LP 48 – Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

11 juin 2021
Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L2

Bibliographie

✍ *LP 48 2020*, **Pascal Wang et Laura Guillain**⟶
✍ *LP 48 2020*, **Cléments de la Salle et Colléaux**⟶

Prérequis

- Corde de Melde
- électrocinétique

Expériences

☕ corde de melde

☕ tête d'analyse pérot-fabry

Table des matières

Introduction

1 Résonance d'un circuit RLC

1.1 Étude de l'intensité

Le circuit RLC série est constitué d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L, d'impédances respectives :

$$\underline{Z}_R = R \qquad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \qquad \underline{Z}_L = jL\omega \tag{1.1}$$

avec ω la pulsation de la source de tension sinusoïdale $\underline{\mathrm{E}}$. Déterminons pour commencer la relation entre la tension imposée $\underline{\mathrm{E}}$ et le courant $\underline{\mathrm{i}}$ dans le circuit.

$$\underline{\mathrm{i}} = \frac{\underline{\mathrm{E}}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R} \tag{1.2}$$

$$\underline{\mathrm{i}} = \frac{\underline{\mathrm{E}}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \tag{1.3}$$

$$\underline{\mathrm{i}} = \frac{\underline{\mathrm{E}}/R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{avec} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1.4}$$

$$\underline{\mathrm{i}} = \frac{\underline{\mathrm{E}}/R}{1 + jQ\left(x + \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \tag{1.5}$$

On nomme ω_0 la pulsation propre du système et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité du circuit. $\underline{\mathrm{i}}$ étant complexe on peut étudier son amplitude I.

$$I = \frac{E/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}} \tag{1.6}$$

Une étude de cette fonction nous montre qu'elle est maximale pour $x = 1$ i.e. pour $\omega = \omega_0$. On a $I(\omega_0) = E/R$. Ce maximum est indépendant de Q.

> Pour un système excité sinusoïdalement, une grandeur est en résonance lorsque son amplitude est maximale pour une certaine pulsation.

Ici on a donc résonance du courant à la fréquence propre du système.

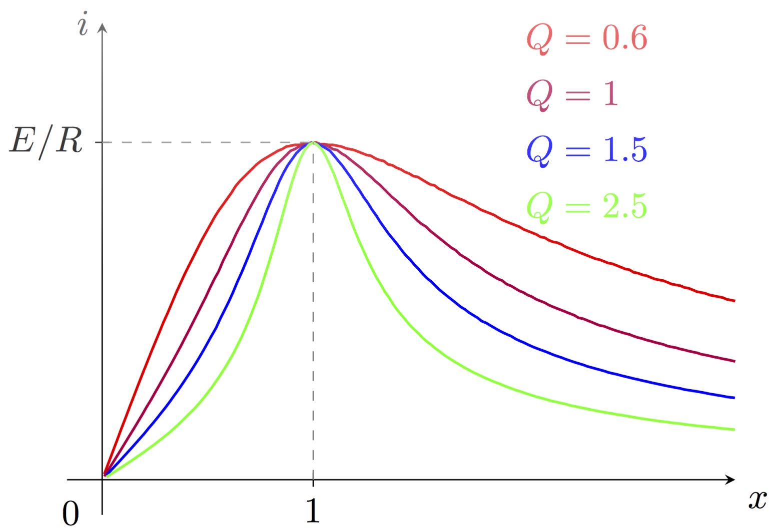

Fig. 1 : Évolution de l'intensité avec la pulsation, on a posé $x = \omega/\omega_0$.

Pulsation de résonance
Vérification de la valeur de la pulsation de résonance de L et C.

On peut alors définir l'acuité de la résonance : on cherche Δx tel que $I(1+\Delta x) = I_{\max}/\sqrt{2}$. On trouve $\Delta x = \frac{1}{Q}$, ainsi :

$$\Delta\omega = \frac{w_0}{Q} \tag{1.7}$$

Illustrer ça avec la Figure 1.

1.2 Étude énergétique

On va maintenant chercher la résonance de l'énergie du système. La loi des mailles s'écrit (dans le domaine temporel cette fois) :

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_c \tag{1.8}$$

On passe à la conversion de puissance en multipliant par i :

$$Ei = Ri^2 + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_c i \implies P_G = P_J + P_M + P_C \tag{1.9}$$

Dans le condensateur et la bobine la puissance reçue est nulle en moyenne car u et i sont en quadrature de phase. On a alors :

$$\langle P_G \rangle_T = \langle P_J \rangle_T \tag{1.10}$$

En utilisant l'expression de I obtenue précédemment et le fait que $\langle P_J \rangle_T = RI^2$ on a :

$$\langle P_G \rangle_T = \frac{E^2}{R}\frac{1}{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} \tag{1.11}$$

On cherche le maximum de cette fonction en la dérivant :

$$\frac{\mathrm{d}\langle P_G \rangle_T}{\mathrm{d}x} = \frac{E^2}{R}\frac{2Q^2\left(x-\frac{1}{x^3}\right)}{)1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2)^2} = 0 \implies x - \frac{1}{x^3} = 0 \implies x = 1 \tag{1.12}$$

On a résonance en énergie pour $\omega = \omega_0$ encore une fois ! On peut également montrer que le $\delta\omega$ qui caractérise l'acuité de la résonance vaut également ω_0/Q

Un système excité sinusoïdalement est dit en résonance quand le transfert d'énergie entre l'excitateur et le système est maximal pour une certaine pulsation.

Ici, le circuit est donc en résonance pour $\omega = \omega_0$.

1.3 Analogies avec le système masse-ressort

Au vu des considérations sur le système RLC que l'on vient de faire, on peut voir des similitudes avec un système masse-ressort. On va développer l'analogie :

Système	Électrique	Mécanique
	q la charge	x le déplacement
	$\dot{q} = i$ l'intensité	$\dot{x}$ la vitesse
	$\ddot{q} = \dot{i}$	$\ddot{x}$ l'accélération
Amortissement	R la résistance	λ le coefficient de frottement
Inertie	L l'inductance	m la masse
	$1/C$ l'inverse de la capacité	k la constante de raideur
Pulsation propre	$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$	$\omega_0 = \sqrt{k/m}$
Facteur de qualité	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$Q = \frac{1}{\lambda}\sqrt{km}$
Équation différentielle	$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$	$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Tab. 1 : Analogies avec le système masse ressort

Pour l'instant nous n'avons étudié des systèmes ne comportant qu'un seul degré de liberté. Nous allons maintenant étudier des systèmes en possédant plusieurs voir une infinité, et nous étudierons les conséquences sur la résonance.

2 Oscillateurs à plusieurs degrés de liberté

2.1 Oscillateurs couplés

On étudie deux oscillateurs couplés par des ressorts de raideur k, schématisé Figure 2. On considère que la paroi de gauche est animée du mouvement $\xi = \xi_0 \cos \omega t$.

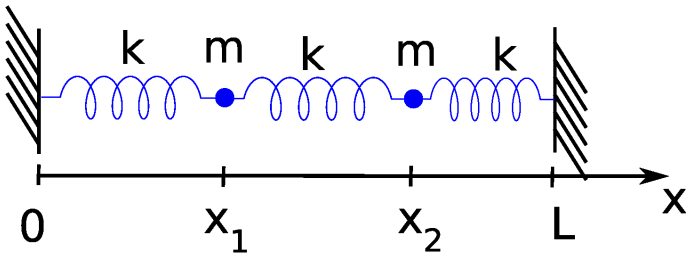

Fig. 2 : Schéma du système étudié.

En notant X_1 et X_2 leurs allongement respectifs et en appliquant le PFD à chacun d'entre eux on arrive aux équations :

$$m\ddot{X}_1 = -k(X_1 - \xi) + k(X_2 - X_1)$$
$$m\ddot{X}_2 = -kX_2 - k(X_2 - X_1)$$

On pose $u = X_1 + X_2$ et $v = X_1 - X_2$ et ainsi :

$$\ddot{u} + \frac{k}{m}u = \frac{k}{m}\xi$$
$$\ddot{v} + \frac{3k}{m}v = \frac{k}{m}\xi$$

On pose $\omega_s = \sqrt{k/m}$ et $\omega_a = \sqrt{3k/m} = \sqrt{3}\omega_s$. On cherche des solutions complexes de la forme $\underline{u} = u_0 \exp(i\omega t)$ et $\underline{v} = v_0 \exp(i\omega t)$, on a $\xi = \xi_0 \exp(i\omega t)$. On obtient :

$$-\omega^2 u_0 + \omega_s^2 u_0 = \omega_s^2 \xi_0$$
$$-\omega^2 v_0 + \omega_a^2 v_0 = \omega_s^2 \xi_0$$

Ainsi :

$$u_0 = \frac{\xi_0 \omega_s^2}{\omega_s^2 - \omega^2} \quad \text{et} \quad v_0 = \frac{\xi_0 \omega_s^2}{\omega_a^2 - \omega^2} \tag{2.1}$$

Si on remonte à une grandeur physiquement mesurable, par exemple $X_1 = \frac{u+v}{2}$, on observe que X_1 diverge pour $\omega = \omega_s$ et $\omega = \omega_a$. De même, X_2 et $\dot{X}_1$, $\dot{X}_2$ divergent également pour ces deux pulsations.

Le système entre donc en *résonance* cette fois ci à deux pulsations différentes !

On a un système à deux degrés de liberté et on obtient deux pulsations de résonance, est-ce une coïncidence ? Eh bien non, c'est généralisable : un système à N degrés de liberté a donc N pulsations de résonances. Ainsi un système continu possède une infinité de pulsations de résonance, c'est ce qu'on va voir dans la suite.

2.2 Corde de Melde

On se base sur cet article du BUP 851 pour les calculs. L'expérience de la corde de Melde est celle de la propagation d'une déformation le long d'un fil ou d'une corde tendue par une masse m accrochée à l'extrémité d'un fil passant par une poulie. On fait les hypothèses suivantes :

- Le poids, la raideur de la corde et les frottements sont négligeables devant la tension de la corde

- Petits déplacements, petites variations de tension
- Déformations transversales qui restent dans le plan de vibration de la source (pas de couplage des degrés de liberté aux points d'attache)

Elles aboutissent à l'établissement de l'équation de de propagation de d'Alembert. Dans ces conditions, il y a propagation sans atténuation ou dispersion.

On a déjà vu l'étude en régime libre, la corde est attachée au deux bouts et tendue à une tension T. Ainsi, on impose à cette onde des conditions aux limites qui entraînent la quantification des modes propres. Les fréquences propres sont $\nu_n = \frac{nc}{2L}$ avec L la longueur de la corde et $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ la vitesse de propagation.

Corde de Melde

On montre plusieurs modes.

On peut interpréter la corde de Melde comme un oscillateur avec un nombre infini de degrés de liberté. Chaque morceau infinitésimal de la corde est lié donc couplé aux deux morceaux voisins qui l'entourent. Le couplage se traduit en équation par l'équation de d'Alembert.

Une autre façon d'interpréter ce problème est de considérer que le pot vibrant envoi une onde qui se propage sans atténuation ni dispersion. Elle est réfléchie successivement sur la poulie et le pot vibrant. Si l'onde envoyée est en phase avec ses réflexions successives, cela donne lieu à des interférences constructives qui permettent l'accumulation d'énergie dans la cavité.

Ainsi on considère que le vibreur fournit une vibration qui se réfléchit à la poulie P avec changement de signe, puis se réfléchit au vibreur V, puis à la poulie, etc. On montrer cette vidéo pour montrer le changement de signe à la réflexion. En régime établi, un point M est soumis à la superposition d'une infinité d'ondes qui ont subi des réflexions aux extrémités P et V. On note

- $\lambda = c/f$ la longueur de l'onde de l'excitation où f est la fréquence d'excitation
- $k = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde correspondant.
- Les déphasages $\phi_x = 2\pi x/\lambda$ et $\varphi = 2\pi L/\lambda$.
- a l'amplitude du mouvement du vibreur placé en V
- $r < 0$ le coefficient de réflexion en amplitude en P et V supposé communs

On utilise la notation complexe pour calculer l'amplitude du mouvement de M :

$$\underline{\mathrm{A}} = a\exp\{-ikx\} + ar\exp\{-2ikL + ikx\} + ar^2\exp\{-2ikL - ikx\} + ar^3\exp\{-4ikL + ikx\} + \dots \tag{2.2}$$

La réflexion en P s'accompagne d'un déphasage $\exp\{ik2(L-x)\}$ et la réflexion en V s'accompagne d'un déphasage de $\exp\{2ikx\}$. On l'écrit sous forme de deux sommes géométriques, en séparant les puissances paires et impaires. Ces séries convergent car $|r| < 1$.

$$\underline{\mathrm{A}} = a\left(\exp\{-ikx\}\sum_{n=0}^{\infty}\left(r^2\exp\{-i2kL\}\right)^n\right) + r\exp\{ikL\}\exp\{ikx\}\sum_{n=0}^{\infty}\left(r^2\exp\{-i2kL\}\right)^n) \tag{2.3}$$

$$\underline{\mathrm{A}} = a\frac{\exp\{-ikx\} + r\exp\{ikL\}\exp\{ikx\}}{1 - r^2\exp\{-2ikL\}}. \tag{2.4}$$

Alors on peut calculer l'intensité du mouvement en M

$$A^2 = \underline{\mathrm{AA}}^* = a^2\frac{[1 + r\cos(2kx+\phi)]^2 + r^2\sin^2(2kx+\phi)}{[1 - r^2\cos\phi]^2 + r^2\sin^2\phi} \tag{2.5}$$

$$= a^2\frac{1 + 2r\cos(2kx+\phi) + r^2\cos^2(2kx+\phi) + r^2\sin^2(2kx+\phi)}{1 - 2r^2\cos\phi + r^4\cos^2\phi + r^4\sin^2\phi} \tag{2.6}$$

$$= a^2\frac{1 + 2r\cos(2kx+\phi) + r^2}{1 - 2r^2\cos\phi + r^4} \tag{2.7}$$

$$= a^2\frac{[1+r]^2 - 4r\sin^2(k[x+L])}{[1-r^2]^2 + 4r^2\sin^2\phi/2} \tag{2.8}$$

En se souvenant que $r < 0$, les nœuds de variation d'amplitude sont donc tels que

$$\sin(k[x+L]) = 1, \tag{2.9}$$

ce qui redonne $k(x+L) = p\pi$ soit $x = L - p\frac{\lambda}{2}$, des nœuds espacés de $\frac{\lambda}{2}$ à partir de l'extrémité L. De la même façon on peut retrouver les positions des ventres. Les amplitudes aux ventres et aux nœuds sont alors

$$A^2_{\text{ventre}} = a^2 \frac{[1-r]^2}{[1-r^2]^2 + 4r^2 \sin^2 \phi/2} \quad \text{et} \quad A^2_{\text{noeud}} = a^2 \frac{[1+r]^2}{[1-r^2]^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}} \tag{2.10}$$

Ces relations montrent mieux que l'analyse en terme de modes propres pourquoi il faut faire des réglages pour obtenir de belles ondes stationnaires. Il y a toujours des nœuds et des ventres, mais ils peuvent être plus ou moins marqués. Il faut satisfaire une condition de résonance qui minimise le dénominateur de A^2_{ventre} soit

$$\sin^2(\phi/2) = \sin^2(kL) = 0. \tag{2.11}$$

La résonance a lieu pour plusieurs fréquences multiples les unes des autres telles que $kL = n\pi$ soit $k = n\pi/L$ ou encore

$$L = n\frac{\lambda}{2} \tag{2.12}$$

On peut montrer l'animation GéoGébra de Pascal qui trace A^2_{ventre} en fonction de $\phi = 2kL$. On trouve des maxima donnés par lacondition de résonance. On voit que le coefficient de réflexion r influence la finesse des pics. Pour r faible, la différence entre l'amplitude d'un ventre à une résonance et hors résonance est faible. Les pics sont plus fins et plus hauts comparé au cas hors résonance si on augmente r. Pour $r = 1$, I diverge.

On peut représenter I_{ventre} à la résonance en fonction de la fréquence f du système excitateur que l'on fait varier. On obtient alors que

$$Q = \frac{f_n}{\Delta f_n} = \frac{n\pi\sqrt{3}}{1-r^2}. \tag{2.13}$$

Q est d'autant plus grand que r^2 est voisin de 1, ce qui confirme le lien entre atténuation et acuité de résonance, et que n est élevé c'est à dire que la corde est longue devant λ.

Pour une corde de Melde en nylon, $\mu = 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$, $T = 1\,\mathrm{N}$, avec $r = -0{,}95$, $L = 30\,\mathrm{cm}$, $\delta f_n = 0{,}8\,\mathrm{Hz}$ et $Q_n = 31 * n$.

À la résonance, on a bien ici aussi un maximum de transmission d'énergie de l'excitateur au système.

On a interprété la corde de Melde comme ça parce que les cavités c'est très utile et que cette expérience permet de visualiser les ventres et les nœuds au contraire de l'électromagnétisme, ou la phase oscille trop vite.

3 Cavité Fabry-Pérot et application au laser

L'interféromètre de Fabry-Pérot a été conçu à la fin du XIXè siècle. Il est constitué de deux miroirs semi réfléchissants parallèles, à hauts coefficients de réflexion. L'espace entre les lames de verre constitue une lame d'air.

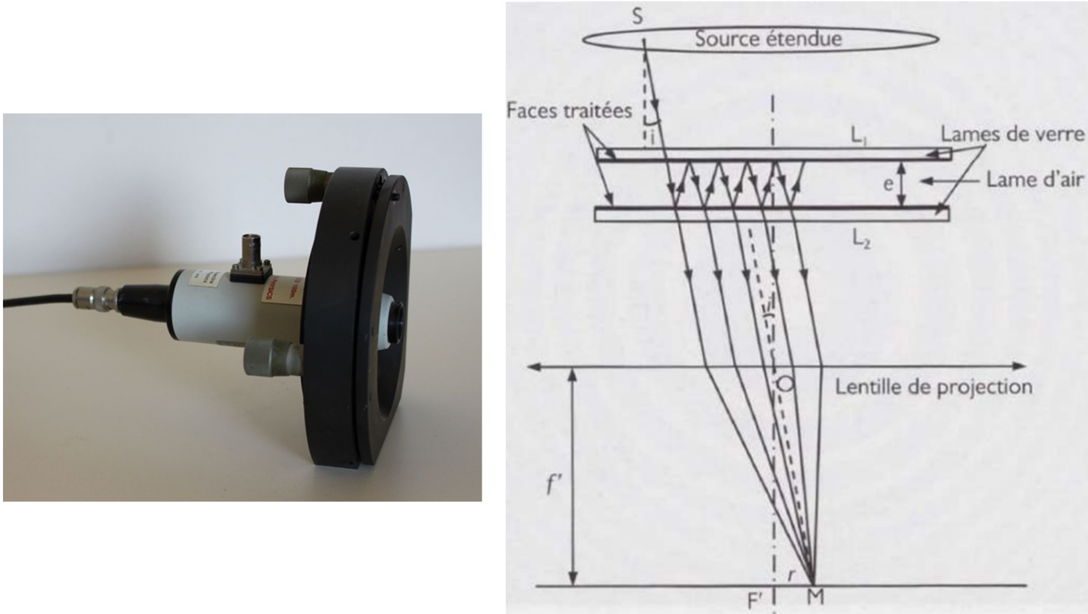

Fig. 3 : Photo et schéma d'un interféromètre de Fabry-Pérot.

Comme on le voit sur le schéma de la Figure 4, on a des interférences à N ondes, N étant fixé par les coefficients de réflexion des deux miroirs.

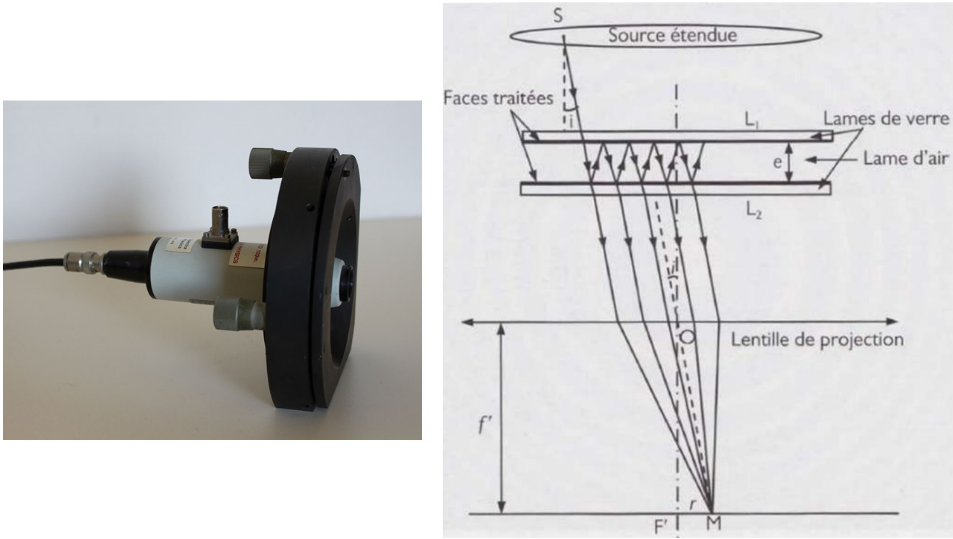

Fig. 4 : Rayons étudiés (on suppose $n = 1$).

On note A_1 l'amplitude du premier rayon sortant de l'interféromètre. Chaque onde est déphasée de $\phi = 2\pi\delta/\lambda = 4\pi\frac{e}{\lambda}\cos i$ par rapport à la précédente. De plus, chaque rayon successif subit deux déphasages supplémentaires. L'amplitude totale est la somme de toutes les ondes réfléchies :

$$A = A_1 \sum_{n=0}^{\infty} (r^2 \exp(i\phi))^n = \frac{A_1}{1 - R\exp(i\phi)} \tag{3.1}$$

Où on a noté $R = r^2$. Pour accéder à l'intensité on calcule $I = AA^*$. Après calculs, on arrive à :

$$I = \frac{I_{\max}}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\phi/2} \quad \text{avec} \quad I_{\max} = \frac{|A_1|^2}{(1-R)^2} \quad \text{et} \quad \phi = 4\pi\frac{e}{\lambda}\cos i \tag{3.2}$$

On peut dresser des analogies entre l'interféromètre et la corde de Melde Table 2.

Corde de Melde	Interféromètre de Fabry-Pérot
Pot vibrant de fréquence f	Rayonnement incident de fréquence f
Amplitude A	Champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$
Intensité A^2	Intensité $I = \left\lvert \vec{\mathbf{E}}^2 \right\rvert$
Coefficient de réflexion $R = r^2$	Coefficient de réflexion $R = r^2$
Longueur de la corde L	Épaisseur de la cavité e
Phase $\phi = 2kL$	Phase $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2e \cos i$
Mode n	Ordre d'interférence p

Tab. 2 : Analogies entre corde de Melde et Fabry-Pérot

Les lasers utilisent une cavité résonante de Fabry-Pérot qui sélectionne leur longueur d'onde selon le même principe. L'émission stimulée à l'intérieur de la cavité produit un rayonnement. en sortie de la cavité, seuls les photons correspondant à une fréquence de résonance de la cavité sont observés, ce qui donne au laser son caractère très monochromatique.

On peut visualiser et étudier cela à l'aide d'une *tête d'analyse* Fabry-Pérot. Sa longueur est variable, ce qui permet de changer ses fréquences de résonances.

Modes propres d'un laser
Tut tuuut la cavité d'analyse le sang.

Conclusion

Durant cette leçon on a pu observer la diversité des systèmes physiques pouvant être le siège de phénomènes de résonance. On a pu en dégager les principales caractéristiques.

- Une résonance apparaît dans certains système lorsqu'ils sont excités à une pulsation bien précise, dite pulsation de résonance. Les systèmes d'ordre 1 ne présentent jamais de résonance. En général, les phénomènes de résonance apparaissent à faible amortissement.
- La pulsation de résonance est déterminée par les caractéristiques du système résonant.
- La résonance est d'autant plus aigüe que l'amortissement est faible.