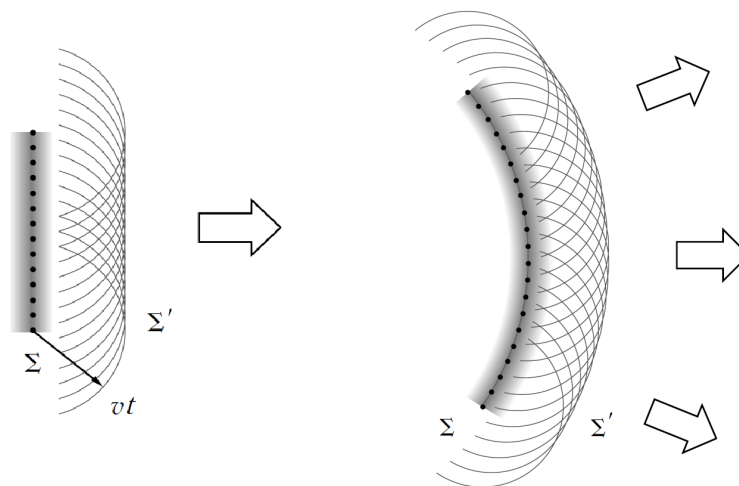


Fig. 1 : Visualisation du principe

En 1800, Fresnel ajoute à ce principe une notion d'interférences :

Les sources secondaires sont cohérentes et interfèrent entre elles.

Remarquons au passage que l'on triche un peu : dans ces schémas on ne représente que les fronts d'ondes qui nous arrangent (ceux qui avancent) mais théoriquement on devrait aussi représenter les interférences retour. On commence à comprendre que pour connaître l'état ondulatoire d'un point P de l'espace il ne suffit (théoriquement) pas de connaître seulement la forme d'un front d'onde mais il faut connaître l'état ondulatoire de tous les points M formant une surface fermée autour de P .

En fait, Kirshoff (1824-1887) démontre que pour un champ vérifiant une équation de d'Alembert, la connaissance de l'état ondulatoire de tous les points d'une surface fermée S nous donne l'amplitude exacte en tout point du domaine D ainsi entouré.

La formulation mathématique générale du principe de Huygens Fresnel est :

$$A(P) = \frac{1}{4\pi} \iint \left(A(MP) \left(ikMP - \frac{1}{MP} \right) \frac{\exp(ikMP)}{MP} \mathbf{e}_r - \frac{\exp\{ikMP\}}{MP} \nabla A \right) \cdot d\vec{S} \quad (1.1)$$

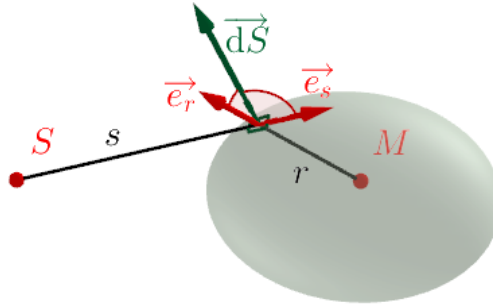


Fig. 2 : Notations utilisées

On peut reformuler ce principe sous la forme que l'on utilisera :

$$A(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_S A(M) \frac{1}{2} (\cos(\widehat{d\vec{S}, \mathbf{e}_r}) - \cos(\widehat{d\vec{S}, \mathbf{e}_s})) \frac{\exp(ikMP)}{MP} d\vec{S} \quad (1.2)$$

Ensuite, pour étudier seulement l'effet d'un objet diffractant Σ on est tentés de calculer cette intégrale sur une surface comprenant cet objet.

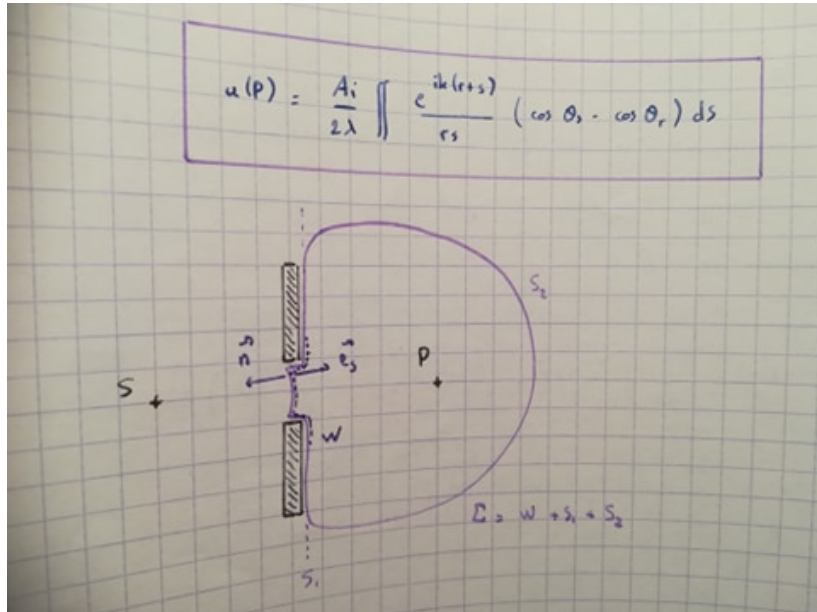


Fig. 3 : Le calcul de l'intégrale se fait sur une surface comprenant l'objet diffractant ici appelé W . Elle se calcule donc sur $W + S_1 + S_2$.

Or l'intégrale sur S_1 est nulle car elle se situe juste après la surface opaque.

Astuce

On lit parfois que la contribution de S_2 tend vers 0 lorsqu'on agrandit à l'infini car l'amplitude décroît en $1/r^2$. Cette justification est fautive car la surface croît également en r^2 .

Pour justifier que la contribution de S_2 est nulle on invoque la causalité : en faisant tendre S_2 vers l'infini l'onde n'a pas le temps d'arriver au point M en venant de S_2 . Au final la surface sur laquelle on fait l'intégrale est W .

↓ *Quid de Fraunhofer ?*

1.2 Régime de Fraunhofer

Plaçons nous dans un cas particulier qui va restreindre notre étude et simplifier la formule vue précédemment.

- Prenons une onde plane incidente. Ainsi en tout point de l'ouverture $\cos(\widehat{\vec{d}\vec{S}\vec{e}_s}) = -1$ et l'amplitude est la même égale à A_0 .
- On place notre écran suffisamment loin $d \gg L$ avec L la taille caractéristique de l'objet diffractant. Ainsi $\cos(\widehat{\vec{d}\vec{S}\vec{e}_r}) = 1$

Avec ces deux simplifications, on obtient la formule suivante :

$$A(P) = \frac{A_0}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(ikMP)}{MP} dS \quad (1.3)$$

Il reste à simplifier l'expression de MP qui n'est pas simple à priori. Ce terme intervient dans deux endroits différents il faudra faire attention à ne pas faire la même simplification.

- Amplitude : On peut s'arrêter à l'ordre 0, on a $MP \simeq d$.
- Phase : Cette fois ci il faut aller plus loin car on ne compare plus les ordres entre eux mais à 2π qui est fixé. En notant $M(x, y, d)$ et $P(X, Y, 0)$ on a :

$$MP = \sqrt{d^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2} \sim d + \frac{(x - X)^2 + (y - Y)^2}{2d} \quad (1.4)$$

On arrive à la formule de diffraction de Fresnel :

$$A(P) = \frac{A_0}{i\lambda} \frac{\exp\{ikd\}}{d} \iint_{\Sigma} \exp\left(ik\left(\frac{(x - X)^2 + (y - Y)^2}{2d}\right)\right) dXdY \quad (1.5)$$

Très bien mais nous on veut s'intéresser au régime de Fraunhofer. Pour cela, on continue nos approximations, on verra que ça vaut le coup car expérimentalement ça marche très bien. On considère qu'on se situe loin de telle sorte à ce qu'on ait $d \gg X, Y$ mais on garde des *angles constants* i.e. :

$$\alpha = \frac{x}{d} = \text{cste} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{y}{d} = \text{cste} \quad (1.6)$$

Ainsi le terme de phase s'écrit :

$$k \frac{x^2 + X^2 + y^2 + Y^2}{2d} - k(\alpha X + \beta Y) \sim k \frac{x^2 + y^2}{2d} - k(\alpha x + \beta y) \quad (1.7)$$

D'où la formule de Fraunhofer :

$$A(P) = \underbrace{\frac{A_0}{i\lambda} \frac{\exp\left(ik\left(d + \frac{x^2 + y^2}{2d}\right)\right)}{d}}_{A'_0(x, y)} \iint_{\Sigma} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha X + \beta Y)\right) dXdY \quad (1.8)$$

De Fresnel à Fraunhofer :

Pour faire ce passage il a fallu négliger le terme quadratique de la phase. Mais attention, il a fallu le négliger devant 2π . Cela revient à :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{X^2 + Y^2}{2d} \ll 2\pi \implies \mathcal{F} \ll 1 \quad \text{avec} \quad \mathcal{F} = \frac{r^2}{2\lambda d} \quad (1.9)$$

Ou r est la taille caractéristique de l'objet. Cette hypothèse porte donc sur la comparaison de la taille de l'objet avec la distance à l'écran.

Lorsque $\mathcal{F} \gg 1$ on est dans le régime de Fresnel

1.3 Obtention expérimentale

OdG :

On peut calculer le nombre de Fresnel dans l'expérience introductive et montrer que l'on est bien en régime de Fraunhofer.

Selon nos hypothèses il faut donc :

- Se placer en incidence normale, on place donc une source ponctuelle dans le plan focal d'une première lentille
- Observer l'image à l'infini donc placer l'écran au plan focal d'une seconde lentille. Ce plan focal sera appelé *plan de Fourier*, on verra plus tard pourquoi.

Si on veut observer l'image de l'objet, on conjugue l'objet sur l'écran avec la deuxième lentille.

Les Cléments proposent un montage à 3 lentilles qu'ils trouvent plus clair. Perso je le trouve moins clair.

Notons que le calcul que nous avons fait nous donne l'image observée dans le plan de Fourier.

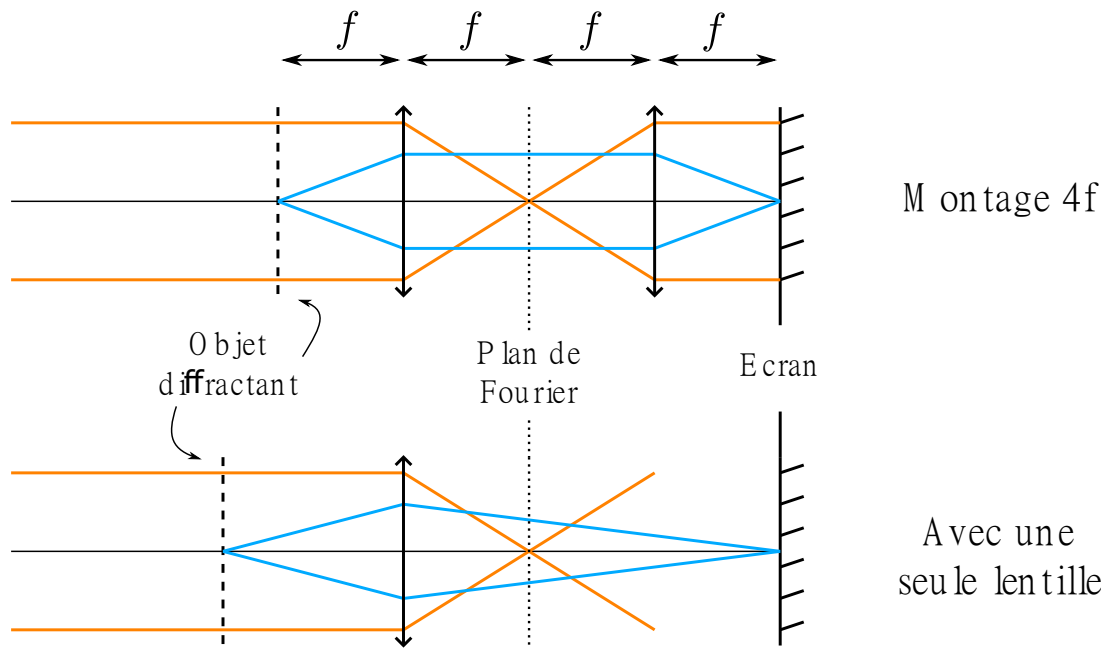


Fig. 4 : Montages utilisables pour la diffraction de Fraunhofer. Celui que je décris est le second.

↓
Revenons sur les observations et faisons le lien avec la formule trouvée.

2 Figure de diffraction

2.1 Retour sur la fente simple

Appliquons l'expression obtenue pour l'onde diffractée dans le cas de notre expérience introductive c'est à dire une fente simple. Dans le cadre d'une onde incidente plane, on avait trouvé :

$$A(x, y) = A'_0 \iint_{\Sigma} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{x}{d} X + \frac{y}{d} Y\right)\right) dX dY \quad (2.1)$$

Ici notre objet diffractant Σ est une fente de dimensions a et b . On peut ainsi limiter le domaine d'intégration et on trouve :

$$A(x, y) = A'_0 \int_{X=-a/2}^{X=a/2} \int_{Y=-b/2}^{Y=b/2} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{x}{d} X + \frac{y}{d} Y\right)\right) dX dY \quad (2.2)$$

On sépare l'intégrale en deux :

$$A(x, y) = A'_0 \int_{X=-a/2}^{X=a/2} \exp\left(-ik \frac{x}{d} X\right) dX \times \int_{Y=-b/2}^{Y=b/2} \exp\left(-ik \frac{y}{d} Y\right) dY \quad (2.3)$$

On calcule la première intégrale vu que le calcul est le même :

$$\int_{X=-a/2}^{X=a/2} \exp\left(-ik \frac{x}{d} X\right) dX = \frac{id}{kx} \left(-2i \sin\left(\frac{\pi xa}{\lambda d}\right)\right) = \frac{\lambda d}{\pi x} \sin\left(\frac{\pi xa}{\lambda d}\right) \quad (2.4)$$

On peut introduire la fonction sinus cardinal et ainsi :

$$\int_{X=-a/2}^{X=a/2} \exp\left(-ik \frac{x}{d} X\right) dX = a \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi xa}{\lambda d}\right) \quad (2.5)$$

En faisant le même calcul sur l'autre intégrale, on trouve finalement :

$$A(x, y) = A'_0 ab \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi xa}{\lambda d}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi yb}{\lambda d}\right) \quad (2.6)$$

L'intensité lumineuse varie donc en :

$$I \propto \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi xa}{\lambda d}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi yb}{\lambda d}\right) \quad (2.7)$$

Fente fine :

Dans le cas d'une fente fine, une dimension est très faible devant l'autre, typiquement $a \ll b$. On néglige ainsi la variation selon y et on trouve :

$$I \propto \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi xa}{\lambda d}\right) \quad (2.8)$$

La première annulation de l'intensité permet de retrouver une formule vue au lycée, la fameuse $x = \frac{\lambda D}{a}$.

Vérification de la loi en sinc^2

2.2 Généralisation

Pour généraliser la détermination de la figure de diffraction obtenue plus tôt, il faut définir une grandeur qui n'est pas assez ressortie avec la fente simple : la transmittance de l'objet diffractant.

Définition : transmittance La transmittance (ou transparence) $\underline{t}(X, Y)$ de l'objet diffractant est définie comme le rapport des amplitudes de l'onde avant et après l'objet :

$$\underline{t}(X, Y) = \frac{A(X, Y, z = 0^+)}{A(X, Y, z = 0^-)}. \quad (2.9)$$

Remarques

La transmittance ressemble beaucoup à une fonction de transfert. Si $\underline{t} \in \mathbb{R}$, l'objet est dit objet d'amplitude, comme la fente qui ne modifie que l'amplitude. Si $\underline{t} \in \mathbb{C}$, l'objet est dit objet de phase comme il ne modifie que la phase de l'onde.

Voyons comment la transmittance intervient dans l'expression de l'onde diffractée :

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \frac{-i}{\lambda d} \exp\{ikd\} \iint_{\Sigma} A(X, Y, z = 0^+) \exp\left\{-ik\left(\frac{xX}{d} + \frac{yY}{d}\right)\right\} dX dY \\ &= \frac{-i}{\lambda d} \exp\{ikd\} \iint_{\Sigma} \underline{t}(X, Y) A(X, Y, z = 0^-) \exp\left\{-ik\left(\frac{xX}{d} + \frac{yY}{d}\right)\right\} dX dY \\ &= A_0 \frac{-i}{\lambda d} \exp\{ikd\} \iint_{\Sigma} \underline{t}(X, Y) \exp\left\{-ik\left(\frac{xX}{d} + \frac{yY}{d}\right)\right\} dX dY \quad \text{pour une onde plane incidente} \\ &= A'_0 \frac{-i}{\lambda d} \exp\{ikd\} \iint_{\Sigma} \underline{t}(X, Y) \exp\left\{-ik\left(\frac{xX}{d} + \frac{yY}{d}\right)\right\} dX dY \\ &= A'_0 \frac{-i}{\lambda d} \exp\{ikd\} \iint_{\Sigma} \underline{t}(X, Y) \exp\left\{-i2\pi\left(\frac{\theta_x X}{\lambda} + \frac{\theta_y Y}{\lambda}\right)\right\} dX dY \end{aligned}$$

On a défini les angles θ_x et θ_y en les prenant égaux à leur tangente.

Dans l'approximation de Fraunhofer, on regarde à l'infini mais en gardant les angles constants, il est donc tout à fait normal de voir apparaître ces angles.

On définit les fréquences spatiales $\nu_x = \theta_x/\lambda$ et $\nu_y = \theta_y/\lambda$ de telle sorte que

$$A(x, y) = A'_0 \text{TF}[\underline{t}(X, Y)](\nu_x, \nu_y). \quad (2.10)$$

La convention prise pour la transformée de Fourier est donc la suivante

$$\text{TF}[f(x, y)](\nu_x, \nu_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(X, Y) \exp\{-2i\pi(\nu_x X + \nu_y Y)\} dX dY. \quad (2.11)$$

On peut faire une petite remarque sur le passage de l'intégrale sur l'objet à l'intégrale sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi la figure de diffraction de Fraunhofer n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la transmittance de l'objet ! On remarque la cohérence avec le calcul mené plus tôt pour la fente : la transformée de Fourier d'une fonction porte est bien un sinus cardinal.

À partir de là, on utilisera le terme fréquence pour désigner la fréquence spatiale. On ne parlera pas de la fréquence de l'onde (que l'on désigne par sa longueur d'onde λ).

2.3 Propriétés de la figure de diffraction

Translation de l'objet

$$\text{TF}[\underline{t}(X - a, Y - b)](\nu_x, \nu_y) = \exp\{-2i\pi\nu_x a\} \exp\{-2i\pi\nu_y b\} \text{TF}[\underline{t}(X, Y)](\nu_x, \nu_y). \quad (2.12)$$

La translation de l'objet implique donc un terme de phase dans la transformée de Fourier et ce terme de phase disparaît quand on regarde l'intensité lumineuse. La figure de diffraction n'est donc pas modifiée par la translation de l'objet

Changement d'échelle

$$\text{TF}[\underline{t}(aX, bY)](\nu_x, \nu_y) = \frac{1}{|ab|} \exp\{-2i\pi\nu_x a\} \exp\{-2i\pi\nu_y b\} \text{TF}[\underline{t}(X, Y)](\nu_x/a, \nu_y/b). \quad (2.13)$$

Augmenter la taille de l'objet va donc diminuer les fréquences spatiales. On comprend également pourquoi, lorsque l'objet est trop grand, on n'observe plus de diffraction, puisque les fréquences se rapprochent trop de la tâche centrale. Attention, augmenter la taille de l'objet c'est $a, b < 1$.

Produit de convolution

$$\text{TF}[f \otimes g] = \text{TF}[f] \times \text{TF}[g]. \quad (2.14)$$

Grâce à cette propriété, on peut simplement prédire la figure de diffraction d'objets assez complexes, comme la double fente de transmittance $\underline{t}(X, Y) = \Pi(X, e) \otimes (\delta(x - a/2) + \delta(x + a/2))$.

Théorème de Babinet La figure de diffraction d'un objet est la même que celle de son objet complémentaire ($\underline{t}' = 1 - \underline{t}$), au terme de fréquence spatiale nulle (au centre) près.

3 Optique de Fourier

3.1 Filtrage optique

On reprend le montage 4f. On vient de voir que dans le plan de Fourier, la figure observée était directement la transformée de Fourier de l'objet diffractant (on rappelle que les calculs faits précédemment avec l'intégral ne sont vrais exactement que dans le plan de Fourier, là où on se situe effectivement à l'infini) On peut alors imaginer faire du filtrage

Le montage 4f est stylé car on peut se dire que la première lentille fait la TF de l'objet et que la seconde fait la TF^{-1} .

Filtrage optique

On peut illustrer plein de choses.

- Montrer des plans de Fourier pour différentes grilles
- Faire du filtrage de grille pour montrer l'influence de l'orientation

- La plume ça marche bien
- Faire sortir le tigre de sa cage

C'est excellent, on peut filtrer simplement en obstruant la lumière.

On peut aussi imaginer d'autres applications comme la microscopie à contraste de phase. Lorsque l'on veut observer des cellules quasi-transparentes

$$t(x, y) = \exp(i\phi(x, y)) \simeq 1 + i\phi(x, y) \implies \hat{t}(\nu_x, \nu_y) = \delta(\nu_x, \nu_y) + i\hat{\phi}(\nu_x, \nu_y). \quad (3.1)$$

Il est impossible de les voir puisque $|t| = 1$ c'est-à-dire que la cellule n'introduit qu'un déphasage donc pas de perte d'intensité. Alors on introduit dans le plan de Fourier une lame de déphasage $\frac{\pi}{2}$ au niveau du Dirac

$$\hat{t}'(\nu_x, \nu_y) = i\delta(\nu_x, \nu_y) + i\hat{\phi}(\nu_x, \nu_y) = i \exp\left\{\hat{\phi}(\nu_x, \nu_y)\right\} \implies I = I_0 |\hat{t}'|^2 \sim I_0 (1 + 2\phi(x, y)) \quad (3.2)$$

On est capable de voir les très faibles variations de transparence. C'est ce principe qui est utilisé dans cette très belle [vidéo](#) (pas vraiment j'ai l'impression, on coupe juste l'ordre 0 donc l'intensité est en ϕ^2).

3.2 Limite de résolution

L'angle d'étalement d'intensité pour une ouverture circulaire s'obtient avec la transformée de Fourier d'un cercle, on obtient une fonction de Bessel qui a l'allure d'un sinus cardinal

$$I = I_0 J_1^2(2\pi R\nu) \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{\theta}{\lambda} \quad \text{la fréquence spatiale.} \quad (3.3)$$

La première annulation a lieu en 1.22π donc

$$2\pi R\nu = 1.22 \iff \theta = 1.22 \frac{\lambda}{2R} = 0.61 \frac{\lambda}{R}. \quad (3.4)$$

La demie largeur de la tâche sur l'écran est

$$r_{\text{Airy}} = 0.61 \frac{\lambda D}{R}. \quad (3.5)$$

Pour un microscope, l'aplanétisme assure la condition d'Abbe. On not r_{lim} la plus petite distance observable entre deux objets (telle que leurs images soient espacées de r_{Airy} selon le critère de Rayleigh) :

$$n_0 r_{\text{lim}} \sin \alpha_0 = nr \sin \alpha \implies r_{\text{lim}} = \frac{0.61\lambda}{\text{O.N.}}. \quad (3.6)$$

Conclusion

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

•

4.2 Commentaires

•