

# Mesures de longueurs

---

Théo CLAUDE, Thomas LE REUN

*C'est pas parce qu'elles sont plus grosses que... enfin si, en général c'est corrélié mais...*  
Patrick RIGORD le 25/11/14 à 8h et des poussières.

## Références

- [1] Jean-Baptiste Delambre. *Base du système métrique décimal, ou Mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone*. Baudouin, 1806 – 1810. Disponible sur Gallica.
- [2] Jean-Charles Borda. *Description et usage du cercle de réflexion, avec différentes méthodes pour calculer les observations nautiques*. Imprimerie de Didot l'Aîné, 1787. Disponible sur Gallica.
- [3] Asch et al. *Les capteurs en instrumentation industrielle*. Dunod, 2006. 343-344.
- [4] C. Kittel. *Physique de l'état solide*. Dunod, 1998. 27.

## Table des matières

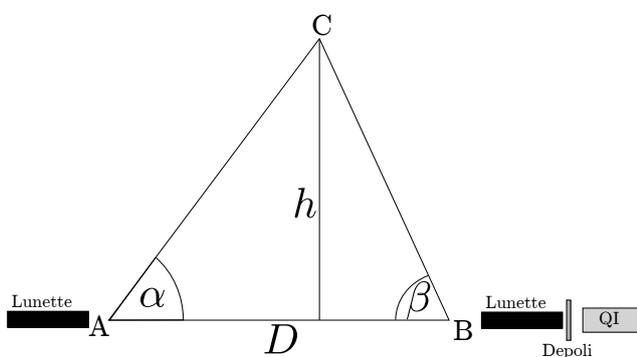
<b>1</b>	<b>Mesure par méthode de la parallaxe</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Mesure par télémétrie acoustique</b>	<b>3</b>
2.1	Principe . . . . .	3
2.2	Mise en œuvre . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Mesure de distance par inductance variable</b>	<b>4</b>
3.1	Relations entre inductance propre et entrefer . . . . .	4
3.2	Principe de la mesure . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Mesure interférométrique de l'épaisseur d'une lame de verre</b>	<b>5</b>
4.1	Problématique . . . . .	5
4.2	Mesure à partir du spectre cannelé . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Diffraction d'électrons</b>	<b>6</b>
5.1	Vers des distances interatomiques . . . . .	6
5.2	Diffraction par une poudre de graphite . . . . .	6

## Introduction

Caractériser un système passe souvent par l'estimation de ses dimensions spatiales. Lorsque les objets sont à taille humaine, une mesure via une règle suffit tant que la précision de la mesure n'excède pas le millimètre. Nous allons détailler ici plusieurs techniques de mesures de longueurs qui permettent d'accéder à une très large gamme de distances, de la position d'une étoile aux dimensions interatomiques. Nous remarquerons qu'à chaque échelle de longueur correspond un appareil de mesure précis, il n'existe pas de méthode permettant de couvrir toutes les échelles efficacement.

## 1 Mesure par la méthode de la parallaxe

Il s'agit d'un moyen de mesure de grandes distances -on peut estimer la distance entre la Terre et une étoile par ce moyen- qui découle directement de la trigonométrie. Dans un triangle, connaissant une longueur et deux angles, on peut connaître les deux côtés d'un triangle.



La principale difficulté réside dans la mesure des angles, on utilise pour cela deux goniomètres, l'un en A, l'autre en B. On commence par régler la visée de la ligne (AB). Pour cela, on vise à travers l'un des goniomètre la lunette de l'autre par laquelle passe de la lumière de manière à viser le réticule de l'autre lunette. On procède de même pour le réglage réciproque. On peut ensuite viser un point remarquable en C avec les deux instruments. L'angle dont on a tourné la lunette correspond à  $\alpha$  et  $\beta$ .

On montre que

$$h = \frac{D}{\cotan\alpha + \cotan\beta} \quad (1)$$

L'erreur provient de l'erreur sur la mesure de la différence entre les angles mesurés sur le vernier des goniomètres et de la mesure au mètre ruban de la distance entre les deux instruments. Les mesures de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $D$  étant réalisées sur des appareils différents, les erreurs sont indépendantes. Alors :

$$\frac{\Delta h}{h} = \sqrt{\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{h}{D}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\alpha} + \frac{1}{\sin^4\beta}\right) \Delta\alpha^2} \quad \text{avec } \Delta\alpha = \Delta\beta. \quad (2)$$

Cette expérience ne semble pas particulièrement amusante, pourtant, elle a un intérêt capital. Les mesures par triangulation sont à la base des systèmes de GPS. Par ailleurs, ce sont de telles mesures réalisées par Delambre et Méchain à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle qui ont permis d'avoir pour la première fois une mesure quantitative de la géométrie de la terre (par exemple sa courbure). Les illustrations 1 et 2 montrent à quoi ressemblaient les ouvrages publiés à cette occasion<sup>1</sup>.

1. Vous noterez que je suis moins drôle que Théo

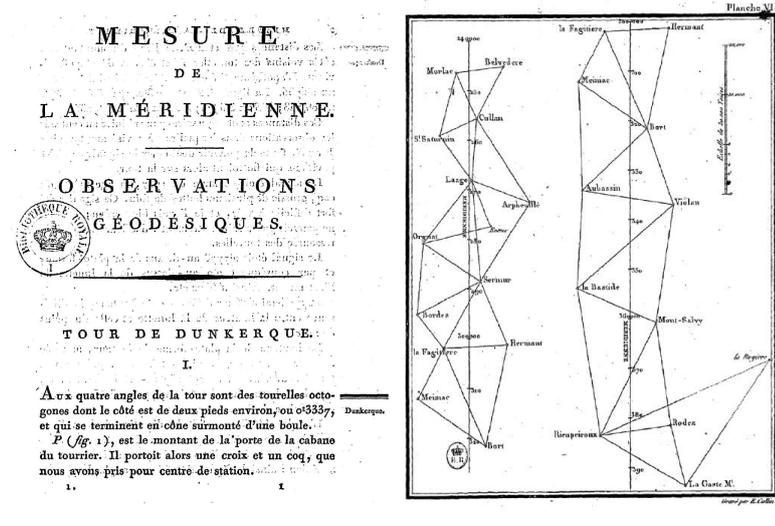


FIGURE 1 – Extraits de l’ouvrage de Delambre [1] sur la mesure du méridien terrestre en vue de définir le mètre.

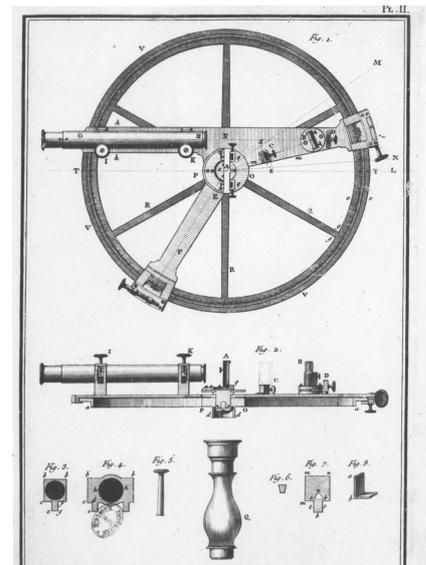


FIGURE 2 – Illustration extraite de [2] décrivant l’appareil de mesure des angles utilisé par Méchain et Delambre

Notes

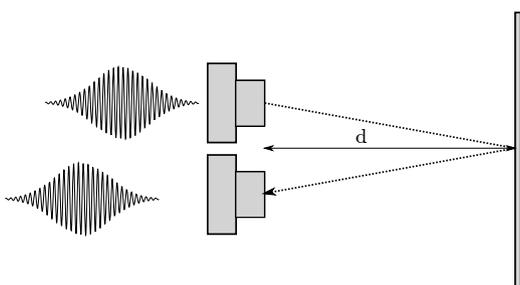
## 2 Mesure par télémétrie acoustique

### 2.1 Principe

La vitesse des ondes sonores dans l’air est d’environ  $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Si l’on envoie une onde acoustique localisée temporellement sur un objet réfléchissant les ondes acoustique -typiquement toute phase condensée où la vitesse des ondes sonores et de l’ordre du  $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ - en mesurant l’écart entre l’émission et la réception, il est possible de remonter à la distance entre émetteur et objet réfléchi.

Pourvu que l’on sache mesurer des écarts temporels allant jusqu’à  $10^{-4} \text{ s}$ , ce type de mesure est particulièrement adapté à la mesure de position allant du centimètre au décamètre. Au-delà, du fait de l’émission en ondes sphérique, le signal récupéré peut être trop faible pour être détectable.

### 2.2 Mise en œuvre



On envoie des salves périodiques de fréquence  $40 \text{ kHz}$  (fréquence de résonance des matériaux piézo-électriques utilisés dans l’émetteur) à l’aide d’un générateur de fonction AGILENT vers un écran situé à une distance  $d$ . On enregistre à l’oscilloscope le signal envoyé et le signal reçu et l’on mesure l’écart temporel entre les deux noté  $\Delta t$ . On vérifie la relation suivante :  $2d = c\Delta t$

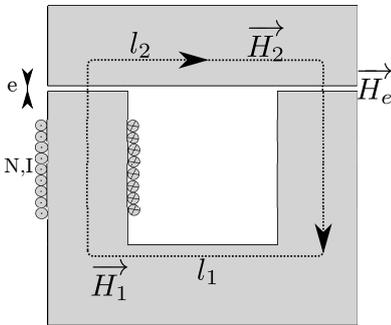
Les sources d'erreurs proviennent de la détection des la position des salves, de la position de l'écran, et également du fait qu'il existe un écart latéral entre émetteur et récepteur. On peut vérifier que cette dernière source d'erreurs est négligeable devant les autres.

## Notes

### 3 Mesure de distance par inductance variable

Le principe du fonctionnement des capteurs inductifs est détaillé dans le livre de Asch et al. [3].

#### 3.1 Relations entre inductance propre et entrefer



On suppose un enroulement de  $N$  spires autour d'un matériau ferro-magnétique de permittivité  $\mu$ , parcourues par un courant  $I$ . On suppose que le matériau ferro-magnétique conduit toutes les lignes de champ passant dans l'enroulement, et qu'il n'y a pas de pertes au niveau de l'entrefer. Comme  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ , sous ces conditions on peut appliquer le théorème d'Ampère sur un contour fermé comme représenté ci-contre. Notons  $l$  la longueur d'une ligne de champ sans entrefer. En supposant que  $\mathbf{H}_1$  est uniforme, on obtient que  $\mathbf{H}_e$  est le même dans les deux entrefers.

On obtient alors  $H_1 l_1 + H_e 2e + H_2 l_2 = NI$ . De plus, les relations de passage donnent :

$$B_1 = B_e \implies \mu H_1 = \mu_0 H_e \quad B_e = B_2 \implies \mu_0 H_e = \mu H_2 \quad (3)$$

ainsi,  $\mathbf{B}$  est uniforme le long d'une ligne de champ, il vient alors :

$$l_1 \frac{B}{\mu} + 2e \frac{B}{\mu_0} + l_2 \frac{B}{\mu} = NI \quad (4)$$

soit, en posant  $l \equiv l_1 + l_2$  et en notant  $L$  l'auto-inductance du bobinage :

$$L = \frac{\mu N^2 S}{l} \left( 1 + \frac{2e \mu_r}{l} \right)^{-1}. \quad (5)$$

#### 3.2 Principe de la mesure

Dans l'expression (5) de l'inductance, nous pouvons déterminer par un ordre de grandeur les longueurs qu'il est possible de mesurer. Comme  $\mu_r \sim 10^3$  et  $l \sim 0.3$  m, on obtient  $l \mu_r \sim 3 \cdot 10^{-3}$  m, ce qui signifie que l'on peut mesurer avec précision des distances allant de 0 à 3 mm. Alors :

$$L \simeq L_0 \left( 1 - \frac{e}{l_0} \right) \quad (6)$$

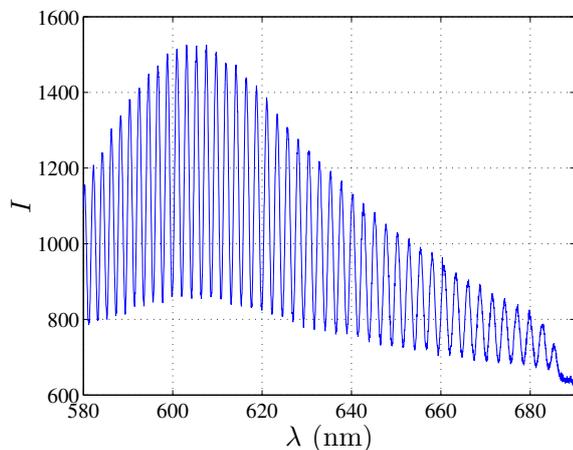
On peut donc tracer une droite d'étalonnage pour les courtes distance pour montrer qu'il est possible, connaissant l'inductance de remonter à la longueur de l'entrefer. Ce type de capteur est utilisé en industrie. Chaque élément ferromagnétique est monté sur un corps, la connaissance de l'auto-induction permet de remonter à la position relative des deux corps. On parle de capteur de position. La loi que l'on obtient permet de discuter la fabrication d'un tel capteur. En examinant la courbe donnant l'inductance, on comprend dans quelle gamme une mesure peut-être fiable ; il s'agit des longueurs pour lesquelles  $L$  varie le plus avec  $e$  i.e pour  $e \rightarrow 0$ .

## Notes

## 4 Mesure interférométrique de l'épaisseur d'une lame de verre

### 4.1 Problématique

On souhaite mesurer l'épaisseur d'une lame de verre de l'ordre de  $100 \mu\text{m}$ . On peut utiliser une mesure interférométrique à partir de l'interféromètre de Michelson utilisé en lumière blanche. En ajoutant la lame, on ajoute une différence de marche supplémentaire qu'il faut compenser en traduisant l'un des miroirs de  $\Delta x = e(n - 1)$ . Deux problèmes se présentent alors : la précision atteignable ne dépasse pas le demi- graduation du vernier soit  $5 \mu\text{m}$  ; par ailleurs, l'indice du verre dans la lame varie relativement de 5 %.



Il faut donc procéder à un autre type de mesure, sur une plage de longueur d'onde sur laquelle l'indice varie peu. En partant d'une configuration où le Michelson est réglé en lumière blanche, l'ajout de la lame crée un blanc d'ordre supérieur. L'analyse au spectromètre révèle un spectre cannelé. Les interférences constructives correspondent à  $\delta = p\lambda$  avec  $\delta = 2e(n(\lambda) - 1)$ . La lame de microscope employée est vendue avec une notice sur laquelle sont reportées les valeurs de l'indice en fonction de la longueur d'onde.

### 4.2 Mesure à partir du spectre cannelé

On choisit deux cannelures pour des  $\lambda$  tels que  $n$  varie faiblement tout en ayant un nombre important de maxima comptés. On a alors les relations :

$$\begin{aligned} p_1 \lambda_1 &\simeq 2e(n(\lambda_m) - 1) \\ p_2 \lambda_2 &\simeq 2e(n(\lambda_m) - 1) \end{aligned} \quad (7)$$

Un nouveau problème se présente alors : on ne connaît pas  $p$  de manière absolue, nous n'avons accès ici qu'à  $p_2 - p_1$ . Il faut donc faire intervenir cette quantité :

$$p_2 - p_1 = 2(n - 1)e \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \quad (8)$$

ce qui donne finalement :

$$e \simeq (p_2 - p_1) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{2(n(\lambda_m) - 1)}. \quad (9)$$

Calcul d'incertitude total :

$$\left( \frac{\Delta e}{e} \right)^2 = \left( \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2 \left[ \frac{1}{\lambda_1^4} + \frac{1}{\lambda_2^4} \right] \Delta \lambda^2 + \left( \frac{\Delta n}{n - 1} \right)^2 \quad (10)$$

Pour éprouver cette méthode au maximum, il faut que l'erreur relative sur la variation d'indice soit de l'ordre de celle sur la longueur d'onde. Le repérage des maxima donne  $\Delta\lambda = 0.25 \text{ nm}$ ; la grandeur pertinente pour le calcul d'erreur est  $\lambda_1 - \lambda_2$ . On cherche donc à avoir  $\Delta\lambda/(\lambda_1 - \lambda_2) \sim \Delta n/n$ . Cela est bien réalisé en travaillant entre 600 et 660 nm, où la variation d'indice est de 0.003.

## Notes

## 5 Diffraction d'électrons

### 5.1 Vers des distances interatomiques

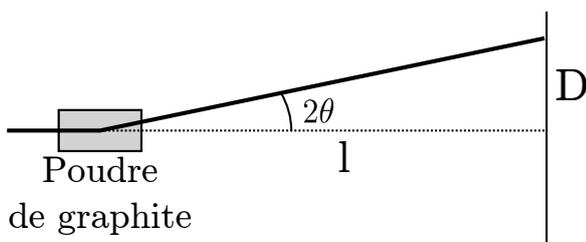
Les interférences lumineuses ont précédemment permis la détermination d'une longueur micrométrique. La grandeur qui est pertinente pour déterminer l'échelle mesurable est la longueur d'onde. Si l'on souhaite accéder à des longueurs plus faibles encore, une méthode est donc d'employer des longueurs d'onde plus courtes. Cependant, cela nous amènerait à employer des rayonnements à haute énergie, dangereux.

Nous allons préférer utiliser la dualité onde-particule des électrons. En accélérant des électrons grâce à une différence de potentiel  $U$ , nous obtenons des particules de longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2meU}}. \quad (11)$$

Pour  $U \sim 1 \text{ kV}$ ,  $\lambda \sim 4 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ . On perçoit donc que l'on puisse sonder des distances inter-atomiques qui sont du même ordre de grandeur.

### 5.2 Diffraction par une poudre de graphite



On peut diffracter un faisceau d'électrons par un réseau de graphite à l'aide d'une expérience préparée (P.93.6). Il faut bien en lire le mode d'emploi sous peine de détruire une lampe en lui faisant supporter une tension mortelle de 1 kV. De plus ce mode d'emploi détaille la physique de ce à quoi l'on s'attend.

D'après les lois de Bragg [4], pour une distance entre plans réticulaires  $d$ ,

$$2d \sin(\theta) = \lambda \quad (12)$$

pour le premier ordre. En mesurant  $l$  et  $D$ , on accède à  $\theta$ . En traçant  $\sin \theta = f(1/\sqrt{U})$ , on obtient une droite de pente :

$$\frac{h}{2d\sqrt{2me}}. \quad (13)$$

On observe en fait deux anneaux qui correspondent chacun à une distance réticulaire. On s'attend à  $d_1 = 123 \text{ pm}$  et  $d_2 = 213 \text{ pm}$ .

## Notes

## Conclusion

Au cours de ces différentes expériences, nous pouvons noter que nous avons toujours utilisé une longueur de référence, adaptée à l'échelle mesurée. Par exemple, pour la mesure de distance par la méthode de la parallaxe, il s'agit du mètre ruban. Nous avons également utilisé une règle et un vernier. Ce n'est qu'à partir de la mesure à l'aide de longueurs d'ondes que nous avons changé de référence.