

LP 49 – Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités

11 juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L3

Bibliographie

🔗 ,

→

Prérequis

•

Expériences

👤

Table des matières

1 Oscillateurs linéaires : le pendule simple	2
1.1 Équation et plan de phase	2
1.2 Portrait de phase de l'oscillateur harmonique	2
1.3 Portrait de phase de l'oscillateur amorti	3
2 Oscillateur à potentiel non harmonique	3
2.1 Pendule aux grands angles	3
2.2 Portrait de phase, conséquences	4
2.3 Double puits de potentiel	4
3 Oscillateur de Van der Pol	5
3.1 Motivation	5
3.2 Bifurcation	5
3.3 Régime faiblement non linéaire	6
3.4 Régime fortement non-linéaire	7
4 Questions et commentaires	7
4.1 Questions	7
4.2 Commentaires	7

Introduction

On peut définir un oscillateur présentant une évolution non monotone caractérisée par un mouvement de va et vient régulier ou non entre certaines limites. Les oscillateurs sont omniprésents en physique. Dans cette leçon on va montrer l'intérêt des portraits de phase dans la caractérisation qualitative des systèmes. On va introduire les oscillateurs non linéaires qui présentent des comportements variés et donc une physique riche. Pour démarrer on va partir de ce qu'on connaît, l'oscillateur harmonique 1D, c'est l'oscillateur par excellence car tout oscillateur peut être approché par lui autour d'une position d'équilibre stable.

1 Oscillateurs linéaires : le pendule simple

1.1 Équation et plan de phase

L'équation régissant la dynamique du pendule simple de longueur l est la suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.1)$$

On appelle $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ et dans l'approximation des petits angles on a :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (1.2)$$

C'est une équation d'ordre 2. On va se ramener à deux équation d'ordre 1 pour étudier le *plan de phase*. On définit $y = \dot{\theta}$. On peut donc réécrire l'équation sous la forme :

$$\begin{aligned} y &= \dot{\theta} \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 \theta \end{aligned}$$

On peut faire ce qu'on vient de faire pour tout système d'ordre 2 s'écrivant $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$

L'état d'un système à un degré de liberté est représenté à tout instant dans le plan (x, y) (ici $(\theta, \dot{\theta})$) appelé **plan de phase**. En évoluant, le système décrit une trajectoire dans ce plan appelée **trajectoire de phase**. L'ensemble des trajectoires de phase du système forme son **portrait de phase**.

L'intérêt est que plutôt que d'avoir deux graphes $x(t)$ et $y(t)$ on n'a plus qu'un seul graphe $y(x)$, le temps devient une variable implicite. Les trajectoires de phase dépendent uniquement des conditions initiales (et du forçage si il y en a un).

1.2 Portrait de phase de l'oscillateur harmonique

L'étude du portrait de phase nous permet de déduire des informations sur le système.

- Trajectoires fermée : l'évolution du système est périodique
- Trajectoire elliptique : la conservation de l'énergie mécanique est l'équation d'une ellipse $(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} = E$
- Non croisement des trajectoires : L'unicité de la solution de l'équation différentielle implique que deux systèmes de C.I. différentes ne peuvent se trouver au même point du plan de phase au même moment.
- Symétrie par rapport à l'axe des abscisses : mouvement réversible
- Unique point fixe en $(0,0)$.

On voit que le plan de phase nous permet de dire beaucoup de choses sans avoir recours à la solution analytique ! Ici cela paraît obsolète mais dans des cas où la solution analytique est très dure à calculer ce sera particulièrement intéressant.

1.3 Portrait de phase de l'oscillateur amorti

On ajoute un terme de dissipation :

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2 = 0 \quad (1.3)$$

C'est la même équation d'évolution que le système masse ressort avec frottement ou que le RLC série.

L'ajout du terme dissipatif modifie l'évolution du système. L'énergie totale du système ne fera que diminuer et ainsi quelles que soient les conditions initiales la trajectoire de phase tendra vers le point $(0,0)$. On parle d'*attracteur*.

Attracteur : Sous espace de l'espace des phases vers lequel tend tout ou une partie des trajectoires de phases. Pour un système à un degré de liberté, l'attracteur peut être un point ou une courbe fermée.

On sait qu'un système de ce type est caractérisé par son facteur de qualité $Q = \tau\omega_0$, dont la valeur sépare deux régimes : pour $Q > 1/2$ régime pseudo périodique et pour $Q < 1/2$ régime anharmonique.

On peut distinguer ces deux régimes qualitativement sur le portrait de phase. Les trajectoires s'enroulent autour de l'attracteur (on parle de spirale stable) ou non (noeud stable). Le portrait de phase n'est plus symétrique par rapport à l'axe des abscisses, signe que le système n'est plus réversible (du à la dissipation).

On s'est intéressé pour le moment qu'à l'oscillateur harmonique c'est à dire à des oscillations dans un potentiel quadratique. C'est un cas simple et relativement général car il permet de décrire les petites oscillations au voisinage d'un point d'équilibre stable. Cela reste cependant un cas particulier, on va donc maintenant s'intéresser à un potentiel anharmonique et voir ce que la non-linéarité apporte comme nouveautés.

2 Oscillateur à potentiel non harmonique

2.1 Pendule aux grands angles

L'équation du pendule de la simple est :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (2.1)$$

Si on développe le sinus à l'ordre 3 on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0 \quad (2.2)$$

On cherche une solution perturbative avec un terme en $\sin(t)$ et en $\sin(3t)$:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t + \varepsilon \theta_0 \sin 3\omega t \quad (2.3)$$

avec $\varepsilon \ll 1$. L'équation du pendule devient donc au premier ordre en ε :

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\theta_0 \sin \omega t - 9\theta_0\omega^2\varepsilon \sin 3\omega t + \omega_0^2\theta_0\varepsilon \sin 3\omega t + \frac{\omega_0^2}{24}\theta_0^3 \sin 3\omega t - \frac{\omega_0^2}{8}\theta_0^3 \sin \omega t - \frac{1}{2}\omega_0^2\varepsilon\theta_0 \sin 3\omega t \sin^2 \omega t = 0 \quad (2.4)$$

En identifiant les termes d'ordre 0 et en les annulant on trouve :

$$\omega^2 \simeq \omega_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right) \implies T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad (2.5)$$

On voit déjà ici que la période d'oscillation dépend des conditions initiales, on a *perte d'isochronisme*

2.2 Portrait de phase, conséquences

On regarde le portrait de phase du pendule aux grands angles.

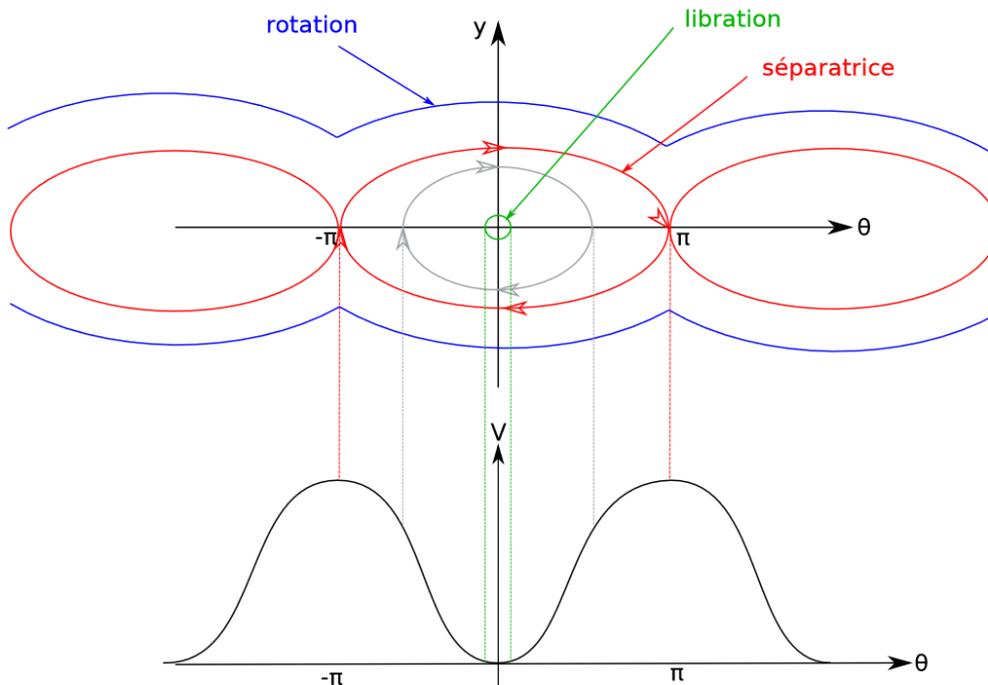


Fig. 1 : Portrait de phase du pendule aux grands angles - le dessiner et ne pas faire de tangentes horizontales pour ne pas faire d'ellipses

On remarque :

- Le portrait de phase est plus complexe. Les trajectoires se déforment et ne sont plus des ellipses. Si on part d'un angle $-\pi$ qui est un point fixe on rejoint l'angle π en un temps infini. L'origine n'est plus le seul point fixe, les différents points fixes correspondant aux différents extrema du potentiel. Si on lance le pendule avec une vitesse suffisante le pendule tourne sans arrêt dans la même direction.
- *Perte d'isochronisme* : la période de l'amplitude dépend des conditions initiales.
- *Enrichissement spectral* : sur la transformée de Fourier un pic apparaît à 3ω . Cet enrichissement spectral est une conséquence très générale de l'ajout de non linéarités.

2.3 Double puits de potentiel

Un autre exemple simple de potentiel exhibant une physique intéressante est le potentiel $V(\theta) = -a\theta^2 + b\theta^4$ avec $b > 0$. On peut le réaliser concrètement avec un pendule pesant sur lequel on rajoute deux aimants de part et d'autre.

Pour $a < 0$ le seul point fixe est $\theta = 0$ qui est stable. Pour $\theta > 0$, on a trois extrema du potentiel : $\theta = 0$ point fixe instable, et $\theta = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ correspondant à des points fixes stables.

On peut représenter les points fixes en fonction de a sur un diagramme appelé *diagramme de bifurcation*. On a ici une *bifurcation fourche* en $a = 0$: un point fixe stable devient instable et deux points fixes stables apparaissent. Cette notion de bifurcation est essentielle dans l'étude des systèmes dynamiques non linéaires, on en reparlera dans la prochaine partie.

Avec des non linéarités dans le potentiel on voit émerger de nouveaux comportements : perte d'isochronisme et bifurcation, qui intervient quand on fait varier un paramètre de contrôle.

Cependant ces oscillateurs possèdent tous des points fixes vers lesquels ils convergent en présence de dissipation, ce qui annule les oscillations.

Peut-on modéliser des oscillateurs qui oscillent durablement (cœur, horloge, la température du corps, l'expression des gènes, les instruments de musique, le grincement d'une porte), on parle alors d'oscillateurs auto-entretenus. Le forçage n'a pas nécessairement besoin d'être à la pulsation de sortie. Ces oscillateurs sont fortement non linéaires et la non linéarité apparaît autre part que dans le potentiel.

3 Oscillateur de Van der Pol

3.1 Motivation

Cherchons une équation décrivant un oscillateur auto-entretenu. On part de l'oscillateur harmonique amorti. En plus de l'amortissement qui fait tendre les solutions vers 0, il y a le problème de l'invariance par dilatation, si $x(t)$ est solution alors $\alpha x(t)$ l'est aussi. Or les oscillations cardiaques par exemple se font à une amplitude bien définie, il faut que notre équation en rende compte.

On peut y parvenir en faisant dépendre le terme d'amortissement de l'amplitude des oscillations. On veut que les petites oscillations soient amplifiées (amortissement négatif) mais que les grandes oscillations soient amorties on peut donc prendre un amortissement

$$\gamma(x) = -\gamma_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right) \quad (3.1)$$

Cela mène, après changement de variables à l'équation de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (3.2)$$

Cette équation a été historiquement introduite par van der Pol pour expliquer des oscillations dans un tube à vide.

3.2 Bifurcation

Un oscillateur obéissant à Van Der Pol est le suivant

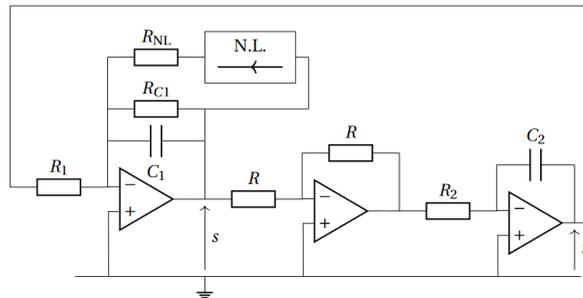


Fig. 2 : Schéma électrique d'un oscillateur de Van Der Pol

Oscillateur de Van der Pol

On câble l'oscillateur de Van der Pol avec les valeurs données dans le fascicule d'électronique. On utilise par contre l'oscillateur déjà câblé P42.51. Attention à bien mettre une tension $V_0 \simeq 1\text{ V}$ dans l'élément non linéaire.

NL désigne l'élément non-linéaire dont la tension en sortie s_{NL} est reliée à l'entrée e par $s_{NL} = ae^3 - be$ avec $a > 0$ et $b > 0$. Le paramètre de l'équation μ est contrôlé par la valeur de R_{NL} . Les sorties mesurées à l'oscilloscope sont notées s et u .

Alimenter le circuit de Van der Pol en plaquette P42.5, utiliser une boîte à décades pour R_{NL} . Choisir $R_{NL} > 17\text{ k}\Omega$ et observer les sorties à l'oscilloscope en mode XY. Rien ne se passe

Lorsque R_{NL} est supérieure à valeur critique déterminée par les autres constituants, le coefficient μ est négatif. Le portrait de phase possède un unique attracteur en $(0, 0)$. Les petites perturbations autour du point fixe sont amorties.

Diminuer R_{NL} jusqu'à environ $17\text{ k}\Omega$. On observe sur l'oscilloscope l'apparition d'une trajectoire fermée

Lorsque R_{NL} est inférieur à la valeur critique, μ est positif. On peut montrer que $(0, 0)$ devient un point fixe instable l'attracteur est désormais une courbe fermée appelée *cycle limite*. On peut le voir avec l'équation, les petites oscillations sont amplifiées jusqu'à une certaine valeur puis amortie. La forme du cycle limite ne dépend pas des conditions initiales mais uniquement des valeurs des constituants du circuit

Ouvrir la boucle contenant l'élément non-linéaire pour placer le système en $(0, 0)$ puis la refermer. Court circuiter la boucle non-linéaire pour créer une condition initiale différente puis retirer. Le cycle limite est le même

On est de nouveau en présence d'une bifurcation, différente de celle du double puits : quand μ devient positif, le point fixe stable devient instable et un cycle limite apparaît, on parle de *bifurcation de Hopf*.

On voit que le cycle limite pour des valeurs faible de μ ressemble à une ellipse. C'est cohérent avec l'équation de Van der Pol. A $\mu \rightarrow 0$, l'équation se ramène à l'oscillateur harmonique. Ce régime est dit faiblement non linéaire et est caractérisé par un signal de sortie quasi-sinusoidal.

3.3 Régime faiblement non linéaire

Pour caractériser ce régime, calculons l'amplitude des oscillations, On se place dans l'approximation d'un signal quasi-sinusoidal $x(t) = x_0 \sin(t)$. L'énergie du système est donc celle d'un oscillateur harmonique :

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \omega_0^2 \frac{1}{2}x^2 \quad (3.3)$$

Par définition du cycle limite, l'énergie totale est conservée en moyenne sur un période, or

$$\frac{dE}{dt} = \ddot{x}\dot{x} + \omega_0^2 x\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = \mu\ddot{x}(1 - x^2) \quad (3.4)$$

Ainsi en moyenne on a

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \mu \langle \dot{x}^2 \rangle - \mu \langle x^2 \dot{x}^2 \rangle = 0 \quad (3.5)$$

Connaissant la forme de la solution on peut calculer ces moyennes. On obtient alors

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}^2 \rangle &= \langle x^2 \dot{x}^2 \rangle \\ \frac{1}{2}\omega_0^2 r^2 &= \frac{1}{8}\omega_0^2 r^4 \\ \boxed{r} &= 2 \end{aligned}$$

L'amplitude des oscillations ne dépend pas de μ . Cependant, il s'agit ici de la tension adimensionnée par le changement de variable, en réalité les oscillations du cycle limite varient en $\sqrt{\mu}$.

Diminuer la valeur de R_{NL} à $300\ \Omega$ et observer la déformation du cycle limite

Lorsque μ augmente, les oscillations ne sont plus sinusoidales, on entre dans le régime fortement non-linéaire où les oscillations comportent une phase rapide et une lente.



3.4 Régime fortement non-linéaire

On réécrit l'équation de Van der Pol sous la forme d'un système, l'équation s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{x} + \mu \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \right] + x = 0 \quad (3.6)$$

On pose alors

$$\begin{cases} F(x) &= \frac{x^3}{3} - x \\ y &= \frac{\dot{x}}{\mu} + F(x) \end{cases} \quad (3.7)$$

On obtient alors le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu(y - F) \\ \dot{y} &= -\frac{x}{\mu} \end{cases} \quad (3.8)$$

Sur le portrait de phase modifié (x, y) on fait alors apparaître $F(x)$. On se place dans le cas $\mu \gg 1$. On a alors

$$\begin{cases} \dot{x} &\gg 1 & \text{et} & |\dot{y}| \ll 1 & \text{pour} & y > F(x) \\ -\dot{x} &\gg 1 & \text{et} & |\dot{y}| \ll 1 & \text{pour} & y < F(x) \end{cases} \quad (3.9)$$

On illustre ça avec des oscillations de relaxation, explication, deux échelles de temps.

on voit sur ce schéma que les oscillations font apparaître deux échelles de temps différentes. Elles sont constituées d'une alternance de variations de tension très rapides puis très lentes. On parle d'oscillations de relaxation.

On peut alors éventuellement calculer la période.

Conclusion

Dans toute cette leçon on s'intéresse à des oscillations libres. On s'est familiarisés avec la notion de portrait de phase sur l'exemple de l'oscillateur harmonique.

On a vu que les non linéarités avaient pour conséquences générales :

- la perte d'isochronisme des oscillations
- l'enrichissement spectral

On a ensuite vu la notion de bifurcation et une non linéarité dans le terme de dissipation nous a permis de décrire les oscillations auto-entretenuës à travers l'exemple de l'oscillateur de Van der Pol. On y a vu la notion de cycle limite et d'oscillations de relaxation.

Mais encore une fois on s'est restreints à des oscillations libres. Un simple pendule en régime forcé paraît particulièrement imprévisible : le comportement est chaotique. Le comportement aux temps long est apériodique dans un système déterministe qui a donc une extrême sensibilité aux conditions initiales. Le chaos peut également intervenir dans un système non forcé comme le double pendule, il faut plus de degrés de liberté. Avec le chaos c'est un nouveau champ d'étude qui s'ouvre, où l'étude du plan de phase est cruciale car là où les signaux temporels des systèmes chaotiques paraissent imprévisibles, l'étude de leur plan de phase permet de faire émerger des structures.

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

-

4.2 Commentaires

-