

LP 41 – Effet tunnel

11 juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L3

Bibliographie

- ↗ *LP 41 2020*, Benjamin Monnet → Merci
- ↗ *LP 41 2020*, Cléments de la Salle et Col-léaux → Propre

Prérequis

- Équation de Schrödinger
- Courant de probabilité
- Ondes
- Électrostatique
- Radioactivité

Expériences



Table des matières

1	Présentation de l'effet tunnel	2
1.1	Barrière de potentiel : positionnement du problème	2
1.2	Conditions aux limites : résolution	3
1.3	Transmission	3
2	La désintégration alpha	5
2.1	Rappels	5
2.2	Modèle de Gamov	5
2.3	Loi de désintégration exponentielle	6
2.4	Limite du modèle	6
3	Microscopes à effet tunnel	6
3.1	Principe du microscope	7
3.2	Étude théorique	8
3.3	Utilisation expérimentale	8
4	Questions et commentaires	9
4.1	Questions	9
4.2	Commentaires	9

Introduction

En mécanique classique, lorsqu'on considère par exemple un skieur, on sait que ce dernier ne pourra pas monter en haut d'une colline dont l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie mécanique du skieur. Néanmoins la physique quantique permet d'envisager des phénomènes nouveaux comme l'effet tunnel que nous allons décrire ici, il permettrait à notre skieur de traverser la montagne.

1 Présentation de l'effet tunnel

1.1 Barrière de potentiel : positionnement du problème

Pour présenter l'effet Tunnel nous allons prendre le cas le plus simple d'une barrière de potentiel.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a/2 \\ V_0 & \text{pour } -a/2 < x < a/2 \\ 0 & \text{pour } x > a/2 \end{cases} \quad (1.1)$$

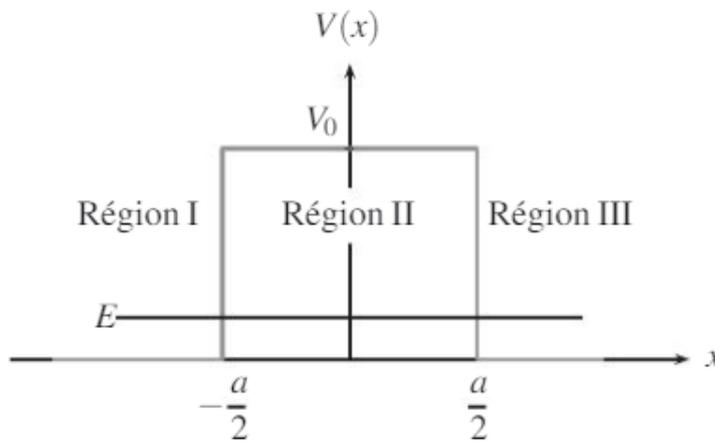


Fig. 1 : Situation étudiée

Dans le cadre de notre étude on va se limiter au cas $0 < E < V_0$. Pour rappel l'équation de Schrödinger donnant l'évolution d'une fonction d'onde est dans le cas unidimensionnel que l'on étudie ici :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t) \quad (1.2)$$

Comme dans le cas du confinement des particules et du puits infini, on se limitera ici aux solutions stationnaires ce qui donne dans notre cas $\psi(x, t) = \phi(x) \exp(-i\frac{Et}{\hbar})$. En réinjectant dans l'équation différentielle :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + V(x)\phi(x) = E\phi(x) \quad (1.3)$$

On distingue alors les différentes régions selon leur valeur de V :

- Régions I et III : $\frac{d^2 \phi}{dx^2} + k^2 \phi(x) = 0$
- Régions II : $\frac{d^2 \phi}{dx^2} - q^2 \phi(x) = 0$

Avec :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{et} \quad q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (1.4)$$

Les solutions de ces équations sont donc :

$$\text{Région I} \quad \phi(x) = A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx) \quad (1.5)$$

$$\text{Région II} \quad \phi(x) = A_2 \cosh(qx) + B_2 \sinh(qx) \quad (1.6)$$

$$\text{Région III} \quad \phi(x) = A_3 \exp(ikx) + B_3 \exp(-ikx) \quad (1.7)$$

Néanmoins $B_3 = 0$ car il n'y a pas d'ondes qui arrivent de $+\infty$ donc :

$$\text{Région I} \quad \phi(x) = A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx) \quad (1.8)$$

$$\text{Région II} \quad \phi(x) = A_2 \cosh(qx) + B_2 \sinh(qx) \quad (1.9)$$

$$\text{Région III} \quad \phi(x) = A_3 \exp(ikx) + \quad (1.10)$$

1.2 Conditions aux limites : résolution

La fonction d'onde est continue car la probabilité de présence l'est. Ainsi ϕ est également continue. Il n'y a pas de discontinuité du potentiel ainsi le courant de probabilité est également continu ce qui implique la continuité de la dérivée de ϕ . On obtient donc les conditions aux limites suivantes :

- En $-a/2$:

$$A_1 \exp\left(-i\frac{ka}{2}\right) + B_1 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = A_2 \cosh\left(\frac{qa}{2}\right) - B_2 \sinh\left(\frac{qa}{2}\right) \quad (1.11)$$

et

$$ikA_1 \exp\left(-i\frac{ka}{2}\right) - ikB_1 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = -qA_2 \cosh\left(\frac{qa}{2}\right) + qB_2 \sinh\left(\frac{qa}{2}\right) \quad (1.12)$$

- En $a/2$:

$$A_3 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = A_2 \cosh\left(\frac{qa}{2}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{qa}{2}\right) \quad (1.13)$$

$$ikA_3 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = qA_2 \cosh\left(\frac{qa}{2}\right) + qB_2 \sinh\left(\frac{qa}{2}\right) \quad (1.14)$$

1.3 Transmission

On s'intéresse nous à la probabilité de transmission, qui correspond à la possibilité pour la particule de traverser la barrière de potentiel. On va donc introduire le coefficient de transmission en amplitude complexe : $\tau = \frac{A_3}{A_1}$. On peut montrer à l'aide des conditions aux limites que le coefficient de transmission en amplitude complexe vaut :

$$\tau = 4ik \frac{\exp(-ikL)}{-(q-ik)^2 \exp(qa) + (q+ik)^2 \exp(-qa)} \quad (1.15)$$

Afin de remonter à des quantités plus facilement interprétables physiquement, on cherche le coefficient de transmission en intensité T :

$$T = \frac{J_i}{J_t} = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 \quad (1.16)$$

car on a $J = \Re\left(-i\frac{\hbar}{m} \left(\frac{d\psi}{dx} \psi^*\right)\right)$. En posant $\delta = 1/q$ la profondeur de pénétration (analogie avec les ondes évanescentes en EM) et $M = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{q} + \frac{q}{k}\right)$ on peut exprimer T :

$$T = \frac{1}{1 + M \sinh^2 a/\delta} \quad (1.17)$$

Exprimé en fonction des énergies :

$$M = \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \quad (1.18)$$

Dans la plupart des cas on se trouve dans l'approximation de la barrière épaisse i.e. $\delta \ll a$. On a ainsi :

$$T \simeq T_0 \exp(-2a/\delta) \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \quad (1.19)$$

Schématiquement les ondes ont la forme suivante de la [Figure 2](#).

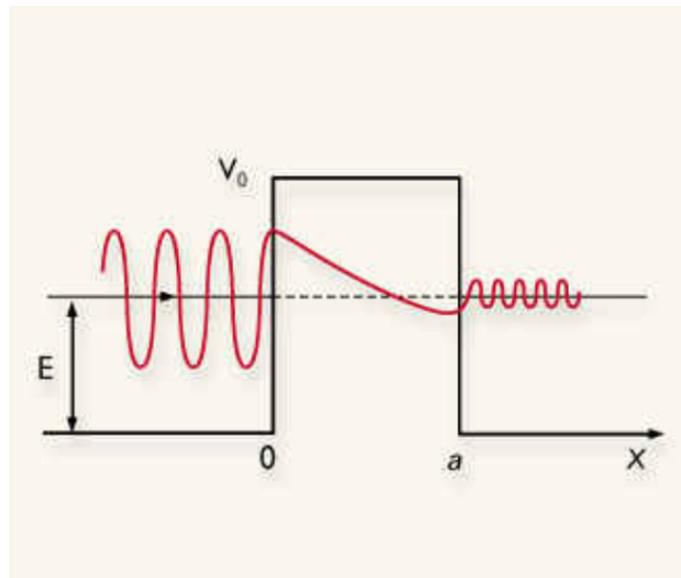


Fig. 2 : Forme schématique des ondes

C'est le facteur exponentiel qui fera le plus varier cette probabilité de transmission. On peut voir quelques ordres de grandeur sur la [Figure 3](#).

Particule	m (kg)	V_0 (eV)	a (nm)	δ (nm)	T
Électron	10^{-30}	4	0,3	0,1	10^{-2}
Électron	10^{-30}	40	0,3	$4 \cdot 10^{-2}$	10^{-6}
Électron	10^{-30}	4	3	0,1	10^{-20}
Proton	10^{-27}	4	0,3	$4 \cdot 10^{-3}$	10^{-63}
Proton	10^{-27}	4	3	$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-628}

Fig. 3 : Ordres de grandeurs

Ondes centimétriques

On peut faire la manip avec des ondes centimétriques et des prismes de paraffine.

Remarque :

La transmission d'une onde évanescente n'est pas un phénomène quantique mais ondulatoire. C'est le fait qu'une particule *massive* puisse traverser une telle barrière qui en fait un phénomène quantique.

Remarques :

Lorsqu'on s'éloigne du caractère quantique, c'est à dire en augmentant m et a , la probabilité de transmission tend (très rapidement) vers 0.



L'effet tunnel permet de comprendre des phénomènes naturels comme la radioactivité.

Élément	Énergie E des particules α (MeV)	Demi-vie
$^{212}_{84}\text{Po}$	8,95	$3,0 \times 10^{-7}$ s
$^{240}_{96}\text{Cm}$	6,40	27 jours
$^{226}_{88}\text{Ra}$	4,90	1600 ans
$^{232}_{90}\text{Th}$	4,05	$1,4 \times 10^{10}$ ans
$^{230}_{92}\text{U}$	5,60	21 jours
$^{232}_{92}\text{U}$	5,21	73 ans
$^{234}_{92}\text{U}$	4,70	$2,4 \times 10^5$ ans
$^{236}_{92}\text{U}$	4,45	$2,3 \times 10^7$ ans
$^{238}_{92}\text{U}$	4,19	$4,4 \times 10^9$ ans

Tab. 1 : Différentes radioactivités α qui s'étalent ici sur 24 ordres de grandeur !

2 La désintégration alpha

2.1 Rappels

La radioactivité α est l'émission par un noyau instable d'une particule α : un noyau d'hélium ^4_2He . Elle concerne les noyaux lourds contenant un nombre important de protons. Un exemple connu est



Expérimentalement on sait que le nombre de noyaux évolue selon une loi exponentielle $N(t) = N_0 \exp\{-\lambda t\}$. De plus, la barrière d'énergie potentielle à franchir pour une particule α pour sortir du noyau est de 25 MeV alors que l'énergie observée des particules α est de l'ordre de 4 à 9 MeV comme illustré en [Table 1](#) ce qui laisse donc supposer que la barrière est franchie par effet tunnel.

Le temps de demi-vie a l'air décroissant avec l'énergie cinétique E de la particule α émise. En 1911, Geiger et Nuttall avient établi la loi empirique

$$\ln \tau_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}}, \quad (2.2)$$

avec A et B des constantes qui ne dépendent que du noyau père étudié.

2.2 Modèle de Gamov

Afin d'expliquer les observations expérimentales, on modélise notre ensemble comme une particule α existante à l'intérieur du noyau et on modélise ensuite le potentiel dans lequel est plongé la particule α :

- Pour $|x| \leq R = r_0 A^{1/3}$ avec $r_0 = 1,2$ fm, la particule est soumise à l'interaction nucléaire forte qui assure la cohésion du noyau. On suppose donc que la particule est dans un puits de potentiel d'énergie $-V_0$
- Pour $|x| \geq R$, l'interaction nucléaire forte est négligeable car elle est à très courte portée. Il reste alors la répulsion électrostatique par les $Z - 2$ protons restant dans le noyau donc

$$V(x) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 x}. \quad (2.3)$$

On représente le potentiel dans la [Figure 4](#).

La probabilité pour que la particule α traverse la barrière d'énergie est modélisée par l'effet tunnel

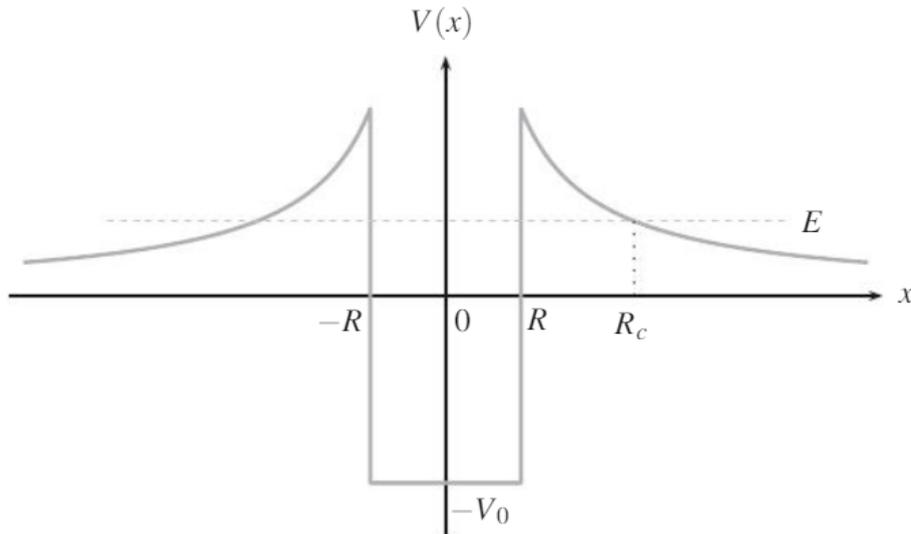
$$\ln T \simeq -\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_C} dr \sqrt{2m \left(\frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 x} - E \right)}. \quad (2.4)$$

Le calcul complet (cf le \clubsuit BUP) montre que le résultat est alors

$$\ln T = -\frac{\pi R V_m}{\hbar} \sqrt{2mE} + 2R \frac{\sqrt{V_m m_\alpha}}{\hbar} \quad \text{avec} \quad V_m = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (2.5)$$

La probabilité se met sous la forme

$$\ln T = \frac{a}{\sqrt{E}} + b. \quad (2.6)$$

Fig. 4 : Potentiel subi par la particule α

2.3 Loi de désintégration exponentielle

Or compte tenu de son énergie cinétique, la particule α fait des aller-retours dans le noyau et ne cesse de « rebondir » contre la barrière de potentiel. À chaque « collision » sur la barrière de potentiel, la particule α a une probabilité T d'être transmise au-delà du noyau. Il faut en moyenne $1/T$ collision pour sortir du noyau. Si on note τ_0 la durée de traversée du noyau, le temps moyen que la particule α passe dans le noyau vaut $\tau = \tau_0/T$. On en déduit alors la demi-vie $t_{1/2} = \tau \ln 2$

En écrivant alors $\ln T(E) = -\ln \frac{1}{T} = -\ln \frac{\tau_{1/2}}{\tau_0 \ln 2}$ on tombe sur la loi de Geiger et Nuttall.

En effet la probabilité qu'un noyau traverse la barrière s'exprime

$$dP = \frac{v}{2R_0} T dt. \quad (2.7)$$

Pour N noyaux :

$$dN = \frac{v}{2R_0} V N dt. \quad (2.8)$$

On retrouve une loi exponentielle avec $\lambda = \frac{vT}{2R_0}$ donc

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{2R_0 \ln 2}{vT}. \quad (2.9)$$

On peut comparer les résultats théoriques à l'expérience dans la [Figure 5](#)

2.4 Limite du modèle

La forme du potentiel est une approximation. Les oscillations de la particule α dans le noyau sont aussi une approximation, on trouverait ainsi des oscillations à 10^{22} Hz. Il marche surtout pour des noyaux de Z et A pairs.

3 Microscopes à effet tunnel

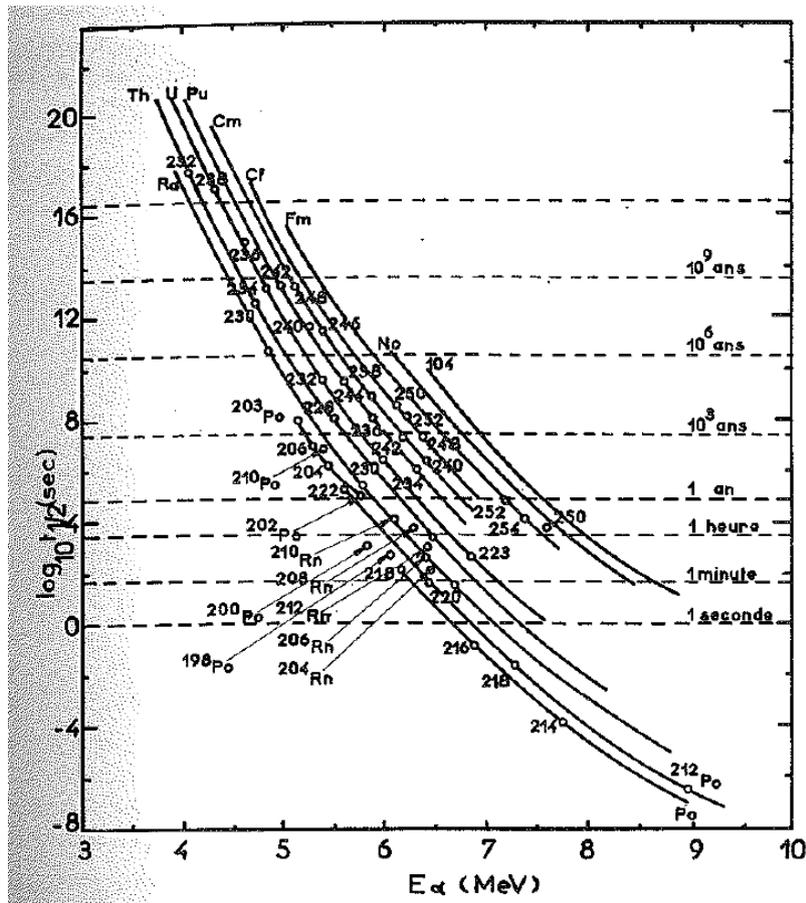


Fig. 5 : Comparaison théorie et expérience pour la désintégration α

3.1 Principe du microscope

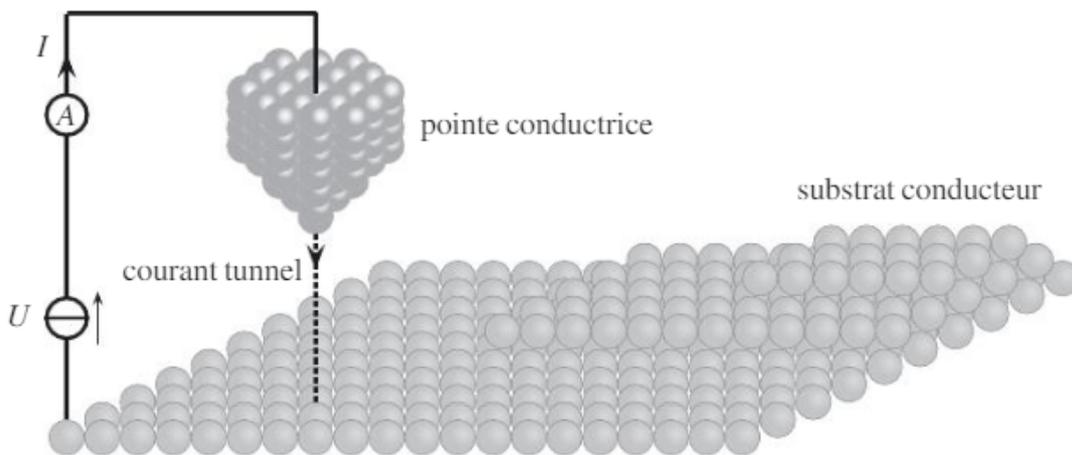


Fig. 6 : Microscope à effet tunnel

Lorsque l'on approche une pointe conductrice d'un métal conducteur, des électrons peuvent passer du substrat à la pointe à l'aide d'une différence de potentiel appliquée. L'électron passe par effet tunnel dans le vide, ainsi le courant mesuré est exponentiellement décroissant en la distance pointe/substrat. Les courants mesurés sont de l'ordre du nano-ampère ce qui oblige à utiliser des ampèremètres très précis. Pour pouvoir capter du courant et être le plus précis possible il faut :

- Avoir une pointe très fine, généralement constituée d'un seul atome.
- Approcher la pointe à moins d'un nanomètre du substrat.

- Être capable de contrôler les déplacements de la pointe et de les mesurer le plus précisément possible. Pour cela on utilise des piézoélectriques.
- Il faut éliminer au mieux les vibrations parasites.

3.2 Étude théorique

Le profil de potentiel est de la forme

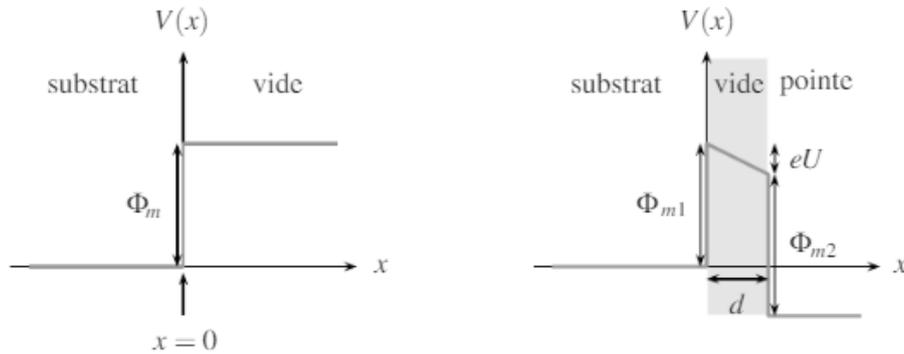


Fig. 7 : Potentiel appliqué dans le cas du microscope à effet tunnel

De la même manière que dans le modèle de Gamov pour trouver la probabilité de transmission on l'approche par l'intégrale suivante :

$$\ln T \simeq -2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^d \sqrt{V(x) - E} dx \simeq -2 \frac{d}{\delta} \quad (3.1)$$

Avec δ qui vaut typiquement 0,6 nm. On a montré dans la partie précédente que le temps de demi-vie était proportionnel à T , de même ici le nombre d'électrons passant la barrière est proportionnel à T et ainsi le courant mesuré est de la forme :

$$I = I_0 \exp\left(-2 \frac{d}{\delta}\right) \quad (3.2)$$

Cette dépendance exponentielle induit une grande sensibilité.

On peut ainsi montrer que un déplacement de 10 pm correspond à une variation d'intensité de 3%. Cette méthode est donc extrêmement précise !

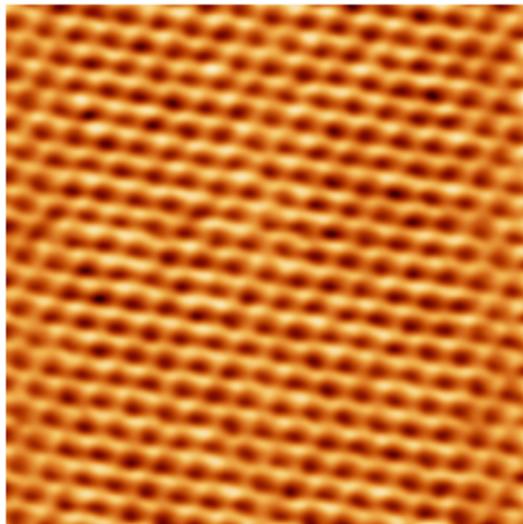


Fig. 8 : Image issue d'un microscope à effet tunnel.

3.3 Utilisation expérimentale

En imposant une intensité I constante, on reste donc à une distance fixe avec une très bonne précision normale à la surface. Latéralement, la finesse dépend de la finesse de la pointe d'où l'intérêt de n'utiliser qu'un seul atome.

Ce type de microscope bat de loin les microscopes optiques en terme de précision car il n’y a plus la limite liée à la diffraction et donc au fait qu’on sonde la surface à une certaine longueur d’onde. Néanmoins, on ne peut pas voir de « grands détails » avec un microscope à effet tunnel.

Selon la signe de la différence de potentiel, on peut faire en sorte que l’attraction soit répulsive ou attractive, on peut utiliser ce microscope pour manipuler des atomes un à un ! On peut montrer cette [vidéo](#) dont la page [Wikipédia](#) détaille un peu la prise de vue.

Le microscope à effet tunnel ne permet d’observer que des métaux.

Conclusion

On a vu aujourd’hui les principes et applications de l’effet tunnel. On a notamment vu une probabilité décroissante exponentiellement ce qui implique directement une énorme variation d’ordres de grandeurs dans les temps de demi vie des éléments radioactifs. Cet effet permet également la réalisation de microscopes à effet tunnel qui permettent de sonder la surface des métaux à l’atome près.

Une autre application pratique est le MASER à ammoniac qui permet d’émettre un faisceau cohérent de micro-ondes à partir de l’oscillation de molécules d’ammoniac dans un potentiel double puits.

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

-

4.2 Commentaires

-