

# Électromagnétisme dans le vide

Préparation à l'agrégation de l'ENS de Lyon 2020-2021



Jérémy Ferrand



# Bibliographie

## Bibliographie classique

- Cap prépa - Physique - 1ère et 2nd année
- H. Gié - Électromagnétisme - 1ère et 2nd année
- P. Roux - Électromagnétisme
- Bertin Faroux Renault - Électromagnétisme Tomes 1, 3 et 4
- R. Feynman - Électromagnétisme 1
- H Prépa - Électromagnétisme - 1ère et 2nd année
- H Prépa - Ondes

## Bibliographie pour aller plus loin

- J. D. Jackson - Électrodynamique classique
- Landeau - Électromagnétisme des milieux continus
- Purcell - Electromagnétisme - Cours de Berkley

## Bibliographie pour méthodes mathématiques

- W. Appel - Mathématiques pour la physique
- A Alastuey - Physique et outils mathématiques

## Épreuves d'agrégation lié à l'électromagnétisme

- Épreuve A 2018 : Interaction de Wan der Waals. Dipôles et interactions entre eux.
- Épreuve A 2013 : Équations de Maxwell, Force de Lorentz, Densité d'énergie électromagnétique, Vecteur de Poynting, Condensateur, OPPM, Induction, Conducteur parfait, Pression de Radiation, Rayonnement Dipolaire.
- Épreuve A 2011 : Modèle de l'électron élastiquement lié.
- Épreuve A 2008 : Contribution des noms de l'électromagnétisme, Équations de Maxwell, Condensateur plan, Solénoïde infini, ARQS, Énergie électromagnétiques, Potentiels retardés, Propagation dans un câble coaxial.
- Épreuve A 2007 : Dipôle magnétique, propagation dans un plasma, Loi d'Ohm, Magnétohydrodynamique.
- Épreuve A 2003 : Équations de Maxwell, Potentiel et potentiel vecteur, Équations sur le potentiel, Jauge de Lorentz, Force de Lorentz, Fil rectiligne chargé, Rayonnement dipolaire et champs à partir de  $\mathbf{A}$ , Énergie, Antenne, Modèle de l'électron élastiquement lié, propagation guidée et fibre optique.
- Épreuve A 2001 : Force de Lorentz, Équations de Maxwell, Conservation de la charge, Énergie volumique, Conservation de l'énergie et vecteur de Poynting, Interaction lumière matière, Magnétisme classique atomique, RMN classique.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels mathématiques</b>	<b>9</b>
1.1	Analyses vectorielles . . . . .	9
1.1.1	Champ scalaire, champ vectoriel . . . . .	9
1.1.2	Gradient . . . . .	10
1.1.3	Divergence . . . . .	10
1.1.4	Rotationnel . . . . .	12
1.1.5	Laplacien scalaire . . . . .	13
1.1.6	Laplacien vectoriel . . . . .	13
1.2	Relations vectorielles . . . . .	14
1.2.1	Théorème de Stokes . . . . .	14
1.2.2	Théorème de Green-Ostrogradsky . . . . .	14
1.2.3	Conséquences . . . . .	14
1.2.4	Égalités vectorielles . . . . .	15
1.3	Différents systèmes de coordonnées . . . . .	15
1.3.1	Cartésien . . . . .	15
1.3.2	Cylindrique . . . . .	16
1.3.3	Sphérique . . . . .	16
1.4	Fonction de Green . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Électrostatique</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction et historique . . . . .	19
2.2	Cadre de l'électrostatique . . . . .	20
2.3	Approche intégrale et loi de Coulomb . . . . .	21
2.3.1	Loi de Coulomb (1780) . . . . .	21
2.3.2	Champ de Coulomb . . . . .	22
2.3.3	Répartition continue de charges . . . . .	22
2.4	Liens avec les équations de Maxwell . . . . .	23
2.4.1	Compatibilité avec la force de Coulomb . . . . .	23
2.4.2	Équivalence des deux approches . . . . .	24
2.5	Théorème de Gauss . . . . .	24
2.6	Structure du champ électrostatique . . . . .	25
2.6.1	Invariance et principe de Curie . . . . .	25
2.6.2	Exemples d'invariants . . . . .	26
2.6.3	Propriétés de symétrie des champs électriques . . . . .	26
2.6.4	Calculs de champ électrostatique . . . . .	27
2.7	Potentiel électrostatique . . . . .	30
2.7.1	Définition . . . . .	30
2.7.2	Exemples de calculs . . . . .	31
2.7.3	Signification physique . . . . .	31

2.7.4	Développement multipolaire . . . . .	32
2.8	Équation de Poisson . . . . .	33
2.8.1	Mise en équation . . . . .	33
2.8.2	Application à l'écrantage de Debye [Exercice] . . . . .	33
2.8.3	Retour à la forme intégrale : Fonction de Green . . . . .	35
2.9	Énergie des distributions de charges discrètes . . . . .	36
2.9.1	Théorème de l'extrémum du potentiel . . . . .	36
2.9.2	Énergie d'une distribution discrète . . . . .	37
2.10	Énergie des distributions continues . . . . .	38
2.11	Stockage de l'énergie électrostatique : les condensateurs . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Magnétostatique</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	Introduction et rappels . . . . .	41
3.2	Lois locales et lois intégrales . . . . .	42
3.2.1	Lois locales . . . . .	42
3.2.2	Conséquences : lois globales . . . . .	43
3.2.3	Théorème d'Ampère . . . . .	44
3.3	Symétries et calculs de champs . . . . .	44
3.3.1	Symétries du champ magnétique . . . . .	44
3.3.2	Exemples de calculs du champ $\mathbf{B}$ . . . . .	45
3.4	Dipôle magnétique . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Relations de passage</b> . . . . .	<b>51</b>
4.1	Relation de passage pour le champ électrique . . . . .	51
4.2	Relation de passage pour le champ magnétique . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Approximation des régimes quasi-stationnaires</b> . . . . .	<b>55</b>
5.1	Équations de Maxwell et potentiels . . . . .	55
5.1.1	Pourquoi le courant de déplacement ? . . . . .	55
5.1.2	D'où proviennent $\epsilon_0$ et $\mu_0$ ? . . . . .	56
5.1.3	Équations de propagation des potentiels et des champs . . . . .	57
5.1.4	Solutions . . . . .	59
5.2	Démarche naïve de l'ARQS . . . . .	61
5.2.1	Méthode 1 : en utilisant le calcul de magnétostatique . . . . .	61
5.2.2	Méthode 2 : avec des ordres de grandeur . . . . .	61
5.2.3	Contre exemple et erreurs commises . . . . .	62
5.3	Démarche rigoureuse de l'ARQS . . . . .	62
5.3.1	Introduction . . . . .	62
5.3.2	Régime quasi-stationnaire électrique ( $\epsilon \ll 1, \xi \ll 1$ ) . . . . .	63
5.3.3	Régime quasi-stationnaire magnétique ( $\epsilon \ll 1, \xi \gg 1$ ) . . . . .	64
5.3.4	Remarques supplémentaires . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Conducteurs</b> . . . . .	<b>67</b>
6.1	Régime statique - Conducteurs à l'équilibre . . . . .	67
6.2	Régime dynamique - Conduction . . . . .	67
6.3	Électroneutralité d'un conducteur . . . . .	70
6.4	Retour sur l'ARQS . . . . .	72
6.5	Ondes et métaux conducteurs : effet de peau . . . . .	73
6.5.1	Métal imparfait . . . . .	73
6.5.2	Limite du métal parfait . . . . .	74
6.5.3	Force exercée sur le conducteur par le champ . . . . .	74

6.6	Magnétorésistance et effet Hall . . . . .	75
6.6.1	Magnétorésistance . . . . .	75
6.6.2	Effet Hall . . . . .	76
6.7	Plasma . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Guidage d'ondes</b>	<b>81</b>
7.1	Réflexion sur un métal parfait : nécessité d'une onde réfléchie . . . . .	81
7.2	Réflexion sous incidence oblique . . . . .	82
7.3	Guide d'ondes . . . . .	83
7.3.1	Plan-plan . . . . .	83
7.3.2	Extension au guide rectangulaire . . . . .	87
<b>8</b>	<b>Induction électromagnétique</b>	<b>89</b>
8.1	Énoncé historique de la loi de Faraday . . . . .	89
8.2	Cas de l'induction de Neumann . . . . .	90
8.3	Induction de Lorentz . . . . .	90
8.4	Transformations des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ suivant les référentiels . . . . .	91
8.4.1	Cadre de l'étude . . . . .	91
8.4.2	Transformation des champs . . . . .	92
8.5	Cadre général de l'induction de Lorentz . . . . .	96
8.6	Courants de Foucault . . . . .	98
<b>9</b>	<b>Rayonnement dipolaire</b>	<b>103</b>
9.1	Cadre de l'étude et hypothèses . . . . .	103
9.2	Expression du champ électromagnétique . . . . .	104
9.3	Comportement énergétique du rayonnement . . . . .	106
9.3.1	Le vecteur de Poynting . . . . .	106
9.3.2	Cas du rayonnement dipolaire . . . . .	107
9.4	Rayonnement d'antenne . . . . .	108
9.4.1	Antenne électrique . . . . .	108
9.4.2	Antenne réelle . . . . .	109
9.5	Rayonnement de la matière . . . . .	109
9.5.1	Expérience introductive . . . . .	109
9.5.2	Un modèle simple . . . . .	110
9.5.3	Auto-consistance du modèle . . . . .	112



# Chapitre 1

## Rappels mathématiques

Ce premier chapitre consiste simplement à donner tous les rappels mathématiques nécessaires pour ce cours d'électromagnétisme. En effet le formalisme de l'électromagnétisme nécessite des notions sur les champs scalaires et vectoriels ainsi que toute l'analyse vectorielle de base et leurs significations physiques. Nous effectuons également un rappel sur les fonctions de Green qui servira dans certains problèmes et calculs.

Les vecteurs seront notés systématiquement en gras afin d'alléger la lecture du document.

### 1.1 Analyses vectorielles

#### 1.1.1 Champ scalaire, champ vectoriel

Tout d'abord, donnons quelques définitions et caractéristiques des champs.



Un **champ** d'une certaine grandeur  $U$  dans un domaine de l'espace  $\mathcal{D}$  à un instant donné  $t$  est l'ensemble des grandeurs  $U$  aux divers points  $M$  de  $\mathcal{D}$ . Ainsi un champ est une fonction à la fois de la position  $\mathbf{r}(x, y, z)$  et du temps  $t$ . On note alors ce champ  $U(x, y, z, t)$  ou  $U(\mathbf{r}, t)$ . On pourra prendre comme exemple le champ de pression  $P(\mathbf{r}, t)$  de température  $T(\mathbf{r}, t)$  ou de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  d'un fluide.

On distinguera les champs scalaires dont la quantité physique peut être représenté par un scalaire (pression, température) et les champs vectoriels ou la donnée d'un vecteur à 2 ou 3 coordonnées est nécessaire pour décrire la quantité physique (vitesse).



On parle de champ **uniforme** lorsqu'il ne dépend pas de l'espace et **permanent** ou **stationnaire** lorsqu'il ne dépend pas du temps.



On appelle **ligne de champ**, à un instant donné  $t$ , la courbe tangente en chaque point  $M$  de l'espace au champ vectoriel  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ . Un ensemble de lignes de champ est alors appelé *carte de champ*.



Enfin on appelle *tube de champ* d'un champ vectoriel  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , à un instant donné  $t$ , la surface formée par l'ensemble des lignes de champ  $\mathbf{V}$  qui s'appuient sur une courbe fermée.

### 1.1.2 Gradient

Une quantité importante pour un champ vectoriel  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  est la **circulation** d'un point  $A$  vers un point  $B$  le long de la courbe  $\Gamma$  qui est l'intégrale calculée le long de cette courbe :



$$C = \int_{A(\Gamma)}^B \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.1)$$

où  $d\mathbf{s}$  est l'abscisse curviligne qui paramètre  $\Gamma$ . Cette circulation dépend a priori de la courbe  $\Gamma$ . Un champ est dit à **circulation conservative** si sa circulation entre deux points ne dépend pas du chemin suivi.

Soit un champ scalaire  $U(x, y, z, t)$ , on définit le *gradient* de  $U$  qu'on note  $\nabla U$  le champ vectoriel dont les coordonnées cartésiennes sont les dérivées partielles de  $U$  par rapport aux coordonnées correspondantes :

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.2)$$

Notons deux choses :

- Le gradient définit en tout point de l'espace un vecteur  $\nabla U$  à partir de  $U$ . Ainsi le gradient n'est pas juste un vecteur mais un *opérateur*.
- La définition n'est pas la même dans d'autres systèmes de coordonnées (se reporter à la fin du chapitre) mais les résultats sur le gradient ne changeront pas.

Le gradient représente la variation d'un champ scalaire pour un déplacement élémentaire :

$$dU = d\mathbf{r} \cdot \nabla U \quad (1.3)$$



Ainsi on a que **la variation d'un champ scalaire est égale à la circulation de son gradient**. La conséquence directe de ce résultat est que le gradient est toujours perpendiculaire aux surfaces où le champ scalaire est constant.

Il est immédiat qu'un champ uniforme à un gradient nul et que réciproquement un champ de gradient nul dans tout un domaine est uniforme dans ce domaine. Le gradient caractérise ainsi le caractère non-uniforme d'une champ scalaire  $U$ . Le gradient est toujours orienté dans le sens croissant de  $U$ .

### 1.1.3 Divergence

Comme la circulation pour un champ scalaire on peut définir une grandeur pour un champ vectoriel important en électromagnétisme. Si on considère une surface  $\Sigma$  s'appuyant sur une courbe fermée orientée  $\Gamma$ .



Le *flux* d'un champ vectoriel  $\mathbf{V}$  à travers  $\Sigma$  comme la somme de tous les flux élémentaires à travers une surface élémentaire  $d\mathbf{S}$  orienté :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} d\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.4)$$

Le sens du vecteur de surface élémentaire  $d\mathbf{S}$  se déduit de l'orientation de la courbe par la règle de la main droite ou du tire-bouchon.

Il existe des champs qui sont dits à *flux conservatif* dans un domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace si leur flux à travers toute surface *fermée*  $\Sigma$  appartenant à  $\mathcal{D}$  est nul :

$$\forall \Sigma \in \mathcal{D} \quad \Phi = \oiint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.5)$$

À présent, calculons le flux d'un champ vectoriel  $\mathbf{V}(x, y, z)$  sortant d'un cube infinitésimal de volume  $d\tau$  situé en un point  $M(x, y, z)$  représenté sur la FIGURE 1.1.

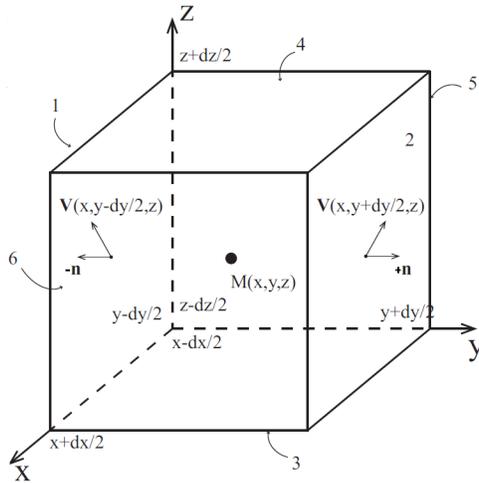


FIGURE 1.1 – Calcul du flux sortant d'un cube infinitésimal.

Pour cela, calculons le flux sortant à travers chaque face du cube. Si on prend la face marqué 1 et qu'on calcule le flux à travers cette surface. Comme la taille du cube tend vers 0, on peut prendre en première approximation la valeur du champ de vecteur au centre de la face afin de calculer le flux. On a ainsi :

$$\phi_1 = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} \left( x, y - \frac{dy}{2}, z \right) dx dz \quad (1.6)$$

De même pour la face 2 :

$$\phi_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} \left( x, y + \frac{dy}{2}, z \right) dx dz \quad (1.7)$$

À présent si on effectue la somme des deux flux et qu'on écrit la différence au premier ordre :

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \mathbf{n} \cdot \left( \mathbf{V} \left( x, y + \frac{dy}{2}, z \right) - \mathbf{V} \left( x, y - \frac{dy}{2}, z \right) \right) dx dz \quad (1.8)$$

$$= \mathbf{n} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} dy \right) dx dz \quad (1.9)$$

$$= \frac{\partial V_y(x, y, z)}{\partial y} d\tau \quad (1.10)$$

où  $V_y = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  est la composante du champ selon  $e_y$ .

On peut alors répéter ce calcul pour les faces 3 et 4 ainsi que 5 et 6 (avec des vecteurs normaux  $\mathbf{n}$  différents) et on peut sommer tous les flux :

$$\Phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 = \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) d\tau = \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau \quad (1.11)$$

où  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  est appelé *divergence* du champ vectoriel  $\mathbf{V}$ .



L'opérateur divergence au point  $M$  peut être interprété comme "l'écoulement" vers l'extérieur par unité de volume du champ vectoriel  $\mathbf{V}$  au voisinage de  $M$ .

De plus comme le flux sortant total sortant d'un volume fini est la somme des flux sortants de chacune de ses parties on peut intégrer la divergence sur le volume entier. Ainsi pour un volume  $V$  délimité par une surface  $\Sigma$  on peut écrire :

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = \iiint_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{V} \, d\tau} \quad (1.12)$$

### 1.1.4 Rotationnel

Revenons sur la circulation d'un champ de vecteurs sur une courbe fermé  $\Gamma$ . Si on découpe cette courbe comme sur la FIGURE 1.2, il est assez évident que la circulation le long de la courbe  $\Gamma$  est alors la somme  $\Gamma_1 + \Gamma_2$ . En effet, la circulation sur  $\Gamma_1$  vaut la circulation sur  $\Gamma_a$  plus celle sur  $\Gamma_{ab}$ . Nous avons de même pour  $\Gamma_2$  mais avec un signe opposé pour celle sur  $\Gamma_{ab}$ . Ainsi en sommant la circulation sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  on obtient que le contour  $\Gamma$  car le découpage  $\Gamma_{ab}$  disparaît.

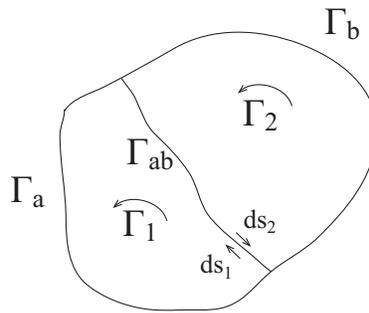


FIGURE 1.2 – Calcul de la circulation en découpant la courbe en deux.

Prenons à présent une surface quelconque  $S$  qui s'appuie sur la courbe  $\Gamma$  et découpons cette surface en petits carrés (assez petit pour qu'on puisse considérer qu'il s'agit bien de carrés plats). On obtient alors un quadrillage de la surface et il nous reste à calculer la circulation sur un carré.

Prenons le schéma de la FIGURE 1.3. On suppose tout d'abord que le carré est assez petit pour que le champ soit constant sur tout le carré. La courbe est orienté dans le sens trigonométrique et on calcule facilement la circulation :

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} &= V_x \left( x, y - \frac{dy}{2} \right) dx + V_y \left( x + \frac{dx}{2}, y \right) dy - V_x \left( x, y + \frac{dy}{2} \right) dx - V_y \left( x - \frac{dx}{2}, y \right) dy \\ &= - \left[ V_x \left( x, y + \frac{dy}{2} \right) - V_x \left( x, y - \frac{dy}{2} \right) \right] dx + \left[ V_y \left( x + \frac{dx}{2}, y \right) - V_y \left( x - \frac{dx}{2}, y \right) \right] dy \\ &= \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

où  $dx dy$  n'est que l'aire du carré considéré. On définit alors un autre opérateur pour rendre compte de cette circulation, le rotationnel dont la composante selon  $z$  (qui est la coordonnée normale au carré) s'écrit justement

$$(\nabla \wedge \mathbf{V})_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

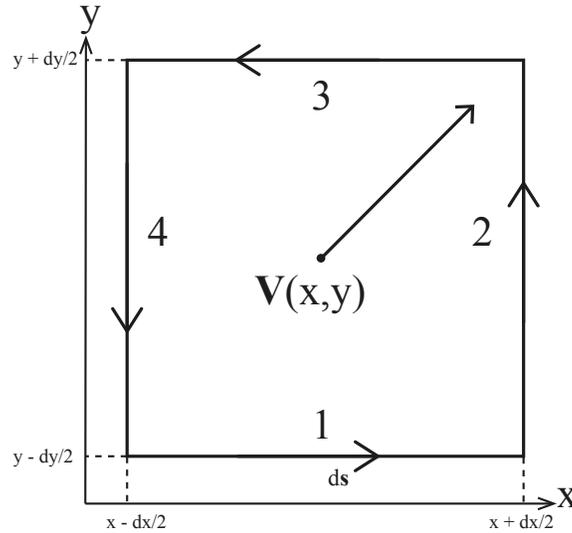


FIGURE 1.3 – Calcul de la circulation sur un carré.

Si on écrit le rotationnel pour toutes les composantes on a :

$$\nabla \wedge \mathbf{V} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} ; \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} ; \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (1.13)$$

L'expression du rotationnel dans d'autres systèmes de coordonnées n'est pas la même il faut faire attention.

On a donc trouvé que la circulation de tout vecteur  $\mathbf{V}$  le long d'un carré infinitésimal est le produit de la composante normale à la surface du rotationnel de  $\mathbf{V}$  par l'aire du carré. La circulation de la courbe  $\Gamma$  peut être maintenant relié au rotationnel du champ de vecteur. En effet il nous reste plus qu'à sommer toutes les boucles et on trouve le théorème (de Stokes) :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \wedge \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.14)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal en tout point à la surface  $S$ .

### 1.1.5 Laplacien scalaire

Avec les opérateurs qu'on vient de voir il est possible de construire un nouvel opérateur rencontré en électromagnétisme. Si on prend la divergence du gradient d'un champ scalaire on montre que :

$$\nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.15)$$

L'opérateur  $\nabla^2$  est appelé Laplacien (scalaire dans ce cas car s'applique à un champ scalaire).

### 1.1.6 Laplacien vectoriel

On peut définir la même chose pour un champ vectoriel mais il est pas aisé de savoir quel que le gradient d'un champ de vecteur... Par analogie, **mais uniquement en coordonnées cartésiennes**, on peut le définir ainsi :

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{V}) = \Delta \mathbf{V} = (\Delta V_x) \mathbf{e}_x + (\Delta V_y) \mathbf{e}_y + (\Delta V_z) \mathbf{e}_z \quad (1.16)$$

Mais ceci n'est pas une bonne définition car elle dépend d'un système de coordonnées. Pour trouver une définition indépendante du système de coordonnées il faut passer par le développement du double produit vectoriel :

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1.17)$$

Et donc :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V} \quad (1.18)$$

Ainsi on a une définition intrinsèque :

$$\Delta \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{V}) \quad (1.19)$$

## 1.2 Relations vectorielles

Certaines relations vectorielles sont utiles en électromagnétisme. Même si nous en avons déjà vu une partie, il est bon de lister tout ce qui peut être utile.

### 1.2.1 Théorème de Stokes

Comme nous l'avons vu, si nous avons une courbe fermée  $\Gamma$ , pour toute surface  $\Sigma$  s'appuyant sur la courbe  $\Gamma$  et pour tout champ vectoriel  $\mathbf{V}$  :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.20)$$

où  $d\mathbf{S}$  est le vecteur normal à la surface élémentaire et proportionnel à la dite surface.

### 1.2.2 Théorème de Green-Ostrogradsky

Pour tout volume  $V$  délimité par une surface  $\Sigma$ , on peut écrire pour un champ vectoriel  $\mathbf{V}$  :

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = \iiint_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{V} \, d\tau \quad (1.21)$$

### 1.2.3 Conséquences

On peut dériver de ces deux théorèmes d'autres relations :

- Formule de Kelvin pour tout courbe fermée  $\Gamma$  et toute surface  $\Sigma$  s'appuyant dessus :

$$\oint_{\Gamma} U \, d\mathbf{s} = - \iint_{\Sigma} (\nabla U) \wedge d\mathbf{S} \quad (1.22)$$

- Formule du gradient pour une surface  $\Sigma$  enfermant le volume  $\tau$ , pour tout champ scalaire  $U$  on a :

$$\iint_{\Sigma} U \, d\mathbf{S} = \iiint_{\tau} (\nabla U) \, d\tau \quad (1.23)$$

- Formule du rotationnel pour une surface  $\Sigma$  enfermant le volume  $\tau$ , pour tout champ vectoriel  $\mathbf{V}$  on a :

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \wedge d\mathbf{S} = - \iiint_{\tau} (\nabla \wedge \mathbf{V}) \, d\tau \quad (1.24)$$

### 1.2.4 Égalités vectorielles

Tous ces opérateurs ont certaines propriétés et ainsi des égalités vectorielles sont utiles dans le cours d'électromagnétisme. Pour tout champ vectoriel  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et tout champ scalaire  $U$  :

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = 0 \quad (1.25)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = 0 \quad (1.26)$$

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.27)$$

$$\nabla \wedge (\nabla U) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{si } \nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{0}, \exists \phi, \mathbf{A} = \nabla \phi \quad (1.28)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{si } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \exists \mathbf{V}, \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{V} \quad (1.29)$$

## 1.3 Différents systèmes de coordonnées

Les différents systèmes de coordonnées sont tous équivalents dans le sens où la donnée de trois coordonnées est nécessaire pour repérer un point dans l'espace mais les différents systèmes sont plus ou moins pratiques pour traiter des problèmes de physique (notamment d'électromagnétisme) en fonction de la géométrie ou des symétries du système.

### 1.3.1 Cartésien

Le système de coordonnées cartésien est le plus naturel et le plus simple. Un point de l'espace  $M$  est repéré par les coordonnées  $(x, y, z)$  et où les vecteurs du repère sont fixes.

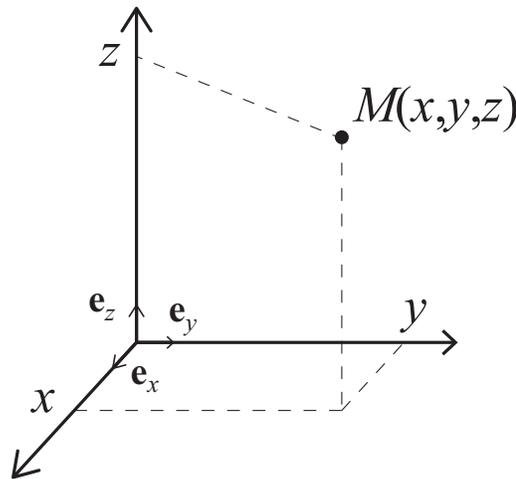


FIGURE 1.4 – Système de coordonnées cartésien.

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1.31)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{V} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \quad (1.32)$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.33)$$

### 1.3.2 Cylindrique

Le système de coordonnées cylindrique est utile lorsqu'un système a une symétrie de rotation. Un point de l'espace  $M$  est repéré par les coordonnées  $(\rho, \theta, z)$

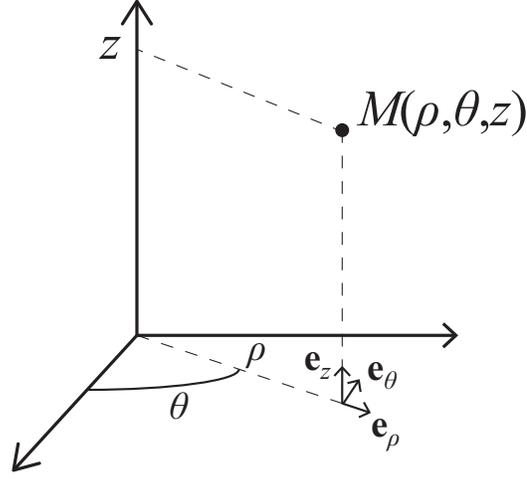


FIGURE 1.5 – Système de coordonnées cylindrique.

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1.35)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{V} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \quad (1.36)$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.37)$$

### 1.3.3 Sphérique

Le système de coordonnées sphérique est utile lorsqu'un système a deux symétrie de rotation. Un point de l'espace  $M$  est repéré par les coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (1.38)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.39)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{V} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \mathbf{e}_\theta \quad (1.40)$$

$$+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi \quad (1.41)$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \tan \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \quad (1.42)$$

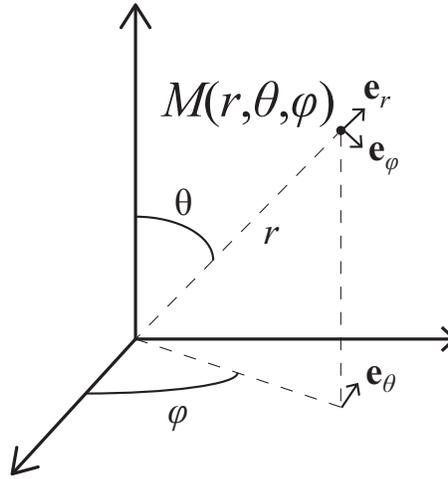


FIGURE 1.6 – Système de coordonnées sphérique.

## 1.4 Fonction de Green

Considérons un opérateur différentiel linéaire<sup>1</sup>  $D_{\mathbf{r},t}$ . On considère alors une équation différentielle de la forme :

$$D_{\mathbf{r},t}[\psi_{\mathbf{r},t}] = S_{\mathbf{r},t} \quad (1.43)$$

où  $S_{\mathbf{r},t}$  est le terme de source. Une solution de cette équation s'obtient par la fonction de Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{t}, \mathbf{t}')$  qui vérifie :

$$D_{\mathbf{r},t}[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{t}, \mathbf{t}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (1.44)$$

Alors la fonction réponse vaut :

$$\boxed{\psi_G(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}' \int dt' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{t}, \mathbf{t}') S(\mathbf{r}', t')} \quad (1.45)$$

Démonstration :

$$D_{\mathbf{r},t}[\psi_G(\mathbf{r}, t)] = \int d^3\mathbf{r}' \int dt' D_{\mathbf{r},t}[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{t}, \mathbf{t}')] S(\mathbf{r}', t') \quad (1.46)$$

$$= \int d^3\mathbf{r}' \int dt' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') S(\mathbf{r}', t') \quad (1.47)$$

$$= S(\mathbf{r}, t) \quad (1.48)$$

---

1. Un opérateur différentiel une combinaison linéaire des opérateurs qu'on vient de détailler.



# Chapitre 2

## Électrostatique

### 2.1 Introduction et historique

L'étude des interactions entre objets mais aussi entre constituants de la matière est un sujet récurrent en physique. Le problème se pose à différentes échelles, depuis les corps célestes avec des échelles typiques gigantesques (taille système solaire  $10^9$  km), jusqu'aux constituants de la matière ( $\sim 10^{-15}$  m pour la taille du noyau). La théorie actuelle de la physique arrive à rendre compte de l'ensemble des phénomènes actuellement interprétés en faisant intervenir seulement quatre interactions, dites fondamentales : l'interaction gravitationnelle, l'interaction électromagnétique, l'interaction faible et l'interaction forte.

L'électromagnétisme se préoccupe des interactions entre corps chargés ainsi que de la dynamique des champs créés par ces charges, qu'elles soient immobiles (électrostatique) ou en mouvement (courants, rayonnements, induction, ondes...).

Coté histoire, l'étude de l'électricité et de l'électromagnétisme est extrêmement ancienne car certains phénomènes électromagnétiques (la foudre, les aurores boréales ou les propriétés magnétiques de certaines substances) sont connus depuis la haute antiquité. Cependant leur étude détaillée dut attendre la possibilité de produire à volonté de l'électricité, c'est-à-dire les machines électrostatiques au 17ème siècle. À partir de ce moment l'évolution des connaissances se précipite et au début du 18ème siècle on découvre qu'il est possible de transporter l'électricité par des fils. Mais c'est durant le 18ème siècle que les premières théories scientifiques (telles qu'on les connaît) sont développées notamment par Cavendish (Potentiel) et Coulomb (force électrostatique). Au 19ème, tout s'enchaîne avec l'invention de la pile électrique par Volta (1800), la découverte de l'induction par Faraday (1831) et l'unification de la théorie par Maxwell (1864) confirmé par Hertz (1885).

La théorie unifiée de Maxwell est connue sous la forme des **équations de Maxwell** dans le vide <sup>a</sup> qui sont au nombre de 4 :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \text{Équation de Maxwell-Gauss} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{Équation de Maxwell-Flux (Maxwell-Thomson)} \quad (2.2)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{Équation de Maxwell-Faraday} \quad (2.3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{Équation de Maxwell-Ampère} \quad (2.4)$$



<sup>a</sup>. En réalité ces équations restent valable tant qu'on se place pas dans un milieu matériel ou un milieu dilué chargé comme un plasma.

La contribution de Maxwell consiste essentiellement à l'ajout du terme  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$  dans la dernière équation.

Le couple *champ électrique*  $\mathbf{E}$ /*champ magnétique*  $\mathbf{B}$  constitue le **champ électromagnétique**. La *densité de charge*  $\rho$  et le *courant électrique volumique*  $\mathbf{j}$  constitue les **sources** du champ. La *permittivité diélectrique du vide*  $\epsilon_0$ , la *perméabilité magnétique du vide*  $\mu_0$  et la *vitesse de la lumière dans le vide*  $c$  constituent les **constantes** des équations avec la relation

$$\boxed{c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1} \quad (2.5)$$



À ces 4 équations on ajoute la loi d'interaction des charges avec le champ électromagnétique, qui est la *force de Lorentz* :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (2.6)$$

qui est la force exercée par un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  sur une charge  $q$  munie d'une vitesse  $\mathbf{v}$ .

L'ensemble de ces 5 équations combiné avec le principe fondamental de la dynamique de Newton permet de rendre compte de tous les mouvements des particules chargées et de tous les phénomènes électromagnétiques associés.

Le but de ce cours est de partir des équations de Maxwell et montrer qu'elles permettent de prédire tous les phénomènes électromagnétiques importants observés. Ce cours suppose déjà une connaissance de base sur l'électromagnétisme de niveau L1/L2 ce qui permettra simplement de faire des rappels sur certains points et permettre un approfondissement sur d'autres points importants à la bonne compréhension de l'électromagnétisme et de sa théorie.

## 2.2 Cadre de l'électrostatique

Pour commencer nous allons nous placer dans le cas le plus simple de l'électromagnétisme à savoir l'électrostatique dans le "vide". Cela consiste à considérer le cas *statique*, ou plutôt *stationnaire*, à savoir que toutes les charges sont fixes de façon permanente dans l'espace, ou bien si elles se déplacent, elles se déplacent comme un courant continu dans un circuit (de sorte que  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  soient constants). Dans ces conditions les 5 équations précédentes s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (2.11)$$

On voit dans ce cas là que les équations sur le champ électrique et sur le champ magnétique sont totalement découplés et qu'il est possible d'étudier les deux ainsi que leurs effets séparément. Dans ce premier chapitre d'électrostatique, nous supposons qu'il n'existe pas de champ magnétique. Les équations à disposition sont :

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ \nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned}} \quad (2.12)$$

## 2.3 Approche intégrale et loi de Coulomb

### 2.3.1 Loi de Coulomb (1780)

Coulomb en 1780 propose à partir d'expérience que si deux particules chargées ponctuelles comme représenté sur la FIGURE 2.1 alors la force  $\mathbf{F}_{1/2}$  qu'exerce la particule 1 sur la particule 2 est :

- Proportionnel à  $q_1 q_2$  ;
- Attractive ou répulsive en fonction du signe de  $q_1 q_2$  ;
- Proportionnelle à  $\frac{1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2}$  : *expérimentalement à l'époque, il n'était pas possible de montrer que la puissance était -2, il l'a supposé par analogie à la loi de la gravitation.*

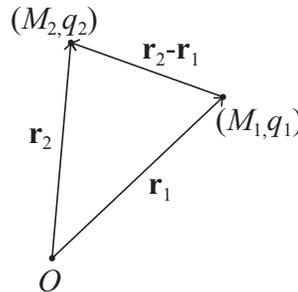


FIGURE 2.1 – Deux charges ponctuelles en interaction.

Ainsi on peut écrire que :

$$\mathbf{F}_{1/2} = K \frac{q_1 q_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (2.13)$$

où le coefficient de proportionnalité  $K$  vaut :

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.14)$$

dans le système d'unités actuel. Cette constante est complètement fixé. En effet nous avons la relation  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  et la vitesse de la lumière est fixé à  $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\mu_0$  également à  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ . On a alors une valeur approchée de  $\epsilon_0 \simeq 8,844 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ .



La force électrostatique (loi de Coulomb) s'écrit alors :

$$\mathbf{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (2.15)$$

Avec ces valeurs numériques on peut alors effectuer un ordre de grandeur pour comparer des forces. Prenons par exemple l'atome d'hydrogène composé d'un proton avec un électron qui gravite autour. On montre alors que la force électrostatique est  $10^{40}$  supérieure à la force de gravitation entre les deux corps. Ainsi l'attraction ou la répulsion entre charges est dominante à l'échelle microscopique et est responsable des propriétés physiques et chimiques de la matière. Cependant à grand échelle la force de gravitation reprend le dessus notamment car la "matière macroscopique" est neutre.

#### Remarques :

- Cette force respecte bien la réciprocité des forces ;
- Dans ce modèle de charges ponctuelles, une charge ne peut agir sur elle-même ;
- L'expression des forces entre atomes/électrons dans la matière est bien plus compliqué notamment à cause des effets d'écrantage qui apparaissent.

Si au lieu d'avoir 2 charges, nous avons un ensemble  $\mathcal{D}$  de  $N$  charges ponctuelles autour d'une autre charge  $Q$  alors la force exerce cet ensemble sur la charge  $q$  est égale à la sommes des forces qu'exercent ces charges séparément :

$$\mathbf{F}_{\mathcal{D}/q} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.16)$$

où  $\mathbf{r}$  est la position de la charge  $q$  et  $\mathbf{r}_i$  de la  $i$ ème charge de l'ensemble  $\mathcal{D}$  de charge  $q_i$ . On parle alors de superposition ou de linéarité des forces électrostatiques. Ce principe de superposition provient directement de la linéarité des équations de Maxwell.

### 2.3.2 Champ de Coulomb

On a vu qu'on ne pouvait pas avoir de force d'une charge sur elle-même (car Coulomb est vrai que si la charge est strictement ponctuelle). On peut alors par commodité introduire le champ électrique d'une charge comme la force par unité de charge en un point de l'espace. Si on reprend la force précédente avec les deux charges alors on a :

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_{1/2}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (2.17)$$

et si on prend la distribution de charges :

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_{\mathcal{D}/q}}{q} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.18)$$

On retrouve ainsi que la force de Lorentz  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  avec cette définition du champ électrique.

### 2.3.3 Répartition continue de charges

Si au lieu d'avoir une répartition ponctuelle on suppose qu'on a une répartition continue dans un domaine  $\mathcal{D}$ . En chaque point du domaine on peut définir une densité de charge volumique  $\rho(\mathbf{r})$  qui est moyenné sur un volume mésoscopique<sup>1</sup>. Dans ce cas là, le champ de Coulomb s'écrit en un point  $M(\mathbf{r})$  quelconque de l'espace :

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.19)$$

Dans la suite on utilisera toujours l'expression continue car on peut passer à l'expression ponctuelle simplement en écrivant :

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.20)$$

On peut écrire les mêmes expressions pour des densités surfaciques ou linéiques.

Si on veut calculer quelque chose avec ces intégrales, il faut les écrire en détail. Par exemple si on se place en cartésien et qu'on calcule la composante  $x$  du champ électrique, on a :

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x_1 - x_2)\rho(x_2, y_2, z_2)dx_2dy_2dz_2}{4\pi\epsilon_0[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} \quad (2.21)$$

1. On peut définir la taille de ce volume mésoscopique comme en mécanique des fluides. Si on trace l'allure de la densité de charges en fonction du volume sur lequel on moyenne alors : pour des petits volumes, les fluctuations seront très importantes car on verra chaque charge au fur et à mesure que le volume grandit ; puis la densité va atteindre un plateau sur lequel on se placera pour définir la taille du volume mésoscopique ; enfin pour des tailles trop grandes, on verra des variations lentes correspondant aux éventuelles variations de densité de charges macroscopique qu'on cherche à quantifier avec la fonction  $\rho(\mathbf{r})$ .

Nous n'allons pas beaucoup utiliser cette formule. Nous l'écrivons ici que pour souligner le fait que nous avons complètement résolu tous les problèmes d'électrostatique dans lesquels on connaît la position de toutes les charges (ou la répartition). On se donne la répartition de charges, quel est le champ en tout point de l'espace? La réponse est simplement : calculez cette intégrale ! Il n'y a plus rien à dire ce le sujet car il ne s'agit plus qu'une question de calcul d'intégrale faisable par un ordinateur. Il est important d'avoir à l'esprit que tout ce qu'on pourra faire plus tard dans ce chapitre est déjà entièrement contenu dans ce que nous venons de faire. Cependant est généralement plus simple de deviner la valeur de l'intégrale plutôt que de la calculer mais pour deviner il faut des nouveaux outils. C'est ce que nous allons essayer de faire.

## 2.4 Liens avec les équations de Maxwell

### 2.4.1 Compatibilité avec la force de Coulomb

Quel est le lien entre la force de Coulomb décrite précédemment et les équations de Maxwell (version électrostatique) de l'introduction ? On voit dans les deux cas on relie le champ électrique créé à la distribution de charge. Essayons de voir si l'un n'est pas juste la réécriture de l'autre. Il faut tout d'abord remarquer une petite égalité vectorielle (qu'on peut facilement retrouver avec le développement de Taylor) :

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) = \nabla_{\mathbf{r}'} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \quad (2.22)$$

On a alors :

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.23)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \left( -\nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \right) \quad (2.24)$$

$$= -\nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \quad (2.25)$$

Or comme  $\nabla_{\mathbf{r}} \wedge (\nabla_{\mathbf{r}} f) = \mathbf{0}$  pour tout  $f$  cela signifie que :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

Le champ de Coulomb vérifie déjà une équation de Maxwell de l'électrostatique. Pour la seconde équation, prenons la divergence de l'expression du champ de Coulomb<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left[ - \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}}^2 \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Et donc  $\mathbf{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{r})$  vérifie bien la seconde équation de l'électrostatique.

Tout ce qu'on vient faire ne dépend pas de la nature du champ mais simplement de sa forme en  $1/r^2$ . Ainsi tous les champs dits *newtoniens* vérifient ce type d'équation locale type Maxwell.

2. En utilisant le résultat suivant sur le laplacien de  $1/r$  :  $-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \nabla_{\mathbf{r}}^2 \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right)$

### 2.4.2 Équivalence des deux approches

Il est possible de prouver l'équivalence des approches intégrale et local grâce à un théorème.



#### Théorème d'Helmoltz-Hodge :

Si  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  est un champ de vecteur qui est nul à l'infini alors  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  est défini par la donnée de sa divergence et de son rotationnel. La solution est unique.

Démonstration :

Si  $\lim_{\mathbf{r} \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$  alors il existe  $\mathcal{V}(\mathbf{k})$  tel que :

$$\mathcal{V}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}^3 \mathbf{V}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}^3 \mathcal{V}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.27)$$

Si on a :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = a(\mathbf{r}) \quad (2.28)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{V} = \mathbf{b}(\mathbf{r}) \quad (2.29)$$

avec  $a$  et  $\mathbf{b}$  connus en tout point de l'espace. Si on prend la transformée de Fourier de ces deux équations alors :

$$i\mathbf{k} \cdot \mathcal{V} = \mathcal{A}(\mathbf{k}) \quad (2.30)$$

$$i\mathbf{k} \wedge \mathcal{V} = \mathcal{B}(\mathbf{k}) \quad (2.31)$$

La première équation nous renseigne sur  $\mathcal{V}$  dans la direction de  $\mathbf{k}$  (1 équation scalaire) et la seconde équation nous renseigne sur la direction perpendiculaire à  $\mathbf{k}$  (2 équations scalaire seulement pour une direction dans un plan). Ainsi nous avons 3 équations pour 3 inconnues (les 3 directions de  $\mathcal{V}$ ) donc on a une solution unique si elle existe. On peut alors par transformée de Fourier inverse trouver une unique solution pour  $\mathbf{V}$  si elle existe.

Ainsi par ce théorème montre que les approches local et intégrale sont parfaitement équivalentes en termes mathématiques et donc physiquement aussi.

## 2.5 Théorème de Gauss

Nous avons dit que les deux approches étaient équivalentes et que le calcul des champs de Coulomb consistait en un calcul compliqué d'intégrales. Est-ce que l'approche locale des équations de Maxwell peuvent permettre de faciliter le calcul? La réponse est oui mais pas toujours. Si on reprend l'équation de Maxwell-Gauss pour une distribution de charge  $\rho(\mathbf{r})$  dans un certain domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace. On intègre alors sur ce domaine  $\mathcal{D}$  de frontière  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} d\tau \\ \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} \rho(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Ainsi le théorème de Gauss s'écrit :

$$\phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \frac{Q_{\mathcal{D}}}{\epsilon_0} \quad (2.32)$$



où  $\phi_{\Sigma}(\mathbf{E})$  est le flux de  $\mathbf{E}$  à travers la surface  $\Sigma$  et  $Q_{\mathcal{D}}$  la charge totale contenue dans le domaine  $\mathcal{D}$ . Dit autrement, le flux du champ électrique à travers une surface (dit surface de Gauss) est égal à la charge contenue dans le volume délimité par la surface divisé par la permittivité du vide.

Ce théorème est très utile pour calculer des champs électriques mais il nécessite que le problème possède au moins deux symétries dans le problème pour pouvoir calculer le flux de  $\mathbf{E}$  sans ambiguïté. Il nous faut donc voir maintenant en quoi les symétries du problème permettent de tels calculs.

## 2.6 Structure du champ électrostatique

### 2.6.1 Invariance et principe de Curie

Les deux équations de Maxwell de l'électrostatique

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ \nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

ne jouent pas le même rôle. En effet la première relie le champ électrique à sa source, à savoir une distribution de charges dans l'espace. À contrario, la seconde équation ne possède que le champ électrique et ainsi nous renseigne uniquement sur la structure de celui-ci.



#### Principe de Curie :

Les invariants d'une distribution de sources laissent invariant la distribution des effets. Les mêmes causes produisent les mêmes effets et toute transformation laissant invariant les causes laisse invariant les effets.

En pratique pour l'électrostatique les causes sont les distributions de charges et toute modification continue qui laisse invariant  $\rho$  laisse invariant le champ électrique  $\mathbf{E}$ . Ceci permet ainsi de réduire le nombre de variables dont dépend le champ, uniquement grâce à l'équation de Maxwell-Gauss.

Exemples :

- La translation le long d'un fil infini laisse invariant le problème donc si on prend l'axe  $x$  le long du fil, il n'y aura pas de dépendance en  $x$ .
- La rotation autour d'un fil autour de son axe permet de dire qu'il y a une symétrie axiale et donc une indépendance avec l'angle de rotation.

Remarque : Dans le cas général le principe de Curie n'est vrai que en moyenne. En effet on peut prendre deux exemples où il faut moyenner pour ne pas mettre en défaut le principe de Curie :

- Lorsqu'une bille se situe en haut d'une barrière de potentiel à une dimension, elle se trouve dans un état métastable. Elle peut tomber soit à gauche ou soit à droite quand on la lâche en haut.
- Lorsqu'une tige rigide d'une certaine longueur est fixée dans un mur, si on appuie sur la tige dans son axe alors la tige va flamber. Elle peut flamber dans n'importe quelle direction de l'espace, c'est à dire sous n'importe quel angle entre 0 et  $2\pi$ .

Dans ce deux cas on a une symétrie du système et si on fait une expérience le système va "choisir" une direction et donc briser cette symétrie. Cependant si on répète un grand nombre de fois l'expérience et

qu'on trace la distribution de probabilité alors celle-ci va posséder les mêmes symétries que le système. Le principe de Curie est alors vérifié.

Une autre manière de le dire est qu'il faut retrouver le principe de Curie sur l'**ensemble** des solutions et non sur une solution particulière.

### 2.6.2 Exemples d'invariants

En électromagnétisme il est possible de rencontrer plusieurs types de symétries. Voici des exemples :

- Invariant par translation : si le système est invariant par translation selon l'axe  $x$  alors le champ électrostatique ne dépendra pas de la coordonnée  $x$ .
- Invariant par rotation : si le système est invariant par rotation autour d'un certain axe dont la rotation est représenté par la coordonnée  $\theta$  alors le champ électrostatique ne dépend pas de la coordonnée  $\theta$ .
- Invariant cylindrique : si le système est invariant par rotation autour de l'axe  $z$  ainsi que par translation selon l'axe  $z$  alors le champ électrostatique ne dépendra pas de ces deux coordonnées c'est-à-dire qu'il ne dépend que de la distance à l'axe.
- Invariant sphérique : si le système est invariant selon deux rotations de coordonnées  $\theta$  et  $\phi$  c'est-à-dire invariant par rotation autour d'un certain point  $O$  alors le champ électrique ne dépend pas de ces deux coordonnées c'est-à-dire qu'il ne dépend que de la distance  $r$  au point  $O$ .

### 2.6.3 Propriétés de symétrie des champs électriques

Soit  $\mathcal{D}$  une distribution de charges. Soit  $\Pi^+$  un plan de symétrie de la distribution de charges. Ainsi pour tout  $M \in \mathcal{D}$  alors si  $M'$  est le symétrique du point  $M$  par rapport au plan  $\Pi^+$  qu'on notera  $M' = \text{sym}_{\Pi^+}(M)$  alors on a nécessairement  $\rho(M) = \rho(M')$ . De même si  $\Pi^-$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de charge alors si  $M' = \text{sym}_{\Pi^-}(M)$  alors on a  $\rho(M) = -\rho(M')$ .

Si on se place dans le cas où la distribution possède une symétrie  $\Pi^+$ . Soit  $M$  et  $M'$  deux points symétriques l'un par rapport à l'autre par  $\Pi^+$  et soit  $P$  un point de  $\mathcal{D}$ . Calculons alors le champ créé au point  $M$  par la distribution  $\mathcal{D}$ .

$$\mathbf{E}(M) = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{E}_P(M) \quad \text{avec} \quad d\mathbf{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} d^3r \frac{\rho(P)}{|\mathbf{PM}|^3} \mathbf{PM} \quad (2.33)$$

On peut alors calculer le champ créé au point  $M$  par les points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport au plan  $\Pi^+$ . Par superposition on a :

$$d\mathbf{E}_{P,P'}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} d^3r \left( \frac{\rho(P)}{|\mathbf{PM}|^3} \mathbf{PM} + \frac{\rho(P')}{|\mathbf{P'M}'|^3} \mathbf{P'M}' \right) \quad (2.34)$$

On peut ensuite calculer le champ créé au point  $M'$  par les mêmes points  $P$  et  $P'$ . On exprime alors  $\mathbf{PM}'$  et  $\mathbf{P'M}'$  comme les symétriques de  $\mathbf{P'M}$  et  $\mathbf{PM}$ . On remarque également par symétrie que les distances  $|\mathbf{PM}'|$  et  $|\mathbf{P'M}'|$  sont égales ainsi que les distances  $|\mathbf{P'M}'|$  et  $|\mathbf{PM}|$ . Enfin par hypothèse on a  $\rho(P') = \rho(P)$ .

$$d\mathbf{E}_{P,P'}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} d^3r \left( \frac{\rho(P)}{|\mathbf{PM}'|^3} \mathbf{PM}' + \frac{\rho(P')}{|\mathbf{P'M}'|^3} \mathbf{P'M}' \right) \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} d^3r \left( \frac{\rho(P)}{|\mathbf{P'M}|^3} \text{sym}_{\Pi^+}(\mathbf{P'M}) + \frac{\rho(P')}{|\mathbf{PM}|^3} \text{sym}_{\Pi^+}(\mathbf{PM}) \right) \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} d^3r \left( \frac{\rho(P')}{|\mathbf{P'M}|^3} \text{sym}_{\Pi^+}(\mathbf{P'M}) + \frac{\rho(P)}{|\mathbf{PM}|^3} \text{sym}_{\Pi^+}(\mathbf{PM}) \right) \quad (2.37)$$

$$= \text{sym}_{\Pi^+}(d\mathbf{E}_{P,P'}(M)) \quad (2.38)$$

Ainsi chaque champ élémentaire créé au point  $M'$  est symétrique par rapport au plan  $\Pi^+$  au champ élémentaire créé au point  $M$ . Et par linéarité de l'intégrale on a :

$$\mathbf{E}(M) = \text{sym}_{\Pi^+}(\mathbf{E}(M')) \quad (2.39)$$

La conséquence de cette égalité est que si  $M \in \Pi^+$  alors on applique le résultat précédent avec  $M = M'$  et donc on a  $\mathbf{E}(M) = \text{sym}_{\Pi^+}(\mathbf{E}(M))$ . Ceci a pour conséquence que dans ce cas on a  $\mathbf{E}_\perp(M) = \mathbf{0}$ .



Pour une distribution de charges donnée, le champ électrique est contenu dans les plans de symétrie. Pour fixer la direction, il est alors nécessaire que le système possède deux plans de symétrie qui s'intersectent.

De la même manière on peut montrer que si on a un plan d'antisymétrie  $\Pi^-$  de la distribution de charge et  $M \in \Pi^-$  alors on trouve que  $\mathbf{E}(M) \perp \Pi^-$ .



Pour une distribution de charges donnée, le champ électrique est perpendiculaire aux plans d'antisymétrie. Pour fixer la direction, il ne faut qu'un plan d'antisymétrie.

Ainsi les symétries du problème peut permettre de fixer la direction du champ  $\mathbf{E}$  (ou d'éliminer une composante) en certains points de l'espace.

## 2.6.4 Calculs de champ électrostatique

### • Champ de Coulomb :

Soit une charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$ . On utilise les coordonnées sphériques pour se repérer dans l'espace  $(O, r, \theta, \phi)$ . Considérons un point  $M$  de l'espace.

La première chose à faire lorsqu'on aborde un problème d'électrostatique est d'étudier séparément les symétries et les invariances du problème.

Concernant les invariances : le système est un invariant sphérique et ainsi le champ électrique recherché ne dépend que de la distance à la charge :  $\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \mathbf{E}(r)$ .

Concernant les symétries : Tout plan passant par  $O$  et contenant  $M$  est un plan de symétrie, ainsi le champ électrique recherché doit être contenu dans ces deux plans, ainsi le champ électrique est radial. Donc au final :

$$\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r \quad (2.40)$$

Appliquons à présent le théorème de Gauss. On choisit une surface, dit de Gauss,  $\Sigma$  à travers laquelle le flux du champ électrique est facilement calculable, c'est-à-dire une surface parallèle ou perpendiculaire au champ électrique en tout point. Ici la surface de Gauss naturelle est une sphère de rayon  $r$ . Dans ce cas, en tout point le champ est perpendiculaire à la surface de Gauss et le flux élémentaire vaut simplement  $E(r)dS$ . On pourra alors sortir  $E(r)$  de l'intégrale qui sera constant sur la sphère. La charge contenue dans cette sphère est  $q$  quelque soit le rayon de celle-ci. Donc l'application du théorème donne :

$$\phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \frac{Q_D}{\epsilon_0} \quad (2.41)$$

$$\int_\Sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.42)$$

$$E(r) \int_\Sigma dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.43)$$

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.44)$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (2.45)$$

Et donc :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (2.46)$$

On retrouve bien le champ de Coulomb sans trop de surprise.

- **Fil infini :**

On considère un fil infini, c'est-à-dire un cylindre infiniment long selon la direction  $z$  et donc on néglige le rayon. Ce solide est uniformément chargé et on note  $\lambda$  la densité linéique. Dans ce problème, la distribution de charges est invariante par translation suivant l'axe  $z$  et invariant par rotation autour de l'axe  $z$ . On a une symétrie cylindrique donc  $\mathbf{E}(\rho, \theta, z) = \mathbf{E}(\rho)$ . Soit un point  $M$  de l'espace. Le plan contenant l'axe de symétrie du fil (c'est-à-dire le fil) ainsi que le point  $M$  est un axe de symétrie des charges, de même que le plan perpendiculaire au fil et contenant le point  $M$ . Ainsi le champ appartient à l'intersection de ces deux plans et est selon  $\mathbf{e}_\rho$  au point  $M$ . Donc on a :

$$\mathbf{E} = E(\rho)\mathbf{e}_\rho \quad (2.47)$$

La surface de Gauss  $\Sigma$  naturelle pour ce problème est un cylindre de hauteur  $h$  et de rayon  $r$ . Le champ électrique est alors parallèle sur les bords supérieur et inférieur ce qui signifie que le flux du champ électrique à travers ces surfaces est nul. Le champ est perpendiculaire sur la surface latérale et donc le calcul est le même que précédemment avec la surface qui vaut  $2\pi\rho h$  cette fois :

$$\phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \frac{Q_D}{\epsilon_0} \quad (2.48)$$

$$E(\rho) \int_\Sigma dS = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad (2.49)$$

$$E(\rho) 2\pi\rho h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad (2.50)$$

$$E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\rho\epsilon_0} \quad (2.51)$$

Et finalement on trouve :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\rho\epsilon_0} \mathbf{e}_\rho \quad (2.52)$$

- **Plan uniformément chargé :**

On considère un plan infini selon l'axe  $x$  et  $y$  et chargé uniformément avec une densité surfacique  $\sigma$ . La distribution de charges est invariante par translation selon les axes  $x$  et  $y$ . Ainsi on a  $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(z)$ . Soit un point  $M$  de l'espace. Tout plan orthogonale au plan chargé et contenant le point  $M$  est plan de symétrie des charges ainsi on a un champ selon  $\mathbf{e}_z$ . Donc :

$$\mathbf{E} = E(z)\mathbf{e}_z \quad (2.53)$$

De plus le plan est lui même plan de symétrie des charges et donc on a que  $E(z) = -E(-z)$ .

A présent il nous est possible d'appliquer le théorème de Gauss sur des boîtes bien choisies. Tout d'abord si on prend n'importe quelle boîte qui se trouve complètement dans la partie  $z > 0$  ou  $z < 0$ . Par exemple pour les  $z > 0$ , on prend une boîte de surface  $S$  et d'ordonnées  $z_1$  et  $z_2 > z_1$ . Le champ est parallèle aux cotés de la boîte donc le flux est nul. Sur les faces supérieure et inférieure le flux total vaut  $E(z_2)S - E(z_1)S$ . De plus il n'y a pas de charge à l'intérieur de la boîte donc le théorème de Gauss permet d'écrire  $E(z_2)S - E(z_1)S = 0$  donc :

$$\forall z_1, z_2 > 0 \quad E(z_1) = E(z_2) \quad (2.54)$$

Il est possible de montrer la même chose pour les  $z < 0$ .

Nous avons montré que le champ est constant dans les deux parties de l'espace délimité par le plan chargé, on peut à présent calculer le champ. On prend alors une boîte, toujours de surface  $S$  dont la surface supérieure est en  $z$  et la surface inférieure est en  $-z$ . Le flux à travers cette boîte est alors  $E(z)S - E(-z)S = 2SE(z)$ . La charge totale dans la boîte vaut alors  $\sigma S$  et donc le théorème de Gauss donne :

$$2SE(z) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad (2.55)$$

Et donc :

$$\mathbf{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z \quad , \quad z > 0 \quad (2.56)$$

$$\mathbf{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z \quad , \quad z < 0 \quad (2.57)$$

On remarque alors qu'on retrouve la relation de passage d'un plan chargé uniformément en surface :

$$\mathbf{E}(0^+) - \mathbf{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_z \quad (2.58)$$

### • Disque uniformément chargé

On considère un disque uniformément chargé en surface de densité surfacique  $\sigma$  mais de taille fini, de rayon  $R$  comme sur la FIGURE 2.2. Dans ce cas là, **l'application du théorème de Gauss n'est pas possible**. En effet le système ne possède pas assez de symétries et d'invariances, il en faudrait au moins 2 symétries pour fixer la direction du champ partout et deux invariances pour que le champ ne dépende que d'une coordonnée. Ici le système n'a qu'une seule invariance et symétrie de charge. Dans ce cas là, le seul moyen de pouvoir calculer le champ est de repasser par le calcul intégral.

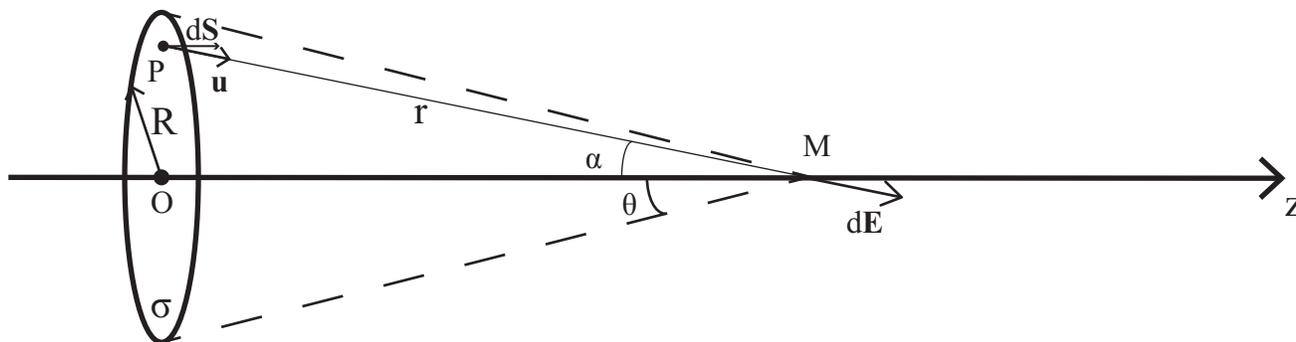


FIGURE 2.2 – Disque uniformément chargé.

Calculer le champ dans tout l'espace n'est faisable (facilement) que dans des cas très particuliers. Ici, le champ sur l'axe est facilement calculable. La calcul consiste à calculer le champ infinitésimal  $d\mathbf{E}$  produit par une surface infinitésimale  $dS$  situé au point  $P$  sur le disque. On a :

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \mathbf{u} = dE \mathbf{u} \quad (2.59)$$

Cependant si on se place en un point  $M$  sur l'axe de symétrie  $z$  du disque alors tout plan contenant l'axe est plan de symétrie des charges et donc le champ sur l'axe  $z$  est selon l'axe  $z$  :  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ . Ainsi on va utiliser le principe de superposition en sommant les champs infinitésimaux mais comme on sait que le champ ne sera que selon l'axe  $z$  (car en réalité quand on va sommer les autres composantes vont s'annuler) on va projeter tout d'abord sur l'axe avant le sommer.

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS \cos \alpha}{r^2} \quad (2.60)$$

Il reste maintenant à intégrer et les astuces de calculs sont alors les bienvenues dans ces cas là. Tout d'abord, plaçons nous dans les coordonnées cylindriques, ainsi l'élément de surface s'écrit (à justifier) :  $dS = \rho d\rho d\theta = r dr d\theta$  (car on a  $r^2 = \rho^2 + z^2$  et on se place à  $z$  fixé pour l'intégration, d'où l'égalité des différentielles) et donc l'intégration devient :

$$E_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \frac{\cos \alpha}{r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \frac{\cos \alpha}{r} \quad (2.61)$$

Il s'agit à présent que d'un problème d'intégration. Effectuons un changement de variable adéquate en sachant qu'on a  $\cos \alpha = \frac{z}{r}$  donc  $-\mathrm{d}\alpha \sin \alpha = -\frac{z \mathrm{d}r}{r^2}$ . Donc on a  $dr = \mathrm{d}\alpha \sin \alpha \frac{r^2}{z}$  et  $\frac{r}{z} = \frac{1}{\cos \alpha}$ . De plus on appelle  $\alpha_0$  l'angle sous lequel le point  $M$  voit le disque et donc il s'agit de la borne d'intégration du changement de variable :

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\alpha_0} \mathrm{d}\alpha \sin \alpha \frac{r^2 \cos \alpha}{z r} \quad (2.62)$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\alpha_0} \mathrm{d}\alpha \sin \alpha \cos \alpha \frac{r}{z} \quad (2.63)$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\alpha_0} \mathrm{d}\alpha \sin \alpha \cos \alpha \frac{1}{\cos \alpha} \quad (2.64)$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\alpha_0} \mathrm{d}\alpha \sin \alpha \quad (2.65)$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [-\cos \alpha]_0^{\alpha_0} \quad (2.66)$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_0) \quad (2.67)$$

Et donc on trouve le champ sur l'axe du disque :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_0) \mathbf{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \mathbf{e}_z \quad (2.68)$$

On peut vérifier que notre résultat est cohérent avec ce qu'on connaît déjà<sup>3</sup>. Si on fait tendre la taille du disque à l'infini ce qui revient à faire tendre  $R \rightarrow \infty$  ou l'angle  $\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  alors on trouve :

$$\mathbf{E}_{R \rightarrow \infty} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z \quad (2.69)$$

Ce qui est en accord avec le résultat trouvé plus haut. Cependant il n'est pas simple de connaître le champ partout dans l'espace pour un disque de taille finie.

## 2.7 Potentiel électrostatique

Nous avons vu que les calculs d'intégrales étaient parfois compliqués et même dans les cas plus faciles comme le calcul sur l'axe de symétrie du disque chargé. Il est possible d'utiliser un outil qui servira d'intermédiaire de calcul mais à qui on va donner également une signification physique : *le potentiel électrostatique*.

### 2.7.1 Définition

L'équation de structure de Maxwell-Faraday de l'électrostatique s'écrit

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.70)$$

3. C'est un réflexe à toujours avoir en physique !



Dans ce cas là <sup>a</sup> qu'il existe un champ scalaire  $V$ , appelé **potentiel électrostatique**, tel que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (2.71)$$

*a.* Nous n'avons pas effectué la démonstration mais il est nécessaire que le champ électrique s'annule à l'infini mais dans toutes les situations physiques rencontrées c'est le cas.

Le signe "-" est pur convention et permet de faire l'analogie avec les autres cas de diffusion. Ce potentiel peut être vu comme un intermédiaire de calcul, même si nous verrons sa signification physique plus tard. En effet, un champ scalaire est toujours plus facile à calculer qu'un champ vectoriel (3 fois moins de composantes) et le passage en prenant le gradient n'est rarement un problème. Cette facilité de calcul est d'autant plus vraie lorsque les symétries du système sont complexes.

### 2.7.2 Exemples de calculs

Reprenons l'exemple de la charge ponctuelle qui est le système le plus simple en électrostatique. Le champ électrique a été vu plus tôt :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (2.72)$$

et le potentiel électrostatique correspondant est simplement :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cte \quad (2.73)$$

Il reste une constante à déterminer dû à l'intégration du champ électrique. Cette constante peut prendre n'importe quelle valeur de manière arbitraire sans modifier le champ électrique. Cependant un choix naturel, dit du *potentiel absolu*, consiste de prendre cette constante nulle c'est à dire de prendre le potentiel nulle à l'infini là où il n'y a pas de charge électrique.

Si on généralise, on peut écrire le potentiel pour une distribution quelconque de  $N$  charges ponctuelles  $q_i$  :

$$V_N(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + cte \quad (2.74)$$

Pour la distribution continue de charges  $\mathcal{D}$ , le travail a déjà été fait précédemment dans l'équation (2.25) en écrivant le champ électrique sous forme d'un gradient d'une expression et donc dans ce cas :

$$V_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.75)$$

### 2.7.3 Signification physique

Le potentiel électrostatique a une signification physique assez directe. En effet, on prend deux points de l'espace  $M_1$  et  $M_2$  ainsi qu'un chemin quelconque  $\Gamma$  entre les deux. Calculons le travail de la force électrostatique  $q\mathbf{E}$  quand on déplace la charge  $q$  dans un champ électrique  $\mathbf{E}$  de  $M_1$  à  $M_2$  :

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{M_1}^{M_2} q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= -q \int_{M_1}^{M_2} (\nabla V) \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{W_{12} = q[V(M_1) - V(M_2)]} \quad (2.76)$$

Le potentiel est directement lié à l'énergie potentielle électrostatique. On peut également remarquer que le résultat final ne dépend que du point de départ et d'arrivée du trajet de la charge  $q$  et donc que le chemin suivi  $\Gamma$  n'a pas d'importance pour le calcul. On retrouve la propriété que le champ électrostatique est un champ à *circulation conservative*.

### 2.7.4 Développement multipolaire

Un des intérêts du potentiel est que le théorème de superposition fonctionne encore sans qu'on ait à se préoccuper de la direction ou du sens du vecteur qu'on somme puisque le potentiel est un champ scalaire. Si on prend par exemple un dipôle comme sur la FIGURE 2.3, c'est-à-dire deux charges  $q$  et  $-q$  séparées

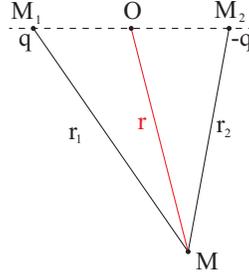


FIGURE 2.3 – Dipôle électrostatique.

par une distance  $a$  et qu'on regarde le champ loin de ce dipôle  $|\mathbf{OM}| = r \gg a$  alors on peut écrire :

$$V_{\text{dipole}}(\mathbf{r}) = V(q, \mathbf{r}_1) + V(-q, \mathbf{r}_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|} \right) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad \mathbf{p} = 2qa\mathbf{e}_x \quad (2.77)$$

où l'expression finale est obtenue de manière classique par un développement limité. Il est également possible de généraliser le dipôle électrostatique. En effet, si on prend une distribution  $\mathcal{D}$  de charges dans une région de l'espace et qu'on regarde cette distribution "de loin". Pour être plus précis, si  $O$  est le barycentre de la distribution de charges et  $a$  sa taille caractéristique alors on se place pour des distances  $|\mathbf{OM}| = r \gg a$ . On peut écrire :

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{-1/2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} \left( 1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right)^{-1/2} \\ &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right) \\ &\simeq \frac{Q_{\mathcal{D}}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 \\ &\simeq \frac{Q_{\mathcal{D}}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \right) + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 \end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\boxed{V_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}) = \frac{Q_{\mathcal{D}}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\mathcal{P} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \text{reste}} \quad \mathcal{P} = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \quad (2.78)$$

On obtient alors les deux premiers termes du développement multipolaire. Le premier terme représente le champ créé par un monopole, c'est à dire qu'à l'ordre 0 le champ vu au loin est juste le champ d'une particule ponctuelle de charge  $Q_{\mathcal{D}}$  qui est la charge totale de la distribution  $\mathcal{D}$ . Pour le dipôle précédent  $(q, -q)$  la charge totale étant nulle, ce terme n'apparaît pas. Le second terme représente le champ d'un dipôle électrostatique caractérisé par la grandeur  $\mathcal{P}$ . Le développement pourrait se poursuivre pour avoir les autres termes et notamment le terme suivant "quadripolaire". Tout ceci n'est possible que si on connaît la distribution  $\mathcal{D}$ .

## 2.8 Équation de Poisson

### 2.8.1 Mise en équation

Si à présent on prend l'équation de Maxwell-Gauss et qu'on remplace  $\mathbf{E} = -\nabla V$  on trouve :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.79)$$



L'équation de Poisson s'écrit alors :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.80)$$

Cette équation permet de calculer  $V$  si on connaît la densité de charge, donc cela n'a pas l'air de nous apporter plus d'information car on peut le faire avec le champ de Coulomb. En réalité cette équation a son utilité, tout d'abord dans certains cas particuliers. Par exemple si on a une situation physique où on impose un potentiel ou une différence de potentiel (comme un condensateur). Dans ce cas là on ne connaît pas la densité de charge mais on a des conditions aux limites pour le potentiel et une équation différentielle linéaire.

### 2.8.2 Application à l'écrantage de Debye [Exercice]

Les plasmas sont des milieux macroscopiquement neutre, partiellement ou totalement ionisés. Naturels ou artificiels, on les rencontre sous de nombreuses formes : gaz lors du passage d'un arc électrique, gaz dans les étoiles, ionosphère...

On considère ici, un plasma d'argon contenant en moyenne et par unité de volume,  $n_e$  électrons libres de masse  $m_e$  et de charge  $-e$ ,  $n_i = n_e$  ions  $\text{Ar}^+$  de masse  $m_i$ , et  $n_0$  atomes  $\text{Ar}$  de masse  $m_0$ . On définit le degré d'ionisation de ce plasma par

$$\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_0} \quad (2.81)$$

Le plasma est supposé en équilibre thermodynamique local et on note  $T$  sa température.

Soit un ion argon  $\text{Ar}^+$  en particulier, placé en  $O$ , et pris comme origine. Du fait de l'attraction coulombienne, on observe au voisinage de cet ion un surplus de charge négative, responsable d'un écart local d'électroneutralité globale du plasma. Soit  $V(r)$  le potentiel qui règne en un point  $M$  situé à la distance  $r$  de l'ion  $\text{Ar}^+$  (l'origine des potentiels est prise à l'infini). Les densités volumiques d'ions et d'électrons en  $M$  sont données par la loi de Boltzmann :

$$n_+ = n_e e^{-\frac{eV(r)}{k_B T}} \quad \text{et} \quad n_- = n_e e^{\frac{eV(r)}{k_B T}} \quad (2.82)$$

1. Donner l'expression de la densité volumique totale de charges  $\rho(r)$  pour  $r \neq 0$ .
2. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par  $V(r)$ .
3. On se place dorénavant dans l'hypothèse  $eV(r) \ll k_B T$ .

- (a) Simplifier l'équation obtenue à la question précédente et trouver une équation différentielle en  $u(r) = rV(r)$ .
- (b) Résoudre l'équation différentielle en introduisant deux constantes d'intégration  $A$  et  $B$ .
4. On admet que  $V(\infty) = 0$  et qu'au voisinage de l'ion  $\text{Ar}^+$ , l'influence de sa charge, supposée ponctuelle, l'emporte sur celle des charges électroniques distribuées en volume
- (a) Déterminer les deux constantes d'intégration  $A$  et  $B$ .
- (b) Donne l'expression du potentiel  $V(r)$  en fonction de  $e$ ,  $\epsilon_0$ ,  $r$  et d'une distance caractéristique  $\lambda_D$  appelé longueur de Debye, à expliciter en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $k_B$ ,  $T$ ,  $n_e$  et  $e$ .
- (c) Commenter le résultat obtenu et interpréter  $\lambda_D$ .
5. Pour ce plasma d'argon,  $n_e = 3.0 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$ . Calculer la valeur numérique de  $\lambda_D$  pour des températures de 1000 et 10000 K.

*Correction :*

1. La densité volumique de charges se calcule comme

$$\rho(r) = \sum_k n_k(r)q_k \quad (2.83)$$

où  $n_k$  et  $q_k$  désignent respectivement la densité volumique de porteurs de charge de type  $k$  et la charge individuelle de ce porteur. Ici :

$$\rho(r) = (n_i(r) - n_e(r))e \quad (2.84)$$

À la température du plasma, les densités de porteurs suivent la loi donnée dans l'énoncé et donc :

$$\rho(r) = n_e e \left[ e^{-\frac{eV(r)}{k_B T}} - e^{\frac{eV(r)}{k_B T}} \right] \Rightarrow \rho(r) = -2n_e e \operatorname{sh} \left( \frac{eV(r)}{k_B T} \right) \quad (2.85)$$

2. Le potentiel électrostatique  $V(r)$  est relié à  $\rho(r)$  par l'équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.86)$$

qui compte tenu de l'expression du laplacien :

$$\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V(r)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 rV(r)}{\partial r^2} = \frac{2n_e e}{\epsilon_0} \operatorname{sh} \left( \frac{eV(r)}{k_B T} \right) \quad (2.87)$$

3. Cas  $eV(r) \ll k_B T$

- (a) Dans le cas où l'agitation thermique l'emporte à haute température devant l'énergie d'interaction électrostatique (tel que  $eV(r) \ll k_B T$ ), on peut linéariser la fonction  $\operatorname{sh}(x) = x + o(x)$ , et donc :

$$\frac{\partial^2 rV(r)}{\partial r^2} = \frac{2n_e e}{\epsilon_0} \frac{eV(r)}{k_B T} \quad (2.88)$$

En posant  $u(r) = rV(r)$ , on trouve alors :

$$\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} - 2 \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 k_B T} u(r) = 0 \quad (2.89)$$

En raisonnant sur l'équation, il est clair que  $\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_e e^2}$  a la dimension d'une longueur au carré, on définit donc :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_e e^2}} \quad (2.90)$$

Et donc on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} - \frac{u(r)}{\lambda_D^2} = 0} \quad (2.91)$$

(b) La solution générale de cette équation est :

$$u(r) = Ae^{-\frac{r}{\lambda_D}} + Be^{\frac{r}{\lambda_D}} \quad (2.92)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constante d'intégration. On aurait aussi pu l'écrire sous la forme d'une somme de cosinus et sinus hyperbolique. Dans le cas d'un potentiel qui s'annule à l'infini, la première forme est plus pratique.

4. Solution :

(a) Comme le potentiel doit rester nul à l'infini il faut que  $u(r)$  soit nul à l'infini et donc  $B = 0$ . Au voisinage immédiat de l'ion  $Ar^+$  situé à l'origine  $r = 0$ , le potentiel électrostatique tend vers le potentiel de Coulomb créé par une charge ponctuelle de charge  $e$  soit :

$$r \sim \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.93)$$

Donc nécessairement :

$$A = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.94)$$

(b) Compte tenu des résultats précédents :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \quad \text{avec} \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_e e^2}} \quad (2.95)$$

(c) Le potentiel électrostatique créé par l'atome d'argon dans le plasma décroît plus rapidement que le potentiel Colombien,  $V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$  créé par un ion  $Ar^+$  seul en  $r = 0$ . En notant  $V_C$  le potentiel colombien et  $V_D$  le potentiel de Debye, le rapport est  $V_D/V_C = e^{-\frac{r}{\lambda_D}}$ . Il s'atténue sur la distance caractéristique  $\lambda_D$  qui est d'autant plus grande que la température est élevée. Pour  $r \gg \lambda_D$ , on a  $V_D/V_C \rightarrow 0$ , ce qui signifie que les charges distantes de  $r \gg \lambda_D$  ne ressentent plus l'effet électrostatique de la charge placé en  $r = 0$ . On dit que la charge centrale est écrantée. Ce phénomène d'écrantage a été expliqué par le physicien américain Peter Debye.

5. Avec les valeurs données on trouve  $\lambda_D = 2.8 \cdot 10^{-8} \text{ m}$  pour  $T = 1000 \text{ K}$  et  $\lambda_D = 8.9 \cdot 10^{-8} \text{ m}$  pour  $T = 10000 \text{ K}$ . Dans le second cas,  $\lambda_D$  représente seulement une dizaine de rayons atomiques.

### 2.8.3 Retour à la forme intégrale : Fonction de Green

L'intérêt de la fonction de Green ici est de retrouver les anciens résultats. Pour cela nous devons utiliser les résultats de la fonction de Green rappelé dans le chapitre préliminaire. Dans le cas de l'équation de Poisson on a :

$$-\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.96)$$

Si on définit la transformée de Fourier tel que :

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (2.97)$$

On prend alors la transformée de Fourier de l'équation précédente on a alors :

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{k^2} \quad (2.98)$$

Il faut à présent inverser la TF :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{k^2} d\mathbf{k} \quad (2.99)$$

Pour effectuer l'intégration, passons en coordonnées sphériques, où nous prenons l'axe  $k_z$  parallèle à  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Dans ce cas là on a  $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \cos \theta$  et  $d\mathbf{k} = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$ . L'intégrale s'écrit alors :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty dk \sin \theta e^{ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \cos \theta} \quad (2.100)$$

L'intégration selon  $\phi$  nous donne directement un facteur  $2\pi$  et par la suite on pose  $u = \cos \theta$  :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 e^{ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|u} du \quad (2.101)$$

On intègre alors sur  $u$  :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{\sin k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (2.102)$$

Un changement de variable évident nous donne :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \int_0^\infty dk \frac{\sin k}{k} \quad (2.103)$$

Nous avons donc bien mis en évidence la dépendance en  $1/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ . L'intégrale n'est qu'une constante qu'il est possible de calculer avec la théorie des fonctions analytiques et vaut  $\pi/2$ . Ceci nous donne alors :

$$\boxed{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}} \quad (2.104)$$

Par la suite il reste plus qu'à ajouter le terme de source qui vaut  $S(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$  et donc :

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}} \quad (2.105)$$

On retrouve alors l'expression du potentiel d'une densité de charge que nous avons exprimé auparavant.

## 2.9 Énergie des distributions de charges discrètes

Le potentiel est relié à l'énergie électrostatique du système, essayons d'approfondir un peu cette notion d'énergie électrostatique en comparant ce qu'il se passe pour des distributions discrètes et continues.

### 2.9.1 Théorème de l'extrémum du potentiel



#### **Théorème :**

Il n'existe pas d'extrémum du potentiel électrostatique  $V(\mathbf{r})$  dans une région de l'espace vide de charge.

Démonstration :

*Supposons qu'au voisinage d'un point  $M$  de l'espace il n'y a pas de charge. Soit  $\Sigma$  une surface fermée entourant  $M$ . Raisonnons alors par l'absurde. Supposons alors que en  $M$  le potentiel  $V$  soit extremum. Ainsi je peux trouver une surface  $\Sigma$  tel que le champ électrique  $\mathbf{E}$  soit entrant (ou sortant) de cette surface car on a  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . Par conséquent le flux de  $\phi$  de  $\mathbf{E}$  à travers  $\Sigma$  est non nul. Si c'est le cas il faudrait que le volume délimité par  $\Sigma$  contienne une charge, or ceci est exclu par hypothèse. Donc  $V$  ne peut être extrémum en  $M$ .*

Le corollaire direct est qu'on ne peut pas piéger une particule soumise uniquement à un champ électrostatique puisqu'il ne peut pas avoir d'équilibre stable.



### Théorème de Erauskaw :

Il n'existe aucune distribution de charges ponctuelles stable par pur effet électrostatique.

Démonstration :

Soit  $\mathcal{D}$  une distribution discrète de charges. Pour avoir stabilité de la distribution il faut que pour toute charge  $q_i$  de la distribution, tout mouvement de cette charge entraîne une force qui la ramène vers sa position d'équilibre. Soit  $q_i$  fixé en  $\mathbf{r}_i$ , on doit avoir  $\mathbf{E}_{\mathcal{D}}$  autour de  $\mathbf{r}_i$  qui est purement entrant ou sortant suivant le signe de  $q_i$ . Donc  $V_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}_i)$  est extrémum. Ceci n'est pas en contradiction car il y a une charge  $q_i$ . Cependant comme il n'y a pas d'interaction de  $i$  sur  $i$  on a  $V_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}_i) = V_{\mathcal{D}-q_i}(\mathbf{r}_i)$  or dans ce cas là il n'y a pas de charge dans le volume autour de  $q_i$  donc il n'y a pas d'extrémum possible donc pas de stabilité possible.

### 2.9.2 Énergie d'une distribution discrète

Considérons une distribution de charges ponctuelles  $\mathcal{D}$  composée de charges  $\{q_j\}$ . Nous savons que si la distribution est bornée le champ électrique créé par cette distribution est le champ électrostatique de Coulomb  $\mathbf{E}_{\mathcal{D}}$ . Prenons maintenant une autre charge  $q_i$  à l'extérieur de  $\mathcal{D}$  au point  $\mathbf{r}$ . Nous connaissons la force de la distribution sur la charge  $q_i$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathcal{D}/q_i} &= q_i \mathbf{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}) \\ &= -q_i \nabla(V_{\mathcal{D}}(\mathbf{r})) \\ &= -q_i \nabla \left( \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\|} \right) \\ &= -q_i \nabla \left( \sum_j V_j(\mathbf{r}) \right) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la charge  $q_i$  soit amenée en  $\mathbf{r}$  depuis l'infini en partant et en arrivant avec une vitesse nulle. Soit  $W_{\mathcal{D}}$  le travail exercée sur  $q_i$  par la distribution  $\mathcal{D}$ . Soit  $W_{\text{op}}$  le travail que doit fournir un opérateur extérieur pour effectuer l'opération. D'après le théorème de l'énergie cinétique on a :

$$\Delta E_C(q_i) = 0 = W_{\text{op}} + W_{\mathcal{D}} \quad (2.106)$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} W_{\text{op}} &= -W_{\mathcal{D}} \\ &= - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{\text{elec}q_i} \cdot d\mathbf{l} \\ &= q_i \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \nabla \left( \sum_j V_j(\mathbf{r}) \right) \cdot d\mathbf{r} \\ &= q_i \sum_j (V_j(\mathbf{r}) - V_j(\infty)) \end{aligned}$$

Comme la distribution est bornée, le champ électrique décroît en  $1/r^2$  et donc on peut choisir le potentiel nul à l'infini  $V_j(\infty)$  et donc :

$$W_{\text{op}} = q_i \sum_j V_j(\mathbf{r}) = q_i V_{\mathcal{D}_{j \neq i}}(\mathbf{r}) \quad (2.107)$$

$V_{\mathcal{D}}(\mathbf{r})$  représente le travail par unité de charge à fournir par un opérateur extérieur pour amener une charge depuis l'infini à une position donnée.

On peut à présent calculer l'énergie nécessaire pour créer  $\mathcal{D}$ . Pour faire cela, on amène les charges les unes après les autres. On note  $W_{\text{op}}^i$  le travail fourni pour amener la charge  $i$  depuis l'infini à sa position.

$$W_{\text{op}}^{(1)} = 0 \quad \text{pas de charge présente} \quad (2.108)$$

$$W_{\text{op}}^{(2)} = -W_{\text{elec}}^{(1/2)} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \quad (2.109)$$

$$W_{\text{op}}^{(3)} = q_3 \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\|} \right) \quad (2.110)$$

Si on considère  $N$  charges alors pour  $i \leq N$  on a :

$$W_{\text{op}}^{(i)} = q_i \sum_{j < i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \quad (2.111)$$

On en déduit alors l'énergie totale à apporter :

$$W_{\text{op}}^{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N W_{\text{op}}^i \quad (2.112)$$

$$= \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j < i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \quad (2.113)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \quad (2.114)$$

On vient de calculer  $W_{\text{op}}^{\text{tot}}$  l'énergie d'interaction de la distribution  $\mathcal{D}$ . Il faut noter que le signe de cette quantité n'est pas fixé. En effet si on empile une charge positive et une charge négative alternativement on peut avoir  $W_{\text{op}}^{\text{tot}} < 0$ . *On rappelle qu'on ne compte pas ici l'énergie d'interaction de  $i$  avec  $i$ .*

## 2.10 Énergie des distributions continues

Cette fois-ci la distribution  $\mathcal{D}$  est une distribution de charges continue. On transforme l'expression précédente dans la limite continue et on introduit :

$$E_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \quad (2.115)$$

où  $V(\mathbf{r}')$  est le potentiel électrostatique créé par toute la distribution. On peut se demander si ce passage à la limite continue est légitime notamment en regardant si cette intégrale converge. Le potentiel étant en  $1/r'$  et l'élément de volume en  $r'^3$  donc le produit sous l'intégrale est d'ordre de grandeur  $r'^2$  et comme la distribution est de taille finie l'intégral converge.

Localisation de l'énergie :

Si on regarde l'expression de  $E_{\mathcal{D}}$  on pourrait penser que l'énergie est seulement localisée dans le volume occupé par la distribution. Qu'en est-il vraiment ? Pour répondre à cela, prenons un volume  $\mathcal{V}$  délimité

par la surface  $\Sigma$  contenant la distribution de charges continue  $\mathcal{D}$ . On a :

$$\begin{aligned}
 E_{\mathcal{D}} &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r}' \epsilon_0 (\nabla_{\mathbf{r}'} \mathbf{E}(\mathbf{r}')) V(\mathbf{r}') \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r}' (\nabla_{\mathbf{r}'} (\mathbf{E}(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}')) - \mathbf{E}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} V) \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r}' \|\mathbf{E}(\mathbf{r}')\|^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r}' (\nabla_{\mathbf{r}'} (\mathbf{E}(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}')))
 \end{aligned}$$

Prenons la seconde intégrale :

$$I_2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r}' (\nabla_{\mathbf{r}'} (\mathbf{E}(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}'))) = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\Sigma} d^2\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \quad (2.116)$$

Si on regarde la dépendance en  $r'$  de l'argument de l'intégrale on a l'élément de surface en  $r'^2$ , le champ électrique en  $1/r'^2$  et le potentiel en  $1/r'$ . Ainsi l'argument de l'intégrale est en  $1/r'$ . Si on fait tendre la taille du volume  $\mathcal{V}$  vers l'infini cette intégrale tend vers 0. Ainsi on a :

$$E_{\mathcal{D}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \|\mathbf{E}(\mathbf{r}')\|^2 \quad (2.117)$$

À partir de cette expression, il est possible de faire plusieurs remarques :

- L'énergie de la distribution est l'intégrale sur tout l'espace car on a fait tendre le volume d'intégration vers l'infini pour se débarrasser de la seconde intégrale. Ainsi l'énergie n'est pas seulement localisée dans la distribution mais dans tout l'espace.
- L'énergie de la distribution est positive quelque soit la distribution que l'on considère. En effet, on pourra essayer comme dans le cas ponctuel d'empiler des régions positives et négatives, on n'obtiendra jamais une énergie négative. La différence fondamentale entre les deux approches (ponctuelle et continue) est que dans le cas de la densité continue, on considère l'interaction de la charge en un point  $M$  avec elle même.
- On peut alors définir une densité d'énergie électrostatique :

$$w_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0}{2} \|\mathbf{E}(\mathbf{r}')\|^2 \quad (2.118)$$

Ceci est un choix naturel au vu de l'expression mais il faut être conscient qu'il s'agit d'une possibilité parmi d'autres de définition de la densité d'énergie.

## 2.11 Stockage de l'énergie électrostatique : les condensateurs

Si on prend un condensateur plan composé de deux conducteurs plans de surface  $S$  distants de  $e$  (tel que  $e \ll S$  pour négliger les effets de bords). Les deux plans sont chargés avec des charges opposées  $\pm Q$ . Si on néglige les effets de bords, on décrit les plaques comme étant chargées uniformément en surface  $\sigma = \frac{\pm Q}{S}$ . Le champ entre les armatures est donnée par :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \mathbf{n} \quad (2.119)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal aux plans du condensateur de l'armature chargé + vers l'armature chargée -. On calcule alors la circulation de  $\mathbf{E}$  pour avoir la différence de potentiel et la capacité qu'on définit comme le rapport entre la charge d'une armature sur la différence de potentiel :

$$\Delta V = \frac{Q}{\epsilon_0 S} e \quad (2.120)$$

La capacité d'un condensateur plan s'écrit alors :



$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad (2.121)$$

avec  $S$  la surface des armateurs et  $e$  l'espacement entre ceux-ci.

Sur des conducteurs chargés à l'équilibre, l'apport de nouvelles charges  $dQ_i$  de l'infini est associé à un travail des forces électrostatiques :

$$dW_{\text{el}} = - \sum_i V_i dQ_i = -dW_{\text{op}} \quad (2.122)$$

Prenons un condensateur dans un circuit avec une armature au potentiel  $V_1$  avec une charge  $Q_1$  et l'autre au potentiel  $V_2$  avec une charge  $Q_2 = -Q_1$ .

$$dW_{\text{el}} = V_1 dQ_1 + V_2 dQ_2 = (V_1 - V_2) dQ_1 \quad (2.123)$$

Or on a  $Q_1 = C(V_1 - V_2)$  donc :

$$dW_{\text{el}} = \frac{1}{C} Q_1 dQ_1 \quad (2.124)$$

Donc :

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 \quad (2.125)$$

Pour un condensateur plan :

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} V^2 \quad (2.126)$$

Or  $E = V/e$  donc :

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 (S e) E^2 \quad (2.127)$$

Donc par unité de volume :

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (2.128)$$

Tout se passe comme si l'espace entre les plaques stockait une quantité d'énergie  $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  par unité de volume (vrai quelque soit la géométrie).

---

4. sous certaines conditions : voir BFR Tome 1 Chapitre 7

# Chapitre 3

## Magnétostatique

### 3.1 Introduction et rappels

Dans ce chapitre nous voulons traiter l'équivalent de l'électrostatique mais pour le magnétisme. On a vu que dans le cas des régimes stationnaires (et non statique car sans courant il ne peut avoir de champ magnétique) les équations pour le champ électrique et magnétiques étaient découplées. On a alors comme équations locales pour le champ magnétique :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

Et également la force de Lorentz :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (3.3)$$

Tout d'abord si on prend la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère, le terme de gauche est nul avec les relations vectorielles et on trouve que :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.4)$$

Ainsi la divergence du courant est nul ce qui signifie que le courant est à flux conservatif en magnétostatique. On aurait pu retrouver cette relation avec l'équation de conservation de la charge tout en sachant qu'en régime stationnaire on a  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ .

Un peu d'histoire du magnétisme ainsi que quelques ordres de grandeur :

- Les roches possédant des propriétés magnétiques comme la magnétite ( $Fe_3O_4$ ) sont connues depuis l'âge de fer (il y a 2550-3000 ans environ).
- Jusqu'en 1800 il y a eu beaucoup d'expériences et de résultats qualitatifs (répulsion entre pôles identiques...) avant une étude plus systématique.
- En 1819 l'expérience d'Oersted met en évidence qu'un courant électrique peut influencer un ensemble alimentée comme une aiguille.
- Il s'en suit en 1822 les expériences de Faraday et Ampère qui donneront la loi de Faraday et le théorème d'Ampère.
- Dans le même temps Biot et Savart propose la formule du champ magnétique créé par un courant.

La loi de Biot et Savart s'écrit



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad (3.5)$$

avec  $\mathbf{j}$  le courant volumique et  $\mu_0$  la perméabilité du vide

Quelques ordres de grandeur en magnétisme :

- ★ 1 Weber correspond au flux permettant par induction de créer une force électromotrice de 1 Volt si on annule de façon entrante 1 champ magnétique en 1 seconde dans une spire.
- ★ 1 Tesla correspond à un champ uniforme qui permet d'avoir un flux de 1 Weber par mètre carré.
- ★ 1 Gauss =  $10^{-4}$  T
- ★ Champ magnétique terrestre : la composante horizontale vaut environ 0,2 G et la verticale 0,4 G
- ★ Dans l'entrefer d'un électroaimant entre : 0,1-2 T
- ★ Aimant permanent au Néodyme (Nd) : 1,25 T
- ★ IRM : 6 T
- ★ Champ pulsé : 100 T maximum sans destruction et jusqu'à 2800 T avec explosion
- ★ Pulsar :  $4 \cdot 10^8$

## 3.2 Lois locales et lois intégrales

### 3.2.1 Lois locales

Premièrement grâce aux équations de Maxwell :

- Comme la divergence de  $\mathbf{B}$  est nulle on peut dire qu'il n'existe pas de monopôle magnétique.



D'après les relations vectorielles du première chapitre, il existe un certain champ vectoriel  $\mathbf{A}$  tel que

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (3.6)$$

Ce champ  $\mathbf{A}$  est appelé *potentiel vecteur* et est défini à un gradient près car  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A} + \nabla \xi$  donnent le même champ magnétique.

- Avec les équations de Maxwell on a également le lien entre le champ magnétique et la densité de courant (en stationnaire) :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (3.7)$$

De plus on peut relier le potentiel vecteur à la densité de courant en remplaçant dans l'équation précédente  $\mathbf{B}$  par  $\nabla \wedge \mathbf{A}$  :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (3.8)$$

Or à ce stade là nous n'avons pas imposé de condition sur le potentiel vecteur.

Le choix qui est fait est de retrouver une équation de Poisson pour le potentiel vecteur (comme pour la densité de charge en électrostatique) et pour cela on impose la *Jauge de Coulomb* :



$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.9)$$

Ainsi le lien entre le potentiel vecteur et la densité de courant est l'équation de Poisson :

$$\Delta \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} = 0 \quad (3.10)$$

Il faut noter que cette condition impose une condition sur le champ  $\xi$  qu'on peut ajouter au potentiel vecteur :

$$\Delta \xi = 0 \quad (3.11)$$

### 3.2.2 Conséquences : lois globales

En partant de l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur, on peut effectuer le même calcul que pour le potentiel électrostatique et on trouve en remplaçant  $\rho$  par  $\mathbf{j}$  et  $1/\epsilon_0$  par  $\mu_0$  (il suffit de faire le calcul analogue pour les trois composantes) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (3.12)$$

Maintenant on peut calculer le champ magnétique à partir du potentiel vecteur :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}} \wedge \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \quad (3.13)$$

D'après le chapitre de rappels mathématiques on a  $\nabla \wedge (\mathbf{V}.f) = (\nabla f) \wedge \mathbf{V} + f(\nabla \wedge \mathbf{V})$ . Cependant le second terme disparaît dans le développement car le courant ne dépend que de  $\mathbf{r}'$  et que le  $\nabla$  agit sur  $\mathbf{r}$ . Donc :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \wedge \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) = \nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (3.14)$$

Ceci permet de retrouver la loi de Biot et Savart pour le champ magnétique  $\mathbf{B}$  :

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}} \quad (3.15)$$

La question qu'on doit se poser est de savoir si l'expression de  $\mathbf{A}$  vérifie la Jauge de Coulomb ? Calculons :

$$\nabla_{\mathbf{r}} . \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}} . \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \quad (3.16)$$

On peut alors développer la divergence :  $\nabla . (f\mathbf{V}) = f(\nabla . \mathbf{V}) + (\mathbf{V} . \nabla)f$  ce qui donne :

$$\nabla_{\mathbf{r}} . \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') . \nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \quad (3.17)$$

À présent nous allons effectuer des manipulations mathématiques pour arriver à nos fins. Tout d'abord nous allons nous restreindre à une domaine de l'espace  $\mathcal{D}$  délimité par une surface  $\Sigma$ .  $\mathcal{D}$  est choisi tel que de ce domaine il ne sort pas de courant, ainsi pour tout vecteur normal on a  $\mathbf{j} . \mathbf{n} = 0$ . On parle alors de *guidage de courant*. De plus nous allons changer le gradient de  $\mathbf{r}$  vers  $\mathbf{r}'$  en effectuant le changement de variable  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$  et  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  ce qui donne un signe "-" dans l'expression globale. On a donc :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} . \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') . \nabla_{\mathbf{r}'} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}'} . \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \quad \text{car } \nabla . \mathbf{j} = 0 \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Sigma} d\Sigma . \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Sigma} d\Sigma \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') . \mathbf{n}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \\ &= 0 \quad \text{par guidage} \end{aligned}$$

Donc dans le cas de la magnétostatique et du guidage du courant, le potentiel vecteur obéit bien à la Jauge de Coulomb. Il faut noter cependant que contrairement au potentiel électrique  $V$ , le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  n'offre pas vraiment d'avantage technique de calcul.

On peut alors vérifier la valeur de  $\nabla \wedge \mathbf{B}$  :

$$\begin{aligned}
 \nabla \wedge \mathbf{B} &= \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{A} \\
 &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\
 &= -\nabla^2 \mathbf{A} \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}}^2 \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') (-4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \\
 &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})
 \end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation de Maxwell Ampère en stationnaire.

### 3.2.3 Théorème d'Ampère

On part de l'équation de Maxwell-Ampère  $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ . Prenons une courbe fermée orientée  $\mathcal{C}$  et une surface  $\Sigma$  sur laquelle s'appuie cette courbe. Calculons la circulation du champ magnétique le long de la courbe  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{\Sigma} \quad \text{par Stokes} \\
 &= \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{\Sigma} \quad \text{par Maxwell-Ampère} \\
 &= \mu_0 I
 \end{aligned}$$

Le théorème d'Ampère s'écrit alors :

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I} \quad (3.18)$$



avec  $\mathcal{C}$  une courbe fermée et  $I$  la somme des courants algébriques à travers n'importe quelle surface s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ . Il faut noter qu'il est nécessaire d'orienter la courbe pour bien appliquer le théorème : la somme des courants est algébrique.

Autrement dit : la circulation du champ magnétique sur une courbe fermée  $\mathcal{C}$  est égale au produit de la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0$  par l'intensité totale qui traverse toute surface  $\Sigma$  s'appuyant sur la courbe.

Comme pour le théorème de Gauss, l'utilisation du théorème d'Ampère suppose un choix judicieux du contour le long duquel on calcule la circulation de  $\mathbf{B}$  et suffisamment de symétries/invariances.

## 3.3 Symétries et calculs de champs

### 3.3.1 Symétries du champ magnétique

Dans le chapitre sur l'électrostatique on a déjà vu les symétries du champ électrique qui est un "vrai" vecteur. Cependant pour le champ magnétique ce n'est pas pareil. En effet, si on regarde la loi de Biot et Savart pour le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , on voit que  $\mathbf{A}$  est un vrai vecteur car il est proportionnel au courant (et donc à une vitesse) qui est un vrai vecteur.

Le lien entre le champ magnétique et le potentiel vecteur est  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ . Or l'opérateur *nabla* est un vrai vecteur également car la transformation  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$  transforme  $\nabla$  en  $-\nabla$ . Ainsi comme le champ magnétique est le produit vectoriel entre deux vrais vecteurs, il est un pseudo vecteur<sup>1</sup>.



En conséquence, les propriétés de symétrie du champ magnétique sont "opposés" à celles du champ électrique qui est un vrai vecteur.

- En tout point  $M$  d'un plan de symétrie  $\Pi^+$  de la distribution de courant on a  $\mathbf{B}(M) \perp \Pi^+$
- Si  $\Pi^-$  est un plan d'antisymétrie de la distribution des courants alors  $\mathbf{B}(M) \in \Pi^-$  pour tout point  $M \in \Pi^-$ .

### 3.3.2 Exemples de calculs du champ B

#### Fil rectiligne infini par théorème d'Ampère

On se place dans les coordonnées cylindriques. Tout plan contenant le fil et le point  $M$  d'observation est plan de symétrie donc le champ magnétique est orthoradial (selon  $\mathbf{e}_\theta$ ). Par la suite on se place à une distance  $r$  du fil et on applique le théorème d'Ampère sur un cercle d'axe le fil et de rayon  $r$ . On a alors :

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 I \quad (3.19)$$

Et donc :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta \quad (3.20)$$

#### Fil rectiligne infini par Biot et Savart

Essayons maintenant de faire le calcul directement avec la loi de Biot et Savart. On doit donc calculer le champ à partir de la formule pour un circuit filiforme :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C I d\mathbf{l} \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.21)$$

On ne refait pas les symétries qui sont les mêmes que précédemment. Considérons la FIGURE 3.1 avec les notations. Calculons le champ magnétique au point  $M$  en calculant tout d'abord le champ infinitésimal créé par le point  $P$ . Considérons que le point  $O$  est la référence pour notre altitude ( $z = 0$ ) et que le point  $P$  est à l'altitude  $z$ . Le fil est parcouru pour un courant  $I$ . Exprimons à présent quelques éléments de longueur :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{R}{\cos \theta} \quad (3.22)$$

$$OP = R \tan \theta = z \quad (3.23)$$

$$dz = \frac{R d\theta}{\cos^2 \theta} \quad (3.24)$$

On peut alors exprimer :

$$d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = R dz \quad (3.25)$$

Le calcul donne alors :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad (3.26)$$

Et donc on trouve le même résultat :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{e}_\theta \quad (3.27)$$

1. Un pseudo-vecteur est un vecteur dont le sens dépend du trièdre de référence choisi. Il se comporte comme un vecteur lors d'une rotation (il conserve les angles orientés) mais change lors d'une isométrie indirecte comme une inversion de tous les axes par rapport à un plan.

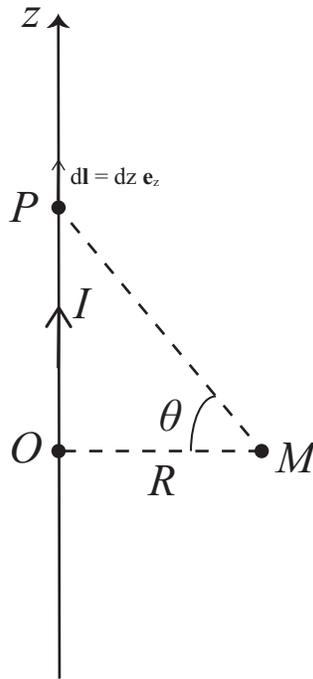


FIGURE 3.1 – Champ magnétique créé par un fil infini.

### Spire circulaire - Champ sur l'axe

Considérons une spire  $\mathcal{C}$  de rayon  $R$  et d'axe  $Oz$  parcouru par un courant  $I$  comme sur la FIGURE 3.2. Calculons le champ magnétique créée par cette spire sur son axe de révolution.

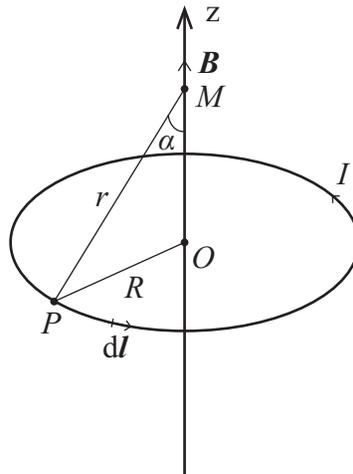


FIGURE 3.2 – Champ magnétique créé par une spire sur son axe de révolution.

Débutons par les symétries. Tout plan contenant l'axe de révolution (et donc le point  $M$ ) est un plan d'antisymétrie du courant et donc le champ magnétique appartient à ce plan et donc  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . Ici on est obligé d'effectuer le calcul avec la loi de Biot et Savart avec  $\mathbf{r} = \mathbf{PM}$  :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{l} \wedge \mathbf{r}}{r^3} = \frac{I\mu_0}{4\pi r^3} \oint d\mathbf{l} \wedge \mathbf{r} \quad (3.28)$$

Et donc :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 r^3} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \mathbf{e}_z \quad (3.29)$$

Grâce à ce résultat on peut calculer le champ magnétique au point  $M$  créé par un solénoïde d'une longueur  $L$  comprenant  $N$  spires. Pour cela découpons le solénoïde en spires infinitésimales de longueur  $dz$  parcourue par un courant  $dI = nI dz$  où  $n = N/L$  la densité linéique de spires. Le champ au point  $M$  sur la spire créée par cette spire est, d'après le résultat précédent est égale à

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2R} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 n I dz}{2R} \sin^3 \alpha \quad (3.30)$$

avec  $\alpha$  l'angle sous lequel on voit la spire. On a la relation  $\tan \alpha = \frac{R}{z}$  qu'on peut différentier :

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = -R \frac{dz}{z^2} \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{-R d\alpha}{\cos^2 \alpha \tan^2 \alpha} = \frac{-R d\alpha}{\sin^2 \alpha} \quad (3.31)$$

On peut alors intégrer le champ sur l'ensemble du solénoïde avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les deux angles sous lesquelles on voit le solénoïde :

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{I \mu_0}{2} n (-\sin \alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \mu_0 n I (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \quad (3.32)$$

Et donc :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 n I (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \quad (3.33)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \frac{1}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \mathbf{e}_z \quad (3.34)$$

### Conducteur cylindrique

Soit un conducteur cylindrique de rayon  $R$  parcouru par un courant uniforme  $\mathbf{j}$ . Calculons le champ magnétique en tout point de l'espace. Comme pour le fil infini, tous les plan contenant le point  $M$  et l'axe de révolution du cylindre est plan de symétrie donc le champ magnétique est orthoradial. L'invariance par rotation autour de l'axe de révolution et selon le fil (coordonnée  $z$ ) nous informe que le champ ne dépend que de la distance à l'axe noté  $r$ .

Appliquons alors le théorème d'Ampère sur un cercle de rayon  $r$  et de centre passant par l'axe de révolution du fil :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 I_e \quad (3.35)$$

où  $I_e$  est le courant enlacé qui va dépendre de où on se situe dans l'espace. Si  $r > R$  alors le courant enlacé est le courant total qui vaut  $I = j\pi R^2$  et donc le champ vaudra  $\mu_0 \frac{R^2}{2r} j$ . Si  $r < R$  alors le courant enlacé est une fraction du courant total et vaut  $I = j\pi r^2$  et donc le champ vaut  $\mu_0 \frac{r}{2} j$ . Au final, le champ magnétique créé vaut :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{r}{2} j \mathbf{e}_\theta \quad r < R \quad (3.36)$$

$$= \mu_0 \frac{R^2}{2r} j \mathbf{e}_\theta \quad r > R \quad (3.37)$$

On peut également s'entraîner à partir de l'expression précédente à calculer le potentiel vecteur. Pour cela il faut reprendre l'expression du rotationnel en cylindrique, remarquer que le champ magnétique n'est que selon  $\mathbf{e}_\theta$  et que  $A$  ne peut dépendre de  $z$ , alors on a :

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \quad (3.38)$$

Il suffit donc d'intégrer les deux relations précédentes pour  $r < R$  et  $r > R$  pour trouver les relations suivantes, en imposant un potentiel vecteur nul en  $r = R$  :

$$\mathbf{A} = \mu_0 \frac{R^2}{2} j \ln\left(\frac{r}{R}\right) \mathbf{e}_z \quad r > R \quad (3.39)$$

$$= \mu_0 \frac{j}{4} (R^2 - r^2) \mathbf{e}_z \quad r < R \quad (3.40)$$

On remarquera dans cette expression que le potentiel vecteur ne tend pas vers 0 à l'infini. Cela devrait poser problème mais en réalité comme la distribution de courant n'est pas bornée le potentiel vecteur n'a aucune raison de décroître à l'infini.

### Champ magnétique dans un câble coaxial [Exercice]

On considère un câble coaxial (câble de sortie d'un générateur basse fréquence) constitué d'un cylindre métallique central plein de rayon  $R_1$ , et d'une couche cylindrique périphérique de rayon interne  $R_2$  et de rayon externe  $R_3$ .

Entre  $R_1$  et  $R_2$  se trouve une matière isolante assimilable à du vide du point de vue électromagnétique. Ce câble est rectiligne d'axe  $Oz$  et considéré comme infiniment long. Sa partie conductrice centrale transporte une intensité  $i$  constante, dirigé selon  $+\mathbf{e}_z$  et sa partie périphérique transporte une intensité  $i$  dans le sens  $-\mathbf{e}_z$ . Dans chacune des deux parties conductrices, la densité de courant est supposée uniforme. Soit  $M$  un point où on calcul le champ magnétique créé : on note  $r$  la distance entre  $M$  et l'axe de l'ensemble.

1. Montrer que le champ magnétique créé par le câble en un point  $M$  quelconque se met sous la forme

$$\mathbf{B}(M) = B(r) \mathbf{u} \quad (3.41)$$

où  $\mathbf{u}$  est un vecteur à préciser.

2. Déterminer l'expression de  $B(r)$  pour  $r \in [0; +\infty[$ . Tracer  $B(r)$ .

Dans la suite on considère le cas où les deux intensités sont surfacique, cantonnées dans de très faibles épaisseurs au voisinage de  $R_1$  et  $R_2$ .

3. Que devient le graphe de  $B(r)$ ? Commenter les discontinuités qui apparaissent.
4. Après avoir rappelé l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique du champ, exprimer l'énergie magnétique  $U_m$  contenue dans une portion de longueur  $\ell$  du câble.
5. En déduire le coefficient d'auto-inductance (inductance propre)  $L$  de cette portion, puis l'inductance linéique propre du câble :

$$\Lambda = \frac{L}{\ell} \quad (3.42)$$

6. Calculer numérique  $L$  pour  $R_1 = 1.0$  cm,  $R_2 = 2.0$  cm et  $h = 1.0$  m. Commenter.

*Correction :*

1. Soit un point  $M$  où on souhaite exprimer le champ. Le plan qui contient  $M$  et l'axe  $Oz$  est plan de symétrie pour la distribution de courant, donc le champ est perpendiculaire à ce plan. Il est donc dirigé selon  $\mathbf{e}_\theta$ . La distribution est invariante par translation selon  $z$  et rotation selon  $\theta$  donc le champ ne dépend que de  $r$ . Ainsi :

$$\mathbf{B}(M) = B(r) \mathbf{e}_\theta \quad (3.43)$$

2. Les lignes de champ sont des cercles d'axe  $Oz$  sur lesquels  $B(r)$  est constante. On peut calculer  $B(r)$  en utilisant le théorème d'Ampère. Le contour fermé utilisé est une ligne de champ magnétique de rayon  $r$ , orienté arbitrairement dans le sens trigonométrique :

$$\oint_C \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlace}} \quad (3.44)$$

Il reste à déterminer l'intensité enlacée par le contour en fonction du rayon  $r$ . Par définition cette intensité traverse la surface  $\Sigma$  s'appuyant sur le contour  $\mathcal{C}$ . Donc :

$$I_{\text{enlace}} = \iint_{\Sigma} \mathbf{j}(r) \cdot d\mathbf{S} = \int_0^r j(r) 2\pi r dr \quad (3.45)$$

$\mathbf{j}(r)$  est selon  $z$  et dépend de l'endroit considéré.

- Cas 1 : si  $r \in [0; R_1]$ ,  $j$  est tel que  $i = j\pi R_1^2$ , donc  $j(r) = \frac{i}{\pi R_1^2}$  et  $I_{\text{enlace}} = i \frac{r^2}{R_1^2}$  donc :

$$B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2} \quad \forall r \in [0; R_1] \quad (3.46)$$

- Cas 2 :  $r \in [R_1; R_2]$ ,  $j(r) = 0$  et donc l'intensité enlacée est simplement l'intensité circulant dans le cylindre central  $i$ . Donc :

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad \forall r \in [R_1; R_2] \quad (3.47)$$

- Cas 3 :  $r \in [R_2; R_3]$ ,  $j$  est tel que  $-i = j\pi(R_3^2 - R_2^2)$  donc  $j = \frac{-i}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}$  et donc :

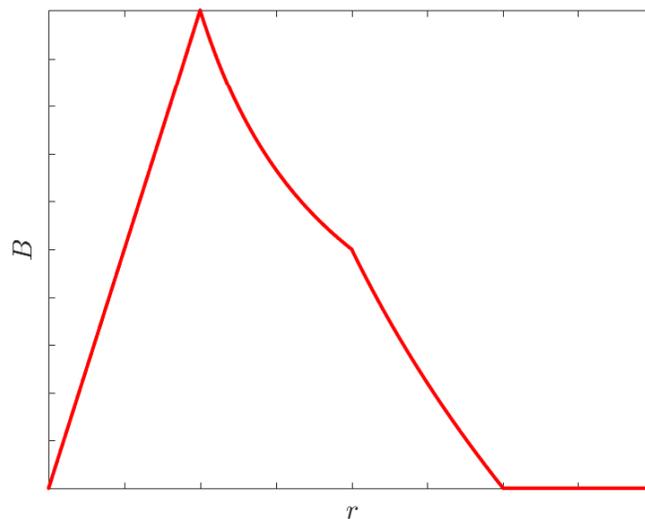
$$I_{\text{enlace}} = i + \int_{R_2}^r \frac{-i}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} 2\pi r dr \quad (3.48)$$

On trouve donc :

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \left[ 1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right] \quad \forall r \in [R_2; R_3] \quad (3.49)$$

- Cas 4 : si  $r \in [R_3; +\infty]$ ,  $j = 0$ . L'intensité enlacée est égale à  $i - i = 0$  donc le champ magnétique est nul à l'extérieur du câble coaxial.

Le graphique donne d'abord une croissance linéaire jusqu'au point  $(R_1, \frac{\mu_0 i}{2\pi R_1})$ . Puis la courbe décroît en  $1/r$  jusqu'au point  $(R_2, \frac{\mu_0 i}{2\pi R_2})$  et enfin décroît selon la fonction calculée jusqu'à 0 en  $R_3$  où il le reste nul jusqu'à l'infini. Une représentation est faite ci-après :



3. Dans le cas où l'intensité du câble est cantonnée au voisinage de  $R_1$  et de  $R_2$  alors on a plus la croissance linéaire et la seconde décroissance mais à chaque fois des sauts dans la valeur du champ magnétique. La décroissance entre  $R_1$  et  $R_2$  reste inchangé.

4. La densité volumique magnétique d'écrit  $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$  et s'exprime en  $J.m^{-3}$ . Elle est non nulle que dans l'intervalle  $[R_1; R_2]$  où elle vaut :

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right)^2 \quad (3.50)$$

Pour avoir l'énergie magnétique dans la zone considérée, on intègre sur le volume entre  $z = 0$  et  $z = \ell$  :

$$U_m = \int_0^\ell dz \int_{R_1}^{R_2} dr 2\pi r u_m \quad \Rightarrow U_m = \frac{1}{4\pi} \mu_0 \ell i^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (3.51)$$

En identifiant les relation on obtient  $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ell \ln \frac{R_2}{R_1}$ . En divisant par la longueur  $\ell$  :

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (3.52)$$

5. Avec les valeurs proposées on trouve  $L = 1.4 \cdot 10^{-7} H$ .

### 3.4 Dipôle magnétique

Pour le dipôle magnétique, procédons par analogie avec le dipôle électrostatique et résumons les résultats dans un tableau :

Dipôle en O	Électrostatique	Magétique
Moment dipolaire	$\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$	$\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$
Constante	$\frac{1}{\epsilon_0}$	$\mu_0$
Champ	$\mathbf{E}$	$\mathbf{B}$
Champ créé	$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ $E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p} \right]$	$B_r = \frac{2\mu_0 M \cos \theta}{4\pi r^3}$ $E_\theta = \frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^3}$ $\mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[ \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{M} \right]$
Énergie potentielle (champ extérieur)	$E_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}$	$E_p = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}$
Force résultante dans un champ	$F_x = \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{ext}}}{\partial x}$ $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}})_{p=cte}$ $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}$	$F_x = \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x}$ $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}})_{M=cte}$ $\mathbf{F} = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{\text{ext}}$
Moment résultant	$\Gamma(O) = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}$	$\Gamma(O) = \mathbf{M} \wedge \mathbf{B}_{\text{ext}}$

# Chapitre 4

## Relations de passage

Une propriété qu'on peut déduire du régime stationnaire est l'expression des relations de passage des champs lors du passage d'une interface. En effet, dans une description volumique, les champs et potentiels sont continus. Les problèmes arrivent quand on cherche à passer à une description surfacique dans laquelle l'épaisseur de la nappe de courant ou de charge tend vers 0.

Dans les deux cas on considérera une nappe d'épaisseur  $a$  tendant vers 0 et où la charge volumique  $\rho$  et le courant volumique  $\mathbf{j}$  est non nul. Le plan  $xy$  contient la nappe alors que l'axe  $z$  est perpendiculaire à celle-ci.

### 4.1 Relation de passage pour le champ électrique

La relation de Maxwell-Gauss s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

On considère une nappe chargée, infinie selon les directions  $x$  et  $y$  et qu'on fait tendre vers 0 selon  $z$ . Intégrons l'équation selon l'épaisseur  $z$ . On considère que la nappe à une épaisseur  $a$  et on fera tendre cette quantité vers 0 :

$$\int_{-a/2}^{a/2} dz (\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-a/2}^{a/2} dz \rho \quad (4.2)$$

Les variations du champ électrique selon  $x$  et  $y$  ne seront pas affecté par le fait qu'on fasse tendre  $a$  vers 0. Ainsi leur intégrale tend vers 0 lorsque  $a$  tend vers 0. Par contre les variations selon  $z$  peuvent être très intense dans une nappe infiniment fine et ainsi son intégrale peut prendre une valeur finie lorsque  $a$  tend vers 0. Ainsi on a :

$$E_z(a/2) - E_z(-a/2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad a \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

qu'on écrit parfois en nommant les espaces 1 et 2 de par et d'autre de la surface :

$$E_{z2} - E_{z1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4.4)$$

On définit alors proprement la densité surfacique  $\sigma$  comme :

$$\sigma = \int_{-a/2}^{a/2} dz \rho \quad a \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

Concernant les composantes tangentielles, il faut utiliser la relation de Maxwell-Faraday qui s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\partial_y E_z - \partial_z E_y &= -\partial_t B_x \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z &= -\partial_t B_y \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x &= -\partial_t B_z\end{aligned}$$

Lors de l'intégration, les dérivées en dehors de  $z$  tendent vers 0 pour les mêmes raisons que précédemment (même pour le temps) et on trouve avec les deux premières équations que :

$$E_{y2} = E_{y1} \quad (4.6)$$

$$E_{x2} = E_{x1} \quad (4.7)$$

La relation de passage pour le champ électrique s'écrit :



$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}_{12} \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{n}_{12}$  est le vecteur unitaire perpendiculaire à la nappe orienté de 1 vers 2

## 4.2 Relation de passage pour le champ magnétique

On procède de la même façon pour le champ magnétique. Comme la divergence du champ magnétique est nul, on a en coordonnées cartésiennes :

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0 \quad (4.9)$$

Et par intégration sur la coordonnées  $z$ , avec l'épaisseur du plan qui tend vers 0 on obtient que :

$$B_{z2} = B_{z1} \quad (4.10)$$

et donc la composante normale du champ magnétique est continue à la traversée d'une nappe de courant. Avec la l'équation de Maxwell-Ampère on a :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}\partial_y B_z - \partial_z B_y &= \mu_0 j_x + \frac{1}{c^2} \partial_t E_x \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z &= \mu_0 j_y + \frac{1}{c^2} \partial_t E_y \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x &= \mu_0 j_z + \frac{1}{c^2} \partial_t E_z\end{aligned}$$

Lorsqu'on intègre, toutes les dérivées en dehors de  $z$  tendent vers 0. Ainsi la dernière équation ne nous apporte pas d'information par contre la première nous donne :

$$B_{y2} - B_{y1} = \mu_0 \int_{-a/2}^{a/2} j_x dz \quad (4.12)$$

En définissant la composant selon  $x$  du courant surfacique comme :

$$j_{Sx} = \int_{-a/2}^{a/2} j_x dz \quad a \rightarrow 0 \quad (4.13)$$

On trouve que :

$$B_{y2} - B_{y1} = \mu_0 j_{Sx} \quad (4.14)$$

De même avec la deuxième relation sur le rotationnel on trouve que :

$$B_{x2} - B_{x1} = \mu_0 j_{Sy} \quad (4.15)$$

La relation de passage pour le champ magnétique s'écrit alors :



$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_S \wedge \mathbf{n}_{12} \quad (4.16)$$

avec la même définition de  $\mathbf{n}_{12}$ .

En résumé on a :



À la traversée d'une surface chargée, la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  est continue et sa composante normale subit une discontinuité égale à  $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}$  où  $\sigma$  est la densité surfacique de charges.

À la traversée d'une nappe de courant, la composante normale de  $\mathbf{B}$  est continue et sa composante tangentielle subit une discontinuité égale à  $\mu_0 \mathbf{j}_S \wedge \mathbf{n}$  où  $\mathbf{j}_S$  est la densité surfacique de courant.



## Chapitre 5

# Approximation des régimes quasi-stationnaires

Lorsqu'on ne se place plus dans le régime stationnaire et qu'il n'est plus possible de découpler le champ magnétique et électrique alors la détermination des champs à partir des sources n'est plus aussi facile. En effet une chose à prendre en compte lorsque nous ne sommes plus en stationnaire est la propagation de l'information (et des champs) provenant de la source. Le champ varie avec un certain retard si la source varie à cause de la distance entre les deux. L'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire (ARQS) consiste à négliger la propagation et le retard de l'établissement. De plus, nous avons recours parfois à négliger une partie des champs créés en fonction du régime d'ARQS dans lequel on se place : magnétique ou électrique. Ce chapitre détaille les hypothèses et les conséquences de l'ARQS et met au clair des choses qui ont été omises en première cycle universitaire.

### 5.1 Équations de Maxwell et potentiels

#### 5.1.1 Pourquoi le courant de déplacement ?

La grande contribution de Maxwell aux équations de l'électromagnétisme est l'ajout d'un terme créant du champ magnétique par variation temporelle du champ électrique : *le courant de déplacement*. La question est de savoir ici pourquoi ce courant de déplacement est nécessaire dans ces équations.

Considérons un condensateur dans un circuit électrique qui est traversé par un courant  $I(t)$  comme sur la FIGURE 5.1. Alors ce courant crée un champ magnétique  $\mathbf{B}$ . La circulation de ce champ magnétique le long d'une courbe  $\mathcal{C}$  qui entoure le fil alimentant le condensateur est donnée par le théorème d'Ampère et vaut  $\mu_0 I$ . Mais ceci est le cas uniquement si on ne tient pas compte du courant de déplacement  $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ .

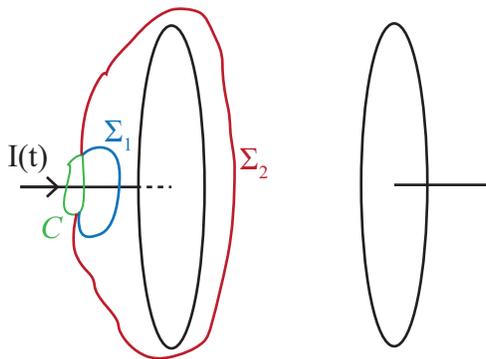


FIGURE 5.1 – Pourquoi le courant de déplacement ? Une explication avec un condensateur.

Si à présent nous prenons deux surfaces s'appuyant sur la courbe  $\mathcal{C}$ . La première  $\Sigma_1$  coupe également le fil transportant le courant alors que la seconde  $\Sigma_2$  passe entre les deux armatures du condensateur. Si on calcule le courant traversant les deux surfaces, on trouve alors  $I(t)$  pour  $\Sigma_1$  et 0 pour  $\Sigma_2$ , alors qu'on devrait trouver le même résultat !

Il manque donc quelque chose dans notre raisonnement ou dans les équations et on résout le problème en considérant le courant de déplacement. En effet le champ électrique varie entre les armatures du condensateur car à cause du courant  $I(t)$  le condensateur est entrain de se charger. Si on recalcule la circulation pour les deux surfaces on trouve :

$$\mu_0 I = S \left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| = S \mu_0 \epsilon_0 \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \quad (5.1)$$

Et donc :

$$I(t) = S \epsilon_0 \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \quad (5.2)$$

Le courant de déplacement permet de *fermer le circuit*. Si on se place en régime stationnaire le courant de déplacement est nul car la variation de  $\mathbf{E}$  est nul mais comme le condensateur est chargé on a aussi  $I(t) = 0$ .

### 5.1.2 D'où proviennent $\epsilon_0$ et $\mu_0$ ?

À première vue, on a besoin de 4 constantes pour décrire à la fois la relation entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  et la relation entre le champ électromagnétique et les sources  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\alpha_1 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \alpha_2 \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \alpha_3 \left( \mathbf{j} + \alpha_4 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Commençons par prendre le divergence de l'équation de Maxwell Ampère :

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = 0 = \alpha_3 \left( \nabla \cdot \mathbf{j} + \alpha_4 \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \alpha_3 \left( \nabla \cdot \mathbf{j} + \alpha_2 \alpha_4 \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (5.3)$$

Si on veut une conservation de la charge, on doit imposer alors  $\alpha_2 \alpha_4 = 1$ .

Prenons à présent une région de l'espace tel que  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$  et prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = -\Delta \mathbf{B} = \alpha_3 \alpha_4 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (5.4)$$

Et donc en remplaçant  $\alpha_4$  par  $1/\alpha_2$  on obtient l'équation de propagation du champ magnétique :

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.5)$$

On obtient alors l'équation de d'Alembert de propagation d'une onde (on trouve la même équation pour le champ électrique). Notons  $c$  la vitesse de la propagation de cette onde et on a alors la relation :

$$\frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2} = \frac{1}{c^2} \quad (5.6)$$

On a alors 4 constantes mais 2 relations entre elles il manque alors plus que deux constantes à fixer et on prend alors :

$$\alpha_3 = \mu_0 \quad \frac{1}{\alpha_2} = \epsilon_0 \quad (5.7)$$

Par choix d'un système d'unités nous pouvons fixer la valeur d'un des coefficients. Choisissons alors  $\alpha_1 = 1$  et on obtient alors la relation  $c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$ .

Il faut savoir que la forme des équations de Maxwell qu'on connaît dépend uniquement du système d'unité qu'on a choisi. En effet si on prend par exemple le système d'unités anglais, appelé système d'unité gaussien (basé sur le *cgs* pour centimètre-gramme-seconde) les équations de Maxwell prennent une forme différente :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \left( 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

où on a au final :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi c} \quad \mu_0 = \frac{4\pi}{c} \quad (5.8)$$

### 5.1.3 Équations de propagation des potentiels et des champs

On part des équations de Maxwell dans le vide sans approximation. On a alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (5.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5.10)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (5.11)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (5.12)$$

Il faut à présent redéfinir les potentiels électromagnétiques car à présent les champs électriques et magnétiques sont couplés. On ne change pas la définition du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  car l'équation de Maxwell-Thomson reste inchangé. Par contre l'équation de Maxwell-Faraday change et on a :

$$\nabla \wedge \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (5.13)$$

Et donc on définit le potentiel électrique par :

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \quad (5.14)$$

De plus on choisit toujours la même convention pour qu'en stationnaire on retrouve le potentiel électrostatique.

Maintenant, nous pouvons établir les équations pour les potentiels. Pour le potentiel vecteur il faut démarrer avec l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) \right)\end{aligned}$$

en réorganisant les termes on trouve l'équation de propagation du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  :

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla \left[ \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right]} \quad (5.15)$$

Pour le potentiel scalaire  $V$  on utilise l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \left[ -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 V &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

On pourrait s'arrêter ici mais pour avoir la même forme d'équation pour les deux potentiels on ajoute des deux côtés le terme  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$  et en réorganisant les termes on trouve :

$$\boxed{\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right]} \quad (5.16)$$

Nous avons deux équations de propagation pour les potentiels électromagnétiques qui sont couplés. Cependant nous n'avons pas encore choisi de conditions de jauge pour ceux-ci. Au lieu de garder la jauge de Coulomb du cas stationnaire nous allons choisir judicieusement une jauge pour découpler les deux équations. Nous avons déjà mis les équations dans la bonne forme pour qu'on impose comme jauge :



$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0} \quad (5.17)$$

Cette jauge est appelé **jauge de Lorenz**<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>. Il s'agit du physicien danois Ludvig Lorenz et non le physicien néerlandais Hendrik Lorentz auteur des transformations de Lorentz.

On trouve donc pour équations de propagation :

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}} \quad (5.18)$$

$$\boxed{\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (5.19)$$

Qu'en est-il des équations de propagation pour les champs? Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell Faraday :

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\nabla \wedge \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \mathbf{B}) \\ \frac{\nabla \rho}{\epsilon_0} - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\epsilon_0}} \quad (5.20)$$

On peut également montrer que le champ magnétique obéit à l'équation de propagation

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \wedge \mathbf{j}} \quad (5.21)$$

Ainsi que ce soit pour  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  ou  $V$  (en jauge de Lorenz) on trouve toujours des équations de la forme :



$$\boxed{\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi = \mathbf{S}} \quad (5.22)$$

où  $\mathbf{S}$  sont les sources connues.

Les remarques qu'il est possible de faire à ce niveau là sont :

- Si on se place en stationnaire, les dérivées temporelles disparaissent et on retrouve les équations de Poisson pour les potentiels
- La jauge de Lorenz en stationnaire sans la dérivée temporelle permet de retrouver la jauge de Coulomb
- Une image plus complète de l'électromagnétisme commence à apparaître où les champs électrique et magnétique sont couplés et donc indissociables.

#### 5.1.4 Solutions

Pour trouver les solutions une méthode est d'utiliser les fonctions de Green. Si on a un domaine des charges et des courants qui est localisé alors les champs décroissent à l'infini et ainsi admettent une transformée de Fourier. La solution par la fonction de Green est alors unique.

On doit alors résoudre :

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (5.23)$$

Pour cela on passe dans l'espace de Fourier avec pour définition de la transformée de Fourier :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \int d\mathbf{q} d\nu \mathcal{G}(\mathbf{q}, \nu) e^{2i\pi[\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \nu(t - t')]} \quad (5.24)$$

on obtient :

$$\left( -q^2 + \frac{\nu^2}{c^2} \right) \mathcal{G}(\mathbf{q}, \nu) = 1 \quad (5.25)$$

Ceci donne par transformée de Fourier inverse<sup>1</sup> :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \frac{-1}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \delta\left(t' - \left(t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c}\right)\right) \quad (5.26)$$

Formulé ainsi, on a les solutions avancées et retardées. Seule la solution retardée respecte le principe de causalité et on l'écrit :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \frac{-c\Theta(t - t')}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \delta(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| - c|t - t'|) \quad (5.27)$$

L'expression de la solution pour le potentiel retardé est donné par la convolution de la fonction de Green avec la source. On obtient alors :

$$V(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (5.28)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{r}' \frac{\mu_0 \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c}\right)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (5.29)$$

Par la suite pour remonter au champ électromagnétique il suffit d'utiliser les expressions

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad \text{puis} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (5.30)$$

À ce stade, on peut faire plusieurs remarques :

- Même si les équations de Maxwell couplent les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , on voit que le choix judicieux de la jauge permet à  $V$  d'être toujours une expression de la densité de charge  $\rho$  et  $\mathbf{A}$  toujours une expression de la densité de courant  $\mathbf{j}$ . Le couplage entre les deux potentiels est ici est caché à la fois dans la jauge de Lorenz qu'on a choisi mais également dans l'expression de  $\mathbf{E}$
- Les expressions des potentiels retardés satisfont la jauge de Lorenz. On pourra vérifier en exercice que c'est bien le cas.
- En principe si on connaît parfaitement les distributions des sources  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  on connaît tout grâce aux expressions des potentiels retardés qui permettent de remonter aux champs. Mais le problème qui va se poser est un problème mathématique avec des calculs qui deviennent rapidement infaisables...

Essayons de nous placer dans le cas où les toutes les grandeurs varient lentement. Prenons une certaine distribution de charges et de courants  $\mathcal{D}$  et plaçons nous en un point  $M$  situé à une distance caractéristique  $L$  de la source. On note  $\tau$  le temps caractéristique de variation des sources  $\rho$  et  $\mathbf{j}$ . Sous quelles conditions peut-on négliger le retard dans le potentiel ?

Le retard est majoré par  $L/c$  et si on a un temps caractéristique  $\tau$  de variation on a que si  $\tau \gg \frac{L}{c}$  alors on peut écrire

$$\rho\left(\mathbf{r}, t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c}\right) \simeq \rho(\mathbf{r}, t) \quad (5.31)$$



L'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire (ARQS) consiste à se placer dans le cas tel que :

$$\frac{L}{\tau c} = \epsilon \ll 1 \quad (5.32)$$

Il est important de s'interroger sur deux points essentiels dans l'ARQS :

1. le calcul de la transformée de Fourier inverse est assez complexe nécessitant des outils d'analyse mathématique sur les fonctions complexes. Le calcul en lui même ne présente pas d'intérêt pour la préparation à l'agrégation c'est pourquoi il n'est pas présenté ici.

- Comment faire cette approximation de manière cohérente et contrôlée ?
- Quelles sont les conséquences pour les champs électromagnétiques ?

## 5.2 Démarche naïve de l'ARQS

Essayons tout d'abord de montrer de manière naïve que dans l'ARQS on a toujours  $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ . Pour cela essayons deux méthodes<sup>2</sup>.

### 5.2.1 Méthode 1 : en utilisant le calcul de magnétostatique

On a montré que dans l'ARQS que la propagation des champs étaient négligé et donc que le potentiel vecteur pouvait s'écrire :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{A}^{BS}(\mathbf{r}, t) \quad (5.33)$$

Par la suite il suffit de prendre le rotationnel du potentiel vecteur :

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.34)$$

Il suffit alors d'effectuer les mêmes calculs que ceux menés dans le chapitre de magnétostatique pour obtenir :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (5.35)$$

Donc nous venons de montrer qu'en ARQS on a toujours

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (5.36)$$

### 5.2.2 Méthode 2 : avec des ordres de grandeur

Soit  $\mathcal{E}$  l'ordre de grandeur de la norme de  $\mathbf{E}$  et  $\mathcal{B}$  celui de la norme de  $\mathbf{B}$ . Les champs varient sur une échelle  $d$  avec  $d < L$  (on rappelle que  $L$  est la distance d'observation caractéristique). Si on écrit en ordre de grandeur l'équation de Maxwell-Faraday  $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  on obtient :

$$\frac{\mathcal{E}}{d} \simeq \frac{\mathcal{B}}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} \simeq \frac{d}{\tau} < \frac{L}{\tau} \quad (5.37)$$

Afin de pouvoir négliger le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère, il est nécessaire de comparer le terme de dérivée temporel de  $\mathbf{E}$  avec le rotationnel de  $\mathbf{B}$  (comme on ne suppose pas avoir un courant pour le moment), on a alors :

$$\left\| \frac{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}{\nabla \wedge \mathbf{B}} \right\| \simeq \frac{\frac{1}{c^2} \frac{\mathcal{E}}{\tau}}{\frac{\mathcal{B}}{d}} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} \frac{d}{c^2 \tau} < \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} \frac{L}{c^2 \tau} = \frac{\mathcal{E}}{c\mathcal{B}} \epsilon \ll 1 \quad (5.38)$$

En première approximation (c'est vrai pour une onde plane progressive monochromatique)  $\mathcal{E}$  et  $c\mathcal{B}$  sont du même ordre de grandeur et donc on peut négliger le terme électrique dans l'équation de Maxwell Ampère et on obtient toujours en ARQS :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (5.39)$$

---

2. On pourra consulter le BUP par A.Domps de Février 2003, Volume 97(2) *Remarques sur l'approximation des régimes quasi-stationnaires en électromagnétisme* ainsi que le BUP de G. Roussaux et A.Domps de Novembre 2004, Volume 98(2) *Remarques supplémentaires sur l'approximation des régimes quasi-stationnaires en électromagnétisme*

### 5.2.3 Contre exemple et erreurs commises

Cette approche naïve à l'air de fonctionner au premier abord et surtout dans tous les cas de figure. Cependant si on prend un condensateur plan circulaire<sup>3</sup> en régime forcé de pulsation  $\omega$  on montre qu'à une distance  $r$  du centre on a :

$$\mathbf{E} = E_0 J_0 \left( \frac{r\omega}{c} \right) \mathbf{e}_z \quad (5.40)$$

$$\mathbf{B} = \frac{iE_0}{c} J_1 \left( \frac{r\omega}{c} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (5.41)$$

où  $J_0$  et  $J_1$  sont des fonctions de Bessel. En régime de basses fréquences, avec les équivalents pour les fonctions de Bessel, on trouve :

$$\mathbf{E} \simeq E_0 \mathbf{e}_z \quad (5.42)$$

$$\mathbf{B} \simeq \frac{E_0}{c} \frac{ir\omega}{2c} \mathbf{e}_\theta \quad (5.43)$$

On remarque que  $\mathbf{E}$  est similaire au champ statique mais que  $\mathbf{B}$  est non nul alors que dans ce cas on a  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ . Donc on n'a pas toujours  $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  comme on a pu le montrer précédemment. Cela est aussi cohérent avec l'introduction du chapitre montrant que le courant de déplacement permettait de fermer un circuit avec un condensateur à l'intérieur.

#### Où sont les erreurs qu'on a commises ?

- Pour la première méthode, il faut refaire le calcul entièrement pour montrer que l'expression du potentiel vecteur ne redonne pas l'équation de Maxwell Ampère sans le terme électrique. En effet dans le cas de l'ARQS, on est avec la jauge de Lorenz et non de Coulomb or on a supprimé un terme dans le développement du double produit vectoriel de  $\mathbf{A}$  qui ne disparaît pas dans le cas de la jauge de Lorenz.
- Lorsqu'on écrit les termes en ordre de grandeur il faut faire attention. Quand on dit que  $\|\nabla \wedge \mathbf{E}\| \simeq \mathcal{E}/d$  il faudrait plutôt dire que  $\|\nabla \wedge \mathbf{E}\| \lesssim \mathcal{E}/d$  car on majore la norme du produit vectoriel. Dans ce cas là on obtient :

$$\frac{\mathcal{E}}{B} \gtrsim \frac{d}{\tau} \quad (5.44)$$

Et donc on ne peut plus dire que :

$$\frac{\mathcal{E}}{B} \lesssim \frac{L}{\tau} \quad (5.45)$$

Ainsi les démarches qu'on a faite ici sont des démarches qu'on pourrait être tenté de faire mais qui sont naïves et non rigoureuses et amène ainsi à un résultat faux. Nous allons maintenant définir proprement l'ARQS et les conditions d'application.

## 5.3 Démarche rigoureuse de l'ARQS

### 5.3.1 Introduction

Les équations de Maxwell contiennent deux dérivées temporelles :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.46)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.47)$$

et elles sont responsables des phénomènes de propagation qu'on néglige dans l'ARQS.

3. Cela fonctionne avec un condensateur qui n'est pas forcément circulaire mais l'expression avec les fonctions de Bessel sont plus facile à manipuler pour l'exemple ici.

L'idée directrice de l'ARQS est de retrouver une relation entre les champs et leurs sources identiques à celle qu'on trouve en statique. Le champ suit les variations lentes des sources : le temps typique de variation  $\tau$  est long devant le temps de propagation  $L/c$

On souhaite comparer l'importance des différentes quantités du problèmes pour faire correctement les approximations voulues dans les équations de Maxwell. On a les quantités sans dimension suivantes :

$$\frac{\rho c}{j} \quad , \quad \frac{c\tau}{L} \quad , \quad \frac{cB}{E} \quad , \quad \frac{cA}{V}$$

On introduit  $\tilde{\rho}$  et  $\tilde{j}$  les ordres de grandeur relatif à  $\rho$  et à  $\mathbf{j}$  dans le système considéré. On suppose que  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  varient spatialement sur une échelle caractéristique<sup>4</sup>  $d$ .

On introduit alors la quantité :



$$\xi = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}c} \quad (5.48)$$

qui va rendre compte si le système est plutôt un type conducteur pour  $\xi \gg 1$  ou type condensateur  $\xi \ll 1$

Pour les potentiels si on appelle  $\Omega$  la volume caractéristique de la distribution de charges et de courants alors on a pour les ordres de grandeur des potentiels calculés en un point  $M$  qui est dans l'ARQS tel que  $\frac{L}{c\tau} \ll 1$  :

$$\mathcal{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \Omega \frac{\tilde{j}}{L} \quad , \quad \mathcal{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Omega \tilde{\rho}}{L} \quad (5.49)$$

On peut maintenant comparer ces deux grandeurs et plus particulièrement  $c\mathcal{A}$  avec  $\mathcal{V}$  qui ont les mêmes dimensions :

$$\frac{c\mathcal{A}}{\mathcal{V}} \simeq \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{\Omega \tilde{j}}{L} \frac{4\pi\epsilon_0 L}{\Omega \tilde{\rho}} \simeq \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}c} = \xi \quad (5.50)$$

On voit alors que le paramètre  $\xi$  permet à la fois de comparer les sources et les potentiels des champs associés et ainsi pouvoir préciser dans quel régime on se place en fonction de la valeur de  $\xi$ .

### 5.3.2 Régime quasi-stationnaire électrique ( $\epsilon \ll 1, \xi \ll 1$ )

Plaçons nous dans le cas où :

$$\frac{L}{\tau c} = \epsilon \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{c\mathcal{A}}{\mathcal{V}} = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}c} = \xi \ll 1 \quad (5.51)$$

Ceci signifie que les charges dominant sur les courants. Prenons le champ électrique qui s'écrit :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (5.52)$$

et comparons les deux termes qui apparaissent :

$$\frac{\|\nabla V\|}{\left\|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right\|} \simeq \frac{\mathcal{V}}{d} \frac{1}{\mathcal{A}/\tau} = \frac{\mathcal{V}}{c\mathcal{A}} \frac{\tau c}{d} > \frac{\mathcal{V}}{c\mathcal{A}} \frac{\tau c}{L} = \frac{1}{\xi \epsilon} \gg 1 \quad (5.53)$$

Donc la variation temporelle du potentiel vecteur est négligeable par rapport au gradient du potentiel  $V$  et on peut écrire :

$$\mathbf{E} \simeq -\nabla V \quad \Rightarrow \quad \nabla \wedge \mathbf{E} \simeq \mathbf{0} \quad (5.54)$$

4. Si les échelles de variation sont différentes pour chaque grandeur on majorera ou on minorera ces échelles pour effectuer les ordres de grandeur. Donc supposer une seule grandeur caractéristique n'enlève rien à la généralité du problème.

Ainsi cette approximation revient à négliger le terme  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  dans l'équation de Maxwell-Faraday.

Qu'en est-il des champs électrique et magnétique ? Calculons le rapport entre les champs électrique et magnétique :

$$\frac{c\mathcal{B}}{\mathcal{E}} \leq \frac{c\mathcal{A}/d}{\mathcal{V}/d} = \frac{c\mathcal{A}}{\mathcal{V}} = \xi \ll 1 \quad (5.55)$$

Ainsi dans la force de Lorentz on ne garde que le terme électrique. :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (5.56)$$

On en déduit alors en terme d'énergie :

$$c\mathcal{B} \ll \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad c^2\mathcal{B}^2 \ll \mathcal{E}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{B}^2}{\mu_0\epsilon_0} \ll \mathcal{E}^2 \quad (5.57)$$

Et donc :

$$\boxed{\frac{1}{2}\epsilon_0\mathcal{E}^2 \gg \frac{1}{2\mu_0}\mathcal{B}^2} \quad (5.58)$$

Dans l'ARQS électrique, l'énergie est principalement stocké sous forme électrique.

Il nous reste une équation que nous n'avons pas essayer de simplifier, l'équation de Maxwell-Ampère. Si on compare les deux courants qui apparaissent :

$$\frac{\|\mu_0\mathbf{j}\|}{\left\|\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right\|} \simeq \frac{\mu_0\tilde{j}}{\frac{d\tilde{\rho}}{\epsilon_0\tau c^2}} = \frac{\mu_0\tilde{j}\epsilon_0\tau c^2}{\tilde{\rho}d} = \frac{\tilde{j}\tau c}{\tilde{\rho}c} > \frac{\tilde{j}\tau c}{\tilde{\rho}cL} = \frac{\xi}{\epsilon} \quad (5.59)$$

On sait que  $\xi$  et  $\epsilon$  sont très petits devant 1 mais on ne peut pas les comparer donc on ne peut pas conclure si un des deux termes est prépondérant. Nous sommes obligés dans ce cas là de garder les deux termes et de ne pas simplifier l'équation de Maxwell-Ampère.

La jauge de Lorenz reste inchangée.



Dans une situation quasi-stationnaire où les charges sont prépondérantes sur les courants, le champ électrique se calcule de la même manière qu'en électrostatique. Dans les équations de Maxwell on néglige le terme de la dérivée temporel du champ magnétique dans Maxwell-Faraday. Dans la force de Lorentz, le terme électrique domine. Par contre dans l'équation de Maxwell Ampère pour le calcul du champ magnétique le courant de déplacement n'est pas négligeable. L'énergie est stocké principalement sous forme électrique.

### 5.3.3 Régime quasi-stationnaire magnétique ( $\epsilon \ll 1, \xi \gg 1$ )

Plaçons nous dans le cas où :

$$\frac{L}{\tau c} = \epsilon \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{c\mathcal{A}}{\mathcal{V}} = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}c} = \xi \gg 1 \quad (5.60)$$

Ceci signifie que les courants dominant sur les charges comme dans le cas d'un conducteur avec électroneutralité.

Prenons l'équation de Maxwell-Ampère en remplaçant le champ électrique :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\left(-\nabla\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right) \quad (5.61)$$

Comparons alors le terme de courant avec celui du potentiel vecteur :

$$\frac{\|\mu_0 \mathbf{j}\|}{\left\| \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right\|} \simeq \frac{\mu_0 \tilde{j}}{\frac{A}{c^2 \tau^2}} = \frac{\mu_0 \tilde{j}}{\frac{\mu_0 \Omega \tilde{j}}{4\pi L c^2 \tau^2}} = \frac{4\pi L c^2 \tau^2}{\Omega} = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{4\pi L^3}{\Omega} \sim \frac{1}{\epsilon^2} \gg 1 \quad (5.62)$$

Ainsi le terme de variation temporelle du potentiel vecteur est négligeable. Comparons maintenant le second terme :

$$\frac{\|\mu_0 \mathbf{j}\|}{\left\| \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\nabla V)}{\partial t} \right\|} \simeq \frac{d\tilde{j}\tau}{\epsilon_0 \tilde{\rho} \Omega} 4\pi \epsilon_0 L = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} \frac{d\tau L^2 c}{L \Omega} = \frac{\xi}{\epsilon} \frac{dL^2}{\Omega} \gg 1 \quad (5.63)$$

En effet le premier terme est grand devant 1 et le second terme est un nombre fini comme rapport de 2 volumes finis. On se retrouve donc avec un courant de déplacement négligeable et donc :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} \simeq \mu_0 \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5.64)$$

La conservation de la charge se traduit alors par un courant à flux conservatif dans ce cas là. On aurait pu également le montrer en considérant que :

$$\frac{\|\nabla \cdot \mathbf{j}\|}{\partial_t \rho} \simeq \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} \frac{c\tau}{d} > \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} \frac{c\tau}{L} = \frac{\xi}{\epsilon} \gg 1 \quad (5.65)$$

On voit alors que on peut négliger la variation de  $\rho$ .

D'un autre côté les trois autres équations inchangés. Le champ magnétique est alors déterminé comme en magnétostatique avec les mêmes équations.

Considérons maintenant la Jauge de Lorenz et regardons l'ordre de grandeur :

$$\frac{\|\nabla \cdot \mathbf{A}\|}{\frac{1}{c^2} \partial_t V} \simeq \frac{\mu_0 \tilde{j} \Omega}{4\pi d^2} \frac{4\pi d\tau}{\mu_0 \tilde{\rho} \Omega} > \frac{\mu_0 \tilde{j} \Omega}{4\pi L^2} \frac{4\pi d\tau}{\mu_0 \tilde{\rho} \Omega} = \frac{\xi}{\epsilon} \gg 1 \quad (5.66)$$

Ainsi la Jauge de Lorenz se transforme en jauge de Coulomb pour l'ARQS magnétique. De plus on voit que si nous sommes en ARQS électrique, on ne peut pas conclure sur quel terme peut être grand devant l'autre et on garde alors la Jauge de Lorenz. Cette méthode n'est pas très rigoureuse car nous concluons qu'un terme est négligeable devant un terme qu'on prend à 0 par la suite. Pour montrer plus rigoureusement que la Jauge de Lorenz se transforme en Jauge de Coulomb, il faut reprendre les équations de Maxwell en ARQS magnétique et refaire les calculs de magnétostatique.

On peut également montrer que :

$$\frac{\|\nabla V\|}{\left\| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\|} \simeq \epsilon \xi \quad (5.67)$$

et donc qu'il n'y a pas de partie dominante entre les deux.

Si on compare maintenant les deux champs électrique et magnétique :

$$\frac{c\mathcal{B}}{\mathcal{E}} \simeq \frac{c\mu_0 \tilde{j} d}{\tilde{\rho} d} \epsilon_0 = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} = \xi \gg 1 \quad (5.68)$$

Donc le champ magnétique est prépondérant sur le champ électrique dans la force de Lorentz qui s'écrit alors :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (5.69)$$

Et en terme d'énergie on a directement :

$$\frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} \gg \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\mathbf{E}\|^2 \quad (5.70)$$

Presque toute l'énergie est stocké sous forme magnétique.



Lorsque les courants sont prépondérants sur les charges alors le champ magnétique est prépondérant et est de type statique. On peut négliger le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère. Le terme de couplage dans Maxwell Faraday est toujours là et sera responsable de l'induction. L'énergie est stockée sous forme magnétique.

### 5.3.4 Remarques supplémentaires

Quand on parle d'ARQS traditionnellement on parle d'ARQS magnétique où on néglige le courant de déplacement. Mais cela ne rend pas compte de toutes les situations (seulement de 90%). Il est nécessaire de distinguer les deux types d'ARQS et on peut dire que :

- ARQS magnétique : c'est l'ARQS des bobines. C'est celle qui est faite pour l'induction. Elle s'applique à la physique des bobines en électrocinétique à basse fréquence.
- ARQS électrique : c'est l'ARQS des condensateurs. En électrocinétique à basse fréquence. Ce régime décrit la physique des condensateurs qui stockent d'importantes charges tout en étant isolant, ce qui assure de faibles courants.

Il est également possible de faire une analogie de l'ARQS magnétique avec la mécanique des fluides où le courant  $\mathbf{j}$  a pour homologue la vitesse  $\mathbf{v}$  en mécanique des fluides et ainsi la nullité de leur divergence respective indique une non accumulation de charge ou l'incompressibilité du fluide.

La TABLE 5.1 récapitule tous les résultats et les équations simplifiées dans les deux types d'ARQS.

Type d'ARQS	Magnétique	Électrique
Courants/Charges	Les courants dominant	Les charges dominant
Hypothèses	$\frac{L}{\tau c} = \epsilon \ll 1$ $\frac{c\mathcal{A}}{\mathcal{V}} = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}c} = \xi \gg 1$	$\frac{L}{\tau c} = \epsilon \ll 1$ $\frac{c\mathcal{A}}{\mathcal{V}} = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}c} = \xi \ll 1$
Équations de Maxwell	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$ $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
Jauge	Jauge de Coulomb : $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$	Jauge de Lorenz : $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$
Conservation de la charge	Courants à flux conservatifs : $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$	Pas de changement : $\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
Énergie	Forme magnétique : $\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}$	Forme électrique : $\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2}$
Électrocinétique	Bobines à basses fréquences	Condensateurs à basses fréquences

TABLE 5.1 – Récapitulatif des deux types d'ARQS.

# Chapitre 6

## Conducteurs

Ce chapitre a pour but de montrer comment les champs électromagnétiques se comportent dans les conducteurs électriques. Il sera nécessaire de modéliser la conduction électrique dans ceux-ci puis de distinguer différentes gammes de fréquences où les champs ne vont pas avoir le même comportement. Certaines applications des conducteurs seront abordé, notamment la notion de magnétorésistance et d'effet Hall.

### 6.1 Régime statique - Conducteurs à l'équilibre



On parle de **conducteur à l'équilibre** si les charges en son sein n'ont pas de mouvement d'ensemble. Dans ce cas là, seul reste leur mouvement désordonné à l'échelle microscopique. En particulier, on suppose que le conducteur est homogène et possède une température uniforme.

Les conséquences de cette définition sont :

- La densité locale de charges totale (électrons + ions du réseau) à l'intérieur du conducteur est nulle :  $\rho_{\text{int}} = 0$
- Par conséquent, dans le cas où on ne impose pas de champ électrique permanent à l'intérieur (ou une différence de potentiel), le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur :  $\mathbf{E}_{\text{int}} = \mathbf{0}$
- Le fait que le champ soit nul à l'intérieur du conducteur impose également une condition sur le potentiel qui est constant partout à l'intérieur du conducteur :  $V_{\text{int}} = cte$
- On en déduit également qu'au voisinage de la surface, le champ électrique est normal au conducteur.

Tout ceci n'est valable que pour l'intérieur du conducteur c'est-à-dire loin de la surface en principe. En effet, dans ces conditions le conducteur porte une charge surfacique  $\sigma$  liée au champ perpendiculaire à la surface. Proche de la surface le champ est donnée par le théorème de Coulomb :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} \quad (6.1)$$

On retrouve alors la discontinuité du champ électrique au passage d'une surface chargée.

### 6.2 Régime dynamique - Conduction

La définition d'un conducteur au sens le plus large englobe bien entendu les métaux et les semi-conducteurs mais également les solutions ioniques ainsi que les plasmas. Dans les deux derniers cas, les porteurs (mobiles) de charges sont les ions en solution et les ions et les électrons dans le plasma.

Le temps de retour typique à l'équilibre lorsqu'il y a une inhomogénéité de charge est de l'ordre de  $10^{-14}$  s pour un bon conducteur (au mieux le temps de relaxation devient beaucoup plus long lorsque la conductivité diminue). En conséquence la présence d'un courant dont le temps caractéristique d'évolution est long devant ce temps de relaxation  $\tau_{\text{relax}}$  nous permet de dire que la densité de charges volumique reste nul en très bonne approximation.

Modélisons le conduction électrique dans les conducteurs. La densité de courant s'écrit :

$$\mathbf{j} = \sum_i \rho_i \mathbf{v}_i \quad (6.2)$$

avec  $\rho_i$  la densité des porteurs de charges de type  $i$  et  $\mathbf{v}_i$  leur vitesse.

On peut dire que dans un milieu isotrope et en l'absence de champ magnétique la vitesse des porteurs de charges est, en régime linéaire, proportionnel au champ électrique  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{v}_i = \mu_i (|\mathbf{E}|) \mathbf{E} \quad (6.3)$$

où  $\mu_i$  est la mobilité des porteurs du type  $i$  qui dépend à priori de la norme du champ électrique et donc on a :

$$\mathbf{j} = \left( \sum_i \rho_i \mu_i (|\mathbf{E}|) \right) \mathbf{E} \quad (6.4)$$

En très bonne approximation dans la limite des champs peu intenses, la mobilité est indépendante de l'intensité du champ électrique et on a donc :

$$\mathbf{j} = \left( \sum_i \rho_i \mu_i \right) \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} \quad (6.5)$$



On a donc, sous ces hypothèses, une proportionnalité entre le courant  $\mathbf{j}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$ . Le coefficient de proportionnalité  $\sigma$  s'appelle la conductivité du matériau et ne dépend que du matériau (type de porteurs de charges et leur mobilité). Cette relation est la **loi d'Ohm locale** car son intégration sur un conducteur cylindrique redonne la loi d'Ohm  $U = RI$ .

Dans le cas où on se place dans un milieu anisotrope mais toujours dans le régime linéaire, on trouve la même expression mais  $\sigma$  devient une matrice qu'on peut diagonaliser avec des coefficients différents sur la diagonale caractérisant l'anisotropie.

Cette relation nous informe juste sur la proportionnalité entre le courant et le champ électrique mais non pas sur le comportement en fréquence de la conductivité et donc de la réponse du conducteur. On se propose ici de développer un modèle microscopique pour en sortir une dépendance en la fréquence.

### Modèle microscopique

Le modèle de Drude<sup>1</sup> est le modèle de conduction pour les métaux le plus simple. Elle a été proposée par P. Drude en 1900 et suppose que les électrons, responsable de la conduction électrique, se comporte comme un gaz. La théorie cinétique des gaz suppose que les molécules de gaz sont des sphères dures se déplaçant en ligne droite jusqu'à rentrer en collision les unes avec les autres (ou les parois mais ce n'est pas le cas des électrons). Le temps d'une seule collision est négligeable et les forces qui agissent lors des collisions sont les seules forces prises en compte. Dans le cas des électrons dans un gaz on a comme hypothèses :

1. Voir le Cap prépa ou le Ashcroft de physique des solides.

1. Entre deux collisions toute interaction avec un autre électron ou un ion est négligée. Donc en absence de champ électromagnétique externe, les électrons se déplacent en mouvement rectiligne uniforme. Si on applique un champ extérieur, alors la dynamique est donnée par le principe fondamentale de la dynamique avec ces champs. On appelle cela *approximation des électrons indépendants* pour négliger l'interaction électron-électron et *approximation des électrons libres* pour négliger l'interaction électron-ion.
2. Les collisions sont des événements instantanés qui change de manière abrupte la vitesse des électrons. Drude supposait que les électrons rebondissaient sur le cœur des atomes, donc sur les ions. Ceci se rapproche de la réalité car la diffusion électron-électron est loin d'être prépondérante sauf dans certains cas.
3. On suppose qu'un électron prend part à une collision avec une probabilité de  $1/\tau$ .  $\tau$  est appelé temps de relaxation, temps de collision ou temps de libre parcours moyen. C'est lui qui va piloter le mécanisme de conduction électrique. Dans le modèle le plus simple, ce temps est indépendant de la position et de la vitesse de l'électron car on prend un temps moyenné.
4. On suppose que les électrons établissent un équilibre thermique avec leur entourage uniquement avec les collisions. On a un équilibre thermodynamique local : immédiatement après chaque collision, l'électron émerge avec une vitesse indépendante de sa vitesse immédiatement avant la collision, mais ayant une direction aléatoire et une vitesse correspondant à la température dominante au lieu où la collision s'est produite.

On peut trouver une conductivité dans le cas stationnaire, mais le calcul en dynamique permet de directement le retrouver. Supposons alors qu'on applique un champ électrique sinusoïdale sur notre conducteur pour voir la réponse en fréquence. Pour trouver une dépendance de la conductivité en fonction de la pulsation du champ électrique  $\sigma(\omega)$ , on applique la modélisation microscopique que l'on vient d'exposer. Pour cela il faut appliquer le PFD aux électrons mais comment modéliser la force de collision ? Soit  $\mathbf{p}$  la quantité de mouvement par électron. Soit  $\mathbf{p}(t)$  la quantité de mouvement à l'instant. Calculons la quantité de mouvement à un instant  $t + dt$  soit  $\mathbf{p}(t + dt)$ . La probabilité de collision est  $dt/\tau$  et la probabilité que rien ne se passe est  $(1 - dt/\tau)$ . S'il n'y a pas de collision, l'électron est soumis à la force électromagnétique qu'on appellera  $\mathbf{f}(t)$  et acquiert donc une quantité de mouvement supplémentaire  $\mathbf{f}(t)dt + O(dt)^2$ . La contribution des électrons qui ont subi une collision dans l'intervalle  $dt$  est d'ordre  $(dt)^2$  et ne contribue pas au premier ordre. Donc :

$$\mathbf{p}(t + dt) = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) [\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)dt + O(dt)^2] \quad (6.6)$$

$$= \mathbf{p}(t) - \frac{dt}{\tau}\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)dt + O(dt)^2 \quad (6.7)$$

Donc la variation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\mathbf{p}(t + dt) - \mathbf{p}(t) = \frac{dt}{\tau}\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)dt + O(dt)^2 \quad (6.8)$$

et donc :

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -\frac{\mathbf{p}(t)}{\tau} + \mathbf{f}(t) \quad (6.9)$$

Cela montre simplement que l'effet des collisions individuelles des électrons est d'introduire un terme d'amortissement dans l'équation du mouvement de la quantité de mouvement par électron.

Prenons alors un champ électrique sinusoïdal en notation complexe. Le PFD s'écrit avec cette nouvelle force :

$$m_e \dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E} - \frac{m_e}{\tau}\mathbf{v} \quad (6.10)$$

avec  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-i\omega t}$  on trouve :

$$-m_e i\omega \mathbf{v}_0 = -e\mathbf{E}_0 - \frac{m_e}{\tau} \mathbf{v}_0 \quad (6.11)$$

On trouve alors :

$$\mathbf{v}_0 = \frac{-e\mathbf{E}_0/m_e}{1/\tau - i\omega} \quad (6.12)$$

et donc :

$$\mathbf{j}_0 = -ne\mathbf{v}_0 = \frac{ne^2\tau/m_e}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}_0 \quad (6.13)$$

On trouve alors la réponse du courant dans un conduction sous l'action d'un champ sinusoïdal à la pulsation  $\omega$  :



$$\mathbf{j}_0 = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}_0 \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m_e} \quad (6.14)$$

où  $\sigma_0$  est la valeur de la conductivité en statique.

On voit alors que tant que  $\omega\tau \ll 1$ , la conductivité est proche de la conductivité statique (ce qui est le cas jusqu'aux fréquences optiques pour un bon conducteur). Dans le régime opposé  $\omega\tau \gg 1$  on a une conductivité imaginaire pur et le résultat se rapproche au résultat obtenu dans un plasma :

$$\sigma(\omega) = i \frac{ne^2}{m_e\omega} = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \quad (6.15)$$

On définit alors une pulsation caractéristique appelé pulsation plasma qui vaut :



$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (6.16)$$

On peut effectuer une mesure de conductivité statique sur un métal ( $59.6 \cdot 10^6$  S/m pour le cuivre) et nous permet de trouver un temps  $\tau \simeq 2.10 \cdot 10^{-14}$  s et donc un libre parcours moyen  $l \simeq 380 \cdot 10^{-10}$  m.

### 6.3 Électroneutralité d'un conducteur

Considérons un conducteur initialement neutre partout dans l'espace. Cela se traduit que pour tout point  $M$  du conducteur on a  $\rho(M) = 0$ . À  $t = 0$  on suppose que l'on perturbe l'état d'équilibre initial du système en imposant une charge  $\rho(M_0) = \rho_0 \neq 0$ . Cet excès local de charge est, bien entendu, compensé par un déficit de charges dans le reste du conducteur pour garder la neutralité. La question est de savoir au bout de combien de temps voit-on restauré l'état d'électroneutralité local ? La réponse est loin d'être triviale et trois contraintes sont à prendre en compte :

1. La relation local de la charge :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6.17)$$

qui montre que toute variation temporelle de  $\rho$  est la source d'une densité de flux de courant  $\mathbf{j}$ .

2. La loi d'Ohm locale :

$$\mathbf{j} = \sigma(\omega)\mathbf{E} \quad (6.18)$$

## 3. Les équations de Maxwell et notamment celle de Maxwell-Gauss :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.19)$$

Pour connaître le temps de relaxation du système vers un état électriquement neutre il faut établir l'équation différentielle satisfaite par la densité de charge avec la condition initiale  $\rho(M_0) = \rho_0$ . On exploite ici l'équivalence entre les représentations temporelle et fréquentielle. Pour cela, on cherche le comportement forcé d'un conducteur soumis à un champ électrique sinusoïdal de pulsation  $\omega$  :

$$\mathbf{E}(M, t) = \mathbf{E}(M, \omega)e^{-i\omega t} \quad (6.20)$$

La loi d'Ohm locale injectée dans la conservation de la charge donne :

$$\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = i\omega \rho \quad \Rightarrow \quad \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = i\omega \rho \quad (6.21)$$

On déduit en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss que :

$$\sigma \frac{\rho}{\epsilon_0} = i\omega \rho \quad (6.22)$$

Or on a vu que  $\sigma = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}$  donc :

$$-\tau\omega^2\rho - i\omega\rho + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\rho = 0 \quad (6.23)$$

En repassant dans le domaine temporel on aboutit à :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0} \rho = 0 \quad (6.24)$$

On trouve alors une équation différentielle sur la densité de charge du métal :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\omega_p}{Q} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p \rho = 0 \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}} \quad Q = \omega_p \tau \quad (6.25)$$



On reconnaît alors l'équation caractéristique d'un oscillateur libre amorti de pulsation propre  $\omega_p$  (pulsation plasma du métal) et de facteur de qualité  $Q$ . Avec des grandeurs typiques de métaux on trouve que  $\tau \sim 10^{-14}$  s et un facteur de qualité  $Q \sim 100$ . On en déduit donc que :

**La relaxation vers l'état d'électroneutralité est réalisée au terme d'un régime pseudo-périodique à la pulsation  $\omega_p \sim 10^{16}$  rad.s<sup>-1</sup> sur un temps caractéristique  $\tau \sim 10^{-14}$  s. Ainsi tant que  $\omega\tau \ll 1$  on peut considérer que le conducteur est localement neutre en tout temps.**

Remarque : Cette démonstration suppose qu'on a déjà fait le modèle microscopique pour trouver la dépendance en fréquence. On peut faire la démonstration en supposant qu'on a uniquement une conductivité statique qui ne dépende pas de la fréquence et on trouve ainsi un temps de relaxation de  $\tau_{\text{relax}} = 10^{-18}$  s. Cependant comme la loi d'Ohm locale n'est valable que si la durée caractéristique de variation du champ électrique est bien supérieure à  $10^{-14}$  s, on retrouve au final le temps caractéristique  $\tau$ .

## 6.4 Retour sur l'ARQS

On a vu que l'ARQS consistait à négliger le temps de propagation du champ électromagnétique à l'échelle du système. On a vu que l'ARQS n'était valable que à basses fréquences mais ici on peut déterminer une fréquence caractéristique qui délimite le régime de l'ARQS.

Dans un conducteur, ce sont les courants qui vont dominer par rapport aux charges et on se retrouve dans l'ARQS magnétique. Dans ce cas là, le courant de déplacement est négligeable dans l'équation de Maxwell-Ampère. Il faut donc trouver une condition sur la pulsation telle que :

$$\sigma(\omega)\mathbf{E} \gg \epsilon_0 \left\| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\| \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_0}{|1 + i\omega\tau|} \gg |\omega\epsilon_0| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sigma_0}{|1 + i\omega\tau|} \gg \omega\epsilon_0 \quad (6.26)$$

On peut passer l'équation au carré et donc la pulsation limite obéit à l'équation :

$$\Omega^2 + \frac{\Omega}{\tau^2} - \frac{\sigma_0^2}{\epsilon_0^2 \tau^2} = 0 \quad \Omega = \omega^2 \quad (6.27)$$

On pourrait résoudre cette équation complètement afin de trouver la pulsation caractéristique mais une méthode plus simple est possible. Elle consiste à simplifier l'étude et à rechercher directement la pulsation critique  $\omega_c$  dans l'intervalle  $[1/\tau; +\infty[$ . Si on trouve une solution  $\omega_c$  dans cet intervalle (et suffisamment loin de  $1/\tau$ ), cette solution a de bonnes chances d'être proche de l'équation bicarrée précédente. Ainsi dans l'approximation haute fréquence  $\omega \gg 1/\tau$  on a :

$$\frac{\sigma_0}{|1 + i\omega\tau|} \simeq \frac{\sigma_0}{\omega\tau} \quad (6.28)$$

Et donc la condition précédente pour négliger le courant de déplacement devient :

$$\frac{\sigma_0}{\omega\tau} \gg \epsilon_0\omega \quad \Rightarrow \quad \omega \ll \sqrt{\frac{\sigma_0}{\epsilon_0\tau}} = \omega_p \quad (6.29)$$

On montre ainsi que la pulsation caractéristique recherchée s'identifie à la pulsation plasma  $\omega_p$  du conducteur. On vérifie a posteriori que cette pulsation est bien supérieure à  $1/\tau$  et se trouve bien dans l'intervalle de départ. On a  $\omega_p \sim 10^{16}$  rad.s<sup>-1</sup> et  $1/\tau \sim 10^{14}$  rad.s<sup>-1</sup>.



Un conducteur se trouve en approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) si

$$\omega \ll \omega_p \sim 10^{16} \text{ rad.s}^{-1} \quad (6.30)$$

Ainsi, en résumé, on a trois gammes de fréquences où le conducteur va se comporter différemment :



- Cas où  $\omega \ll 10^{14}$  rad.s<sup>-1</sup> : l'électroneutralité et l'ARQS est vérifié donc on a  $\rho = 0$  ainsi que le courant de déplacement négligeable.
- Cas où  $\omega \in [10^{14} \text{ rad.s}^{-1}; 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}]$  : L'électroneutralité n'est pas vérifiée de sorte que l'équation de Maxwell-Gauss ne peut être simplifié. L'hypothèse de l'ARQS peut théoriquement être proposé. On notera cependant que la bande de fréquence de ce domaine est très réduit.
- Cas où  $\omega \gg 10^{16}$  rad.s<sup>-1</sup> : Dans ce régime, ni l'ARQS ni l'électroneutralité ne sont permises. Aucune simplification dans équations de Maxwell sont possible.

## 6.5 Ondes et métaux conducteurs : effet de peau

A priori, le problème de la propagation d'une onde électromagnétique dans un métal est relativement compliqué au vu des effets du champ sur les charges et du champ qu'elles créent en retour. On se limitera alors à une description macroscopique du problème dans les cas assez simples : une Onde Plane Progressive Harmonique en incidence normale sur un conducteur imparfait (conductivité finie) avant de discuter la réflexion d'une onde sur un métal parfait.

### 6.5.1 Métal imparfait

Prenons le cas d'un métal de conductivité finie  $\sigma$  qui occupe le demi-espace infini  $x > 0$ . L'onde incidente normale est polarisée selon  $z$ , ne dépend que de la coordonnée  $x$  et est en notation complexe de la forme :

$$\mathbf{E} = E_0 f(x) e^{i\omega t} \mathbf{e}_z \quad (6.31)$$

L'ensemble des autres grandeurs seront donc de la même forme. Avec l'équation de Maxwell-Faraday on trouve que :

$$-E_0 f'(x) \mathbf{e}_y = -i\omega \mathbf{B} \quad (6.32)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{i\omega} E_0 f'(x) e^{i\omega t} \mathbf{e}_y \quad (6.33)$$

où la divergence de  $\mathbf{E}$  et de  $\mathbf{B}$  sont bien nulles.

Pour un conducteur, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction (ARQS). Typiquement le rapport vaut environ  $10^9$  dans le domaine micro-ondes, et donc :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 \sigma \mathbf{E} \quad (6.34)$$

où on va supposer que la conductivité  $\sigma$  est statique prend sa valeur statique  $\sigma_0$  pour éviter une dépendance en  $\omega$  supplémentaire. On a alors l'équation sur  $f$  :

$$\frac{1}{i\omega} f''(x) = \mu_0 \sigma_0 f(x) \quad (6.35)$$

$$f''(x) - i\omega \mu_0 \sigma_0 f(x) = 0 \quad (6.36)$$

Cette équation a pour solution une somme de deux exponentielles, une positive et une négative. Nous éliminons l'exponentielle positive pour ne pas avoir un champ qui diverge car cela n'est pas physique. On a également :

$$\sqrt{i\omega \mu_0 \sigma_0} = \pm(1+i) \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}} \quad (6.37)$$



On pose alors la quantité :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}} \quad (6.38)$$

homogène à une longueur appelé **épaisseur de peau**

On a alors :

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \mathbf{e}_z \quad (6.39)$$

On a alors un champ qui se propage dans le métal mais en étant atténué exponentiellement sur une distance caractéristique  $\delta$ . On obtient une onde amortie<sup>2</sup>. Cette épaisseur est d'autant plus faible que la conductivité du matériau est grand et que la fréquence de l'onde est élevé.

<sup>2</sup>. Il ne s'agit pas d'une onde évanescence car il faut que la direction de l'atténuation et celle de propagation ne soit pas la même.

L'effet de peau est d'autant plus marqué que la profondeur de peau est faible, c'est-à-dire que le conducteur s'oppose efficacement à la pénétration du champ. L'expression de  $\delta$  montre qu'il s'agit d'une fonction décroissante de  $\omega$ . Plus les champs varient rapidement dans le temps plus l'effet de peau est marqué. Il s'agit là d'un effet inductif. Plus  $\omega$  est grand, plus le champ électromagnétique varie rapidement dans le temps. D'après la loi de Lenz, le milieu conducteur devient alors le siège d'une loi de modération visant à s'opposer à cette variation de flux. Il y a création dans le conducteur d'un courant électrique et d'un champ électrique induit se superposant au champ électrique incident et de sens opposé. Ce phénomène d'induction justifie l'atténuation du champ électrique dans le conducteur. La nature inductive de l'effet de peau ne doit pas surprendre. Le phénomène d'induction est directement inscrit dans l'équation de Maxwell-Faraday qui dans l'ARQS est la seule équation rendant compte du couplage du champ électromagnétique.

L'effet de peau saura d'autant plus marqué que le mécanisme d'induction sera efficace. La réponse au conducteur aux variations du flux de  $\mathbf{B}$  sera d'autant plus efficace que celui-ci présentera une bonne aptitude à développer des courants induits à partir du champ électrique induit.



La puissance dissipée par effet Joule par unité de volume dans le conducteur est égale à :

$$\frac{dP}{d\tau} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}^2 \quad (6.40)$$

Cela permet de calculer la puissance dissipée sur chaque tranche de l'onde.

### 6.5.2 Limite du métal parfait

Dans la limite d'un métal parfait, c'est-à-dire la conductivité qui tend vers l'infini, la longueur de peau tend vers 0 et l'onde électromagnétique ne pénètre pas dans le conducteur. On peut également voir que pour la puissance dissipée, si  $\sigma \rightarrow \infty$  alors il faut nécessairement que  $E = 0$  pour éviter la divergence de la dissipation.

De plus on peut montrer que au voisinage du conducteur on a :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0} \mathbf{n} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_S \wedge \mathbf{n} \quad (6.41)$$

Le fait que le champ électromagnétique à l'intérieur du conducteur parfait soit nul lui confère des propriétés intéressantes en réflexion et donc des propriétés intéressantes pour du guidage des ondes électromagnétiques.

### 6.5.3 Force exercée sur le conducteur par le champ

On considère le cas d'une onde plane qui arrive sur une plaque métallique qu'on considère comme un conducteur parfait. La question est de savoir quelle est la force exercée par l'onde incidente sur la plaque métallique.

Comme précédemment, la plaque occupe le plan  $yOz$ . On a  $\mathbf{E}$  selon  $\mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{B}$  selon  $\mathbf{e}_y$ . Le champ va engendrer des courants surfaciques qui sont dirigés selon  $\mathbf{e}_z$ . Ces courants subissent à leur tour l'action du champ. On revient alors à une description volumique de la plaque à laquelle on donne une épaisseur  $a$ . Dans cette couche on a :

$$\mathbf{B} = B_y(x) \mathbf{e}_y \quad (6.42)$$

En négligeant le courant de déplacement on a :

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \mathbf{e}_z \quad (6.43)$$

Un volume infinitésimale dans la plaque est donc traversé par un courant :

$$di = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy \quad (6.44)$$

qui se traduit par l'élément de courant :

$$di dl = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy dz \mathbf{e}_z \quad (6.45)$$

Cet élément subit alors une force :

$$d^2 \mathbf{F} = di dl \wedge \mathbf{B} = -\frac{dx dy dz}{2\mu_0} \frac{\partial B_y^2}{\partial x} \mathbf{e}_x \quad (6.46)$$

En intégrant sur l'épaisseur  $a$  de la plaque :

$$d\mathbf{F} = -\frac{dy dz}{2\mu_0} (B_y^2(x=a) - B_y^2(x=0)) \mathbf{e}_x \quad (6.47)$$

On a un champ magnétique nul en  $x = a$  car pas de pénétration du champ et en  $x = 0$  on a  $B_y(0) = -\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t)$  pour une onde plane. Et donc :

$$d\mathbf{F} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t) dy dz \mathbf{e}_x \quad (6.48)$$

La force est dirigée vers l'intérieur du métal, normale à sa surface et proportionnel à l'élément de surface : on a une force de pression. La moyenne temporelle de cette pression s'écrit :

$$\langle d\mathbf{F} \rangle = P d\mathbf{S} \quad (6.49)$$

$$P = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0 E_0^2 \quad (6.50)$$

qui est la **pression de radiation**.

Remarque : Cette expression permet de "sentir" intuitivement l'interprétation du vecteur de Poynting comme quantité de mouvement véhiculée par le champ.

## 6.6 Magnétorésistance et effet Hall

### 6.6.1 Magnétorésistance

La question qu'on se pose dans ce paragraphe est de savoir ce qu'il se passe dans un conducteur si on applique un champ magnétique dans celui-ci. On se passe ici en régime statique ou basse fréquence de tel sorte que la conductivité ne dépend pas de la fréquence.

Dans le cas de l'application d'un champ magnétique supplémentaire dans le conducteur, la force de Lorentz est modifiée de cette façon :

$$-e\mathbf{E} \rightarrow -e(\mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \wedge \mathbf{B}) = -e \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{j}}{ne} \wedge \mathbf{B} \right) \quad (6.51)$$

Et donc dans la loi d'Ohm on peut également faire la substitution pour obtenir :

$$\mathbf{j} = \sigma_0 \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{j}}{ne} \wedge \mathbf{B} \right) \quad (6.52)$$

Il faut remarquer que la champ magnétique est la somme du champ extérieur qu'on applique ainsi que le champ propre induit qu'on négligera par la suite. Sous cette forme, la loi d'Ohm met en évidence qu'en présence d'un champ magnétique dans un conducteur les lignes de champ électrique et de courant ne sont pas confondues.

Afin de comprendre un peu cet effet, nous allons simplifier un peu le problème en considérant un repère cartésien et en plaçant le champ magnétique constant selon l'axe Oz :  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . On peut alors écrire la loi d'Ohm sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \sigma_0 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} - \frac{\sigma_0}{ne} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad (6.53)$$

On trouve alors les trois composantes de  $\mathbf{j}$  :

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma_0 \left( E_x - \frac{B}{ne} j_y \right) \\ j_y &= \sigma_0 \left( E_y + \frac{B}{ne} j_x \right) \\ j_z &= \sigma_0 E_z \end{aligned}$$

Si on pose la pulsation cyclotron caractéristique  $\omega_{cy} = \frac{eB}{m}$  et qu'on remplace la conductivité statique par son expression  $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$  alors on trouve :

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(\omega_{cy}\tau)^2} & \frac{-\omega_{cy}\tau}{1+(\omega_{cy}\tau)^2} & 0 \\ \frac{\omega_{cy}\tau}{1+(\omega_{cy}\tau)^2} & \frac{1}{1+(\omega_{cy}\tau)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (6.54)$$

On obtient alors la loi d'Ohm matricielle. Les composantes de la densité de courant sont des fonctions linéaires de celles du champ électrique mais il n'y a plus proportionnalité.

Si à présent on simplifie encore le problème en imposant uniquement un champ électrique (une différence de potentiel) selon une seule direction, disons selon l'axe Ox. Alors à ce moment là, la loi d'Ohm s'écrira :

$$j_x = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_{cy}\tau)^2} E \quad \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_{cy}\tau)^2} < \sigma_0 \quad \text{avec} \quad \omega_{cy} = \frac{eB}{m} \quad (6.55)$$



La conductivité diminue lors de la présence d'un champ magnétique non aligné avec le champ électrique. On parle alors de *magnétorésistance*.

On remarquera que plus le champ  $B$  est intense plus la conductivité diminue. Il en est de même pour le rapport  $e/m$ . Ainsi, plus il est aisé de mettre en mouvement des charges (soit une charge de particule plus grande ou une masse de particule plus faible) plus l'effet du champ magnétique sera important. Les particules au lieu de se propager en ligne droite voient leur trajectoire courbée par le champ magnétique.

### 6.6.2 Effet Hall

L'effet Hall n'est qu'un cas particulier de la magnétorésistance mais dans un cas confiné. On considère un barreau métallique de taille  $a$  selon la direction  $y$ . Le barreau a une taille  $b$  selon l'axe  $z$  et un champ magnétique uniforme est toujours placé dans cette direction. On fait alors parcourir un courant  $I$  selon l'axe  $x$  et ainsi à cause du champ magnétique il apparaît une force sur un porteur de charges  $\mathbf{f}_m = -e \langle \mathbf{v} \rangle \wedge \mathbf{B}$ .

On choisit le barreau suffisamment étroit selon l'axe  $y$  (donc  $a$  faible) pour que les charges qui voit leur trajectoire courbée rencontrent directement le bord du conducteur et il apparait une accumulation de charges négative sur une face (et donc un défaut de charges dans l'autre). Il se forme donc un champ électrique dit de Hall noté  $\mathbf{E}_H$ . En régime stationnaire, le nombre de charges sur les bords ne varie pas et donc le force due au champ de Hall compense exactement la force magnétique et on a alors :

$$\mathbf{E}_H = - \langle \mathbf{v} \rangle \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{ne} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad (6.56)$$

où on note  $R_H = \frac{1}{ne}$  la résistance de Hall.

La loi d'Ohm matricielle permet de retrouver directement ce résultat en prenant  $j_y = j_z = 0$  soit :

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma_0 \frac{E_x - \omega_{cy}\tau E_y}{1 + \omega_{cy}^2\tau^2} \\ 0 &= \omega_{cy}\tau E_x + E_y \\ 0 &= E_z \end{aligned}$$

Et donc on retrouve la loi d'Ohm :

$$j_x = \sigma_0 E_x \quad (6.57)$$

ainsi que le champ de Hall :

$$E_y = -\frac{\omega_{cy}\tau}{\sigma_0} j_x = -\frac{B}{ne} j_x \quad (6.58)$$



Le champ de Hall est responsable de la tension de Hall qui apparaît entre les faces inférieure et supérieure du barreau :

$$\Delta V = \frac{IB}{neb} \quad (6.59)$$

Toute le raisonnement est transposable pour des semi-conducteurs où les porteurs de charges peuvent être positifs mais sont surtout en nombre plus important car les semi-conducteur sont dans ce cas là dopé. On s'en sert pour mesurer des champs magnétiques une fois que la sonde a été calibrée.

## 6.7 Plasma

Un autre type de conducteur qu'on peut étudier est le plasma. Il s'agit d'un ensemble macroscopiquement neutre de charges positives (ions positifs de masse  $M$  et de charge  $+e$ ) et d'électrons (de masse  $m$  et de charges  $-e$ ) de densité commune  $n$ . On peut alors étudier la propagation d'une onde plane progressive monochromatique (OPPH) dans un tel milieu. On supposera l'onde polarisée rectilignement.

Pour établir la loi de conduction on applique PFD aux électrons et aux ions. La seule force non négligeable appliquée sur un électron ou un ion est la force de Lorentz. Si  $\mathbf{v}_+$  et  $\mathbf{v}_-$  sont les vitesses d'un ion et d'un électron alors les équations sont :

$$m \frac{d\mathbf{v}_-}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_- \wedge \mathbf{B}) \quad M \frac{d\mathbf{v}_+}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_+ \wedge \mathbf{B}) \quad (6.60)$$

Dans le plasma les normes des champs sont liés par la relation  $E = v_\varphi B$  avec  $v_\varphi$  la vitesse de phase. Or comme les vitesses des ions et des électrons sont très inférieurs à la vitesse de phase (hypothèse à vérifier a posteriori) alors la composante magnétique de la force de Lorentz est négligeable et donc en se plaçant en notation complexe on trouve les équations :

$$\mathbf{v}_- = -\frac{ie}{m\omega} \mathbf{E} \quad \mathbf{v}_+ = \frac{ie}{M\omega} \mathbf{E} \quad (6.61)$$

La densité de courant s'écrit :

$$\mathbf{j} = \rho_- \mathbf{v}_- + \rho_+ \mathbf{v}_+ = ne(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-) = i \frac{ne^2}{\omega} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \mathbf{E} \quad (6.62)$$

On obtient alors une loi d'Ohm complexe avec la conductivité  $\sigma = i \frac{ne^2}{\omega} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)$ . La conductivité est imaginaire pur dans ce cas là et le courant est en retard de  $\pi/2$  par rapport au champ électrique. Comme la masse d'un proton est 1836 fois celle d'un électron on peut négliger  $1/M$  devant  $1/m$  et donc en posant la pulsation plasma

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}} \quad (6.63)$$

on obtient comme conductivité :

$$\sigma(\omega) = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \quad (6.64)$$

D'après la conservation de la charge, l'équation de Maxwell-Gauss ainsi que la loi d'Ohm on obtient :

$$i\sigma \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} - i\omega\rho = 0 \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.65)$$

soit :

$$(\omega_p^2 - \omega^2)\rho = 0 \quad (6.66)$$

Si la pulsation est différente de la pulsation plasma alors le plasma est neutre, sinon il n'y a pas de raison d'avoir électroneutralité mais on verra que dans ce cas le vecteur d'onde est nul et qu'il n'y a pas de propagation possible.

Établissons à présent la relation de dispersion à partir des équations de Maxwell en se plaçant en notation complexe  $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  :

$$\begin{aligned} i\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{E}} &= i\omega \underline{\mathbf{B}} \\ i\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{B}} &= 0 \\ i\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{E}} &= 0 \\ i\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{B}} &= \left( \mu_0 \sigma - \frac{i\omega}{c^2} \right) \underline{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$i\mathbf{k}^2 \underline{\mathbf{E}} = i\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{E}}) = \frac{i\omega}{c^2} \left( \frac{\omega_p^2}{\omega} - \omega \right) \underline{\mathbf{E}} \quad (6.67)$$

Donc :

$$\boxed{\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} \quad (6.68)$$

Ainsi en fonction de la valeur de  $\omega$  on peut avoir un  $k^2$  positif ou négatif et donc un nombre d'onde réel ou imaginaire. Un  $k$  réel permettra une propagation d'une onde plane normalement, on parle alors de bande passante (si  $\omega > \omega_p$ ). On obtient une onde qui se propage et tel que :

$$k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \quad v_\varphi = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad (6.69)$$

Dans le cas où  $k$  est imaginaire pur alors le champ électrique décroît exponentiellement et on a plus de proration d'onde. Dans cette gamme de pulsation appelée bande interdite (si  $\omega < \omega_p$ ) on obtient une

onde évanescente et en réalité comme il ne peut avoir propagation dans le plasma, l'onde incidente est réfléchi.

On remarquera que dans la bande passante on a  $v_\varphi > c$  donc notre hypothèse au départ sur la vitesse des électrons faible devant  $v_\varphi$  est justifié si les électrons sont non-relativistes. Ceci n'est pas anormal car même si  $c$  constitue la vitesse maximale de propagation des interactions et de l'information. Pour une onde plane qui occupe tout l'espace un observateur la voit passer indéfiniment devant lui mais rien ne change au cours du temps à part l'oscillation temporelle. Une telle onde est une idéalisation et ne transporte aucune information et ne peut servir qu'à indiquer le début ou la fin d'un message. Il faudra utiliser la vitesse de groupe caractériser la vitesse de propagation de l'énergie et donc de l'information.

Une application possible est la propagation dans la ionosphère qui est un plasma de pulsation plasma de l'ordre de 10 MHz. Elle constitue une couche supérieure de l'atmosphère. Ainsi en se plaçant à des pulsations inférieures à la pulsation plasma on aura réflexion sur celle ci et elle peut se comporter comme un guide d'onde pour des ondes type radio qui vont se réfléchir sur la ionosphère puis sur la Terre. Il faut en revanche faire attention lorsqu'on veut envoyer des signaux dans l'espace à utiliser des ondes de pulsations plus grandes que la pulsation plasma.



# Chapitre 7

## Guidage d'ondes

Le guidage d'ondes électromagnétiques est omniprésente dans le transport de l'information. Nous verrons dans ce chapitre les bases du guidage d'ondes avec l'utilisation de conducteurs "parfaits" pour leur réflexion totale.

### 7.1 Réflexion sur un métal parfait : nécessité d'une onde réfléchie

Reprenons le cas d'une onde plane arrivant sur un métal parfait occupant le demi-espace  $x > 0$ . On a :

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx) \quad \mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx) \quad (7.1)$$

L'onde réfléchie est de la forme :

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_0 \cos(\omega' t + k' x + \varphi) \quad (7.2)$$

avec une pulsation et un nombre d'onde *a priori* différents, une phase supplémentaire et une propagation selon les  $x$  décroissants.

En  $x = 0$ , la condition aux limites s'écrit :

$$\mathbf{E}_i(0, t) + \mathbf{E}_r(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) + \mathbf{E}'_0 \cos(\omega' t + \varphi) = 0 \quad \forall t \quad (7.3)$$

Comme la condition aux limites est vraie pour tout temps alors on a nécessairement on a  $\omega = \omega'$  et donc par la relation de dispersion  $k = k'$ . De plus, pour la phase :

$$\varphi = \pi \quad \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}'_0 \quad \text{ou} \quad \varphi = 0 \quad \mathbf{E}_0 = -\mathbf{E}'_0 \quad (7.4)$$

Donc :

$$\mathbf{E}_r = -\mathbf{E}_0 \cos(\omega t + kx) \quad \mathbf{B}_r = -\frac{\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_r = \frac{\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + kx) \quad (7.5)$$

Au voisinage du métal on a  $\mathbf{B} = 2\mathbf{B}_i$  qui vérifie bien les conditions aux limites.



Ainsi la réflexion sur un métal parfait a pour effet un déphasage de  $\pi$  pour le champ électrique et une simple réflexion sans déphasage pour le champ magnétique.

L'onde résultante vaut donc :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] \quad (7.6)$$

Le passage en complexe permet d'écrire :

$$\underline{\mathbf{E}} = -2i\mathbf{E}_0 \sin(kx)e^{-i\omega t} \quad \mathbf{E} = 2\mathbf{E}_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \sin(\omega t) \quad (7.7)$$

De même on trouve :

$$\mathbf{B} = \frac{2\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos(\omega t) \quad (7.8)$$

Les champs sont de la forme  $f(x)g(t)$ , ce sont donc des ondes stationnaires. Les nœuds vérifient :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -q\frac{\lambda}{2} \quad q \in \mathbb{N} \quad (7.9)$$

Les ventres vérifient :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = -\left(q + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad q \in \mathbb{N} \quad (7.10)$$

Le vecteur de Poynting s'écrit alors :

$$\mathbf{\Pi} = \epsilon_0 c E_0^2 \sin(2\omega t) \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda}x\right) \mathbf{e}_x \quad (7.11)$$

La puissance transportée à travers  $S$  est alors :

$$\mathbf{p}_t = \epsilon_0 S c E_0^2 \sin(2\omega t) \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda}x\right) \mathbf{e}_x \quad (7.12)$$

Et la puissance moyenne vaut :

$$P = \langle \|\mathbf{p}_t\| \rangle = 0 \quad (7.13)$$

On a également que la charge surfacique est nulle car le champ transverse est nul. Le courant surfacique vaut :

$$\mathbf{j}_S = 2\epsilon_0 c \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \quad (7.14)$$

## 7.2 Réflexion sous incidence oblique

On considère une OPPM polarisée rectilignement au plan d'incidence. Elle arrive sur une métal parfait avec un vecteur  $\mathbf{k}$  faisant un angle  $i$  avec la normale au métal.

$$\mathbf{E}_i = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}_y \quad \mathbf{E}_r = E'_0 \cos(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} + \varphi) \mathbf{e}_y \quad (7.15)$$

Au voisinage du métal, le champ est nul donc comme précédemment, on a :

$$\omega = \omega' \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (7.16)$$

Donc  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  est orthogonal au plan d'incidence et au plan métallique. Comme les deux vecteurs d'onde ont la même norme d'après la relation de dispersion alors  $\mathbf{k}'$  est le symétrique de  $\mathbf{k}$  par rapport à la normale au plan métallique et au plan d'incidence. On retrouve la loi de la réflexion. La conclusion sur la phase est la même que précédemment. On trouve alors :

$$\mathbf{E} = -2E_0 \sin(kx \cos i) \sin(\omega t - kz \sin i) \mathbf{e}_y \quad (7.17)$$

$$B_y = 0 \quad (7.18)$$

$$B_x = \frac{2E_0}{c} \sin i \sin(kx \cos i) \sin(\omega t - kz \sin i) \quad (7.19)$$

$$B_z = -\frac{2E_0}{c} \cos i \cos(kx \cos i) \cos(\omega t - kz \sin i) \quad (7.20)$$

En espace limité, l'onde résultante est non plane, progressive et se propage selon  $z$ . On note :

$$\mathbf{K} = \mathbf{k} \sin i \mathbf{e}_z \quad v_\varphi = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega}{k \sin i} = \frac{c}{\sin i} > 0 \quad (7.21)$$

On a une onde stationnaire selon  $x$  avec des plan nœudaux :

$$x = q \frac{\lambda}{2 \cos i} \quad q \in \mathbb{N} \quad (7.22)$$

Et des ventres tel que :

$$x = \left( q + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2 \cos i} \quad q \in \mathbb{N} \quad (7.23)$$

On montre toujours que la charge surfacique est nulle et le courant surfacique vaut :

$$\mathbf{j}_S = 2\epsilon_0 c E_i \cos i \mathbf{e}_y \quad (7.24)$$

## 7.3 Guide d'ondes

### 7.3.1 Plan-plan

Deux plans métalliques, parfaits, illimités, parallèles, distants de  $a$ . Les plans étant infinis selon les directions  $y$  et  $z$  on va se placer dans un plan perpendiculaire aux deux plans du guide d'onde et propager une onde selon  $z$ . On place un plan en  $x = 0$  et un plan en  $x = a$ .

#### Modélisation et solutions

On envoie une OPPM dans ce guide d'ondes de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  faisant un angle  $i$  avec les plans. L'onde résultante est propagative selon  $z$  avec un vecteur d'onde :

$$\mathbf{K} = k \sin i \mathbf{e}_z \quad (7.25)$$

et on prend une onde est de la forme :

$$\mathbf{E} = E(x) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_y \quad (7.26)$$

qui est un mode transverse électrique (TE). Les modes transverse magnétiques fonctionnent de la même façon mais avec le champ magnétique.

Les conditions aux limites vont donner la fonction  $E(x)$  : les plans métalliques doivent être des plans nodaux pour  $\mathbf{E}$ . La distance d'un plan nodal au plan  $x = 0$  est :

$$x = q \frac{\lambda}{2 \cos i} \quad q \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a = n \frac{\lambda}{2 \cos i} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (7.27)$$

Pour chaque entier  $n$  on a un mode de propagation avec :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = n \frac{\pi}{a \cos i} \quad (7.28)$$

avec le champ :

$$\mathbf{E} = -2E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_y \quad (7.29)$$

### Relations de dispersion

Pour trouver les relations de dispersion pour chaque mode, injectons la solution dans l'équation de d'Alembert. On trouve :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = K^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (7.30)$$

On obtient donc un filtre passe haut de pulsation de coupure  $\omega_{cn} = \frac{n\pi c}{a}$ .

- Si  $\omega < \omega_{cn}$  alors  $\mathbf{K}$  est imaginaire et on a une onde évanescente.
- Si  $\omega > \omega_{cn}$  alors on a propagation à la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cn}^2}{\omega^2}}} > c \quad v_g v_\varphi = c^2 \quad (7.31)$$

Les modes transverse électrique (TE) et transverse magnétique (TM) de rang  $n$ , noté  $\text{TE}_n$  et  $\text{TM}_n$  sont entièrement caractérisés par un unique entier  $n$  non nul.

On voit donc que l'onde est loin d'être plane au sens strict du terme. En effet son amplitude varie sinusoïdalement dans les plans  $x = cte$  qui seraient les plans d'ondes naturels. Il existe des nœuds et des ventres dans les plans équiphasés. Pour une pulsation  $\omega$  donnée, il existe plusieurs modes de propagations, caractérisés par  $n$ , qui vérifient la relation de dispersion.

On remarque que pour une valeur de  $\omega$  donné tout les  $n$  ne sont pas accessibles. Une onde de fréquence donnée ne peut se propager que dans un nombre fini de modes.

Calculons maintenant le champ magnétique associé. Pour cela il faut revenir aux équations de Maxwell. En effet les relations de structures ne sont pas valable dans le cas présent, l'onde n'étant pas une onde plane ! En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, il vient que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \wedge \mathbf{E} \\ &= \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_z \\ &= 2E_0 \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_z + K2E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - Kz) \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

En intégrant par rapport au temps :

$$\mathbf{B} = E_{0,n} \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - Kz) \mathbf{e}_z - \frac{K}{\omega} E_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_x \quad (7.32)$$

L'onde se propage dans le vide mais pour autant elle n'est pas transverse ! Ce sont les conditions aux limites qui modifient considérablement la structure de l'onde. Celle-ci ne dépend donc pas uniquement du milieu de propagation.

### Décomposition en ondes planes

Remarquons que l'onde  $\text{TE}_n$  précédente peut se mettre sous la forme d'une superposition de deux ondes planes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n &= -2E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_y \\ &= -E_0 \left[ \sin\left(\omega t - Kz + \frac{n\pi x}{a}\right) + \sin\left(\omega t - Kz - \frac{n\pi x}{a}\right) \right] \mathbf{e}_y \\ &= -E_0 [\sin(\omega t - \mathbf{k}_{1,n} \cdot \mathbf{r}) + \sin(\omega t - \mathbf{k}_{2,n} \cdot \mathbf{r})] \mathbf{e}_y \\ &= \mathbf{E}_{1,n} + \mathbf{E}_{2,n} \end{aligned}$$

On y reconnaît la somme de deux vraies OOPH de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_{1,n}$  et  $\mathbf{k}_{2,n}$  de même composante selon  $z$  mais de composante opposée selon  $z$ . Il n'est pas étonnant que la solution se décompose sous forme d'OOPH (puisque ce sont une base des solutions de l'équation de d'Alembert). Nous verrons par la suite pourquoi cette décomposition est intéressante. Ces ondes par contre vérifient la relation de structure et la relation des ondes électromagnétiques dans le vide.

### Mode TM et mode TEM

Les calculs sont analogues à ceux menés dans la partie précédente dans le cas du mode TM et donne la même relation de dispersion. Un point important est l'existence d'une onde supplémentaire qui n'existe pas dans le cas des ondes TE. En effet dans le cas des ondes TM il existe une onde transverse électromagnétique (TEM). En effet, le groupe TE ne contient aucun mode TEM, puisque  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $B_z$  est non nul dès que  $n$  est non nul. C'est différent pour le groupe TM, puisque :

$$\mathbf{B} = B_0 e^{i(\omega t - Kz)} \mathbf{e}_y \quad (7.33)$$

$$\mathbf{E} = cB_0 e^{i(\omega t - Kz)} \mathbf{e}_x \quad (7.34)$$

définit bien une onde TEM qui est bien du groupe TM et qui de plus compatible avec les conditions aux limites. En effet ce conditions impliquent la nullité de  $B_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  mais rien sur les autres composantes en raison de l'existence de charges et de courants surfaciques. En un sens, les ondes TM dans cette géométrie sont moins contraintes que les ondes TE. Cette onde est plane et vérifie la relation de dispersion  $\omega = Kc$ .

Il existe un certain nombre de résultats sur les ondes TEM :

- Un guide d'onde électromagnétique ne peut propager d'onde TEM que si il est constitué d'au moins deux conducteurs différents (nous aurons l'occasion de revenir sur ce résultat).
- Un mode TEM vérifie toujours la relation de dispersion des ondes planes dans le milieu illimité, même si cette onde n'est pas une onde plane au sens strict.
- Par opposition aux modes TE et TM, lorsque le mode TEM existe il est unique.

### Propagation des modes et dispersion

Pour le mode TE $_n$  comme pour le mode TM $_n$  nous avons obtenu la relation de dispersion :

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (7.35)$$

C'est une relation de dispersion de Klein-Gordon qui dépend de l'indice  $n$  du mode. On est donc amené à identifier :

$$\omega_{c,n} = \frac{p\pi c}{a} \quad (7.36)$$

qui est la fréquence de coupure du mode  $n$ . En réécrivant cette relation de dispersion, on obtient :

$$cK^2 = \omega^2 - \omega_{c,n}^2 \quad (7.37)$$

$$\frac{cK}{\omega_{c,1}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_{c,1}^2} - n^2} \quad (7.38)$$

comme tracé sur la FIGURE 7.1.

Si on envoie une onde de pulsation  $\omega$  celle-ci va effectivement se déformer. En effet, l'onde va être transportée par différents modes qui ont des célérités différentes. On peut faire la construction comme sur la FIGURE 7.2 en exprimant les vitesses de phase et de groupe de chaque mode :

$$v_{\varphi,n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,n}}{\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad v_{g,n} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,n}}{\omega}\right)^2} \quad (7.39)$$

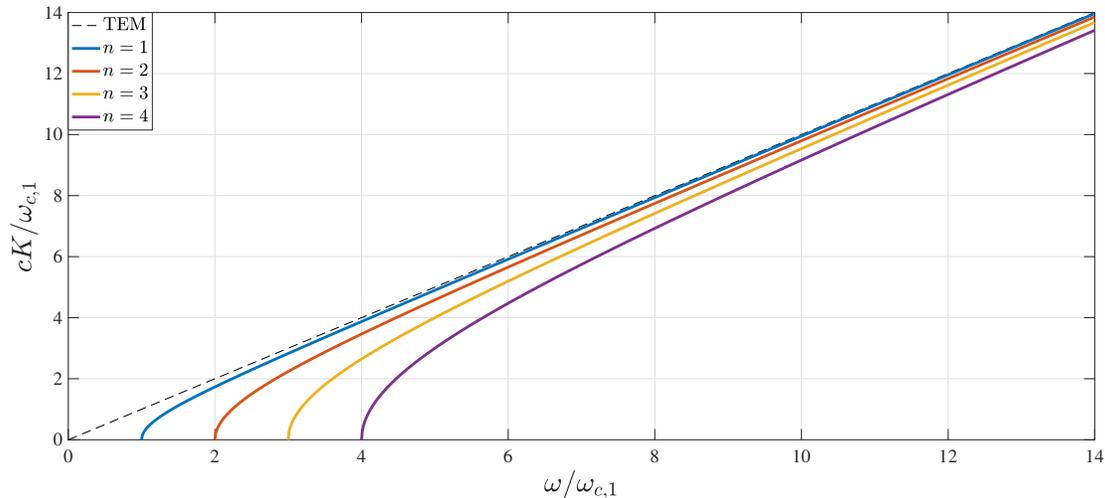


FIGURE 7.1 – Relation de dispersion du guide d'ondes électromagnétiques plan-plan. Pour une pulsation donnée, on va avoir plusieurs mode de propagation possible.

Pour un paquet d'onde à spectre fréquentiel étroit, les vitesses de propagation accessibles sont fortement élargies par la dispersion de mode, bien plus que la dispersion intramodale. Cela conduit à des fortes déformations voir même des dédoublements du signal. Les dimensions des guides d'ondes sont adaptés à la propagation de ces ondes pour s'assurer que ceux-ci restent monomodes.



On appelle **dispersion intermodale** ou **dispersion de mode** la différence de vitesse effective de propagation de deux ondes harmoniques de même pulsation mais portées par des modes différents. Elle est due aux conditions aux limites imposées à l'onde.

La **dispersion intramodale** caractérise la différence de vitesse effective de propagation entre deux harmoniques portées par le même mode ( $n$  fixé) mais de pulsation différentes. Elle est due aux propriétés intrinsèques du milieu (milieu dispersif) et aussi aux conditions limites.

La dispersion de mode est d'importance technologique car elle limite grandement l'information que peut transporter un guide d'onde, notamment les fibres optiques. Dans le cas illustré sur la FIGURE 7.3, on préfère utiliser un guide monomode.

En conclusion, si on considère l'ensemble des modes TE, la dispersion dans le guide d'onde est imposé par l'équation de Klein-Gordon, dupliquée autant de fois qu'il y a de modes. Si une OPPH du groupe TE de pulsation  $\omega$  est forcée à l'entrée du guide, sa propagation par le guide dépend de sa fréquence :

- Si  $\omega < \omega_{c,1}$ , tout les modes sont amortis et l'onde ne se propage pas dans le guide.
- Si  $\omega_{c,1} < \omega < \omega_{c,2}$  l'onde ne se propage que dans son mode fondamental, avec dispersion intramodale. La propagation se fait sans atténuation et le guide est monomode.
- Si  $\omega_{c,n} < \omega < \omega_{c,n+1}$ , l'onde est propagée par  $n$  modes, sans atténuation mais avec une double dispersion, à la fois intermodale et intramodale. Le guide d'onde est multimode.

Pour qu'une OPPH puisse se propager dans le guide, il faut que :

$$\begin{aligned} \omega &> \omega_{c,1} = \frac{\pi c}{a} \\ \frac{2\pi c}{\lambda} &> \frac{\pi c}{a} \\ \lambda &< 2a \end{aligned}$$

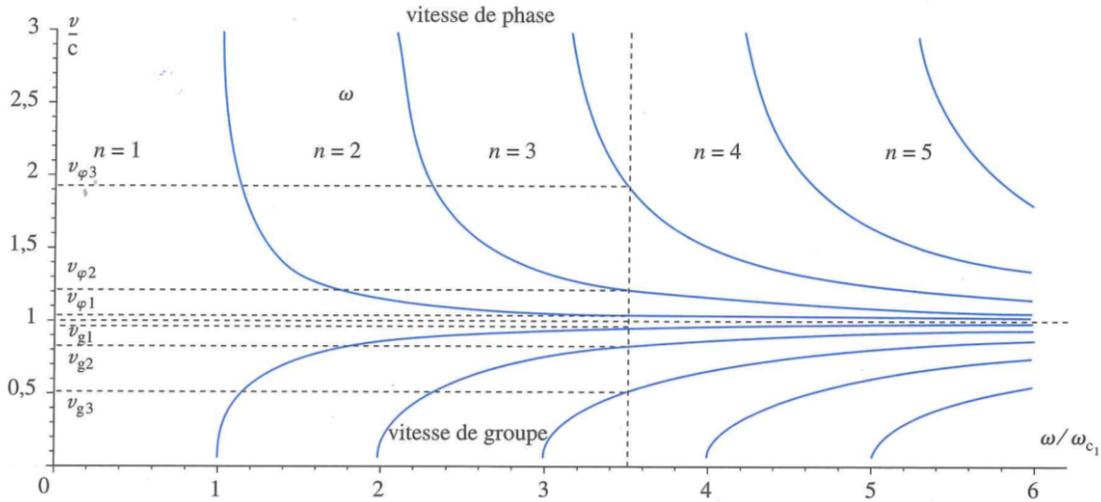


FIGURE 7.2 – Pour une valeur de  $\omega$  donnée, il existe plusieurs modes de propagation possibles (ici trois) correspondant à des valeurs de  $k$  différentes et donc à des valeurs de vitesses de phase et groupe différentes. ceci induit de la dispersion intermodale.

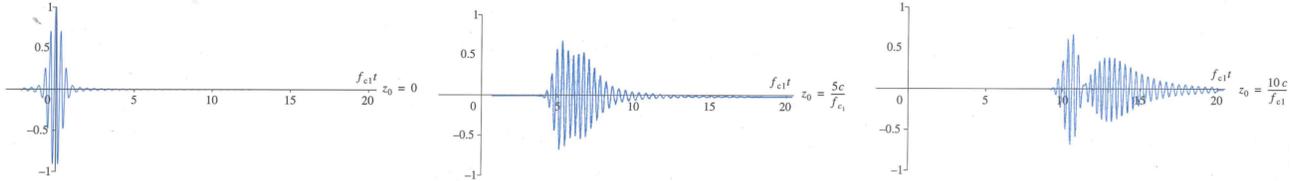


FIGURE 7.3 – Illustration de la dispersion intermodale : dédoublement d'un paquet d'ondes dans un guide pour les modes TE1 et TE2 avec  $\omega = \frac{3}{2}\omega_{c,1}$ .

On retrouve le critère géométrique sur la longueur d'onde de l'OPPH qui est très général. Le préfacteur dépend du guide d'onde et de sa géométrie. Attention cependant à ne pas interpréter ce critère comme une longueur qui rentre ou pas dans le guide d'onde puisque  $\lambda$  correspond à la longueur d'onde dans la direction de propagation.

### 7.3.2 Extension au guide rectangulaire

On ajoute deux plans de métal parfait parallèles distants de  $b$ . Une onde TE se propage selon  $z$ , soit  $\underline{E}_x$ ,  $\underline{E}_y$ ,  $\underline{B}_x$ ,  $\underline{B}_y$ ,  $\underline{B}_z$  les composantes complexes cherchées. On cherche  $B_z$  sous la forme :

$$\underline{B}_z = f(x)g(y)e^{i(Kz-\omega t)} \tag{7.40}$$

On a les équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0 \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad \nabla \wedge \underline{E} = i\omega \underline{B} \quad \nabla \wedge \underline{B} = -\frac{i\omega}{c} \underline{E} \tag{7.41}$$

On trouve alors les relations :

$$\underline{B}_x = -\frac{K}{\omega} \underline{E}_y \quad \underline{B}_y = \frac{K}{\omega} \underline{E}_x \tag{7.42}$$

$$-\frac{i\omega}{c^2} \underline{E}_x = \frac{\partial \underline{B}_z}{\partial y} = -iK \underline{y}_y \quad -\frac{i\omega}{c^2} \underline{E}_y = -\frac{\partial \underline{B}_z}{\partial x} = iK \underline{B}_x \tag{7.43}$$

On pose :

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - K^2 \tag{7.44}$$

d'où :

$$\underline{\mathbf{E}}_x = \frac{i\omega}{k_c^2} \frac{\partial \underline{\mathbf{B}}_z}{\partial y} \quad \underline{\mathbf{E}}_y = -\frac{i\omega}{k_c^2} \frac{\partial \underline{\mathbf{B}}_z}{\partial x} \quad (7.45)$$



Pour avoir une onde TEM il faut que  $B_z$  soit égale à 0 mais dans ce cas on a toutes les autres composantes nulles et donc il n'y a pas de telle onde qui se propage.

Ce résultat est indépendant de la forme de la section droite du guide à condition qu'elle soit délimitée par une courbe fermée ce qui n'est pas le cas du guide plan-plan où un mode TEM est possible.

On a par ailleurs :

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{B}}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{B}}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \underline{\mathbf{B}}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + k_c^2 = 0 \quad (7.46)$$

Or, la somme d'une fonction de  $x$  et d'une fonction de  $y$  ne peut être constante quelque soit  $x$  et  $y$  sauf si  $p, q \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{f''}{f} = -p^2 \quad \frac{g''}{g} = -q^2 \quad p^2 + q^2 = k_c^2 \quad (7.47)$$

Alors :

$$f(x) = A \cos(px) + B \sin(px) \quad g(y) = C \cos(qy) + D \sin(qy) \quad (7.48)$$

Donc :

$$\underline{\mathbf{B}}_z = (A \cos(px) + B \sin(px))(C \cos(qy) + D \sin(qy))e^{i(Kz - \omega t)} \quad (7.49)$$

Conditions aux limites pour le champ électrique :

$$E_y(0 \text{ ou } a, y, z, t) = 0 \quad \partial_x \underline{\mathbf{B}}_z|_{x=0,a} = \partial_x f|_{x=0,a} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad p = m \frac{\pi}{a} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (7.50)$$

$$E_y(x, 0 \text{ ou } b, z, t) = 0 \quad \partial_y \underline{\mathbf{B}}_z|_{y=0,b} = \partial_y g|_{y=0,b} = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0 \quad q = n \frac{\pi}{b} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (7.51)$$

Donc  $p$  et  $q$  sont quantifiés et ne peuvent être nuls simultanément sinon les composantes transverses des champs seraient nulles.

Chaque couple  $(n, m)$  détermine un mode de propagation noté  $TE_{mn}$  de champs :

$$B_z = B_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - kz) \quad (7.52)$$

$$E_x = -\frac{\omega}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} B_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - kz) \quad B_y = \frac{K}{\omega} E_x \quad (7.53)$$

$$E_y = \frac{\omega}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} B_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - kz) \quad B_x = -\frac{K}{\omega} E_y \quad (7.54)$$

Les conditions sur  $\mathbf{B}$  sont alors vérifiées. La relation de dispersion s'écrit :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - K^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (7.55)$$

Chaque mode  $(n, m)$  est un filtre passe haut de pulsation de coupure :

$$\omega_{cn,m} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (7.56)$$

Dans la bande passante on a :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cnm}}{\omega}\right)^2}} > c \quad (7.57)$$

Condition monomode : pour  $a > 2b$ , le mode  $TE_{10}$  est le seul mode à se propager si  $\omega_{c10} < \omega < \omega_{c20}$ , le guide est monomode si  $a < \lambda < 2a$ . En ordre de grandeur, pour une fibre standard on a  $a = 2.25b = 2.28$  cm soit  $2.28 \text{ cm} < \lambda < 4.56 \text{ cm}$ . Pour être sûr d'être monomode on prend  $2.42 \text{ cm} < \lambda < 4.35 \text{ cm}$

# Chapitre 8

## Induction électromagnétique

L'induction est un exemple très important d'un phénomène électromagnétique. En effet, il s'agit d'un exemple typique des effets du couplage entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . De plus, c'est un peu "l'antichambre" de l'électromagnétisme relativiste. Enfin, ces phénomènes physiques ont une importance conceptuelle et pratique avec une foule d'applications.

### 8.1 Énoncé historique de la loi de Faraday

On doit les lois de l'induction à Michel Faraday. La loi qui porte son nom date de 1831 :

**Toute variation du flux du champ magnétique à travers un circuit mobile se traduit par l'apparition d'un champ électrique à rotationnel non nul vérifiant :**

$$e = \oint_C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d\phi}{dt}$$



où :

- $e$  est la force électromotrice
- $\mathbf{E}_i$  est le champ électrique vu dans le référentiel du circuit (pas forcément Galiléen)
- $k$  est une constante qui dépend du système d'unités choisi.
- $\phi$  est le flux du champ magnétique vu dans le référentiel du laboratoire à travers le circuit.

Le signe "-" de la formule est la signature de la loi de Lenz qui stipule que le champ électromoteur créé par la variation de flux crée un champ magnétique qui tend à s'opposer au champ qui lui a donné naissance.

On parle donc d'induction lorsqu'il y a variation du champ magnétique. Pour cela deux façons de faire :

- On peut faire bouger le circuit avec le champ magnétique constant : Induction de Lorentz
- Le circuit ne bouge pas et le magnétique varie dans le temps : induction de Neumann

Les deux façons de faire sont complètement équivalentes et peuvent être unifiées grâce au principe de relativité, qui souligne le fait que l'entité physique intéressante n'est ni  $\mathbf{E}$  ni  $\mathbf{B}$  mais le couple  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  qui constitue le champ électromagnétique.

Dans le cas de l'induction on se place toujours dans le cadre de l'**ARQS magnétique** et donc on néglige le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell Ampère, cependant l'équation de Maxwell-Faraday reste inchangé.

## 8.2 Cas de l'induction de Neumann

L'équation de Maxwell-Faraday nous permet d'écrire le champ électrique comme un potentiel :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (8.1)$$

En calculant la circulation du champ électrique le long d'un circuit fixe et fermé  $\mathcal{C}$  :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_{\mathcal{C}} \nabla V \cdot d\mathbf{l} - \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} \quad (8.2)$$

Le premier terme est nul car la courbe  $\mathcal{C}$  est fermée et comme  $\mathcal{C}$  est fixe on peut sortir la dérivée temporelle de l'intégrale :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} (\mathbf{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d\phi(\mathbf{B})_{\Sigma}}{dt} \quad (8.3)$$

avec  $\Sigma$  une surface s'appuyant sur le contour  $\mathcal{C}$ . La seconde égalité est obtenue grâce au théorème de Stokes (cf chapitre 1). On désigne par  $\phi(\mathbf{B})_{\Sigma}$  le flux de  $\mathbf{B}$  à travers la surface  $\Sigma$ . De plus, la circulation de  $\mathbf{E}$  s'identifie à celle de la force électromotrice qui met les charges en mouvement (à la charge près). On retrouve bien la loi de Faraday. Ici le champ  $\mathbf{E}$  n'a pas de circulation nulle le long d'une courbe fermée puisqu'il n'est plus le champ statique.

La séparation entre les 2 termes de  $\mathbf{E}$  avec l'un à circulation nulle et l'autre pas est a priori arbitraire. Cependant en se plaçant dans l'ARQS magnétique on la Jauge de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  et les équations donnant  $V$  et  $\mathbf{A}$  sont séparées et on peut identifier le champ induit (celui à circulation non nul) avec  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}_{\text{induit}} \quad : \quad \text{champ de Neumann} \quad (8.4)$$

## 8.3 Induction de Lorentz

On lit souvent que dans le cas où le circuit se déplace on a :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (8.5)$$

avec  $\mathbf{v}_e$  la vitesse d'entraînement du circuit et  $\mathbf{v}_r$  la vitesse relative des porteurs par rapport au circuit.

Dans le circuit règne un champ magnétique qu'on suppose permanent donc on a  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . Le seul champ de force appliqué est la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (8.6)$$

Et donc la fem du circuit s'écrit comme le travail par unité de charge de la force de Lorentz :

$$e = \frac{1}{q} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (8.7)$$

En remplaçant :

$$e = - \oint_{\mathcal{C}} \nabla V \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v}_r \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (8.8)$$

La première intégrale est nulle car la courbe  $\mathcal{C}$  est fermée et la dernière également car  $\mathbf{v}_r$  est parallèle à  $d\mathbf{l}$ . Donc :

$$e = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (8.9)$$

ainsi  $\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}$  se substitue à  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ . On peut réécrire cette expression à l'aide d'un flux en identifiant que ce produit vectoriel correspond à un flux coupé par unité de temps et donc d'une dérivée temporelle par rapport au temps du flux de  $\mathbf{B}$ . On parle alors de la règle du flux coupé et on a :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (8.10)$$

avec  $\phi$  le flux de  $\mathbf{B}$  coupé par le circuit. Cette approche est celle faite en classe prépa et en licence qui omet beaucoup de choses en adoptant ce point de vue. Essayons de clarifier les choses.

## 8.4 Transformations des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ suivant les référentiels

Afin de pouvoir préciser l'induction et plus particulièrement le cas de Lorentz, il faut s'intéresser à la transformation du champ électromagnétique lors d'un changement de référentiel car dans ce cas le circuit est en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire où on effectue la mesure.

### 8.4.1 Cadre de l'étude

Nous nous placerons dans le cas non relativiste où la vitesse de déplacement du circuit  $\mathbf{v}$  a une norme bien inférieure à la vitesse de la lumière  $c$ . Nous supposons que les axiomes de la théorie de Newton sont vraies et entre autre que la force est invariante par changement de référentiel. On va supposer que la physique est Galiléenne.

Soit une charge  $q$  qui se déplace à une vitesse  $\mathbf{v}$  par rapport à  $R_0$  et soit  $R_1$  en translation rectiligne uniforme par rapport à  $R_0$ . Dans  $R_0$  on a des champs  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{B}_0$  qui agissent sur  $q$  :

$$\mathbf{F}_{/q,R_0} = q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) \quad (8.11)$$

Dans  $R_1$  on a un champ  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{B}_1$  et la force qui agit sur  $q$  est :

$$\mathbf{F}_{/q,R_1} = q(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B}_1) = q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) \quad (8.12)$$

où la deuxième égalité est donnée par l'axiome de Newton et la vitesse  $v_1$  est simplement une composition de vitesse :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d}{dt}(\mathbf{O}_1 \mathbf{M}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_0 + \mathbf{O}_0 \mathbf{M}) = -\mathbf{v}_{R_1/R_0} + \mathbf{v}_{q/R_0} \quad (8.13)$$

Donc :

$$q(-\mathbf{v}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_1) = q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0 + \mathbf{E}_0) \quad (8.14)$$

Ce qui mène à (après avoir remarqué que  $\mathbf{v}_{R_1/R_0} = -\mathbf{v}_{R_0/R_1}$ ) :

$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{R_0/R_1} \wedge \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_0 &= \mathbf{B}_1 \end{aligned}$	<b>Transformations <math>\mathbf{T}_1</math></b>
---	--

Le problème c'est que ces transformations sont FAUSSES! En effet ce n'est pas compatible avec :

- Une particule avec une vitesse rectiligne uniforme. En effet, dans son référentiel propre, elle crée un champ électrostatique mais pas de champ magnétique. Dans le référentiel du laboratoire, elle crée pourtant un champ magnétique non nul ce qui est en contradiction avec la transformation  $\mathbf{T}_1$ .

- Si on considère maintenant un conducteur infini chargé uniformément et qu'on le déplace à une vitesse  $\mathbf{v}_1$ . On a montré que le champ magnétique s'écrit en dehors du conducteur :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{R^2}{2r} j \mathbf{e}_\theta \quad (8.15)$$

avec  $R$  le rayon du conducteur,  $r$  la distance à laquelle on se place. On a de plus  $j = \mathbf{v}_{R_1/R_0} \rho = v_{R_1/R_0} \rho \mathbf{e}_z$  avec  $\rho$  la densité de charges uniforme. De plus, on montre que  $\mathbf{E} = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0} \mathbf{e}_r$ . Ainsi le champ magnétique créé par le conducteur en mouvement s'écrit  $\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{E}$ . Alors on en déduit que la transformation s'écrit dans ce cas là :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_1 + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{E}_0 \end{array}} \quad \text{Transformations } \mathbf{T}_2$$

### 8.4.2 Transformation des champs

Pour effectuer proprement la transformation des champs il faut se placer en relativité restreinte en posant le quadrivecteur  $\mathbf{v}_C$  comme vecteur vitesse qui s'identifiera à la vitesse de translation d'un référentiel par rapport à l'autre  $\mathbf{v}_{R_1/R_0}$ . Soit  $\mathcal{V} = (a, b_1, b_2, b_3)$  un quadrivecteur. On peut alors écrire :

$$\mathcal{V}' = \Lambda \mathcal{V} \quad (8.16)$$

On a alors la transformation :

$$a' = \gamma a - \beta \frac{\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{b}}{c} \quad (8.17)$$

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \gamma \frac{\mathbf{v}_C}{c} a + \frac{(\gamma - 1) \mathbf{v}_C \cdot (\mathbf{v}_C - \mathbf{b})}{c^2} \quad (8.18)$$

avec :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v_C}{c} \quad (8.19)$$

On peut prendre comme quadrivecteur :  $(c\rho, \mathbf{j})$ ,  $(ct, \mathbf{r})$ ,  $(E, \mathbf{p}c)$ ,  $(V, \mathbf{A}c)$  ou encore  $(\mathbf{E}, c\mathbf{B})$  qu'on va expliciter.

$$\mathbf{E}' = \underbrace{\gamma \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_C \wedge c\mathbf{B}}{c} \right]}_1 + \underbrace{(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}_C (\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{E})}{c^2}}_2 \quad (8.20)$$

$$c\mathbf{B}' = \underbrace{\gamma \left[ c\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_C}{c} \wedge \mathbf{E} \right]}_3 + \underbrace{(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}_C (\mathbf{v}_C \cdot c\mathbf{B})}{c^2}}_4 \quad (8.21)$$

Chiffrons les différents termes tel que  $\beta = \frac{v_C}{c} \ll 1$  (Galiléen).

$$\begin{aligned} 1 &\simeq \beta cB \\ 2 &\simeq (\gamma - 1) \beta^2 E = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \beta^2 E \simeq \beta^4 E \\ 3 &\simeq \beta E \\ 4 &\simeq \beta^4 cB \end{aligned}$$

Si on prend brutalement  $c \rightarrow \infty$  alors :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_C \wedge \mathbf{B} + \left[ \frac{\beta^2}{2} \mathbf{E} + \mathcal{O}(\beta^4 \mathbf{E}, \beta^3 c\mathbf{B}) \right] \quad (8.22)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mathbf{v}_C \wedge \frac{\mathbf{E}}{c^2} + \left[ \frac{\beta^2}{2} \mathbf{B}c + \mathcal{O}(\beta^4 \mathbf{B}c, \beta^3 \mathbf{E}) \right] \quad (8.23)$$

Si on ne prend pas le terme d'ordre 2 en  $\beta$  on a pas tout à fait du type  $T_1$  ou  $T_2$ . Cela pose également deux problèmes :

- Pas stable car la transformation  $R_0 \rightarrow R_2$  est différent de  $R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2$
- N'assure pas la covariance

En résumé, si on garde les termes en  $\beta$  dans le développement on suppose qu'on a pas de comportement du type  $cB \gg E$  ou  $cB \ll E$ . Si on a aucun comportement pathologique :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_C \wedge \mathbf{B} \quad (8.24)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{E}}{c^2} \quad (8.25)$$

Mais ce n'est pas stable et n'assure pas la covariance des équations de Maxwell. Peut-on tout de même trouver une transformation de champ acceptable ?

Si on se place dans le cas  $E \gg cB$  alors on a :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \quad (8.26)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{E}}{c^2} \quad (8.27)$$

Et on retrouve la transformation de type  $T_2$ . Dans le cadre de l'ARQS électrique on retrouve une transformation précédente.

Si à présent on se place dans l'ARQS magnétique et qu'on prend  $E \ll cB$  alors les transformation s'écrivent :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_C \wedge \mathbf{B} \quad (8.28)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad (8.29)$$

Et on retrouve la transformation  $T_1$ .

À présent plaçons dans l'ARQS et regardons comme se transforme le quadrivecteur  $(\rho c, \mathbf{j})$  :

$$\rho'c = \gamma\rho c - \frac{\gamma\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j}}{c} \quad (8.30)$$

$$\mathbf{j}' = \gamma\mathbf{j} - \frac{(\gamma-1)\mathbf{v}_C(\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j})}{c^2} - \gamma\rho c \frac{\mathbf{v}_C}{c} \quad (8.31)$$

Dans le cas où  $\|\mathbf{v}_C\| \ll c$ , donc  $\gamma \rightarrow 1$  alors :

$$\rho'c = \rho c - \frac{\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j}}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v_C}{c}\right)^2 \quad (8.32)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho c \frac{\mathbf{v}_C}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v_C}{c}\right)^2 \quad (8.33)$$

On a alors en ARQS magnétique que :

$$\rho'c = \rho c - \frac{\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j}}{c} \quad (8.34)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} \quad (8.35)$$

Et en ARQS électrique que :

$$\rho' = \rho \quad (8.36)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho\mathbf{v}_C \quad (8.37)$$

On peut montrer maintenant que dans l'ARQS les équations de Maxwell sont invariantes par transformation de Galilée de la forme :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}_C t \quad (8.38)$$

$$t' = t \quad (8.39)$$

Tout d'abord on a que :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad (8.40)$$

Et donc ainsi on a  $\nabla_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}'}$ . Et pour le temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -v_{Cx} \frac{\partial}{\partial x'} - v_{Cy} \frac{\partial}{\partial y'} - v_{Cz} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial t'} \quad (8.41)$$

Soit,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - (\mathbf{v}_C \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \quad (8.42)$$

### Cas ARQS électrique :

Supposons que dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , en se plaçant en ARQS électrique, on a les équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Et les transformations des champs s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{E}}{c^2} \end{aligned}$$

Si on transforme l'équation de Maxwell-Faraday, comme  $\nabla_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}'}$  et  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ , on a :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E} = \nabla_{\mathbf{r}'} \wedge \mathbf{E}' = 0 \quad (8.43)$$

De même pour l'équation de Maxwell-Gauss comme on a  $\rho = \rho'$  alors :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0} \quad (8.44)$$

Regardons maintenant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B} &= \nabla_{\mathbf{r}'} \wedge \left( \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{E}}{c^2} \right) = \nabla_{\mathbf{r}'} \wedge \mathbf{B}' + \nabla_{\mathbf{r}'} \wedge \left( \frac{\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{E}'}{c^2} \right) \\ &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 (\mathbf{j}' + \rho \mathbf{v}_C) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} - \frac{(\mathbf{v}_C \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \mathbf{E}'}{c^2} \end{aligned}$$

On utilise la relation vectorielle :

$$\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (8.45)$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B} &= \nabla'_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}_C}{c^2} (\nabla'_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}') - \left( \frac{\mathbf{v}_C}{c^2} \cdot \nabla'_{\mathbf{r}} \right) \mathbf{E}' \\
&= \nabla'_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}_C \rho'}{c^2 \epsilon_0} - \left( \frac{\mathbf{v}_C}{c^2} \cdot \nabla'_{\mathbf{r}} \right) \mathbf{E}' \\
&= \nabla'_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}' + \mu_0 \mathbf{v}_C \rho' - \left( \frac{\mathbf{v}_C}{c^2} \cdot \nabla'_{\mathbf{r}} \right) \mathbf{E}'
\end{aligned}$$

Donc :

$$\nabla'_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}' + \mu_0 \mathbf{v}_C \rho' - \left( \frac{\mathbf{v}_C}{c^2} \cdot \nabla'_{\mathbf{r}} \right) \mathbf{E}' = \mu_0 (\mathbf{j}' + \rho' \mathbf{v}_C) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} - \frac{(\mathbf{v}_C \cdot \nabla'_{\mathbf{r}}) \mathbf{E}'}{c^2} \quad (8.46)$$

Donc :

$$\nabla'_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{j}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} \quad (8.47)$$

De même on trouve que :

$$\nabla'_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}' = 0 \quad (8.48)$$

### Cas ARQS magnétique :

On peut effectuer la même chose pour l'ARQS magnétique. Supposons que dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , en se plaçant en ARQS magnétique, on a les équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}
\end{aligned}$$

Et les transformations des champs s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{v}_C \wedge c \mathbf{B} \\
\mathbf{B}' &= \mathbf{B}
\end{aligned}$$

De plus :

$$\rho' c = \rho c - \frac{\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j}}{c} \quad (8.49)$$

$$\mathbf{j}' = \gamma \mathbf{j} \quad (8.50)$$

Prenons les équations dans l'ordre :

$$\begin{aligned}
\nabla'_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}' &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}' \\
&= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{B}) \\
&= \frac{\rho}{\epsilon_0} + (\nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{v}_C \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}) \\
&= \frac{\rho}{\epsilon_0} + \mu_0 \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j} \\
&= \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2} \\
&= \frac{\rho'}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

L'équation de Maxwell-Gauss est invariante par transformation de Galilée.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{r}'} \wedge \mathbf{E}' &= \nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}' \\
&= \nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E} + \nabla_{\mathbf{r}} \wedge (\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{B}) \\
&= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v}_C - (\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_C) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{v}_C - (\mathbf{v}_C \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{B} \\
&= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - (\mathbf{v}_C \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{B} \\
&= -\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_C \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \right] \mathbf{B} \\
&= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t'} \\
&= -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'}
\end{aligned}$$

L'équation de Maxwell-Faraday est invariante par transformation de Galilée.

On a immédiatement que  $\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{B}' = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}$  et de même  $\nabla_{\mathbf{r}'} \wedge \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{j}'$ . Maxwell-Thomson et Maxwell-Ampère sont invariantes par transformation.



Ainsi l'ARQS (dans le cas électrique ou magnétique) est la limite dans laquelle les transformations galiléennes des champs font sens.

## 8.5 Cadre général de l'induction de Lorentz

Si on se place dans l'ARQS magnétique alors on a les transformations :

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_{1/0} \wedge \mathbf{B}_0 \quad (8.51)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 \quad (8.52)$$

Avec  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  deux référentiels galiléen et on prend un contour  $\mathcal{C}(t)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_1$ .

Expérimentalement on a :

$$\oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d\phi_{0B}}{dt} \quad (8.53)$$

On sait que si  $\mathbf{v}_{1/0} = \mathbf{0}$  alors on a :

$$\oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d\phi_B}{dt} \quad (8.54)$$

On fait toujours l'hypothèse de la physique galiléenne où les forces sont identiques dans tous les référentiels. Ainsi le travail de la force sur le contour  $\mathcal{C}(t)$  qui vaut  $\oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  est indépendant du référentiel choisi.

Force électromotrice :

$$e = \oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{C}(t)} \frac{1}{q} q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (8.55)$$

est indépendant du référentiel choisi. Dans le référentiel  $\mathcal{R}_1$ , si la vitesse de translation est constante :

$$e = \oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{C}(t)} [\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_{1/0} \wedge \mathbf{B}_0] \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\mathcal{C}(t)} (\mathbf{v}_{1/0} \wedge \mathbf{B}_0) \cdot d\mathbf{l} \quad (8.56)$$

On a également :

$$\oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} \cdot d\mathbf{\Sigma} \quad (8.57)$$

Soit :

$$e(t) = - \left[ \iint \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} \cdot d\mathbf{\Sigma} - \oint_{\mathcal{C}(t)} (\mathbf{v}_{1/0} \wedge \mathbf{B}_0) \cdot d\mathbf{l} \right] \quad (8.58)$$

On va relier ceci à la variation de flux de champ magnétique. Considérons la courbe  $\mathcal{C}(t)$  à un instant  $t$  et à un instant  $t+dt$  ainsi que deux points  $A$  et  $B$  sur cette courbe. On a :

$$\phi_{B,t+dt} - \phi_{B,t} = \frac{d\phi_B}{dt} dt \quad \phi_{B,t+dt} = \iint_{S(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t+dt) \cdot d\mathbf{\Sigma} \quad \phi_{B,t} = \iint_{S(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{\Sigma} \quad (8.59)$$

Comme la divergence de  $\mathbf{B}$  est nulle alors on a formellement que :

$$- \iint_{S(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{\Sigma} + \iint_{S(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{\Sigma} + \phi_{\text{latéral}} = 0 \quad (8.60)$$

Soit :

$$\iint_{S(t+dt)} \left[ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) dt \right] \cdot d\mathbf{\Sigma} = \iint_{S(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{\Sigma} + \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) dt \cdot d\mathbf{\Sigma} + \mathcal{O}(dt^2) \quad (8.61)$$

Donc :

$$\phi(t+dt) - \phi(t) = \iint_{S(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{\Sigma} + \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) dt \cdot d\mathbf{\Sigma} - \iint_{S(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{\Sigma} + \mathcal{O}(dt^2) \quad (8.62)$$

Soit :

$$\frac{d\phi}{dt} = \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{\Sigma} - \frac{\phi_{\text{latéral}}}{dt} \quad (8.63)$$

Le problème est maintenant de savoir comment calculer le flux sur la surface latérale. Si le circuit est indéformable il est facile d'exprimer ce terme. Prenons un élément de la courbe  $\mathcal{C}(t)$  qui est en translation à la vitesse  $\mathbf{v}_{1/0}$  alors l'élément de surface latéral est perpendiculaire à  $d\mathbf{l}$  et  $\mathbf{v}_{1/0}$  et vaut  $d\mathbf{l} \mathbf{v}_{1/0} dt$ . Ainsi la variation de flux latéral vaut :

$$\frac{d\phi_{\text{latéral}}(t)}{dt} = \int_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \wedge \mathbf{v}_{1/0}) \quad (8.64)$$

Ceci est vrai que si le circuit est indéformable et en translation. Soit :

$$\begin{aligned} -\frac{d\phi}{dt} &= - \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{\Sigma} + \frac{\phi_{\text{latéral}}}{dt} \\ &= - \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{\Sigma} + \int_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \wedge \mathbf{v}_C) \\ &= - \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{\Sigma} + \int_{\mathcal{C}(t)} d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Et donc si  $\mathbf{v}_C$  est uniforme :

$$\boxed{e = - \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{\Sigma} + \int_{\mathcal{C}(t)} d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v}_C \wedge \mathbf{B}) = -\frac{d\phi}{dt}} \quad (8.65)$$

Donc :

$$e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{\Sigma} + \int_{C(t)} d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}) = - \frac{d\phi}{dt} \quad (8.66)$$

Et cette quantité est égale à  $-\frac{d\phi}{dt}$  si le circuit est indéformable et en translation.



**Attention** : Pour appliquer  $e = -\frac{d\phi}{dt}$  il faut que le circuit reste bien défini, c'est-à-dire que la constitution du circuit ne doit pas changer. Par exemple si on prend un rhéostat manuel, constitué d'une bobine avec un contact qui peut bouger le long des spires, si on place un champ magnétique permanent dans la bobine et qu'on fait bouger le contacteur alors on ne voit pas de courant apparaître alors qu'il y a variation du flux du champ magnétique. En effet ici comme  $\mathbf{B}$  ne varie pas dans le temps on a pas d'induction de Neumann et les spires ne bougent pas donc pas d'induction de Lorentz. Dans ce cas-là il vaut mieux revenir aux expressions locales<sup>a</sup>. L'exemple classique de l'induction est l'expérience des rails de Laplace pour illustrer la formule  $e = -\frac{d\phi}{dt}$  qui n'a aucune raison de marcher car le circuit est déformable et pourtant c'est le cas. Il s'agit simplement d'une coïncidence et surtout d'un système avec une géométrie très simple qui se déforme tel que la loi de Faraday est quand même vérifiée.

<sup>a</sup>. Un autre exemple qu'on peut trouver est le disque de Faraday qu'on peut retrouver dans le BFR3.

Enfin on peut réécrire la loi d'Ohm dans le cas où on a un circuit rigide qui a un mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}_C$  dans le référentiel du laboratoire. Dans le référentiel du circuit  $\mathcal{R}'$  les porteurs de charges ont une vitesse d'ensemble  $\langle \mathbf{v}_R \rangle$  et sont soumis à la force de Lorentz, la force électrique et éventuellement d'autres actions et donc on peut écrire la loi d'Ohm dans le référentiel du circuit :

$$\mathbf{j} = \sigma \left[ -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}_C \wedge \mathbf{B} + \langle \mathbf{v}_R \rangle \wedge \mathbf{B} \right] \quad (8.67)$$

Une démonstration plus complète de cette loi demande de faire un bilan des actions s'exerçant sur chaque porteur de charge avant de faire une moyenne d'ensemble.

## 8.6 Courants de Foucault

On considère un conducteur de volume  $\mathcal{V}$  dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}_a$ , créé par des sources extérieures. Ce champ magnétique induit un champ électrique  $\mathbf{E}_1$  tel que :

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_1 + \frac{\partial \mathbf{B}_a}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (8.68)$$



Si le conducteur a une conductivité finie  $\sigma$ , alors des courants, appelés **courants de Foucault**, vont se former tel que :

$$\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E}_1 \quad \nabla \wedge \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_a}{\partial t} \quad (8.69)$$

On peut analyser cela dans une géométrie simple : un conducteur cylindrique de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ . On applique un champ magnétique  $\mathbf{B}_a(t)$  parallèle à l'axe de révolution. En supposant que le champ magnétique s'identifie au champ appliqué alors on a en un point  $M$  distant de  $r$  du centre :

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{2}r \frac{dB_a}{dt} \mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{j}_f = -\frac{\sigma r}{2} \frac{dB_a}{dt} \mathbf{e}_\theta \quad (8.70)$$

Ainsi les courants de Foucault sont plus intenses en périphérie du conducteur et leur direction obéit à la loi de Lenz : le champ magnétique qu'il engendrent tend à s'opposer à  $\mathbf{B}_a$ .

Pour le cas d'un champ sinusoïdal pour voir la dépendance en fréquence :

$$\mathbf{B}_a = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_z \quad (8.71)$$

on trouve :

$$\mathbf{j}_f = \frac{\sigma \omega}{2} r B_0 \sin(\omega t) \mathbf{e}_\theta \quad (8.72)$$

La puissance dissipée par effet Joule s'écrit :

$$\langle P \rangle = \left\langle \int d\tau \mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E}_1 \right\rangle = \int d\tau \frac{\langle \mathbf{j}_f^2 \rangle}{\sigma} = \frac{\mathcal{V}}{8} \sigma \omega^2 B_0^2 R^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle \quad (8.73)$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\langle P \rangle}{\mathcal{V}} = \frac{\sigma \omega^2 B_0^2 R^2}{16}} \quad (8.74)$$

La puissance dissipée par les courants de Foucault est proportionnelle à  $\omega^2$  et donc possède une forte dépendance en la fréquence du champ magnétique appliqué. Ceci permet soit d'en tirer profit soit de tenter de l'éviter en fonction des applications.

Il faut faire attention car ici nous nous sommes contenté que de l'ordre 1 des équations de Maxwell. En effet nous nous sommes limité au cas où le champ magnétique se confondait avec le champ magnétique appliqué, ce qui n'est pas strictement le cas puisque les courants induits vont créer un champ magnétique qui va lui aussi induire un courant, qui vont eux même créer un nouveau champ magnétique, etc... Dans le cas où  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_a$  n'est plus vérifié, typiquement pour les hautes fréquences il vaut mieux résoudre directement les équations de Maxwell en prenant en compte la loi d'Ohm.

### Exemple de la chute d'un aimant dans un tube conducteur<sup>1</sup> [Exercice]

Soit un tuyau cylindrique conducteur de rayon moyen  $a$ , d'épaisseur  $e$  et de conductivité  $\sigma$ . On a  $e \ll a$ . L'extrémité supérieure est en  $z = 0$  et possède une longueur  $L$  suffisamment grande devant le régime transitoire. L'axe  $z$  est dirigé vers le bas. On fait tomber un aimant  $A$ , supposé ponctuel, sans vitesse initiale en  $z = 0$ . Son moment magnétique  $\boldsymbol{\mu} = \mu \mathbf{e}_z$  est au cours du mouvement toujours vertical et dirigé vers le bas. On note sa position  $z_a(t)$ .

Le but de l'exercice est de trouver quelle est la force d'exercice le tuyau sur l'aimant par l'intermédiaire des courants induits par la chute de l'aimant. On raisonnera sur un circuit  $\mathcal{C}$  de cote  $z$  constitué d'un tronçon de tuyau de hauteur  $dz$ . Un point  $M$  de cette boucle est repéré par ses coordonnées sphérique d'origine l'aimant et l'orientation positive de la courbe est choisi selon  $+\mathbf{e}_\varphi$ .

1. À partir du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  créé par l'aimant, déterminer le champ électromoteur  $\mathbf{E}_m$  lié à sa chute au niveau de  $\mathcal{C}$ , puis le courant  $di$  induit dans  $\mathcal{C}$  en notant  $v = \frac{dz_a}{dt}$  la vitesse de chute de l'aimant.
2. En déduire à l'aide d'une intégrale portant sur  $z$ , la projection  $F_z$  de la force exercée par le tuyau sur l'aimant en évaluant son opposé  $F'_z = F_z$ , c'est-à-dire la force exercée par l'aimant sur le tuyau.
3. Sachant qu'on donne la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^5} = \frac{5\pi}{128} \quad (8.75)$$

calculer la force de freinage sur l'aimant et la mettre sous la forme  $\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}$  où  $\alpha$  est indépendant de  $z_a$ .

---

1. Se référer au Garing de magnétisme.

4. Intégrer l'équation différentielle du mouvement et exprimer la vitesse  $v(t)$  et la cote  $z_a(t)$  de l'aimant à l'aide d'un temps caractéristique  $\tau$  du régime transitoire et de  $v_\ell$  la vitesse limite atteinte.
5. Application numérique avec un tuyau de cuivre.  $a = 12$  mm,  $e = 2$  mm,  $L = 1$  m,  $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$  S/m,  $m = 6$  g et  $\mu = 0.6$  A.m<sup>2</sup>.

1. Appelons  $\theta$  l'angle sous lequel l'aimant voit le point  $M$  (angle des coordonnées sphériques). Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  créé en un point  $M$  du circuit  $\mathcal{C}$  par le dipôle magnétique est, avec  $\sin \theta = a/r$  avec  $r = AM$  :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\boldsymbol{\mu} \wedge \mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mu \sin \theta}{r^2} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu a}{(a^2 + (z - z_a)^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\varphi \quad (8.76)$$

De par la chute du petit aimant,  $z_a$  est fonction du temps et donc le potentiel vecteur aussi. Le champ électromoteur du type Neumann au niveau de la courbe  $\mathcal{C}$  s'écrit alors :

$$\mathbf{E}_m(M) = -\frac{\partial \mathbf{A}(M)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}(M)}{\partial z_a} v \mathbf{e}_\varphi \quad (8.77)$$

avec  $v = \frac{dz_a}{dt}$  qui est toujours positif. Et donc :

$$\mathbf{E}_m(M) = -\frac{3\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mu a (z - z_a) v}{(a^2 + (z - z_a)^2)^{5/2}} \mathbf{e}_\varphi \quad (8.78)$$

Le courant  $di$  induit par ce champ électromoteur dans le circuit  $\mathcal{C}$  est :

$$di = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = (\sigma \mathbf{E}_m)(e \, dz \, \mathbf{e}_\varphi) = \sigma E_m e \, dz \quad (8.79)$$

Et donc :

$$di = -\frac{3\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma e \mu a (z - z_a) v}{(a^2 + (z - z_a)^2)^{5/2}} dz \quad (8.80)$$

Tous ces calculs suppose que les champs sont uniformes sur l'épaisseur du tuyau et donc qu'on a bien  $e \ll a$ .

2. La force  $d\mathbf{F}$  qu'exerce le circuit  $\mathcal{C}$  sur l'aimant est l'opposé de la force  $d\mathbf{F}'$  qu'exerce l'aimant sur le circuit  $\mathcal{C}$ . Ainsi, sur une longueur élémentaire  $d\mathbf{l}$  du circuit au niveau duquel le champ  $\mathbf{B}$  de l'aimant est donné en coordonnées sphériques :

$$d^2\mathbf{F} = di d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} = di (dl \mathbf{e}_\varphi) \wedge (B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta) = di dl (B_r \mathbf{e}_\theta - B_\theta \mathbf{e}_r) \quad (8.81)$$

Pour le circuit entier, la résultante des forces donne une composante suivant  $z$  par symétrie :

$$dF'_z = di 2\pi a (-B_r \sin \theta - B_\theta \cos \theta) \quad (8.82)$$

Or on rappelle les expressions du champ magnétique d'un dipôle :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\mu \cos \theta}{r^3}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mu \sin \theta}{r^3} \quad (8.83)$$

et donc :

$$dF'_z = -\frac{3\mu_0 \mu di a \cos \theta \sin \theta}{2 r^3} \quad (8.84)$$

Or avec  $\sin \theta = \frac{a}{r}$  et  $\cos \theta = \frac{z - z_a}{r}$  et l'expression du courant  $di$  de la question précédente on trouve :

$$\boxed{dF'_z = \frac{9\mu_0^2 \sigma e \mu^2 a^3 v (z - z_a)^2 dz}{8\pi (a^2 + (z - z_a)^2)^5}} \quad (8.85)$$

Et donc l'action du tuyau sur l'aimant est donné par l'intégration :

$$F_z = - \int_0^L dF'_z \quad (8.86)$$

3. Afin de calculer l'intégrale précédente il faut effectuer le changement de variable  $Z = \frac{z-z_a}{a}$  et on trouve :

$$F_z = -\frac{9\mu_0^2\sigma e\mu^2 a^3 v}{8\pi} \int_0^L \frac{(z-z_a)^2}{(a^2+(z-z_a)^2)^5} dz = -\frac{9\mu_0^2\sigma e\mu^2 a^3 v}{8\pi} \frac{1}{a^7} \int_{-z_a/a}^{(L-z_a)/a} \frac{Z^2}{(1+Z^2)^5} dZ \quad (8.87)$$

Or l'intégrale qui est donné dans l'énoncé possède des bornes infinies. On ne peut remplacer  $-z_a/a$  par  $-\infty$  dès que  $z_a > 0$  (c'est-à-dire juste après le début de la chute) et  $(L-z_a)/a$  par  $+\infty$  tant que  $z_a < L$  c'est-à-dire tant que l'aimant est dans le tube. Il n'est pas nécessaire que  $a \ll z_a$  et  $a \ll (L-z_a)$  pour faire tendre les bornes vers l'infini mais il faut remarquer que la fonction est équivalente à  $1/Z^8$  pour des  $Z$  grands et tend donc très rapidement vers 0. Ainsi, étendre les bornes de l'intégrale ne change pas la valeur de celle-ci car l'aire sous la courbe pour cette partie est négligeable. On trouve alors une force qui vaut :

$$F_z = -\frac{45\mu_0^2\sigma e\mu^2}{1024a^4} v = -\alpha v \quad (8.88)$$

On trouve bien une force de type frottement fluide avec un coefficient  $\alpha$  indépendant de  $z_a$ .

4. On applique le principe fondamentale de la dynamique à l'aimant :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} - \alpha\mathbf{v} \quad (8.89)$$

Ainsi, la vitesse limite vaut  $v_l = \frac{mg}{\alpha}$  et est atteinte au bout d'un temps de l'ordre de quelques  $\tau = \frac{m}{\alpha}$ . On a :

$$v_l = \frac{1024a^4 mg}{45\mu_0^2\sigma e\mu^2} \quad (8.90)$$

L'équation différentielle projeté sur l'axe  $Oz$  donne :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g \quad , \quad \tau = \frac{m}{\alpha} \quad (8.91)$$

La solution, avec un vitesse initiale nulle est :

$$v(t) = v_l \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (8.92)$$

et donc la position au cours du temps vaut (avec  $z_a(0) = 0$ ) :

$$z_a(t) = v_l t + v_l \tau \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) \quad (8.93)$$

5. On trouve une vitesse limite de  $v_l = 0.42$  m/s et un  $\tau = 42$  ms soit une position  $z_a(\tau) = 1.8$  cm. Le temps de chute  $t_c$  (en considérant que l'exponentielle vaut 1) est  $L \simeq g\tau t_c$  et donc  $t_c = 2.37$  s. On voit alors que la vitesse limite est très rapidement atteinte car  $\tau \ll t_c$  et que le mouvement rectiligne uniforme concerne la majeure partie de la chute car  $z_a(\tau) \ll L$ .

Il est possible de réaliser l'expérience assez facilement mais il faut être conscient de plusieurs choses pour faire du quantitatif :

- Connaître le moment dipolaire d'un aimant est compliqué.
- L'aimant ne tombe pas bien droit et son moment dipolaire fait un angle avec la verticale.
- La dépendance de  $\sigma$  avec la température n'est peut-être pas linéaire à basse température (azote liquide). Il est par exemple possible de faire l'expérience avec du cuivre et de l'aluminium et d'avoir un rapport des conductivité facilement. Pour mesurer le temps entre deux positions, il suffit de placer deux fluxmètres à distance fixe reliés à un oscilloscope. Le temps entre les deux pics et la distance entre les fluxmètres donne directement la vitesse limite si on ne se place pas en haut du tuyau.



# Chapitre 9

## Rayonnement dipolaire

Lorsqu'une charge est accélérée elle rayonne de l'énergie sous la forme d'un champ électromagnétique. Ce rayonnement a mis en défaut le modèle planétaire de Bohr mais permet de créer des champs électromagnétique à partir de courant sinusoïdaux : ce sont des antennes. Le calcul du champ électromagnétique est assez fastidieux et nécessite certaines hypothèses qu'il est important de préciser et développer.

### 9.1 Cadre de l'étude et hypothèses

Considérons le système suivant : un domaine  $\mathcal{D}$  limité dans l'espace et en son sein des charges et des courants. Quels sont les propriétés d'un tel système ? On notera les charges  $q_i$  qui auront une vitesse  $\mathbf{v}_i$ . Trois hypothèses sont nécessaires dans le cadre du rayonnement dipolaire :

- **Hypothèse 1** : Les charges sont non relativistes et on peut alors écrire le potentiel vecteur pour des charges continues ou en discrètes sous la forme :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{D}} d\tau \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{PM}\|}{c}\right)}{\|\mathbf{PM}\|} \quad (9.1)$$

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \in \mathcal{D}} \frac{q_i \mathbf{v}_i\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{P}_i \mathbf{M}\|}{c}\right)}{\|\mathbf{P}_i \mathbf{M}\|} \quad (9.2)$$

De plus nous avons la Jauge de Lorenz qui est valable  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$  ainsi si  $\mathbf{A}$  est connu alors  $V$  l'est également avec :

$$V(M, t) = V(M, 0) - c^2 \int_0^t \nabla \cdot \mathbf{A}(M, t') dt' \quad (9.3)$$

Le problème est que dans le cas général, même dans une géométrie simple on ne peut pas calculer  $\mathbf{A}$ . Une simplification est alors nécessaire.

- **Hypothèse 2** : Si  $a$  est la taille typique de  $\mathcal{D}$  et  $O$  le barycentre des charges de la distribution alors on se place en un point  $M$  de l'espace suffisamment loin, c'est-à-dire tel que :

$$\|\mathbf{OM}\| \gg a \quad (9.4)$$

c'est l'hypothèse dipolaire.

- **Hypothèse 3** : On suppose que les retards entre les différents points des sources sont identiques. Prenons deux points  $P_1$  et  $P_2$  de la distribution distant de  $a$ . La différence de retard entre les deux points est  $a/c$ . Si les charges et les courants varient sur un temps typique  $\tau$  alors on doit avoir :

$$\frac{a}{c} \ll \tau \quad \Rightarrow \quad a \ll \tau c \quad (9.5)$$

c'est l'ARQS des sources.

Si on a les trois hypothèses vérifiées alors il est possible de faire quelques calculs. Dans l'expression de  $\mathbf{A}$  l'hypothèse 2 nous permet de remplacer le  $\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|}$  par  $\frac{1}{\|\mathbf{OM}\|}$  et l'hypothèse 3 nous permet de remplacer dans la dépendance temporelle de  $\mathbf{jv}_i$  de  $\|\mathbf{PM}\|$  par  $\|\mathbf{OM}\|$ . Et donc :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{D}} d\tau \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}\right)}{\|\mathbf{OM}\|} \quad (9.6)$$

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \in \mathcal{D}} \frac{q_i \mathbf{v}_i\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}\right)}{\|\mathbf{OM}\|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{OM}\|} \sum_{i \in \mathcal{D}} q_i \mathbf{v}_i\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}\right) \quad (9.7)$$

Définissons  $t' = t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}$  alors on a :

$$\mathbf{v}_i\left(t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}\right) = \frac{d}{dt'} \left[ \mathbf{r}_i\left(t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}\right) \right] \quad (9.8)$$

Soit :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{OM}\|} \frac{d}{dt'} \left[ \sum_{i \in \mathcal{D}} q_i \mathbf{r}_i\left(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{OM}\|}{c}\right) \right] \quad (9.9)$$

Or on peut définir le moment dipolaire de la distribution par :

$$\mathbf{P}(t') = \sum_i q_i \mathbf{r}_i(t') \quad (9.10)$$

Et la limite continue donne :

$$\mathbf{P}(t') = \int d\tau \rho(P, t') \mathbf{OP} \quad (9.11)$$

Et donc on a pour la description discrète ou continue :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{P}}(t')}{\|\mathbf{OM}\|} \quad \text{avec} \quad \dot{\mathbf{P}}(t') = \frac{d\mathbf{P}(t')}{dt'} \quad (9.12)$$

## 9.2 Expression du champ électromagnétique

Si le point d'observation  $M$  est situé à une grande distance de la distribution alors la connaissance du potentiel vecteur est suffisante pour déterminer le champ électromagnétique. En effet comme  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$  on peut calculer  $\mathbf{B}$  et l'intégration de l'équation de Maxwell-Ampère permet de remonter à  $\mathbf{E}$ . Pour le calcul on fixe l'axe  $z$  selon le moment dipolaire de la distribution :

$$\mathbf{P}(t') = P(t') \mathbf{e}_z \quad (9.13)$$

Ceci n'est pas une perte de généralité car si on a un mouvement quelconque alors on pourra toujours par superposition linéaire exprimer le moment dipolaire de la distribution comme la somme de trois moments dipolaires de directions fixées. On a :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{P}(t')}{\|\mathbf{OM}\|} \mathbf{e}_z \quad (9.14)$$

On se place en coordonnées cylindrique  $(\rho, \varphi, z)$ <sup>1</sup>. On note  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$  et  $\theta$  l'angle que fait le vecteur  $\mathbf{r}$  avec l'axe  $z$ . Alors en utilisant l'expression du rotationnel en cylindrique :

$$\mathbf{B}(M, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(M, t) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi \quad (9.15)$$

1. On ne pourra pas confondre avec la densité de charge car elle n'apparaîtra pas.

et comme on a  $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ ,  $t' = t - r/c$  et  $\sin \theta = \rho/r$  :

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{p}}{\partial \rho} = \frac{\partial \dot{p}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \rho} = \ddot{p}(t') \frac{\partial(t - r/c)}{\partial \rho} \frac{\partial r}{\partial \rho} = -\frac{\ddot{p} \sin \theta}{c} \quad (9.16)$$

Soit :

$$\mathbf{B}(M, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial \dot{p}}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi - \frac{\mu_0 \dot{p}}{4\pi} \frac{\partial(1/r)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\ddot{p}}{cr} + \frac{\dot{p}}{r^2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \quad (9.17)$$

On peut le réécrire comme :

$$\boxed{\mathbf{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{p}}}{r^2} \right) \wedge \mathbf{e}_r} \quad (9.18)$$

On voit que la contribution majoritaire du champ magnétique provient majoritairement, à grande distance, aux modifications temporelles du dipôle électrique de la distribution.

Dans la zone où est calculé le champ on a par hypothèse que le courant est nul. On a donc par Maxwell-Ampère :

$$\mathbf{E}(M, t) = \mathbf{E}(M, 0) + c^2 \int_0^t dt'' \nabla \wedge \mathbf{B}(M, t'') \quad (9.19)$$

On peut effectuer le calcul et on trouve<sup>2</sup> :

$$\boxed{\mathbf{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ 2 \cos \theta \left( \frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} \right) + \frac{Q_{\text{tot}}}{r^2} \right] \mathbf{e}_r + \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right] \mathbf{e}_\theta} \quad (9.20)$$

où  $Q_{\text{tot}}$  est la charge totale de la distribution qui est nécessairement invariante au cours du temps pour assurer la conservation globale de la charge électrique.

Si à présent on revient sur les hypothèses qu'on a faites, à savoir l'observation à grande distance et négliger le retard entre deux points de la sources, on peut regarder en ordre de grandeur :

$$\frac{\dot{p}(t')}{r^2 c} \simeq \frac{p}{r^2 c \tau} \quad \frac{\ddot{p}(t')}{rc^2} \simeq \frac{p}{rc^2 \tau^2} \quad (9.21)$$

On peut alors envisager deux limites :

- **Zone de champ proche** ( $a \ll r \ll c\tau$ ) : même si la distance est grande devant la taille de la distribution elle reste petite devant la distance parcourues par l'information sur une durée typique de variation. Dans ce cas on a :

$$\boxed{\mathbf{B}(M, t) \simeq \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}(t) \wedge \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad , \quad \mathbf{E}(M, t) \simeq \frac{3(\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}(t)}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r} \quad (9.22)$$

et les champs perçus sont alors conformes à ceux calculés dans une limite quasi-stationnaire. Ils décroissent au moins proportionnellement à l'inverse du carré de la distance aux sources. On note de plus que l'état électrique du système de sources est perçu sans retard ( $\mathbf{p}(t)$  et non plus  $\mathbf{p}(t')$ ).

- **Zone de rayonnement** ( $a \ll c\tau \ll r$ ) : la distance d'observation est cette fois-ci très grande et le retard induit par la vitesse finie de propagation de l'information est primordial. On a alors :

$$\boxed{\mathbf{B}(M, t) \simeq \frac{\mu_0 \ddot{p}(t') \sin \theta}{4\pi cr} \mathbf{e}_\varphi \quad , \quad \mathbf{E}(M, t) \simeq \frac{\ddot{p}(t') \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_\theta} \quad (9.23)$$

2. On pourra trouver certains détails de calculs dans le Pérez d'électromagnétisme.

et les champs perçus décroissent proportionnellement à l'inverse de la distance aux sources. Dans la zone de rayonnement on a donc des champs qui décroissent lentement.

Pour la majorité des applications, les situations physiques rencontrées sont celles de la zone de rayonnement et il convient de détailler ce cas. Les champs perçus à grande distance possèdent plusieurs caractéristiques :

1. Ils décroissent lentement (en  $1/r$ )
2. Ils sont anisotropes et sont nuls en tout point situé suivant l'axe du moment dipolaire
3. La dépendance temporelle en  $t' = t - r/c$  indique que le champ créé à grande distance se propage suivant  $\mathbf{e}_r$  à une vitesse  $c$
4. Localement, les deux champs sont perpendiculaires entre eux et le champ électromagnétique a une structure d'onde plane.
5. Le champ électromagnétique à grande distance est généré par les dérivées temporelles secondes du moment dipolaire, c'est-à-dire qu'il n'existe que si les charges en mouvement sont accélérées.

## 9.3 Comportement énergétique du rayonnement

### 9.3.1 Le vecteur de Poynting

En statique on veut en général interpréter  $\frac{\epsilon_0}{2} E^2$  et  $\frac{B^2}{2\mu_0}$  comme des termes d'énergie volumique. Soit  $\mathcal{V}$  un volume de l'espace et  $S$  la surface fermée qui le délimite. Notons  $U(t)$  l'énergie électromagnétique stockée au temps  $t$  dans le volume. On a alors :

$$U(t + dt) = U(t) + \delta U(t) \quad (9.24)$$

où on a :

$$\delta U(t) = \delta U_{\text{surface}}(t) + \delta U_{\text{volume}}(t) \quad (9.25)$$

Soit  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)$  le vecteur dont le flux à travers  $d\mathbf{S}$  indique la puissance transmise à  $\mathcal{V}$  à travers cette surface :

$$\delta e = -\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \quad (9.26)$$

Soit  $\sigma(\mathbf{r}, t)$  la source volumique d'énergie dans le volume  $d\tau$  et pendant le temps  $dt$  :

$$\delta e = \sigma(\mathbf{r}, t) d\tau dt \quad (9.27)$$

Le bilan s'écrit alors :

$$U(t + dt) = U(t) + \iiint_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r}' \sigma(\mathbf{r}', t) dt - \iint_S \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}', t) \cdot d\mathbf{S} dt \quad (9.28)$$

Donc :

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r}' \sigma(\mathbf{r}', t) - \iint_S \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}', t) d^3\mathbf{r}' \quad (9.29)$$

Ceci est vrai pour tout volume  $\mathcal{V}$  et donc en notant  $u$  la densité d'énergie volumique alors :

$$\boxed{\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \sigma(\mathbf{r}, t) - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t)} \quad (9.30)$$

Il s'agit maintenant de trouver les valeurs des grandeurs que nous avons introduites. Pour cela il faut utiliser les équations de Maxwell :

$$(\nabla \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) \quad (9.31)$$

Or on a  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A})$  donc :

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (9.32)$$

Au final on trouve :

$$-\nabla \cdot \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \quad (9.33)$$

Il faut comparer ça à :

$$-\nabla_{\mathbf{r}} \Pi(\mathbf{r}, t) = -\sigma(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (9.34)$$

Le choix naturel pour est le *choix de Poynting* :

$$\boxed{\Pi = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \quad \sigma = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} B^2} \quad (9.35)$$

Mais on aurait pu prendre :

$$\Pi = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} + \nabla \wedge \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} \quad \sigma = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} B^2 - \nabla \cdot \mathbf{Y} \quad (9.36)$$

Qu'on appelle *jeu de Mac Arthur*.

### 9.3.2 Cas du rayonnement dipolaire

Dans le cas du rayonnement dipolaire à grande distance (c'est-à-dire dans la zone de rayonnement) on trouve directement que :

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{p}^2(t') \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \mathbf{e}_r \quad (9.37)$$

On voit que dans cette expression l'anisotropie car il n'y a pas d'énergie rayonné le long de l'axe du moment dipolaire. La dépendance en  $1/r^2$  montre la conservation de l'énergie.

Le diagramme de rayonnement consiste à tracer la fonction :

$$F(\theta, \varphi) = \frac{\|\Pi(r, \theta, \varphi, t')\|}{\|\Pi_{\max}(r, \theta_{\max}, \varphi_{\max}, t')\|} \quad (9.38)$$

où  $\Pi_{\max}$  est la valeur maximale à  $r$  et  $t'$  fixé. Dans le cas présent on a :

$$F(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta \quad (9.39)$$

Ce qui correspond à deux lobes symétriques.

On peut regarder la puissance rayonnée par une sphère :

$$\mathcal{P}(t) = \oint_{\text{sphère}} \Pi(\mathbf{r}', t') \cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta \frac{\ddot{p}^2(t) \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} = \frac{\ddot{p}^2(t')}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \sin^3 \theta \quad (9.40)$$

or l'intégrale vaut  $4/3$  donc :

$$\boxed{\mathcal{P}(t') = \frac{\ddot{p}^2(t')}{6\pi \epsilon_0 c^3}} \quad (9.41)$$

On voit alors que la puissance varie comme le carré de  $\ddot{p}$  et également qu'elle ne dépend pas de  $r$ .

On peut alors traiter deux cas :

1. Cas d'une charge isolée : Dans ce cas là on a  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{OP}(t)q$  et donc en prenant l'accélération selon une direction on a :  $\ddot{\mathbf{P}}(t) = q\ddot{z}(t)\mathbf{e}_z = qa(\mathbf{r}, t')\mathbf{e}_z$ . On a donc :

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = \frac{a^2(\mathbf{r}, t')q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}} \quad (9.42)$$

Ainsi une charge accélérée rayonne de la puissance et c'est pourquoi le modèle planétaire de Bohr ne peut pas marcher dans ce cas là.

2. Dipole de Hertz qui vérifie :

$$\mathbf{P}(t') = qa \cos \omega t' \quad (9.43)$$

On se place alors dans le cas non relativiste, dipolaire ainsi que dans l'ARQS des sources c'est-à-dire que  $a\omega \ll c$ . On peut alors calculer la puissance rayonnée sur une période :

$$\langle \mathcal{P} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T P(t') dt' = \frac{a^2 \omega^4 q^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (9.44)$$

## 9.4 Rayonnement d'antenne

### 9.4.1 Antenne électrique

Une antenne est un morceau de conducteur avec des charges en mouvement. On notera  $l$  la taille du conducteur et  $S$  la section du conducteur. On a des charges  $q_i$  possédant chacune une vitesse  $\mathbf{v}_i$  alors on a :

$$\mathbf{P} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i \quad \mathbf{j} = \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i}{lS} \quad (9.45)$$

Et donc :

$$I = jS = \frac{\sum_i q_i \mathbf{v}_i}{l} \quad (9.46)$$

Soit :

$$\frac{d\mathbf{P}(t')}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left( \sum_i q_i \mathbf{r}_i(t') \right) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t') = I(t')l \quad (9.47)$$

Soit :

$$\ddot{\mathbf{P}}(t') = \dot{I}(t')l \quad (9.48)$$

La puissance rayonnée est donc donnée par :

$$\mathcal{P} = \frac{\dot{I}^2(t')l^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (9.49)$$

Ainsi pour gagner de la puissance à intensité fixé il faut augmenter la longueur du conducteur  $l$  mais si on augmente  $l$  on va perdre la condition d'ARQS  $l \ll c\tau$ . De plus si l'ARQS des sources est vérifiée on a :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left( l \sin \theta \frac{dI}{dt} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{e}_\theta \quad (9.50)$$

### 9.4.2 Antenne réelle

Si on prend une antenne rectiligne réelle, le problème est que celle-ci n'est pas dans l'ARQS. En revanche, on peut la décomposer en morceaux élémentaires qui le sont. On est toujours dans l'approximation dipolaire et donc pour une portion d'antenne  $dz$  située au point  $P$  :

$$d\mathbf{E}_P(M) = \frac{dz \sin \theta \frac{dI}{dt}(z)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{E}(M, t') = \int_P d\mathbf{E}_P(M) \quad (9.51)$$

On fait alors une TF temporelle du signal  $I(z, t)$  :

$$I(z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int d\omega e^{j\omega t} \mathcal{I}(z, \omega) \quad (9.52)$$

Pour une pulsation  $\omega$  fixé ou si on considère que  $I$  est monochromatique alors on aurait  $\mathcal{I}(z, \omega) = f(z)$ .

On a alors :

$$I(t, z) = f(z) e^{j\omega t} \quad I(t', z) = f(z) e^{j\omega(t-r/c)} \quad (9.53)$$

On a alors :

$$\mathbf{E}(M, t) = \int_{\text{antenne}} \frac{dz \sin \theta f(z) j\omega e^{j\omega(t-PM/c)}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_\theta \quad (9.54)$$

On est dans la zone de rayonnement et on a :

$$\|\mathbf{PM}\| = \|\mathbf{PO} + \mathbf{OM}\| = \|\mathbf{OM}\| \left( 1 - 2 \frac{\mathbf{OM} \cdot \mathbf{OP}}{\|\mathbf{OM}\|^2} \right)^{1/2} \simeq r - z \cos \theta \quad (9.55)$$

$$\mathbf{E}(M, t) = \frac{j\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \int_{\text{antenne}} dz \sin \theta f(z) e^{j\omega(t-\frac{r}{c}+\frac{z}{c} \cos \theta)} \mathbf{e}_\theta \quad (9.56)$$

$$\mathbf{E}(M, t) = \frac{j\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} e^{j\omega t'} \int_{\text{antenne}} dz \sin \theta f(z) e^{j\omega \frac{z}{c} \cos \theta} \mathbf{e}_\theta = \frac{j\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} e^{j\omega t'} \underbrace{\int_{\text{antenne}} dz \sin \theta f(z) e^{j \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \theta}}_{\mathcal{F}(\theta)} \mathbf{e}_\theta$$

Ainsi le champ électrique est proportionnel à la transformée de Fourier de la répartition de courant  $f(z)$ . Par exemple pour une antenne rectiligne on a :

$$f(z) = I_0 \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( |z| - \frac{l}{2} \right) \right) \quad (9.57)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde associé à la pulsation  $\omega$  dans le vide.

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{\cos \left( \frac{\pi l}{\lambda} \right) - \cos \left( \frac{\pi l}{\lambda} \cos \theta \right)}{\sin^2 \theta} \quad (9.58)$$

Ainsi pour avoir la résonance d'antenne il faut avoir une longueur d'antenne  $l = \frac{n\lambda}{2}$ .

Le lecteur pourra se demander comme faire pour avec 4 antennes on peut émettre dans une direction donnée.

## 9.5 Rayonnement de la matière

### 9.5.1 Expérience introductive

On place du lait (entier de préférence) dans une cuve à eau. On fait traverser un rayon, on constate :

- La lumière au bout est plus rouge
- On constate un effet de polarisation
- Une diffusion bleuté

### 9.5.2 Un modèle simple

On considère un atome soumis à un champ  $\mathbf{E}$ . On suppose que :

- Le noyau est très lourd par rapport aux électrons : pas de mouvement du noyau
- On suppose que les électrons répartis de façon sphérique et on note  $Z$  le numéro atomique de l'atome donc le nombre d'électron ou de protons.

Au repos les barycentres des charges positives et négatives sont confondus. Avec un champ électrique extérieur alors les barycentres ne sont plus confondus et on note  $\mathbf{r} = \mathbf{PN}$  avec  $P$  le barycentre des charges positives et  $N$  le barycentre des charges négatives. Appliquons le PFD pour la sphère électronique :

$$Zm_e\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{P/N} + (-Ze)\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{\text{magnétique}} + \mathbf{f}_{\text{dissip}} \quad (9.59)$$

Regardons les termes un à un :

- Le second terme correspond à la force électrique du champ sur les électrons. Si la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement est grande devant la taille du nuage électronique  $a$  alors on peut supposer que le champ est uniforme sur la sphère électronique et donc  $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\text{ext}}(t)$  dans l'équation
- Le troisième terme est la partie magnétique de la force de Lorentz qui est négligeable si  $\|q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}\| \ll \|q\mathbf{E}\|$ . Or on peut écrire que  $\|\mathbf{E}\| \simeq v_\varphi \|\mathbf{B}\|$  avec  $v_\varphi$  la vitesse de phase de l'onde. On suppose alors que la vitesse des particules est très petite devant  $v_\varphi$  ce qu'il faudra vérifier par la suite.
- Le quatrième terme est un terme de dissipation dont on ne connaît pas a priori la forme. On prend alors une forme linéaire et simple  $\mathbf{f}_{\text{dissip}} = -\frac{m_e}{\tau}\mathbf{v}$  ce qui donne une puissance dissipée en  $\omega^2$
- Pour exprimer le premier terme qui est la force électrostatique du noyau positif sur la sphère négative on va commencer par utiliser le principe de réciprocité et dire que  $\mathbf{F}_{P/N} = -\mathbf{F}_{N/P}$ . Or comme on considère le noyau comme ponctuel on a :

$$\mathbf{F}_{N/P} = \mathbf{E}_{\text{sphère}}(P).Ze \quad (9.60)$$

Or on montre facilement que :

$$\mathbf{E}_{\text{sphère}} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\mathbf{e}_r = \frac{-Zer}{4\pi a^3\epsilon_0}\mathbf{e}_r = \frac{-Ze\mathbf{NP}}{4\pi a^3\epsilon_0} \quad (9.61)$$

Et donc :

$$\mathbf{F}_{P/N} = -\mathbf{F}_{N/P} = \frac{(Ze)^2\mathbf{NP}}{4\pi a^3\epsilon_0} = \frac{-(Ze)^2\mathbf{PN}}{4\pi a^3\epsilon_0} \quad (9.62)$$

Donc le PFD s'écrit alors :

$$Zm_e\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Z^2e^2}{4\pi a^3\epsilon_0}\mathbf{r} - Ze\mathbf{E}_{\text{ext}} - \frac{Zm_e}{\tau}\dot{\mathbf{r}} \quad (9.63)$$

Si on introduit alors le moment dipolaire  $\mathbf{P} = -Ze\mathbf{r} = -Ze\mathbf{NP}$  alors :

$$\ddot{\mathbf{P}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m_e}\mathbf{P} - \frac{Ze^2}{m_e}\mathbf{E}_{\text{ext}}(t) + \frac{\dot{\mathbf{P}}}{\tau} \quad (9.64)$$

On peut alors distinguer deux cas :

- Si on prend un champ électrique constant  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$  et qu'on prend  $\mathbf{P} = \epsilon_0\alpha_0\mathbf{E}_0$ , où  $\alpha_0 \simeq 4\pi a^3$  qui est à peu près le volume de la sphère. Si à  $t = 0$  on coupe le champ alors l'équation de la forme :

$$\frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \omega_0^2\mathbf{P} = 0 \quad \omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m_e} \quad (9.65)$$

Et on a l'équation différentielle de relaxation de la polarisation et on voit apparaître  $\tau$  comme le temps de relaxation.

- Si maintenant on se place en notation complexe pour voir la réponse en fréquence du système :

$$-\mathbf{P}_\omega \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} \mathbf{P}_\omega + \omega_0^2 \mathbf{P}_\omega = \frac{Ze^2}{m_e} \mathbf{E}_\omega \quad (9.66)$$

Et donc :

$$\mathbf{P}_\omega = \frac{\frac{Ze^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}} \mathbf{E}_\omega \quad (9.67)$$

Puis pour remonter à  $\mathbf{P}(t)$  on peut effectuer la TF inverse. On peut alors poser :

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i\frac{\omega}{\tau\omega_0^2}} \quad \alpha_0 = \frac{Ze^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2} \quad (9.68)$$

Et on obtient la polarisabilité du matériau en fonction de la fréquence et on peut tracer son module sur la FIGURE 9.1 qui a un comportement compliqué avec une résonance :

$$|\alpha(\omega)| = \frac{\alpha_0}{\left[ \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]^{1/2}} \quad \tan \Phi = \frac{\frac{1}{Q^2} \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \quad (9.69)$$

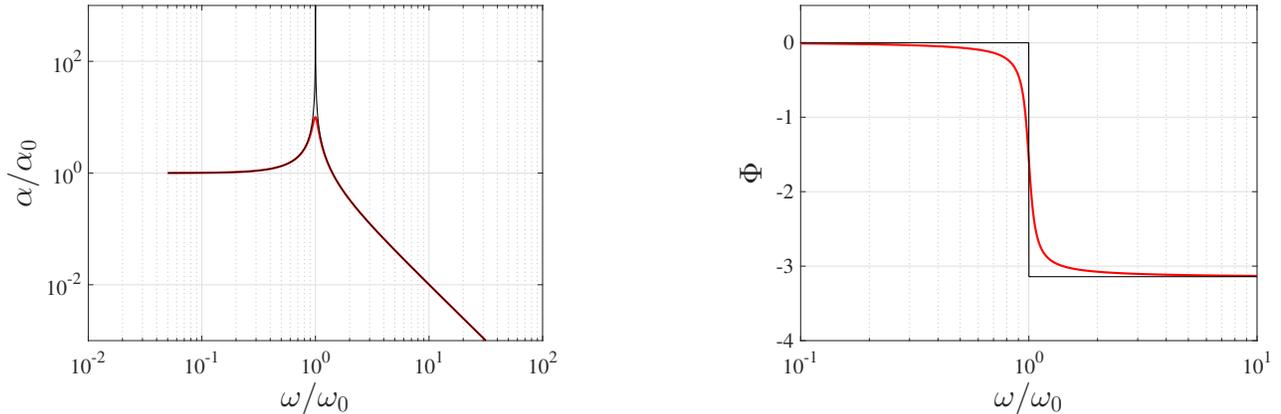


FIGURE 9.1 – Variation du module et de la phase de la polarisabilité normalisée  $\frac{\alpha}{\alpha_0}$  en fonction de la pulsation normalisée  $\frac{\omega}{\omega_0}$ . La courbe rouge correspond à un  $Q = 10$  et la courbe noire à  $Q = 10^6$ .

On peut alors distinguer 3 régimes particuliers :

- **Régime de Rayleigh** ( $\omega \ll \omega_0$ ) : Dans ce cas là : on trouve :

$$|\alpha(\omega)| \simeq \alpha_0 \left( 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) \right) \quad \Phi = 0 \quad (9.70)$$

Lorsque les fréquences d'excitation sont faibles devant la fréquence propre de vibration de l'atome, le dipôle généré voit son amplitude contrôlée majoritairement par la susceptibilité statique et celui-ci oscille en phase avec le champ inducteur.

- **Régime de résonance** ( $\omega \simeq \omega_0$ ) : La résonance a lieu lorsque  $|\alpha(\omega)|$  est maximum c'est à dire pour :

$$\omega = \omega_r = \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{2Q^2} \right) \quad (9.71)$$

Or en pratique le facteur de qualité de l'oscillateur est très grand ( $10^8$  pour le césium par exemple) et la fréquence de résonance s'identifie à la fréquence propre de vibration du nuage électronique. Dans le régime de résonance on a alors :

$$|\alpha(\omega)| \simeq \frac{\alpha_0 Q}{\left[1 + 4Q^2 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2\right]^{1/2}} \quad \Phi = -\frac{\pi}{2} \quad (9.72)$$

On remarque alors que pour  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ , la polarisabilité de l'atome évolue de façon lorentzienne.

- **Régime de Thomson** ( $\omega \gg \omega_0$ )

$$|\alpha(\omega)| \simeq \alpha_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right) \quad \Phi = -\pi \quad (9.73)$$

Lorsque les fréquences d'excitation sont beaucoup plus grandes que la fréquence propre de vibration de l'atome alors l'amplitude du dipôle induit décroît proportionnellement au carré de la pulsation. Le dipôle induit est alors en opposition de phase avec le champ inducteur.

On peut maintenant calculer la puissance totale rayonnée par un dipôle :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{\omega^4 |E_\omega|^2 |\alpha(\omega)|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (9.74)$$

Dans l'expérience abordée en début de chapitre, le champ électrique employé appartient au domaine visible  $\omega \simeq 10^{14}$  rad.s<sup>-1</sup> et les particules qui vont se polariser sous l'action du champ électrique sont des molécules lipidiques du lait. Si la quantité de lait introduite dans l'eau est faible alors ces molécules ne se regroupent pas sous forme de micelles géantes et leurs tailles restent petites devant les longueurs du spectre visible. On a alors  $\omega_0 \simeq 10^{16}$  rad.s<sup>-1</sup> et nous sommes dans le cas  $\omega \ll \omega_0$ . La puissance rayonnée devient alors :

$$\mathcal{P}_{\text{rayRayleigh}} = \frac{\omega^4 |E_\omega|^2 \alpha_0^2}{12\pi c^3 \epsilon_0} \quad (9.75)$$

La puissance rayonnée par les dipôles, proportionnelle à  $\omega^4$ , est donc d'autant plus importante que la fréquence est élevée. Le rayonnement bleuté observé vient précisément de cela : les dipôles absorbent une partie du rayonnement incident et le réémettent sous forme de rayonnement dipolaire et dans tout l'espace. C'est pour les pulsations les plus importantes (correspondant au bleu) que ce phénomène est le plus important. Le faisceau de lumière blanche initial va donc au cours de son parcours dans la cuve, s'appauvrir petit à petit en rayonnement haute fréquence. Tout ceci est bien entendu à relier avec la couleur bleue du ciel ainsi que la couleur rouge du coucher de soleil. On peut également remarquer que la lumière diffusée est polarisée et ici encore les caractéristiques du rayonnement dipolaire permettent d'expliquer cette propriété : la lumière émise initialement est non polarisée et le champ électrique oscillateur est transverse. Si la direction de propagation est selon l'axe  $z$  alors des moments dipolaires sont excités de façon équiprobable selon la direction  $x$  ou  $y$ . Si la direction d'observation se fait selon l'axe  $x$  alors aucune puissance des dipôles ne nous parvient des dipôles excités suivant cette direction et donc le champ électrique reçu par l'observateur ne provient que des dipôles polarisés selon l'axe  $y$  qui émettent un champ électrique polarisé suivant cette direction : on a donc bien polarisation de la lumière.

### 9.5.3 Auto-consistance du modèle

On a pris comme force de dissipation une force proportionnelle à la vitesse des électrons. Est-ce que ceci est bien consistant avec la puissance rayonnée ?

A priori non car pour une excitation sinusoïdale on a la puissance mécanique dissipée en  $\omega^2$  alors que la puissance rayonnée par un dipôle est en  $\omega^4$ . On peut alors considérer deux situations physiques simples :

1. Le cas d'une charge uniformément accéléré. On peut alors comparer l'énergie mécanique de la particule à l'énergie rayonnée pendant un temps  $T$  :

$$E_{\text{ciné}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(aT)^2 \quad (9.76)$$

$$E_{\text{ray}} = \frac{q^2 a^2 T}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\tau_c}{T} E_{\text{ciné}} \quad \tau_c = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m} \simeq 10^{-14} \text{ s} \quad (9.77)$$

Si l'accélération est constante sur un temps  $T \gg \tau_c$  alors l'énergie rayonnée est une faible quantité d'énergie cinétique.

2. Sur un mouvement périodique de la forme :

$$d = d_0 \cos \omega_0 t \quad (9.78)$$

On a alors comme  $T = 2\pi/\omega_0$  :

$$E_{\text{méca}} = m\omega_0^2 d^2 \quad E_{\text{ray}} = \frac{q^2 d_0^2 \omega_0^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{2\pi}{\omega_0} \simeq E_{\text{méca}} \frac{\tau}{T} \quad (9.79)$$

Ainsi pour des systèmes usuels, on a que le rayonnement est une faible perturbation.

On peut prouver que à faible perturbation la forme qu'on a prise est la bonne au premier ordre.