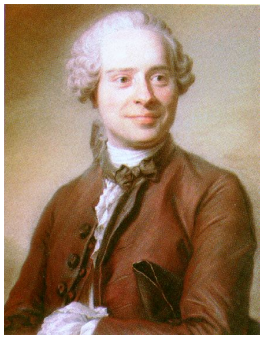
Partie A : Ondes

Chapitre A1 : Oscillateurs couplés



Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783)

PARTIE A : ONDES

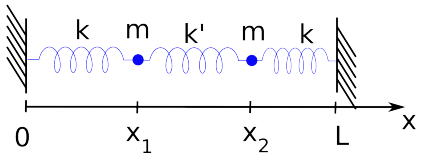
A-1 : Oscillateurs couplés
A-2 : Equation de d'Alembert
A-3 : Exemples d'ondes
A-4 : Effet Doppler-Fizeau
A-5 : Compléments

Modes propres d'une corde

I Modes propes d'un système d'oscillateurs couplés

1 Exemple système Masse-ressort

1. Bilan des forces
2. Relation fondamentale de la dynamique
3. Etude de l'équilibre



Savoir démontrer №1 : Equations couplées

Soit $\Psi_1 = x_1 - x_{1\text{eq}}$ et $\Psi_2 = x_2 - x_{2\text{eq}}$.
on obtient les équations suivantes :

$$m\ddot{\Psi}_1 = -k\Psi_1 + k'(\Psi_2 - \Psi_1)$$

$$m\ddot{\Psi}_2 = -k\Psi_2 - k'(\Psi_2 - \Psi_1)$$

On pose

$$u = \Psi_1 + \Psi_2 \text{ et } v = \Psi_1 - \Psi_2$$

On trouve

$$\boxed{\ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0 \text{ et } \ddot{v} + \frac{k+2k'}{m}v = 0}$$

Savoir démontrer №2 : Solution

On pose $\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_a = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$. La solution générale du problème se met donc sous la forme :

$$\Psi = A_a \cos(\omega_a t + \varphi_a) + A_s \cos(\omega_s t + \varphi_s)$$

2 Modes propres

DÉFINITION :

- ✗ On appelle **modes propres** les états de vibration d'un système tels que ces modes soient **harmoniques**, c'est à dire des fonctions sinusoïdales du temps. Cette définition est extrêmement générale et s'applique à tout système linéaire à N degrés de libertés.
- ✗ Les pulsations associées aux modes propres sont appellées **pulsations propres**.
- ✗ N oscillateurs couplés comportent N modes propres.
- ✗ Un mode dans lequel , $\forall n, \Psi_n$ sont en phase est appellé mode **symétrique**.
- ✗ Un mode dans lequel , $\forall n, \Psi_n$ est en opposition de phase avec Ψ_{n+1} est appellé mode **anti-symétrique**.
- ✗ Dans cet exemple, u et u sont les **variables découplées** ou coordonnées normales.

Application 1 : Modes propres

Dans l'exemple précédent, le mode propre symétrique correspond à $v = 0$, soit $\Phi_1 = \Phi_2$ à la pulsation $\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
On peut obtenir ce mode avec les conditions initiales

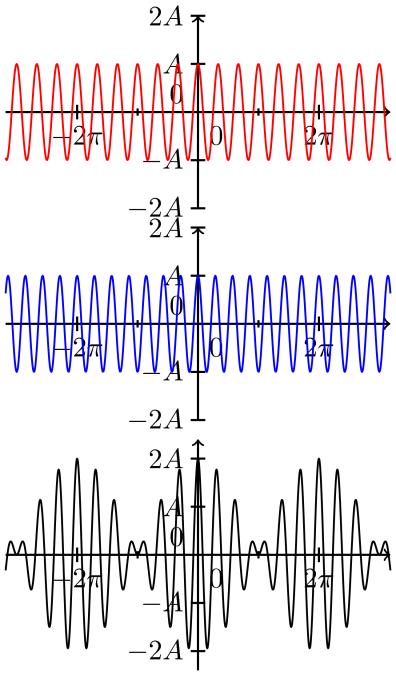
$$x_1(0) = x_2(0) = a \text{ et } v_1(0) = v_2(0) = 0$$

Le mode anti-symétrique correspond à $u = 0$, soit $\Phi_1 = -\Phi_2$ à la pulsation $\omega_a = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$
On peut obtenir ce mode avec les conditions initiales

$$x_1(0) = -x_2(0) = a \text{ et } v_1(0) = v_2(0) = 0$$

On vérifie $\omega_a > \omega_s$

Les courbes suivantes montrent le système excité dans le mode symétrique, puis anti-symétrique puis quelconque.



Application 2 : Spectre

Le spectre du signal présente toujours deux pics aux fréquences ω_s et ω_a.

3 Autres méthodes pour déterminer les modes propres

Savoir démontrer №3 : Méthode du déterminant

On cherche une solution harmonique aux équations du mouvement, soit :

$$\Psi_1 = A_1 e^{i\omega t} \qquad \Psi_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

On trouve donc un système d'équations en ω qui n'admet des solutions non triviales uniquement si son **déterminant est nul.**
On trouve donc

$$\left(-m\omega^2 + k + k'\right)\left(-m\omega^2 + k + k'\right) = k'^2$$

On trouve les deux pulsations ω_a et ω_s.

Savoir démontrer №4 : Formalisme matriciel

Pour la détermination des pulsations propres et des modes propres, on peut utiliser le formalisme matriciel :
On pose

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

le système d'équation peut donc s'écrire sous la forme :

$$\omega^2 \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k+k'}{m} & -\frac{k'}{m} \\ -\frac{k'}{m} & \frac{k+k'}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

Il reste à diagonaliser cette matrice.

4 Battements

Définition :

✗ **Le battement** est une interférence (addition) entre deux amplitudes de fréquences légèrement différentes, laissant percevoir une modulation de l'amplitude.
✗ La période des battements est la durée qui sépare deux annulations consécutives de l'enveloppe du signal.

Savoir démontrer №5 : Battements

Pour deux signaux $\Psi_1 = A\cos(\omega_1 t)$ et $\Psi_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$, la somme de ces deux signaux est :

$$\Psi_1 + \Psi_2 = 2A\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)\,t+\varphi}{2}\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)\,t-\varphi}{2}$$

On a donc une pulsation de battement égale à $(\omega_1 - \omega_2)$.

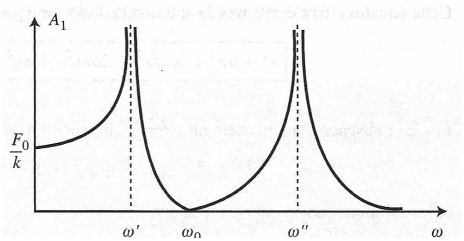
5 Régime sinusoïdal forcé

Application 3 : Exercice

La paroi de gauche a un mouvement $\xi = \xi_0\cos(\omega t)$
On trouve alors :

$$\underline{u} = \frac{\omega_s^2\xi_0}{(\omega_s^2-\omega^2)} \text{ et } \underline{v} = \frac{\omega_s^2\xi_0}{(\omega_a^2-\omega^2)}$$

La courbe $\psi_1(\omega)$ présente deux maxima à ω_s et ω_a.

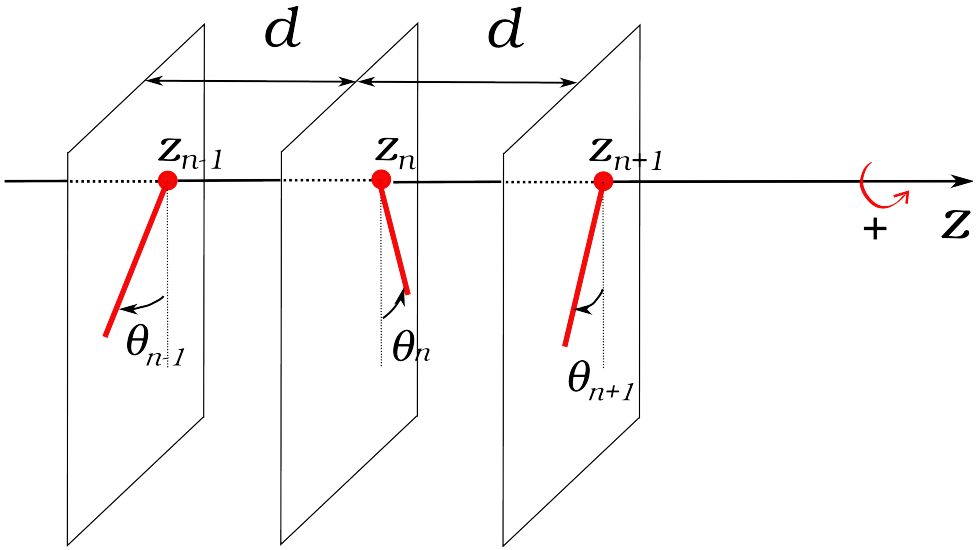


En régime sinusoïdal forcé, **les fréquences de résonance** correspondent aux **modes propres** des oscillateurs libres.

Propriété à connaître

II Exemples d'oscillateurs couplés

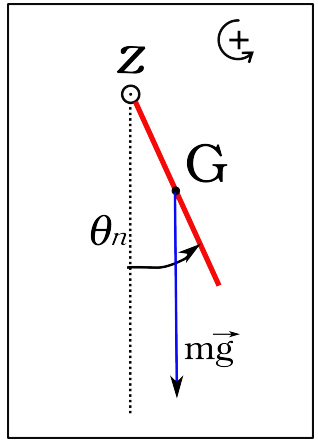
1 Pendules couplés



✗ On considère n pendules de torsion couplés, distants de d : $z_n = nd$. Soit ℓ la longueur des pendules.
✗ Chaque pendule est une barre pesante de masse m, de centre de gravité G et de moment d'inertie J par rapport à l'axe (Oz)
✗ On note C la raideur des fils de torsion tel que le couple de rappel élastique du pendule $n+1$ sur le pendule n est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{n+1\to n} = C\,(\theta_{n+1}-\theta_n)\,\overrightarrow{u}_z$$

✗ On tient compte d'un moment de frottement $\overrightarrow{\mathcal{M}_n} = -\alpha\dot{\theta}_n\overrightarrow{u}_z$. α dépend des caractéristiques de la barre.
✗ α est le coefficient de frottement et C est la constante de torsion.
✗ On suppose que le poids est appliqué au centre de gravité de la barre G.



Savoir démontrer №6 : Théorème du moment cinétique

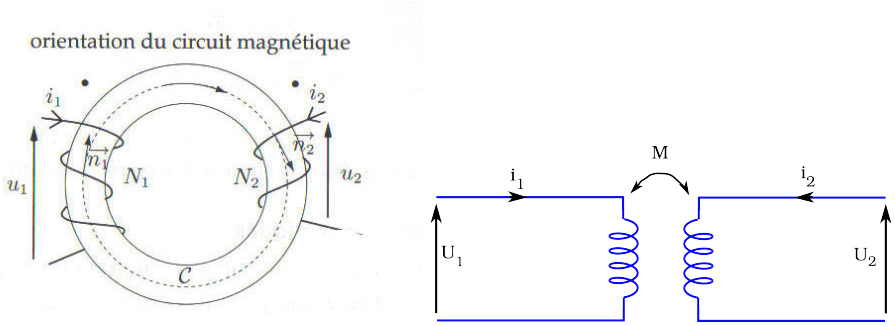
On applique le TMC sur le pendule n situé en $z_n = nd$, on trouve

$$J\frac{\partial^2\theta_n}{\partial t^2} = C\left(\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}\right) - \frac{1}{2}mg\ell\sin\theta_n - \alpha\dot{\theta}_n$$

2 Couplage par mutuelle

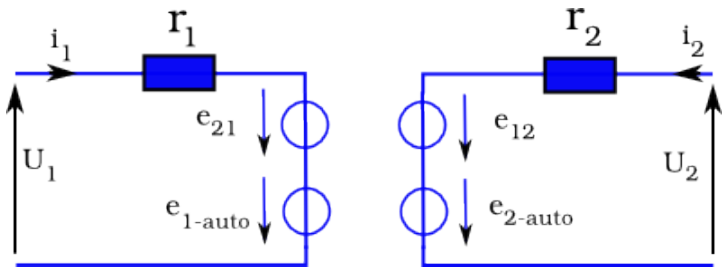
En convention récepteur , les tensions u_1 et u_2 s'écrivent

$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \text{ et } u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$



✗ Le point indique que le fil sort par le dessus de l'enroulement.
✗ Fonctionnement uniquement en régime sinusoïdal.

2.a Equations électriques de deux circuits couplés



Savoir démontrer №7 : Equations couplées

On a les deux équations couplées :

$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + r_1 i_1$$

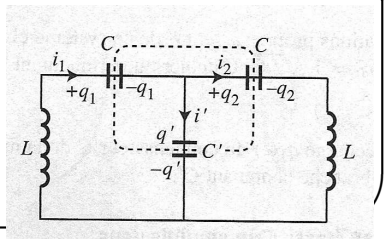
$$u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + r_2 i_2$$

3 Couplage capacitif

Application 4 : Conservation de la charge

Pour le système suivant, à $t = 0$, le condensateur 1 porte la charge q_{10}.
Les deux bobines sont couplées par les capacités.
On montre que

$$-q_1 + q' + q_2 = -q_{10}$$



Chapitre A2 : Equation de d'Alembert

Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783)

Partie A : Ondes
A-1 : Oscillateurs couplés
A-2 : Equation de d'Alembert
A-3 : Exemples d'ondes
A-4 : Effet Doppler-Fizeau
A-5 : Compléments

Modes propres d'une corde

I Notion d'onde

Définition :

On appelle **onde** le phénomène de propagation d'une grandeur physique (ou champ) qu'on dénomme plus généralement **vibration**.

✗ variation dans le temps
✗ variation dans l'espace

Exemples :

phénomène	champ(s) vibratoire(s) associé(s)
vagues	hauteur d'eau, vitesse
ondes sonores	surpression, vitesse
ondes électromagnétiques	champ $\vec{E}$, champ $\vec{B}$
ola	hauteur de personnes

⚠ Attention... La variations des champs sont locales et non globales.

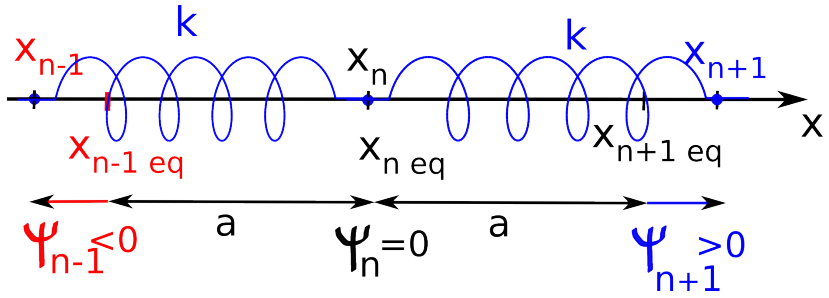
Ainsi, le son se déplace dans l'air à 330 m.s^{-1} mais l'air est globalement immobile... sinon, c'est du vent à 330 m.s^{-1} (soit 1200 km.h^{-1}) !!

Définitions :

onde transversale : si la vibration évolue orthogonalement à la direction de propagation de l'onde.
onde longitudinale : si la vibration évolue suivant la direction de propagation de l'onde.
onde de torsion : si la vibration évolue en rotation autour de la direction de propagation de l'onde.

II Equation de d'Alembert pour une chaine de masses-ressorts

1 Chaine infinie d'oscillateurs



1.a Mise en équation

Savoir démontrer №1 : Oscillateurs couplés

On trouve l'équation

$$\ddot{\Psi}_n = \omega_s^2 \left(\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}\right)$$

1.b Relation de dispersion

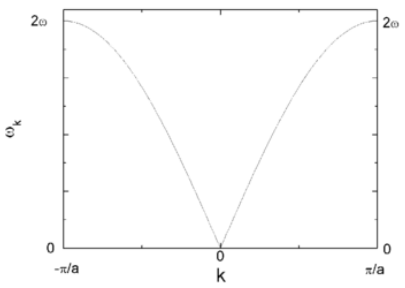
Savoir démontrer №2 : Solution en ondes planes

On recherche une solution à l'équation ci-dessus de la forme

$$\Psi(x = na, t) = A \exp j\,(\alpha na - \omega t)$$

Montrer que l'on trouve la **relation de dispersion**

$$\boxed{\omega^2 = 4\omega_s^2 \sin^2 \frac{\alpha a}{2}}$$



Savoir démontrer №3 : Longueur d'onde minimale

Pour une valeur de ω, on doit obtenir uniquement deux valeurs pour α : $\alpha\,(\omega)$ et $-\alpha\,(\omega)$.
On en déduit que

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$$

On trouve que la longueur d'onde doit être supérieure à la valeur minimale de $2a$.

$$\boxed{\lambda \geq 2a \Leftrightarrow |\alpha| \leq \frac{\pi}{a}}$$

1.c Approximation des régimes continus

Définition :

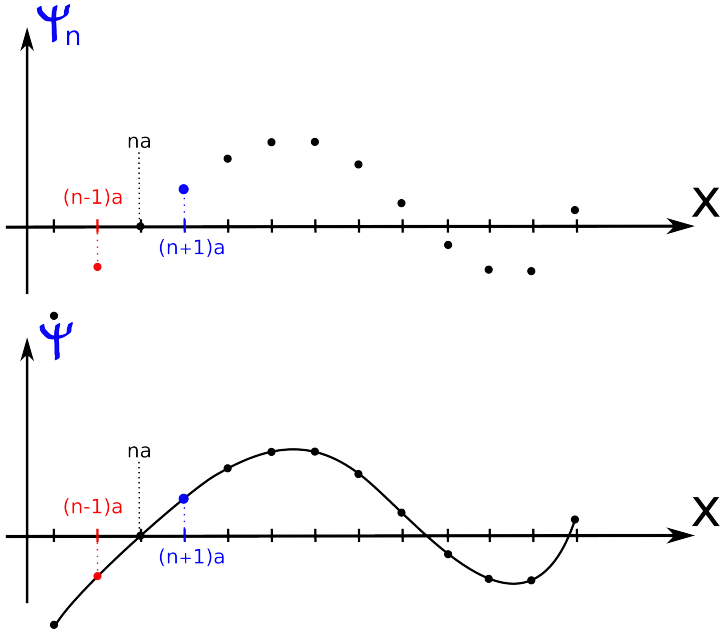
On dit que l'on se place dans l'approximation des **régimes quasi-continu** lorsque la longueur d'onde λ de phénomène propagatif étudié est très grande devant la distance entre deux oscillateurs.

Définition :

A.R. Continus $\Longrightarrow \boxed{\lambda \gg a}$

Soit $\Psi(x,t)$, une fonction C_2 telle que

$$\forall n, \Psi(na) = \Psi_n$$



Savoir démontrer №4 : Equation de d'Alembert

On peut utiliser un développement de Taylor de la fonction $\psi(x,t)$:

$$\Psi((n-1)a) = \Psi(na) - a\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{na} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)_{na}$$

$$\Psi((n+1)a) = \Psi(na) + a\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{na} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)_{na}$$

On trouve l'équation de d'Alembert

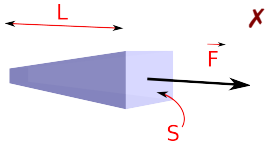
$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0} \text{ avec } c = a\omega_s$$

⚠ Attention...

On peut également retrouver l'équation de d'Alembert à partir d'un DL de l'équation $\omega^2 = 4\omega_s^2 \sin^2\frac{ka}{2}$

1.d Généralisation à trois dimensions

Module d'Young



✗ Lorsqu'un solide de longueur ℓ, de surface S subit une force $\vec{F}$, suivant cette direction, il subit une élongation $\Delta\ell$ qui vérifie :

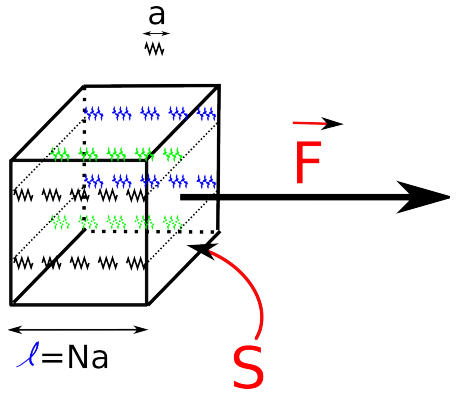
$$\boxed{\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{F}{ES}}$$

où E est le module d'Young du solide.

✗ E est homogène à une pression

✗ La formule n'est valable que dans le domaine d'élasticité du matériau.

Corps	Module d'Young
Plomb	18.10^9 Pa
Béton	30.10^9 Pa
Granite	60.10^9 Pa
Aluminium	69.10^9 Pa
Verre	70.10^9 Pa
Cuivre	124.10^9 Pa
Acier -Inox	203.10^9 Pa
Saphir	420.10^9 Pa



Application 1 : Evaluation du module d'Young

✗ On note a la distance moyenne entre atomes et $\ell = Na$ le coté du cube.

✗ Le nombre d'atomes sur la surface S est $N' = \frac{S}{a^2}$.

✗ La force sur un atome est $\vec{f} = k\Delta a$; la force sur la surface S est $\vec{F} = N'f = \frac{Sk\Delta a}{a^2}$

✗ $\ell = Na$, donc $\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\Delta a}{a}$

✗ Finalement

$$E = \frac{k}{a}$$

✗ On en déduit

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}}$$

Savoir démontrer №5 : Expression de la force sur une barre

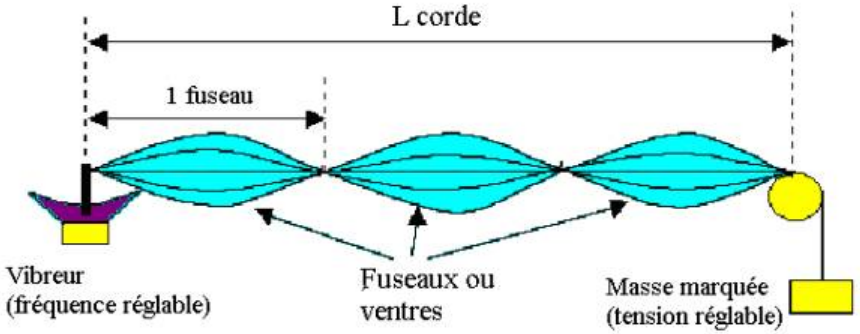
La matière située au repos dans le plan d'abscisse x se met en mouvement suite à une excitation. Elle occupe à l'instant t le plan d'abscisse $x + \xi(x,t)$ et est soumise, de la part de la matière située à sa droite, à une force $\vec{F} = F(x,t)\vec{u}_x$. On note μ la masse volumique et E le module d'Young du matériau dont on rappelle la définition : pour porter de ℓ_0 à $\ell_0 + \delta\ell$ la longueur d'une tige de section S , il faut exercer sur ses extrémités une force égale à $\frac{ES\delta\ell}{\ell_0}$.
On montre que

$$\boxed{F(x,t) = ES\frac{\partial\xi}{\partial x}}$$

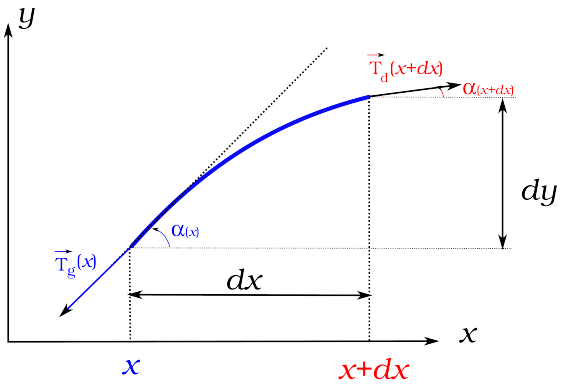
Application 2 : Centrale PC - 2010

1. Exprimer $F(x,t)$ en fonction d'une dérivée partielle de $\xi(x,t)$.
2. Montrer que $\xi(x,t)$ obéit à l'équation de d'Alembert et exprimer la célérité c des ondes longitudinales.

III Etude de la corde vibrante



1 Hypothèses



Système : tranche de corde de longueur dx, de masse linéique μ supposée homogène, dans $\mathcal{R}_{\text{terrestre}}$ supposé galiléen.

Voici les hypothèses d'étude :

1. La corde sans raideur = elle peut se déformer avec une contrainte infinitésimale et $\vec{T}$ est tangent à la corde en tout point.
2. On néglige le poids de la corde.
3. Chaque point M de la corde a un déplacement vertical uniquement. On note $y(x,t)$ le déplacement d'un point M de la corde d'abscisse x à l'instant t.
4. Ce déplacement est une perturbation par rapport à l'état de repos de la corde de sorte que les angles $\alpha(x,t)$ que fait la corde avec l'horizontale sont faibles : $\alpha(x,t) \ll 1$. On remarque que

$$\boxed{\sin\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \alpha \simeq \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

et on prendra $\cos\alpha \simeq 1$

5. Soit T_0 la tension de la corde au repos. On suppose que $T(x,t) = \left\|\vec{T}(x,t)\right\|$ est très proche de T_0, c'est-à-dire

$$(T(x,t) - T_0) \ll T_0$$

2 Equation de propagation

Savoir démontrer №6 : D'Alembert pour la corde vibrante

✗ La projection sur l'axe (Ox), de la RFD donne

$$\boxed{T(x,t) = \left\|\vec{T}(x,t)\right\| = \text{cte}}$$

✗ La projection sur l'axe (Oy) permet d'obtenir l'équation de propagation

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0} \text{ avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

3 Conditions aux limites

✗ **Obstacle fixe en $x = a$**

$$\boxed{\forall t,\ y(a,t) = 0}$$

✗ **Extrémité libre en $x = a$** , la corde est libre donc

$$\boxed{\rightarrow \forall t,\ \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{a,t} = 0}$$

✗ **Changement de milieu en $x = a$** passage d'un milieu de célérité c_1 à un milieu de célérité c_2.
On a la continuité de y :

$$\boxed{y_1(a^-) = y_2\left(a^+\right)}$$

RFD sur une tranche de taille dx, de masse nulle

$$\boxed{T_1 = T_2} \text{ et } \boxed{\left.\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{a,t}}$$

IV Solutions de l'équation de d'Alembert

1 Equation de d'Alembert

Définition :

On appelle **équation d'onde de d'Alembert** (1747) l'expression

$$\boxed{\triangle\Psi(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0}$$

où $\Psi(M,t)$ est un champ scalaire (ou vectoriel) décrivant l'onde et c est une constante.

Propriétés à connaître

① L'équation de d'Alembert est **linéaire** donc le théorème de superposition est applicable.
② Cette équation est renversable dans le temps : en effectuant le changement de variable $t \mapsto -t$

$$\Rightarrow \triangle\Psi(M,t) - \frac{1}{c^2}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\Psi}{\partial t}t\right)\right) = 0$$

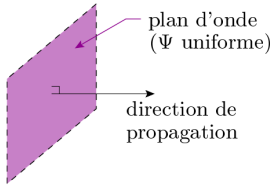
$$\Leftrightarrow \triangle\Psi(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

2 Solution en ondes progressives

2.a Ondes planes

Définitions :

Une onde est dite **plane** si, pour tout instant, le champ scalaire (ou vectoriel) $\Psi(M,t)$ caractérisant l'onde qui se propage est **le même en tout point de chaque plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde**.
Ces plans sont appelés **plans d'onde**.



Ainsi on peut toujours choisir un axe **cartésien** (Ox), axe de propagation de l'onde et écrire le champ $\Psi(x,y,z,t)$ sous la forme réduite $\Psi(x,t)$.

2.b Solutions de type ondes planes progressives (opp)

Savoir démontrer №7 : Solution en ondes planes progressives

En effectuant le changement de variable suivant

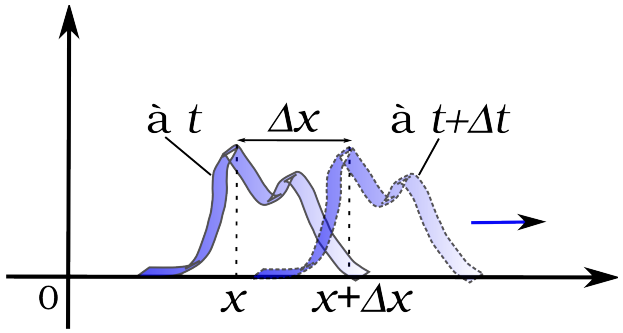
$$u = x - ct \text{ et } v = x + ct$$

on montre que l'équation de d'Alembert devient :

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial u \partial v} = 0$$

Cette équation présente une solution générale **superposition de deux ondes planes progressives** f et g

$$\boxed{\Psi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)}$$



Propriétés à connaître

Une onde de la forme $\Psi(x,t) = f(x-ct)$ est une onde plane **progressive**, c'est-à-dire qu'elle représente la propagation **sans déformation** d'un signal à la **célérité** c dans le sens des x **croissants**.
De même, $\Psi(x,t) = g(x+ct)$ est une onde plane **progressive** mais se propageant dans le sens des x **décroissants**.

2.c Onde plane progressive harmonique opph (ou monochromatique oppm)

— Notation réelle

DÉFINITION :

On appelle **onde plane progressive monochromatique (ou harmonique)** :

$$\boxed{\Psi_{\text{oppm}}(x,t) = \Psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)}$$

où Ψ_0 est l'amplitude (constante)
ω est la **pulsation** et $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u}_x$ le **vecteur d'onde** de l'onde.

	Temporel	Spatial	Relation dans le vide	Relation mil. indice n
Période	T	λ	$\lambda_0 = cT$	$\lambda = \frac{cT}{n}$
Fréquence	$\nu = \frac{1}{T}$	$\sigma = \frac{1}{\lambda}$	$\sigma_0 = \frac{\nu}{c}$	$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu n}{c}$
Pulsation	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	$\omega = kc$	$\omega = kc$

— Notation complexe pour les OPPH

On appelle **onde plane progressive monochromatique (ou harmonique)** :

$$\Psi_{\text{oppm}}(x,t) = \mathcal{R}e[\underline{\Psi}_{\text{oppm}}(x,t)]$$

avec

$$\boxed{\underline{\Psi}_{\text{oppm}}(x,t) = \underline{\Psi}_0 \exp[j(\omega t - kx)]}$$

Savoir démontrer №8 : Notation complexe

On a en notation complexe :

$$\frac{\partial \underline{a}}{\partial t} = j\omega \underline{a} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} = j\omega}$$

De même pour la dérivation par rapport à x :

$$\frac{\partial \underline{a}}{\partial x} = -jk\underline{a} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x} = -jk}$$

En remplaçant dans l'équation de D'ALEMBERT, on trouve la **relation de dispersion**

$$\boxed{\omega = kc}$$

2.d Surface d'onde

DÉFINITION :

✗ La phase instantanée d'une OPPH est

$$\Phi(M,t) = \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} - \omega t + \varphi$$

✗ On appelle surface d'onde, Σ, le lieu des points de l'espace tels que à une date t_0 fixée, la phase est constante :

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \Phi(M,t_0) = \Phi_0$$

✗ On appelle **onde plane** une onde dont les **surfaces d'onde sont des plans** et dont **l'amplitude est uniforme** dans ce plan.
✗ La vitesse de phase d'une onde est par définition

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

3 Ondes stationnaires

3.a Superposition de deux ondes progressives

Savoir démontrer №9 : L

a somme de deux OPPH de même amplitude se propageant dans la même direction mais avec des sens opposés est une onde stationnaire.

3.b Définitions

Savoir démontrer №10 : Solutions en ondes stationnaires

On peut également rechercher une solution à l'équation de D'Alembert, sous la forme

$$\Psi(x,t) = f(x)g(t)$$

On obtient alors

$$\boxed{\Psi(x,t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_t)\cos(kx + \varphi_x)}$$

C'est une solution en **ondes stationnaires**.

Définition :

On appelle **ventres** (resp. **nœuds**) de vibration les points où l'amplitude de l'onde est **maximale** (resp. **nulle**) à **tout instant**.

La distance entre un nœud et un ventre consécutifs est un quart de longueur d'onde ($\frac{\lambda}{4}$).
La distance entre deux ventres (ou nœuds) consécutifs est une demi longueur d'onde ($\frac{\lambda}{2}$).

Propriétés à connaître

3.c Propriétés

Application 3 : Modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités

✗ On impose pour tout t, en

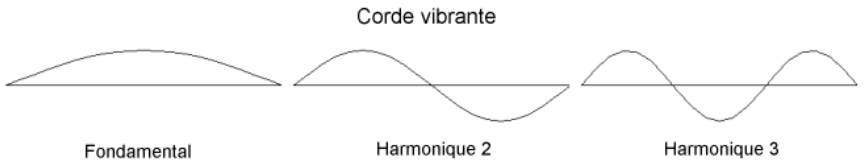
$$x = 0\ ,\ y(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad x = L\ ,\ y(L,t) = 0$$

✗ On a donc

$$\boxed{L = n\frac{\lambda}{2}}$$

✗ Tous les éléments de la corde vibrent en phase ou en opposition = modes propres.
✗ On identifie les noeuds et le ventres.
✗ On trouve alors

$$y_n(x,t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

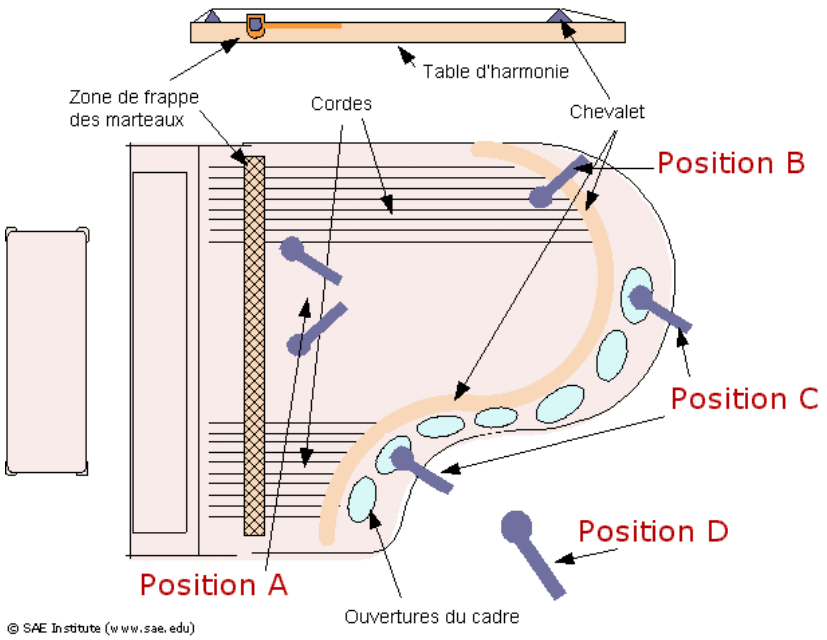


Savoir démontrer №11 : Solution générale

✗ Une solution générale de l'équation de D'ALEMBERT est alors une superposition de modes propres :

$$y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

✗ Les coefficients A_n et φ_n sont obtenus par décomposition en série de FOURIER de la condition initiale.



4 Oscillations forcées, resonance

Application 4 : Résonance

✗ On impose pour tout t, en

$$x = 0\ ,\quad y(0,t) = a\cos(\omega t)$$

et

$$x = L\ ,\ y(L,t) = 0$$

✗ On trouve alors

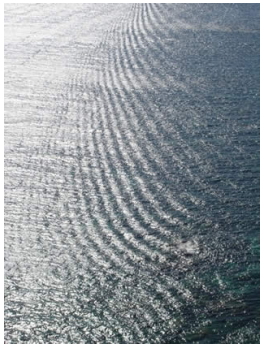
$$y(x,t) = a\cos(\omega t)\,\frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)}$$

✗ On observe la résonance, lorsque l'amplitude est maximale, donc $kL = n\pi$, soit

$$\boxed{\omega = \frac{n\pi c}{L}}$$

Chapitre A3 : Exemples d'ondes

Vagues

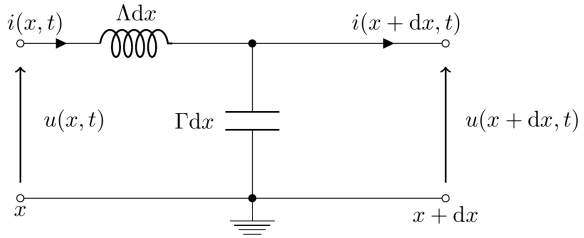


Ondes sur la mer

PARTIE A : ONDES
A-1 : Oscillateurs couplés
A-2 : Equation de d'Alembert
A-3 : Exemples d'ondes
A-4 : Effet Doppler-Fizeau
A-5 : Compléments

I Ondes électriques dans un cable coaxial

1 Modèle de la ligne à constante répartie



2 Equations électriques couplées

Savoir démontrer №1 : Equations couplées

On trouve les équations suivantes :

$$\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}$$

Savoir démontrer №2 : Equation des télégraphistes

En rassemblant les deux équations on trouve les équations de propagation pour u et i :

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

3 Impédance caractéristique de la ligne

Savoir démontrer №3 : Impédance

On recherche des solutions aux équations en OPPH, on cherche Z_c tel que

$$\boxed{v(x,t) = Z_c i(x,t)}$$

On trouve

$$\boxed{Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}}$$

Application 1 : Signe

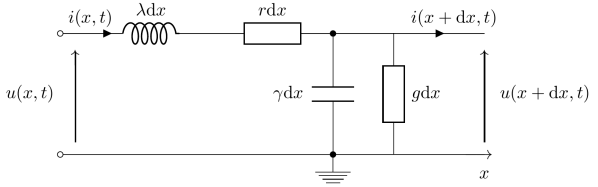
Pour un courant i se propageant suivant les x croissants, on trouve

$$i \text{ suivant } \vec{u}_x \rightarrow u = Z_c i$$

Pour un courant i se propageant suivant les x décroissants, on trouve

$$i \text{ suivant } -\vec{u}_x \rightarrow u = -Z_c i$$

4 Pertes résistives



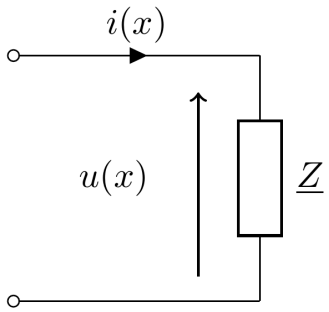
Savoir démontrer №4 : Relation de dispersion

On obtient la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - rg + j\left(\lambda\omega g + r\omega\gamma\right)$$

5 Réflexion des ondes

On termine la ligne par une impédance $\underline{Z}$ suivant le montage suivant. :



5.a Continuité

Soit $i(x,t) = i_i + i_r$ la somme du courant incident et du courant réfléchi.
Soit $u(x,t) = u_i + u_r$ la somme de la tension incidente et de la tension réfléchie.
On peut donner la relation entre u et i :

$$u(t) = \underline{Z}i(t)$$

Cette équation devient :

$$u = Z_c\left(i_i - i_r\right) = \underline{Z}(i_i + i_r)$$

5.b Coefficients de reflexion et transmission

Savoir démontrer №5 : Coefficients de réflexion en courant et intensité

Le coefficient de réflexion en intensité est r_i, tel que

$$\boxed{r_i = \frac{i_r}{i_i} = \frac{Z_c - \underline{Z}}{Z_c + \underline{Z}}}$$

Le coefficient de réflexion en tension est r_u, tel que

$$\boxed{r_u = \frac{u_r}{u_i} = \frac{\underline{Z} - Z_c}{Z_c + \underline{Z}}}$$

6 Coefficients de réflexion en puissance

On peut définir la puissance instantannée $\mathcal{P} = u(t)i(t)$.
On évalue cette grandeur avec la notation complexe.
Si on recherche la valeur moyenne de la puissance, alors

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\underline{u}\bar{\underline{i}}\right)$$

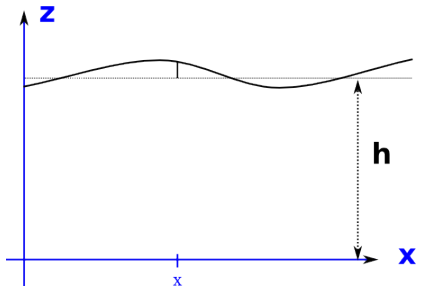
En conclusion

$$R = \frac{\langle\mathcal{P}_r\rangle}{\langle\mathcal{P}_i\rangle} = |r|^2$$

II Ondes à la surface de l'eau

1 Hypothèses

- ✗ Soit L, la largeur du bassin suivant $\overrightarrow{u}_y$, le bassin est supposé infini suivant $\overrightarrow{u}_x$, direction de propagation. Le fond du bassin est en $z = 0$.
- ✗ Au repos la surface est horizontale, d'équation $z = h$. en présence d'une onde, la surface a pour équation $z = h + \xi(x,t)$.
- ✗ Le bassin est suffisamment profond pour que l'on puisse supposer que le problème soit unidemensionnel. L'écoulement est parfait (viscosité négligée).



- ✗ Soit $v(x,t)\,\overrightarrow{u}_x$, la vitesse de l'eau. $v(x,t)$ et $\xi(x,t)$ sont supposés infiniment petits de même ordre, on limitera les calculs à l'ordre 1 en ξ et v.

Définition :

- ✗ Le débit volumique est $D_v(x) = v(x)\,L\,(h + \xi(x,t))$
- ✗ Le débit massique est $D_m = \mu D_v$
- ✗ La masse entrante en x entre t et $t + \mathrm{d}t$ à travers une surface est

$$\delta m_e = D_m \mathrm{d}t$$

2 Bilan de masse

Savoir démontrer №6 : Conservation de la masse

La masse contenue dans la tranche $\mathrm{d}x$ est

$$\mathrm{d}m = \mu L\,(h + \xi)\,\mathrm{d}x$$

La variation de cette masse entre t et $t + \mathrm{d}t$ est

$$\mathrm{d}^2 m = \mu L \frac{\partial \xi}{\partial t} \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

La conservation de la masse, entre t et $t + \mathrm{d}t$, donne :

$$\mathrm{d}^2 m = \delta m_e - \delta m_s$$

On trouve

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial t} = -h \frac{\partial v}{\partial x}}$$

3 Equation d'Euler

Savoir démontrer №7 : Bilan des forces sur un volume élémentaire

Soit un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$, la résultante des forces de pression est $\overrightarrow{f}_v = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$, la RFD sur cette particule dans $\mathcal{R}$ galiléen donne

$$\mu \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p + \mu \overrightarrow{g}$$

Les projections sur les axes donnent :

$$p(M,t) = p_0 - \mu g z + \mu g h + \mu g \xi$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x}}$$

4 Equation de propagation

Savoir démontrer №8 : Equation de d'Alembert

On trouve une équation de d'Alembert pour v :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0} \text{ avec } \quad c = \sqrt{gh}$$

5 Modes propres du bassin

Des murs imposent des noeuds de vitesse en $x = 0$ et $x = \ell$:

$$v(x = 0) = 0 \text{ et } v(x = \ell) = 0$$

Savoir démontrer №9 : Pulsations propres

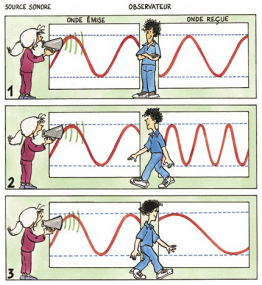
Les pulsations propres de ce bassin pour des ondes se propageant suivant $\overrightarrow{u}_x$ sont

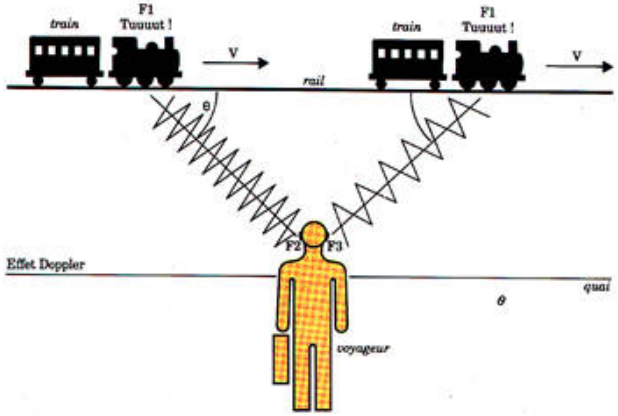
$$\boxed{\omega_n = n \frac{\pi c}{\ell}}$$

Chapitre A4 : Effet Doppler-Fizeau

Doppler (1803 - 1853)

PARTIE A : ONDES
A-1 : Oscillateurs couplés
A-2 : Equation de d'Alembert
A-3 : Exemples d'ondes
A-4 : Effet Doppler-Fizeau
A-5 : Compléments





I Effet Doppler-Fizeau

DÉFINITION :

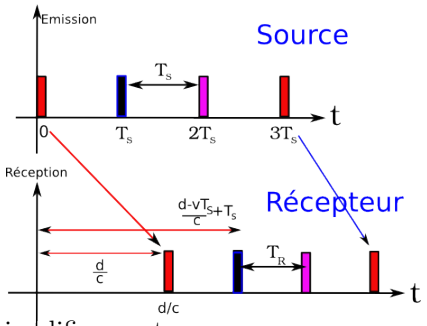
Lorsqu'une source mobile S émet un signal périodique de fréquence f_S (période T_S), le signal perçu par un récepteur fixe a une fréquence f_R différente : c'est l'effet **Doppler-Fizeau.**
Le phénomène a également lieu pour une source fixe et un récepteur mobile.

1 Déplacement de la source

1.a La source se rapproche du récepteur

Savoir démontrer №1 : Source se rapproche du récepteur

✗ On note c la vitesse de l'onde dans le milieu.
✗ On note $v > 0$ la vitesse de la source par rapport au récepteur.
✗ Soit d, la distance à $t = 0$ entre l'emetteur et le récepteur.



$$f_R = \frac{f_S}{1 - \frac{v}{c}}$$

✗ Lorsque $v \ll c$, l'expression peut se simplifier, on trouve

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq \frac{v}{c}$$

1.b La source s'éloigne du récepteur

Savoir démontrer №2 : Source s'éloigne du récepteur

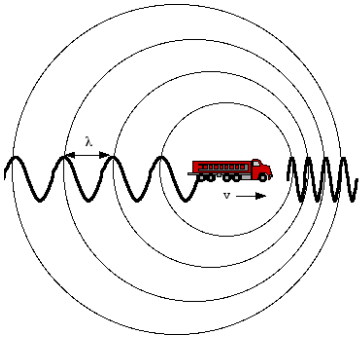
$$f_R = \frac{f_S}{1 + \frac{v}{c}}$$

Lorsque $v \ll c$, l'expression peut se simplifier, on trouve

$$\frac{\Delta f}{f_S} \simeq -\frac{v}{c}$$

Application 1 : Hauteur d'un son

Un camion se déplace à 90 km.h^{-1} et émet un son à la fréquence f. Comment varie la hauteur du son ($\log f_2 - \log f_1$) lors du passage de l'automobiliste devant un observateur ? Avant le passage, on trouve la fréquence $f_1 = \frac{f}{1-\frac{v}{c}}$
Après le passage, on trouve la fréquence $f_2 = \frac{f}{1+\frac{v}{c}}$
Le rapport des fréquences est la variation de hauteur soit :

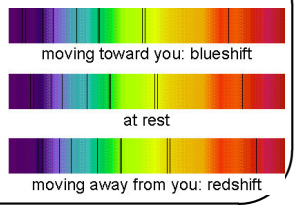


$$\frac{f_2}{f_1} \simeq 1 - \frac{2v}{c} = 0,85$$

La variation de hauteur est alors $\log \frac{f_2}{f_1} \simeq -0.07$

Application 2 : Redshift

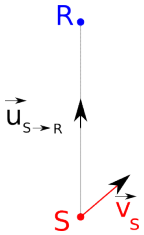
Le **décalage vers le rouge (redshift en anglais)** est un phénomène astronomique de décalage vers les grandes longueurs d'onde des raies spectrales et de l'ensemble du spectre – ce qui se traduit par un décalage vers le rouge pour le spectre visible – observé parmi les objets astronomiques lointains.



1.c Doppler pour un récepteur fixe

Lorsque $\vec{v}_S$, vitesse de la source n'est pas colinéaire à c, l'effet doppler est modifié.

On ne considère que la projection de la vitesse sur la direction de propagation de l'onde, cela donne



$$\boxed{f_R = \frac{f_S}{1 - \frac{\vec{v}_S \cdot \vec{u}_{S\to R}}{c}}}$$

$v\cos\alpha$ est la **projection de la vitesse relative** de l'émetteur par rapport au récepteur, sur la direction de propagation du signal.

2 Déplacement du récepteur

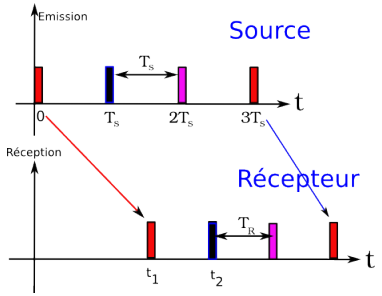
2.a Mouvement dans la direction de propagation

Savoir démontrer №3 : Déplacement du récepteur

La source est fixe à la fréquence f_S et le récepteur est mobile à la vitesse v par rapport à la source. On suppose que le récepteur se rapproche, il reçoit le signal à la fréquence f_R.

— La source émet à la date $t = 0$. Le récepteur reçoit le signal à la date t_1, il a donc avancé de la distance vt_1. On a

$$t_1 = \frac{d/c}{1 + v/c}$$

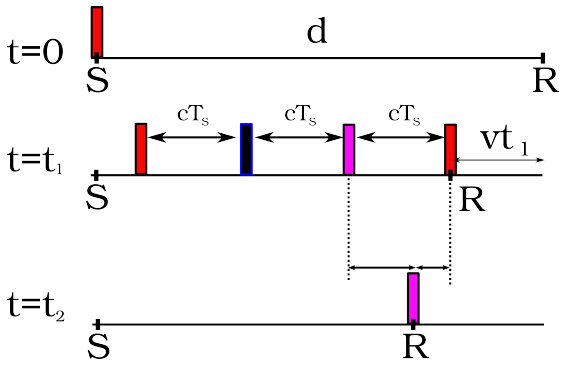


— Le second pulse est reçu à la date

$$t_2 = \frac{T_S + d/c}{1 + v/c}$$

— La période est donc $T_R = \frac{T_S}{1+v/c}$ → $\boxed{f_R = f_S\left(1 + \frac{v}{c}\right)}$

Application 3 : Autre méthode



On peut retrouver la relation en exprimant de deux manières différentes la distance cT_S.

Application 4 : Composition des vitesses

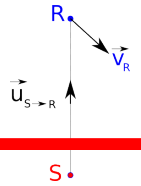
On se place dans le référentiel du récepteur.
La source se rapproche à la vitesse v, le son se déplace à la vitesse $c+v$.
On utilise la formule de l'effet DOPPLER pour une source mobile qui se rapproche : (SD2) , soit : $f_R = f_S\left(1-\frac{v}{c+v}\right)$
Soit finalement :

$$\boxed{f_R = f_S\left(1+\frac{v}{c}\right)}$$

2.b Mouvement quelconque du récepteur

Savoir démontrer №4 : Directions quelconques

$$\boxed{f_R = f_S\left(1-\frac{\overrightarrow{v}_R.\overrightarrow{u}_{S\to R}}{c}\right)}$$

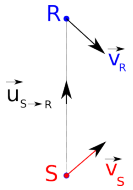


2.c Cas général

Savoir démontrer №5 : Déplacement de la source et du récepteur

Si dans le référentiel $\mathcal{R}$, on note $\overrightarrow{v}_R$ la vitesse du récepteur et $\overrightarrow{v}_S$ la vitesse de la source, on a

$$\boxed{f_R = f_S\frac{1-\frac{\overrightarrow{v}_R.\overrightarrow{u}_{S\to R}}{c}}{1-\frac{\overrightarrow{v}_S.\overrightarrow{u}_{S\to R}}{c}}}$$



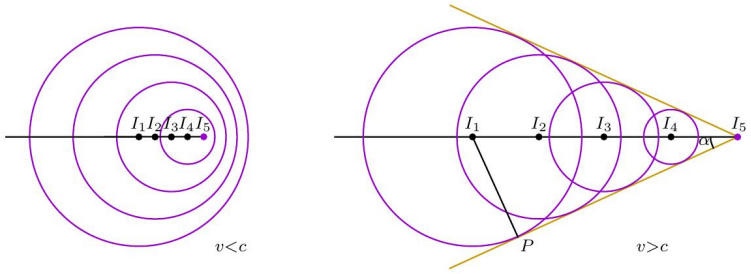
3 Réflexion sur un miroir

Savoir démontrer №6 : Miroir en mouvement

On considère une source fixe (S) qui émet une onde à la fréquence f_S. Cette onde se réfléchit sur un miroir qui se rapproche de la source à la vitesse v. Soit f_R, la fréquence du signal reçu par le récepteur placé à coté de l'émetteur.

$$\boxed{f_R = f_S\frac{1+v/c}{1-v/c} \simeq f\,(1+2v/c)}$$

4 Cone de Mach



La source se déplace à la vitesse v constante. On note I_n, la position de la source à la date $t_n = n\tau$.

On a représenté **à la date t_5** les positions des ondes sonores dans le cas $v < c$ et $v > c$.

1. Lorsque la vitesse est supersonique, l'onde reste dans un cône de demi angle au sommet α.

$$\sin\alpha = \frac{c}{v}$$

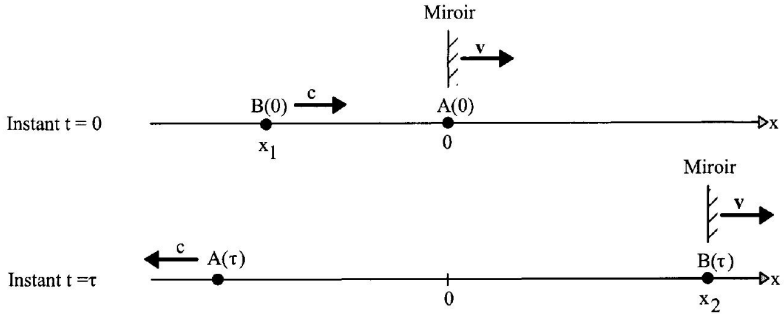
Il y a accumulation d'énergie sonore sur cette surface, c'est une **onde de choc** (mur du son ou sillage de KELVIN)

2. Si $v < c$, on mesure l'effet Doppler.

II Exemples

1 CCP - 2009 - PC

Une onde lumineuse de fréquence f se propage dans le vide à la vitesse c, elle se réfléchit sur un miroir normal à la direction de propagation. Ce miroir s'éloigne avec la vitesse v.



On considère l'onde incidente avec deux maxima A et B qui se succèdent : la séparation spatiale est λ, la séparation temporelle est T. On suppose que A atteint le miroir au temps $t = 0$, à l'abscisse $x = 0$.

1. Donner l'abscisse x_1 de B à $t = 0$ en fonction de c et T.
2. Exprimer le temps τ au bout duquel B atteint le miroir. On note x_2 la position du miroir au moment de l'impact, montrer que
$$x_2 = \frac{cvT}{c-v}$$
3. Donner à la date $t = \tau$, la position du point A qui s'est réfléchit sur le miroir.
4. En déduire la valeur de la distance AB.
5. En déduire la valeur de la fréquence f' de l'onde réfléchie pour un observateur lié au repère fixe.
6. Montrer que
$$f - f' \simeq 2f\frac{v}{c}$$

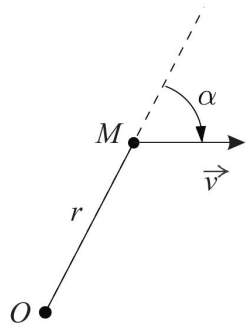
Eléments de réponse :

1. B et A sont séparés d'un longueur d'onde. Donc $x_1 = -\lambda = -cT$.
2. L'équation horaire pour le miroir est
$$x_m = vt$$
L'équation horaire pour le point B est
$$x_B = ct - cT = c\,(t - T)$$
Les deux se rencontrent à $t = \tau$, si $x_m = x_B$, soit
$$\tau = \frac{cT}{c-v}$$
On en déduit la position du miroir au moment de l'impact :
$$x_m = x_2 = \frac{cvT}{c-v}$$
3. Le point A est en O à la date $t = 0$, il se trouve donc en $x = -c\tau$ à la date $t = \tau$.
4. En remplçant, on trouve
$$AB = \frac{c^2T}{c-v} + \frac{cvT}{c-v} = \frac{c+v}{c-v}cT$$
5. AB correspond à la nouvelle longueur d'onde, on en déduit la nouvelle fréqeunce :
$$f' = \frac{c}{\lambda'} = f\frac{c-v}{c+v}$$
6. On trouve immédiatement
$$f - f' = \frac{2v}{c+v} \simeq 2f\frac{v}{c}$$

2 Mines Ponts PC-2009

Expansion de l'Univers

1. Expliquer brièvement la phrase suivante, souvent utiliséee dans les revues de vulgarisation scientifique : plus on regarde loin dans l'Univers, plus on regarde dans le passé.
2. On raisonne dans le cadre de la cinématique classique (non-relativiste). Le point O représente un observateur sur la Terre et le point M représente un objet céleste (étoile, galaxie, etc.). On considère le référentiel $\mathcal{R}$ où O est fixe et M est en mouvement. Le milieu interstellaire est assimilé au vide pour les ondes électromagnétiques et on note c la célérité de ces ondes dans $\mathcal{R}$. On convient de ne pas tenir compte de l'atténuation de l'amplitude des ondes au cours de leur propagation. Soit $s_M(t)$ le signal électromagnétique émis par le point M à l'instant t. Ce signal est reçu à l'instant t' par le point O. On note $s_O(t)$ le signal reçu par O à l'instant t. On note $OM = r(t)$. D'après les hypothèses, $s_O(t') = s_M(t)$. Exprimer t' en fonction de t, c et de la distance $r(t)$.



3. L'émetteur M a une vitesse notée $\overrightarrow{v}(t)$, de norme $v(t)$ et faisant avec $\overrightarrow{OM}$ un angle $\alpha(t)$ (voir figure). L'émetteur émet des signaux périodiques de période T. On suppose que la fréquence des signaux est suffisamment grande pour pouvoir négliger les variations de $\overrightarrow{v}$ et de α sur une période. On suppose également qu'à chaque instant t, $v(t)T/r(t) \ll 1$. Exprimer, au premier ordre, la différence $r(t+T) - r(t)$.
4. En déduire, toujours au premier ordre, la période T' des signaux reçus par l'observateur en O. On exprimera T' en fonction de T, v, c et α.
5. On appelle vitesse radiale de M la quantité $v_r = v\cos\alpha$. On note λ la longueur d'onde du signal émis par M et λ' la longueur d'onde du signal reçu en O.

Donner la relation qui existe entre λ, λ', v_r et c. On mettra cette relation sous la forme

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + Z$$

La quantité Z ainsi définie s'appelle le redshift.

Eléments de réponse :

1. La distance qui sépare M et O est r, la vitesse de propagation est constante égale à c, on en déduit que $t' = t + \frac{r}{c}$
2. Le point M s'est déplacé de $\overrightarrow{v}T$. Le vecteur $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{v}T$. On élève au carré

$$OM'^2 = r^2 + 2\overrightarrow{r}.\overrightarrow{v}T + v^2T^2 = r^2\left(1 + 2\overrightarrow{u}_r.\frac{vT}{r} + \left(\frac{vT}{r}\right)^2\right)$$

   On ne conserve que les termes du premier ordre, cela donne

$$r(t+T) = OM' \simeq r(t) + \overrightarrow{u}_r.\overrightarrow{v}T$$

   La différence donne donc

$$\boxed{r(t+T) - r(t) = \overrightarrow{u}_r.\overrightarrow{v}T = vT\cos\alpha}$$

3. Le second signal va être envoyé de la distance $r(t+T)$, il va donc être reçu à la date $t'' = t + T + \frac{r(t+T)}{c}$ La différence $t'' - t' = T'$, on trouve donc

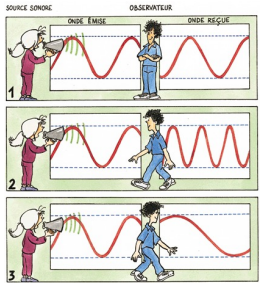
$$\boxed{T' = T\left(1 + \frac{v\cos\alpha}{c}\right)}$$

4. On en déduit $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{T'}{T} = 1 + \frac{v_r}{c}$. Le redschift est $Z = \frac{v_r}{c}$.
5. Si M s'éloigne cela fait donc un décallage vers le rouge (d'ou le nom).

Chapitre A5 : Compléments

Doppler (1803 - 1853)

PARTIE A : ONDES
A-1 : Oscillateurs couplés
A-2 : Equation de d'Alembert
A-3 : Exemples d'ondes
A-4 : Effet Doppler-Fizeau
A-5 : Compléments



I Onde progressive et onde stationnaire

1 Notion de déphasage

On considère une onde incidente se propageant suivant les x croissants entre A et O.
Le coefficient de réflexion **en amplitude en O est $\underline{r}$** .

✗ Si on place l'origine en O

$$y_i(x,t) = y_0 \exp i(\omega t - kx)$$
$$y_r(x,t) = \underline{r}\, y_0 \exp i(\omega t + kx)$$

On vérifie bien que

$$y_r(x=0,t) = \underline{r} y_i(x=0,t)$$

✗ Si on place l'origine en A, la réflexion se fait en $x = \ell$.

$$y_i(x,t) = y_0 \exp i(\omega t - kx)$$
$$y_r(x,t) = \underline{b}\, y_0 \exp i(\omega t + kx)$$

On doit vérifier que

$$y_r(x=\ell,t) = \underline{r}\, y_i(x=\ell,t)$$

On trouve que $\underline{b} = \underline{r} e^{-2jk\ell}$ Donc

$$y_r(x,t) = \underline{r}\, y_0 \exp i(\omega t + kx - 2k\ell)$$

On vérifie donc que pour revenir en x, l'onde réfléchie a bien parcouru la distance $2\ell - x$.

2 Ondes stationnaires en régime forcé

On excite la corde en $x = 0$ avec une amplitude $y(0) = a\cos(\omega t)$.
On a une réflexion en $x = \ell$, deux cas se présentent :

1. Si le coefficient a un module égal à 1. On obtient des **ondes stationnaires** . Par exemple avec un coefficient égal à $r = -1$, on trouve

$$y(x,t) = a\frac{\sin k(\ell - x)}{\sin kl}\cos\omega t$$

On a un noeud en $x = \ell$ et en $x = \ell - n\frac{\pi}{k}$.

Si $r = -1$ et $\ell = n\frac{\pi}{k}$, on a **résonance des ondes stationnaires**, avec une amplitude qui diverge tant que l'on néglige tout frottement.

2. Si le coefficient de réflexion est quelconque , on une superposition de deux ondes progressives, que l'on peut voir comme une onde stationnaire + une onde progressive.

On trouve donc (comme en modulation) un signal modulé mais :

✗ Les noeuds ne correspondent pas à une annulation de l'amplitude.
✗ Les ventres correspondent à des maxima de l'amplitude, mais moins élevés que lorsque $r = 1$.

On peut alors définir le **Taux d'Ondes Stationnaires, TOS** :

$$TOS = \frac{y_{max}}{y_{min}} = \frac{1+|r|}{1-|r|}$$

II Impédance sur la corde vibrante

DÉFINITION :

On peut définir l'**impédance caractéristique de la corde** pour une OPPH :

$$|T_y| = Z_c|\dot{y}| \rightarrow \boxed{Z_c = \left|\frac{T_y}{v_y}\right|}$$

Savoir démontrer №1 : Expression de l'impédance

Pour une OPPH se propageant suivant les x croissants, on a

$$\boxed{Z_{OPP\rightarrow} = -\frac{T_y}{v_y} = \sqrt{\mu T} = Z_c}$$

Pour une OPPH se propageant suivant les x décroissants, on a

$$\boxed{Z_{OPP\leftarrow} = -\frac{T_y}{v_y} = -\sqrt{\mu T} = -Z_c}$$

III Etude énergétique de la corde vibrante - HP

1 Courant d'énergie mécanique

Savoir démontrer №2 : Puissance instantannée

La force exercée en M par la partie de la corde située à gauche de M est $\overrightarrow{T} \simeq -T\overrightarrow{u}_x - T\frac{\partial y}{\partial x}\overrightarrow{u}_y$
La vitesse en M de la corde est $\overrightarrow{v} = \frac{\partial y}{\partial t}\overrightarrow{u}_y$
La puissance instantannée est

$$\boxed{P(x,t) = -\mu c^2 \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}}$$

Cette puissance est un **courant d'énergie** qui se propage sur la corde : soit $\overrightarrow{\Pi} = P(x,t)\overrightarrow{u}_x$ le vecteur **courant d'énergie**.

2 Densité d'énergie mécanique

Savoir démontrer №3 : Energie cinétique

La densité linéique d'énergie cinétique est

$$e_c = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

L'énergie cinétique de la corde est $E_c = \int_0^L e_c \mathrm{d}x$

Savoir démontrer №4 : Energie potentielle

Soit ℓ la longueur de la corde à la date t, L est sa longueur initiale.
L'énergie potentielle est l'énergie nécessaire pour faire passer la corde la longueur L à la longueur ℓ.

$$E_p \simeq T_0(\ell - L)$$

Avec un DL , on trouve

$$\boxed{E_p = \int_0^L \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x}$$

La **densité linéique d'énergie potentielle** est :

$$\boxed{e_p = \frac{1}{2}\mu c^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Savoir démontrer №5 : Energie mécanique linéique

La densité mécanique linéique d'énergie est :

$$\boxed{e = e_c + e_p = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu c^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

⚠ Attention…

L'energie mécanique de la superposition de deux ondes $y = y_1 + y_2$ n'est pas la somme des énergies mécaniques.

3 Conservation de l'énergie mécanique

Savoir démontrer №6 : Bilan d'énergie

Un bilan d'énergie sur une tranche dx, donne **l'équation de continuité**

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0}$$

On retrouve ce résultat en utilisant l'équation de propagation.

4 Vitesse de propagation de l'énergie d'une onde progressive

Savoir démontrer №7 : Onde progressive

Soit $y(x,t) = f(t - \frac{x}{c}$, on a

$$e_c = e_p = \frac{1}{2}\mu f'^2$$

On a

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = ce\overrightarrow{u}_x}$$

L'énergie d'une onde progressive se déplace à la vitesse c.

5 Analogie avec un circuit électrique

Onde progressive	Circuit électrique
Force : $T_y(x,t)$	Tension $u(x,t)$
Vitesse : $v_y(x,t)$	Courant $i(x,t)$
Puissance : $P(x,t) = T_y v_y$	Puissance $P(x,t) = ui$
Impédance $Z = \frac{T_y}{v_y}$	Impédance $Z = \frac{u}{i}$

IV Taux d'Ondes Stationnaires

1 Définition

Savoir démontrer №8 : Coeff de réflexion $r \neq 1$

On considère une onde incidente sur une corde vibrante. A l'extrémité $x = \ell$ de la corde le coefficient de réflexion est $\underline{r} = re^{j\varphi}$. On a bien noté que $|r|$ est noté r.
On a $|r| \neq 1$, montrer que l'onde résultante est donc la somme d'une onde progressive et d'une onde stationnaire.

Réponse :

1. *Dans un premier temps, on suppose qu'il n'y a qu'une onde incidente et une onde réflechie.*
   Soit $y_i = A\exp i(\omega t - kx)$ l'onde incidente.
   Soit $y_r = rA\exp i(\omega t + kx - 2k\ell + \varphi)$ l'onde réfléchie. On note $2\alpha = -2k\ell + \varphi$.
   L'onde totale est

$$y = y_i + y_r = Ae^{i(\omega t+\alpha)}\left[e^{-i(kx+\alpha)} + re^{i(kx+\alpha)}\right]$$

   ,

   On ajoute dans le dernier crochet $e^{i(kx+\alpha)} - e^{i(kx+\alpha)}$ et en donnant la partie réelle, on trouve :
   On trouve

$$\boxed{y = 2A\cos(\omega t + \alpha)\cos(kx - \alpha) + A(r-1)\cos(\omega t + kx + 2\alpha)}$$

On trouve bien la somme d'une onde stationnaire et d'une onde progressive.

2. *Si on tient compte des réflexions multiples, la $n^{ième}$ onde incidente est sous la forme :*

$$y_{i,n} = A \exp i\left(\omega t - kx\right)\left(rr'\right)^n e^{-2in\ell} = y_i \left(rr'\right)^n e^{-2in\ell}$$

$y_{r,n}$ est également multipliée par ce coefficient.
Donc y s'exprime sous la forme :

$$y = y_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(rr'\right)^n e^{-2in\ell}$$

On retrouve une onde stationnaire avec un coefficient différent.

Savoir démontrer №9 : TOS

Dans ces conditions, lorsque l'on mesure l'amplitude pour une valeur de x fixée , on observe une variation de l'amplitude sinuoïdale d'amplitude $B\left(x\right)$.
Lorsque l'on se déplace sur la corde l'amplitude est différente : B est une fonction de x.
Si on note B_{max} l'amplitude maximale de B et B_{min} l'amplitude minimale, on a le Taux d'Ondes Stationnaires'

$$TOS = \frac{B_{max}}{B_{\min}} = \frac{1+r}{1-r}$$

Réponse :

Pour les même raisons que plus haut, on ne considère qu'une seule réflexion.
On peut écrire l'onde totale sous la forme :

$$y = Ae^{i\omega t}\left[e^{-ikx} + re^{i(kx+2\alpha)}\right]$$

Le nombre entre les crochets est complexe, on peut donc la mettre sous la forme $Be^{i\beta}$.
On ne recherche ici que la valeur de $B\left(x\right)$. On égale les modules :

$$B^2 = \left[e^{-ikx} + re^{i(kx+2\alpha)}\right]\left[e^{ikx} + re^{-i(kx+2\alpha)}\right]$$
$$B^2 = 1 + r^2 + 2r\cos\left(2kx + 2\alpha\right)$$

$$B_{max}^2 = 1 + r^2 + 2r = \left(1+r\right)^2$$
$$B_{min}^2 = 1 + r^2 - 2r = \left(1-r\right)^2$$

$$\boxed{TOS = \frac{B_{max}}{B_{min}} = \frac{1+r}{1-r}}$$

2 λ ou $\frac{\lambda}{2}$?

Savoir démontrer №10 : Ondes stationnaires

On étudie des ondes sonores qui se propagent suivant $\overrightarrow{u}_x$ émises par un haut parleur placé en $x = 0$.
On place un micro en x , il réflechit les ondes et créé ainsi des ondes stationnaires.
On déplace le micro de Δd entre deux maxima mesurés sur l'oscilloscope.
Mesure-t-on λ ou $\frac{\lambda}{2}$?
Le résultat dépend-il de la synchronisation de l'oscilloscope sur l'émetteur ?

Réponse :

Il y a des ondes stationnaires entre la source et le récepteur.
Sans synchroniser , on mesure la distance entre 2 ventres donc $\frac{\lambda}{2}$. Une position est en phase avec la source l'autre en opposition.
En synchronisant, on a accès à la phase, on va donc chercher deux positions en phase avec la source ; on mesure λ.

Chapitre A6 : Ressorts

DÉFINITION :

- ✗ On dit que deux ressorts sont placés en **parallèle** lorsque ils ont la même élongation et que leur direction sont parallèles.
- ✗ On dit que deux ressorts sont placés en **série** lorsque ils ont la même contrainte (force) et que leur direction sont parallèles.
- ✗ La **souplesse** est l'inverse de la raideur d'un ressort.

I Association de ressorts en parallèle

Savoir démontrer №1 : Ressorts placés en parallèle avec la même longueur à vide

On considère deux ressorts de raideur k_1 et k_2, placés en parallèle et de même longueur à vide.
On montre que la raideur équivalente est :

$$k_{\text{eq}} = k_1 + k_2$$

Réponse :

Solution :

La force exercée par les ressorts est :

$$\overrightarrow{F} = -k_1 (x - \ell_0) \overrightarrow{u}_x - k_2 (x - \ell_0) \overrightarrow{u}_x$$

Cette force peut s'écrire

$$\overrightarrow{F} = -(k_1 + k_2)(x - \ell_0) \overrightarrow{u}_x$$

On en déduit que

$$\boxed{k_{eq} = k_1 + k_2}$$

Ce résultat se généralise à une série de n ressorts : $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$

Savoir démontrer №2 : Ressorts placés en parallèle avec longueurs à vide différentes

On considère deux ressorts de raideur k_1 et k_2, et de longueur à vide ℓ_1 et ℓ_2 placés en parallèle.
On montre que la raideur équivalente est :

$$k_{\text{eq}} = k_1 + k_2 \text{ et } \ell_{\text{eq}} = \frac{k_1\ell_1 + k_2\ell_2}{k_1 + k_2}$$

Réponse :

Solution :

La force exercée par les ressorts est :

$$\overrightarrow{F} = -k_1 (x - \ell_1) \overrightarrow{u}_x - k_2 (x - \ell_2) \overrightarrow{u}_x$$

Cette force peut s'écrire

$$\overrightarrow{F} = -(k_1 + k_2) \left(x - \frac{k_1\ell_1 + k_2\ell_2}{k_1 + k_2} \right) \overrightarrow{u}_x$$

On en déduit que

$$\boxed{k_{eq} = k_1 + k_2 \text{ et } \ell_{eq} = \frac{k_1\ell_1 + k_2\ell_2}{k_1 + k_2}}$$

II Association de ressorts en série

Savoir démontrer №3 : Ressorts placés en série

On considère deux ressorts de raideur k_1 et k_2, et de longueur à vide ℓ_1 et ℓ_2 placés en série.
On montre que la raideur équivalente vérifie

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

La longueur à vide du ressort équivalent est

$$\ell = \ell_1 + \ell_2$$

Réponse :

Solution :

La force exercée par le ressort sur la masse m est

$$\overrightarrow{F} = -k_2 (x_2 - x_1 - \ell_2) \overrightarrow{u}_x$$

On peut écrire la RFD sur le point de masse nulle situé entre les deux ressorts :

$$0 = k_2 (x_2 - x_1 - \ell_2) \overrightarrow{u}_x - k_1 (x_1 - \ell_1) \overrightarrow{u}_x$$

On a donc deux expressions de la force F :

$$F = -k_2 (x_2 - x_1 - \ell_2)$$
$$F = -k_1 (x_1 - \ell_1)$$

L'idée, dans ce calcul est d'exprimer les allongements :

$$x_2 - x_1 - \ell_2 = -\frac{F}{k_2}$$
$$x_1 - \ell_1 = -\frac{F}{k_1}$$

En sommant ces deux équations, on trouve

$$x_2 - \ell_2 - \ell_1 = -\frac{F}{k_{eq}} = -\frac{F}{k_2} - \frac{F}{k_1}$$

$$\boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

La longueur à vide du ressort équivalent est

$$\ell = \ell_1 + \ell_2$$

Savoir démontrer №4 : Portion d'un ressort

Soit un ressort homogène de raideur k_r, de longueur à vide ℓ et soit O son origine. On s'interesse à la raideur de la partie du ressort situé entre 0 et x : cette valeur est notée $k(x) = \frac{1}{\sigma(x)}$. En particulier $k(L) = k_r$
La raideur du ressort compris entre 0 et x est :

$$\boxed{k(x) = k_r \frac{\ell}{x}}$$

Réponse :

On peut considérer le ressort comme une mise en série d'un grand nombre de ressorts élémentaires de longueur $\mathrm{d}x$.

Soit $\mathrm{d}\sigma = \alpha \mathrm{d}x$ *la souplesse de l'élément. Comme le ressort est homogène, on peut supposer que* α *est une constante.*

Dans ce cas, les souplesses s'ajoutent ; ainsi

$$\sigma = \int_0^x \alpha \mathrm{d}x = \alpha x$$

On détermine α*, en utilisant la raideur en* $x = \ell$ *:* $\sigma(x = \ell) = \frac{1}{k_r}$.

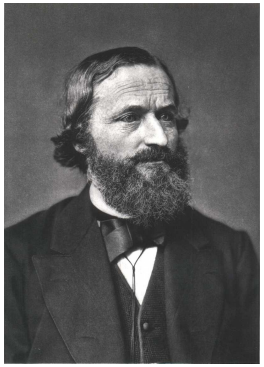
$$\alpha \ell = \frac{1}{k_r} \rightarrow \alpha = \frac{1}{k_r \ell}$$

Finalement

$$\boxed{k(x) = \frac{k\ell}{x}}$$

Partie A : Electrocinétique

Chapitre A1 : Bases de l'électrocinétique

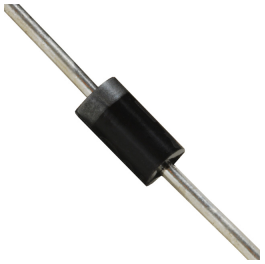


Kirchhoff

Partie A : Electrocinétique

A-1 : Bases de l'électrocinétique

A-2 : Etude des filtres
A-3 : Impédance e/s
A-4 : Compléments
A-5 : Circuit R,L,C
A-6 : Ampli. Op.



Diode Zener

Courant et tension : analogie avec une autoroute

Autoroute	Circuit électrique
Voitures	Electrons
Altitude	Tension
Débit de voitures	Intensité
Rétrécissement de voies	Résistance
Aire d'autoroute	Condensateur
Circuit automobile	Bobine électrique

I Lois générales dans l'Approximation des régimes quasistationnaires (ARQS)

1 L'Approximation des régimes quasistationnaires

Définition :

✗ Dans **l'ARQS**, tous les effets liés à la propagation des signaux sont négligés.
✗ L'ARQS est valable si la longueur d'onde λ de l'onde électrique est grande devant la taille caractéristique ℓ du circuit, soit $\lambda \gg \ell$

Application 1 : Taille maximale d'un circuit

Quelle est la taille maximale d'un circuit pour se placer dans l'ARQS sur le réseau EDF ($f = 50$ Hz) ?

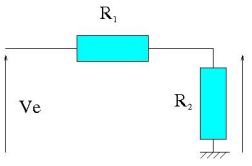
2 Lois de Kirchhoff

Définitions :

✗ **Courant** : Le courant électrique est un déplacement d'ensemble, ordonné de particules chargées. Le sens du courant est par convention le sens des charges positives.
✗ L'**intensité** électrique à travers une section S : c'est la charge qui traverse S pendant dt.
✗ **Dipôle** : Composant électrique constitué de deux bornes
✗ **Noeud** : borne commune à plusieurs dipôles
✗ **Branche** : portion de circuit entre deux noeuds consécutifs
✗ **Maille** : ensemble de branches successives définissant un circuit fermé

3 Diviseur de tension et de courant

Savoir démontrer №1 : Diviseur de tension



On trouve :

$$v_s = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_e$$

Savoir démontrer №2 : Diviseur de courant

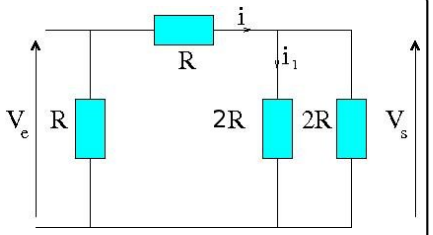
On trouve :

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Application 2 : diviseurs de tension et courant

En utilisant un diviseur de tension et de courant, donner la tension v_s en fonction de v_e, puis avec le diviseur de courant exprimer i.



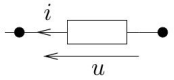
4 Régime transitoire et forcé

Définitions :

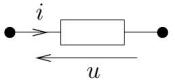
- ✗ **régime transitoire** :lorsqu'un système électrique subit une perturbation électrique extérieure, il évolue au cours du temps jusqu'à atteindre un régime établi. La durée de ce régime transitoire est le temps de relaxation.
- ✗ en **régime sinusoïdal forcé**, le circuit électrique voit sa fréquence imposée par le générateur.

II Circuit avec composants linéaires

1 Conventions



En **convention générateur**, les orientations de u et i sont les mêmes ; ainsi, la puissance instantanée $\mathcal{P}(t) = u(t)\,i(t)$ est positive si le dipôle est effectivement un générateur.



En **convention récepteur**, les orientations de u et i sont opposées ; ainsi, la puissance instantanée $\mathcal{P}(t) = u(t)\,i(t)$ est positive si le dipôle est effectivement un récepteur.

2 Caractéristiques des composants linéaires

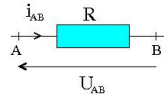
Définitions :

Un composant est linéaire lorqu'il existe soit

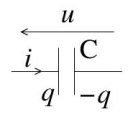
- ✗ une relation **affine** entre u et i soit $u = k \times i$ (résistance)
- ✗ une équation **différentielle linéaire à coefficients constants** reliant u à i, sans membre constant (par exemple association de bobines et de condensateurs).

3 Exemples de composants linéaires

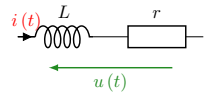
La **résistance** vérifie la loi d'Ohm $u_{AB} = Ri_{AB}$ en convention récepteur.



Le **condensateur** vérifie les lois : $q = Cu$ et $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$



La bobine vérifie la loi en convention récepteur : $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri$



Pour un condensateur plan, dont les armatures de surface S sont distantes de e, la

capacité est

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{e}}$$

Pour un conducteur ohmique cylindrique (S, h), de résistivité $\rho = \frac{1}{\gamma}$ (γ est la conductivité), la résistance est

$$\boxed{R = \frac{\rho h}{S} = \frac{h}{\gamma S}}$$

Application 3 : Résistance sphérique

On considère une boule conductrice de rayon R_2, de centre O, dans laquelle on a creusé une cavité sphérique de centre O et de rayon R_1.
On cherche la résistance du circuit ainsi obtenu entre R_1 et R_2.

Solution : Le vecteur densité de courant est radial, il vaut $\overrightarrow{j} = j(r)\,\overrightarrow{u}_r$. Le courant est constant sur chaque sphère et vaut $I = j 4\pi r^2$.

La définition générale de la résistance est

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I_{1\to 2}}$$

On peut généraliser cette formule pour un petit élément de volume sphérique $\mathrm{d}\tau = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$, on trouve donc

$$\mathrm{d}^3 R = \frac{-\mathrm{d}V}{\overrightarrow{j}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}}$$

Pour construire la résistance totale, il faut ajouter en série les résistances qui sont sur un rayon vecteur et ajouter les admittances pour les valeurs de θ et φ car ces résistances sont en parallèles.

Addition des admittances pour θ entre 0 et π et φ entre 0 et 2π :

$$\frac{1}{\mathrm{d}R} = \frac{-1}{\mathrm{d}V} \iint j r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi r^2 j}{-\mathrm{d}V}$$

Comme le métal a une conductivité γ, $j = \gamma E = -\gamma \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ on a

$$R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{4\pi\gamma r^2} = \frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

la résistance vaut donc

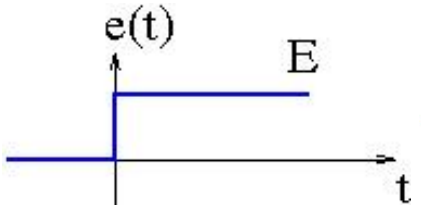
$$\boxed{R = \frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

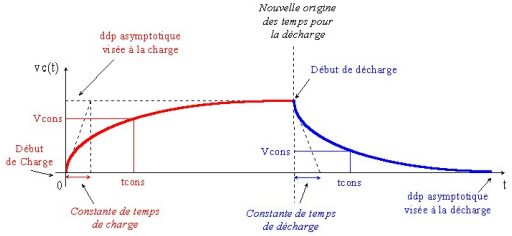
Propriétés à connaître

✓ **Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur**
La tension aux bornes d'un condensateur alimenté reste continue même lorsque les caractéristiques de l'alimentation varient de manière discontinue.

✓ **Continuité du courant dans une bobine**
Le courant traversant une bobine, dans un circuit de résistance non négligeable, reste continu même lorsque les caractéristiques de l'alimentation varientde manière discontinue.

4 Cas du circuit RC





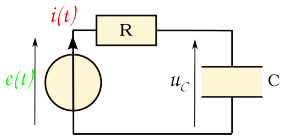
Savoir démontrer №3 : Charge et décharge d'un condensateur

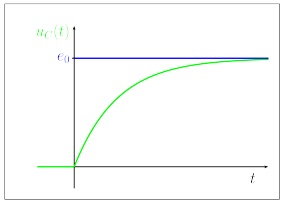
✗ L'équation différentielle du circuit est

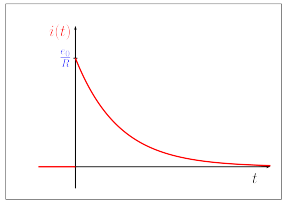
$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{1}{RC}E$$

✗ Pour la charge, on trouve $u_c = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$
✗ Pour la décharge à partir de la date t_1, on trouve

$$t > t_1 \rightarrow u_c = E\exp\left(\frac{t - t_1}{RC}\right)$$







5 Système du second degré

La forme canonique pour un système du second ordre est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s(t) = f(t)$$

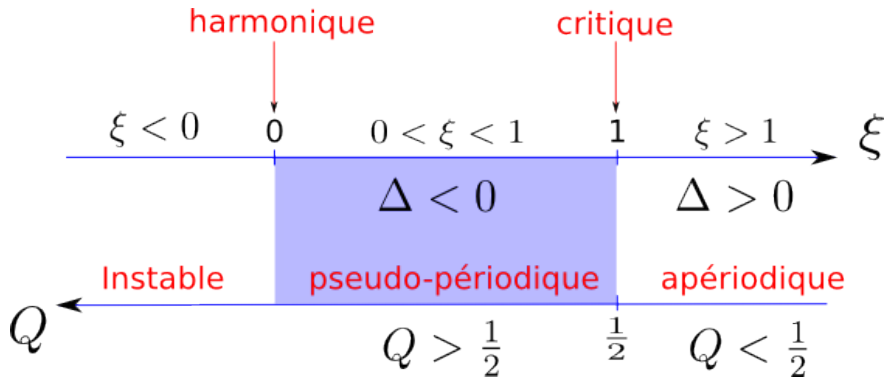
ω_0 est la pulsation propre en rad.s^{-1} et ξ, le coefficient d'amortissement sans dimension.

On peut écrire également cette équation sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s(t) = f(t)$$

on a posé $Q = \frac{1}{2\xi}$ le facteur de qualité, nombre sans dimension.

Savoir démontrer №4 : Différents régimes d'un système du second degré



III Régime sinusoïdal forcé

1 Régime linéaire

DÉFINITION :

Un circuit est placé en **régime linéaire**, lorsque tous les composants sont linéaires.

2 Notation complexe

✓ Pour le condensateur $\boxed{Z_c = \dfrac{1}{jC\omega}}$
Pour $\omega \to 0$ le condensateur se comporte comme un circuit ouvert
Pour $\omega \to \infty$ le condensateur se comporte comme un court circuit

✓ Pour la bobine $\boxed{Z_L = jL\omega}$
Pour $\omega \to 0$ la bobine se comporte comme un court circuit
Pour $\omega \to \infty$ le condensateur se comporte comme un circuit ouvert

Propriétés à connaître

3 Valeurs efficaces

DÉFINITION :

Soit une fonction périodique du temps $u(t)$, de période T, on note U sa valeur efficace avec

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

Application 4 : Signal sinusoïdal

Pour un signal sinusoïdal de la forme $u(t) = u_{\max}\cos(\omega t)$, $U = \frac{u_{\max}}{\sqrt{2}}$

4 Puissance moyenne, facteur de puissance

DÉFINITION :

La **puissance moyenne** est $P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$

✓ La puissance moyenne dissipée dans un composant d'impédance Z est

$$P_{moy} = \frac{1}{2}Re(\underline{Z})I_{max}^2 = Re(\underline{Z})I_{eff}^2$$

✓ On peut aussi l'écrire sous la forme :

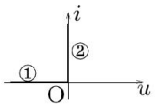
$$P_{moy} = \frac{1}{2}Re(\underline{Y})U_{max}^2 = Re(\underline{Y})U_{eff}^2 \qquad P_{moy} = \frac{1}{2}Re(\underline{u}\bar{\underline{i}})$$

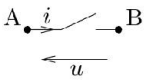
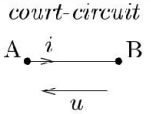
Propriétés à connaître

IV Composants non linéaires

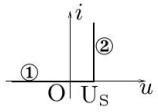
1 Diodes

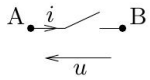
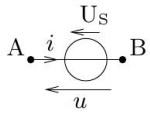
1.a Diode idéale



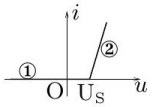
	état	circuit équivalent	égalité	condition
①	diode bloquée	*coupe-circuit* 	$i = 0$	$u < 0$
②	diode passante	*court-circuit* 	$u = 0$	$i > 0$

1.b Diode semi-idéale



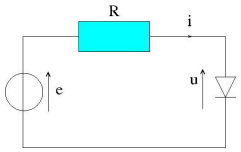
	état	circuit équivalent	égalité	condition
①	diode bloquée	*coupe-circuit* 	$i = 0$	$u < U_S$
②	diode passante	*source idéale* U_S 	$u = U_S$	$i > 0$

1.c Diode non idéale



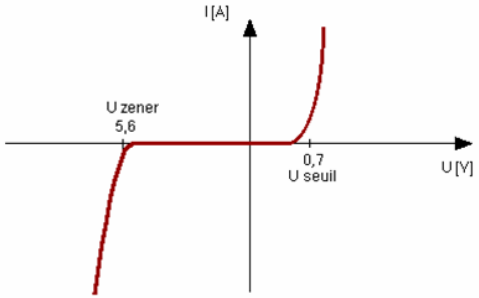
état		circuit équivalent	égalité	condition
		coupe-circuit		
①	diode bloquée	A i B, u	$i = 0$	$u < U_s$
		générateur (U_s,r)		
②	diode passante	A i r U_S B, u	$u = U_s + ri$	$i > 0$

Application 5 : diode réelle

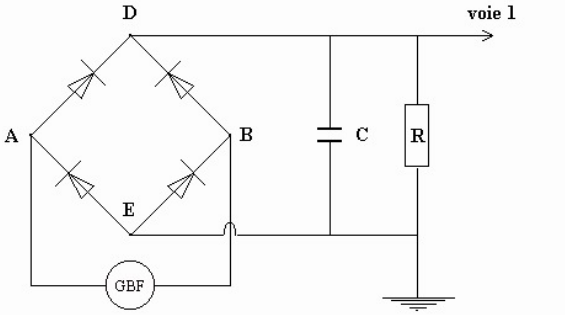


✗ Donner le courant électrique dans le circuit en supposant que la diode est idéale.
✗ Dans un second temps en supposant que la diode est réelle.

2 Diode Zener



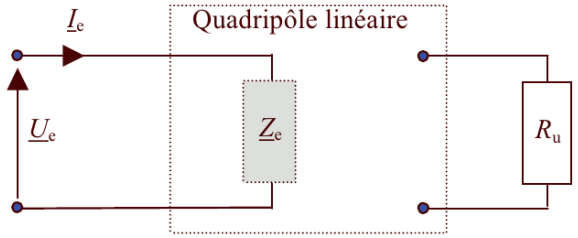
3 Application au redressement



4 Impédance d'entrée et de sortie

Définition :

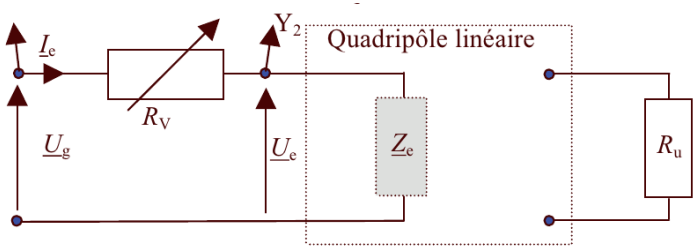
✗ L'impédance d'entrée Z_e, d'un quadrupole linéaire est le **rapport de la tension d'entrée au courant entrant** avec le schéma donné dans la figure ci-dessous.
✗ L'impédance de sortie est **l'impédance équivalente** du modèle de thèvenin équivalent au quadrupole qui apparait entre ses bornes de sortie.



Savoir démontrer №5 : Détermination de la résistance d'entrée

Pour déterminer la résistance d'entrée d'un quadrupole, on fait varier la résistance R_v et

$$\text{lorsque } U_e = \frac{U_g}{2} \rightarrow R_e = R_v \qquad (A.1)$$



Savoir démontrer №6 : Détermination de la résistance de sortie

Pour déterminer la résistance de sortie d'un quadrupole, on mesure la tension de sortie à vide U_v, puis la tension de sortie avec une charge R_c variable, notée U_s

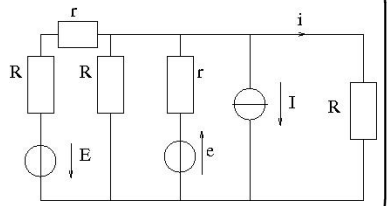
$$\text{lorsque } U_s = \frac{U_v}{2} \rightarrow R_s = R_c \qquad (A.2)$$

V Principaux théorèmes

1 Théorème de Millman (très important)

Application 6 : théorème de Millman

A l'aide du théorème de Millman, donner le courant i circulant dans la résistance R.

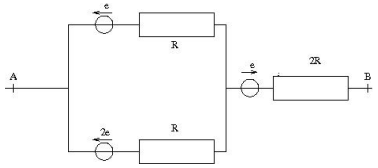


⚠ Attention…

A ne pas utiliser à la sortie d'un amplificateur opérationnel (sinon, il faut ajouter la variable i_s courant de sortie de l'AO).

2 Equivalences de Thévenin et Norton

Application 7 : modèle de Thévenin



En utilisant des subsitutions de proche en proche, donner le générateur équivalent au générateur suivant. Le représenter en notation de Thévenin puis de Norton.

3 Théorème de superposition

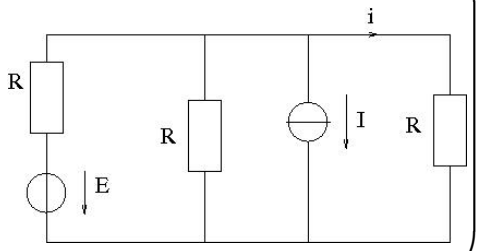
L'état électrique d'un circuit linéaire comportant une distribution quelconque de sources indépendantes (tension et courant) est obtenu en superposant les états associés à chaque source supposée seule dans le circuit :

✓ l'intensité du courant circulant dans une branche est la somme des intensités produite par chaque source seule (les autres étant éteintes)

✓ la tension aux bornes d'un dipôle est la somme des tensions produites par chaque source supposée seule.

Application 8 : théorème de superposition

A l'aide du théorème de superposition, donner le courant i circulant dans la résistance R.



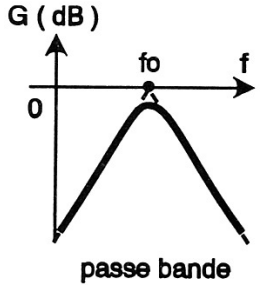
⚠ Attention…

Ne pas éteindre les sources commandées lors de l'utilisation du théorème de superposition.

Chapitre A2 : Etude des Filtres

Fourier

PARTIE A : ELECTROCINÉTIQUE
A-1 : Bases de l'électrocinétique
A-2 : Etude des filtres
A-3 : Impédance e/s
A-4 : Compléments
A-5 : Circuit R,L,C
A-6 : Ampli. Op.



Filtre passe-bande

I Définitions

1 Fonction de transfert

DÉFINITION :

La **fonction de transfert en tension** s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Après calcul, $\underline{H}$ s'écrit donc sous la forme d'un quotient de 2 polynômes

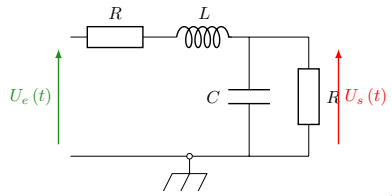
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

DÉFINITIONS :

L'**ordre de la fonction de transfert** correspond à à l'ordre le plus élevé des polynômes D ou N.
Les racines du polynôme N sont les **zéros** de la fonction de transfert $\underline{H}$.
Les racines du polynôme D sont les **pôles** de la fonction de transfert $\underline{H}$.

Application 1 : Expression de $\underline{H}$

Exprimer la fonction de transfert pour le montage suivant.



2 Relation avec l'équation différentielle du circuit

Le circuit étant linéaire, il existe une équation différentielle linéaire entre la grandeur de sortie s et la grandeur d'entrée e, soit

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} + ... + a_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + a_0 s = b_m \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m} + ... + b_1 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + b_0 e$$

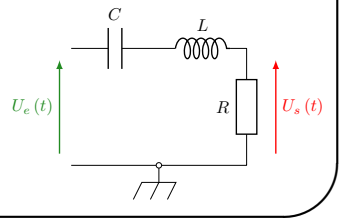
DÉFINITION :

L'**ordre du circuit** est l'ordre de l'équation différentielle et s'identifie donc à l'**ordre de la fonction de transfert**.

Application 2 : retrouver l'équation différentielle du circuit à partir de $\underline{H}$

On s'intéresse au circuit ci-contre.

1. Etablir la fonction de transfert du circuit donné.
2. En déduire l'équation différentielle associée.



3 Stabilité d'un circuit

Définition :

Un montage est dit **stable** lorsque sa tension de sortie reste bornée pour une tension d'entrée bornée.

⚠ Attention...

Les critères de stabilité d'un circuit linéaire (ordre 1 ou 2)

Soit

$$\underline{H} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

avec

$$N(j\omega) = \sum_{k=0}^{n} b_k \ (j\omega)^k \qquad D(j\omega) = \sum_{k=0}^{m} a_k \ (j\omega)^k$$

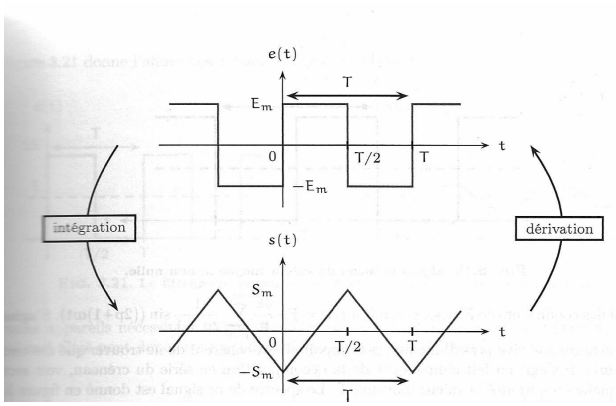
Un filtre d'ordre 1 ou 2 a un fonctionnement linéaire STABLE en régime libre si tous les **coefficients du dénominateur $D(j\omega)$ de $\underline{H}$ sont de même signe**.

Il est STABLE en régime sinusoïdal forcé, si de plus,

- ✗ **a_1 est non nul** et ;
- ✗ **degré de $N(j\omega) <$ degré de $D(j\omega)$**.

4 Comportement intégrateur, dérivateur

Dérivateur : lorsque la fonction de transfert est égale à $\underline{H} = jx \rightarrow v_s = \frac{1}{\omega_0}\frac{dv_e}{dt}$ Intégrateur : lorsque la fonction de transfert est égale à $\underline{H} = \frac{1}{jx} \rightarrow v_s = \frac{1}{\omega_0}\int v_e dt$



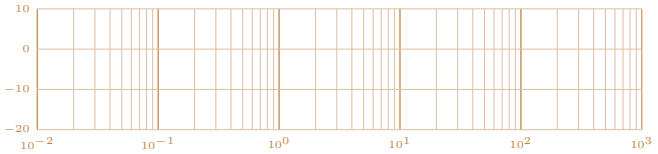
II Diagramme de Bode

1 Papier semi-logarithmique

Définition :

C'est l'ensemble des deux graphes qui donnent en fonction de la fréquence f, de la pulsation ω ou encore de la grandeur réduite $x = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$:

- ✗ le gain en décibel $GdB = 20\log|\underline{H}|$
- ✗ le déphasage Φ.



En général, ces graphiques sont construits sur papier semi-logarithmique (voir ci-contre)

Application 3 : Placer correctement des points sur papier semi-log

En TP, on effectue les mesures d'amplitude suivantes ; le signal d'entrée présente une amplitude $V_e = 1$ V.

f (kHz)	0,5	1	2	10	15	20	50	100	200	500
V_s (V)	0,999	0,999	0,989	0,775	0,623	0,514	0,236	0,121	0,067	0,024
G_{dB}										

1. Compléter soigneusement le graphe donnant le gain en décibels en fonction de la fréquence.
2. En déduire la nature du filtre.
3. Tracer les asymptotes.
4. Mesurer graphiquement la bande passante de ce filtre.

2 Déphasage

2.a Définitions

Définition :

En régime sinusoïdal forcé, on a :

$$\begin{aligned} v_e &= v_{em}\cos(\omega t + \varphi_e) \\ v_s &= v_{sm}\cos(\omega t + \varphi_s) \end{aligned}$$

En notation complexe, la fonction de transfert $\underline{H}$ peut s'exprimer en fonction de son module $|\underline{H}|$ et de sa phase φ

$$\underline{H} = |\underline{H}|e^{j\varphi}$$

On note φ le **déphasage** de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée

$$\varphi = \varphi_s - \varphi_e = \arg(H)$$

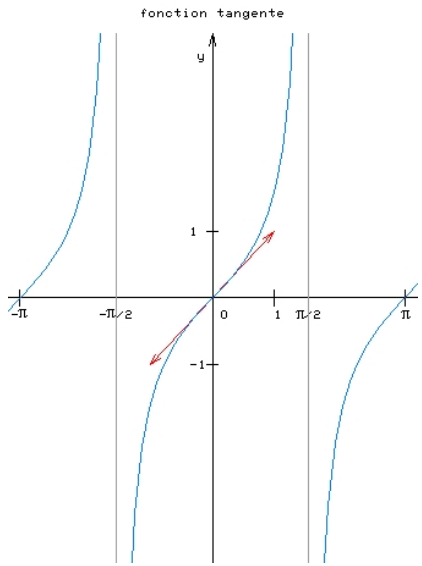
2.b Propriétés

Pour exprimer la valeur du déphasage, on donne en général la valeur de $\tan\varphi$

$$\tan\varphi = \frac{Im(\underline{H})}{Re(\underline{H})}$$

avec

$$\varphi \in]-\pi, \pi]$$



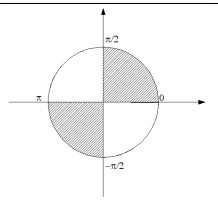
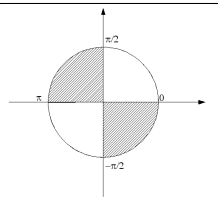
Dans cet intervalle, pour une valeur de $\tan\varphi$ donnée, φ peut prendre deux valeurs (voir figure ci-contre)

Donner la valeur de $\tan\varphi$ est donc insuffisant. On est donc ammené à étudier le signe de $\sin\varphi$ ou $\cos\varphi$. Dans la pratique, on étudiera le signe sur l'expression la plus simple. Dans tous les cas le dénominateur $|\underline{H}| > 0$.

$$\sin\varphi = \frac{Im(\underline{H})}{|\underline{H}|} \quad (A.3)$$

$$\cos\varphi = \frac{Re(\underline{H})}{|\underline{H}|} \quad (A.4)$$

On a résumé dans le tableau suivant les différents cas :

	
$\tan\varphi > 0$ $\sin\varphi < 0 \Rightarrow \varphi \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ $\sin\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$	$\tan\varphi < 0$ $\sin\varphi < 0 \Rightarrow \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ $\sin\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

Si $\underline{H} = \dfrac{1}{\underline{G}}$ alors $\varphi' = \arg(\underline{G}) = -\arg(\underline{H}) = -\varphi$.
D'où

$$\tan\varphi = -\frac{Im(\underline{G})}{Re(\underline{G})} \qquad (A.5)$$

$$\sin\varphi = -\frac{Im(\underline{G})}{|\underline{G}|} \text{ et } \cos\varphi = \frac{Re(\underline{G})}{|\underline{G}|} \qquad (A.6)$$

Remarque :

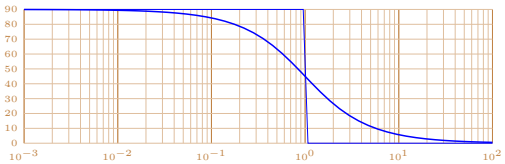
⚠ ATTENTION…

Cette méthode de calcul de la phase ne s'applique pas pour des fonctions de transfert dont le numérateur est différent de 1, comme

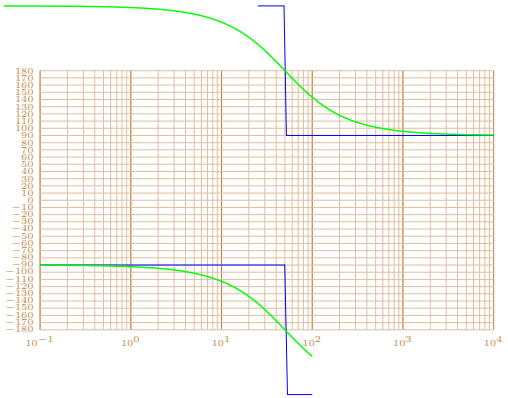
$$\underline{H} = \frac{jx}{1+jx} \text{ ou } \underline{H} = \frac{jx}{1+jx-x^2}$$

2.c Allure de la courbe de réponse en phase

L'allure de la courbe présente toujours la même allure (du haut vers le bas).



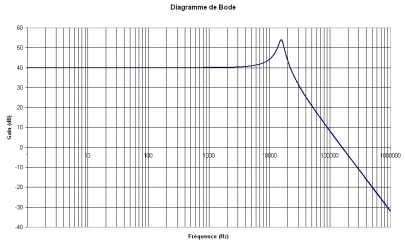
Propriété à connaître



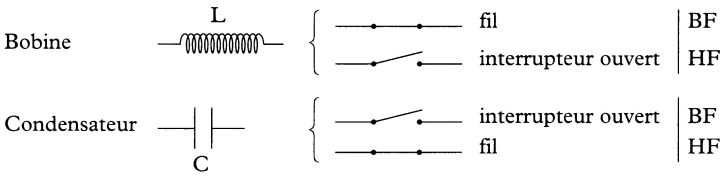
Il est néanmoins possible d'avoir la courbe en deux morceaux, comme sur l'exemple ci-contre, afin de rester dans l'intervalle défini en physique $\varphi \in]-\pi, \pi]$.

Propriété à connaître

III Etude des filtres



1 Prévoir la nature d'un filtre sans calcul



1. Remplacer les condensateurs et les bobines du circuit réel par leurs modélisations basses fréquences (resp. hautes fréquences)
2. Déterminer si la tension V_s s'annule ou non pour le circuit simplifié
3. Reprendre ces deux étapes aux hautes fréquences.
4. Conclure sur la nature du filtre suivant ce tableau récapitulatif

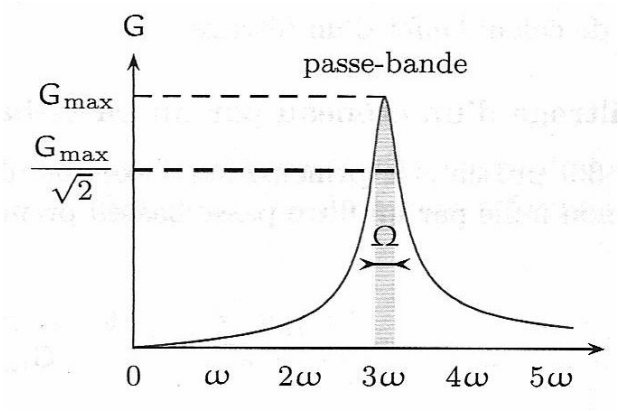
		Hautes Fréquences	
		$V_s = 0$	$V_s \neq 0$
Basses fréquences	$V_s = 0$	***Passe-bande***	***Passe-haut***
	$V_s \neq 0$	***Passe-bas***	***Coupe-bande*** ou réjecteur de fréquences

DÉFINITION :

La **bande passante à -3 dB** est l'ensemble ds pulsations pour lesquelles la fonction de transfert vérifie

$$|\underline{H}|(\omega) \geq \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\text{dB}} \geq G_{\text{dB max}} - 3dB$$

Les **pulsations de coupures** ω_c vérifient l'égalité $|\underline{H}|(\omega_c) = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$



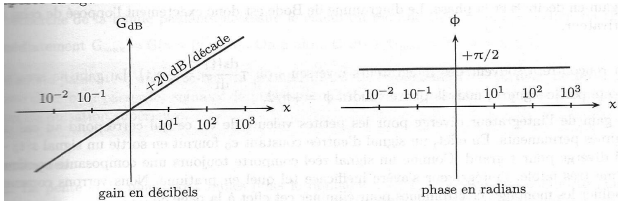
2 Méthode générale

Point méthode -

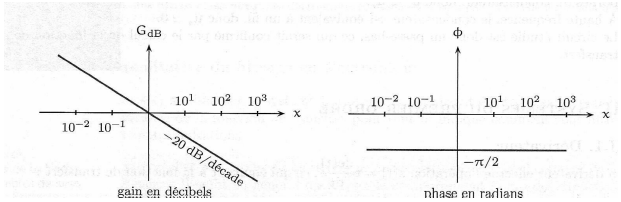
1. Calcul de la fonction de transfert $\underline{H}$
2. Discuter de la nature du filtre
   - ✗ en se ramenant à une forme canonique usuelle ;
   - ✗ en étudiant le comportement asymptotique de la fonction
3. Donner les expressions de son module $|\underline{H}|$ et du gain en décibels G_{dB}
4. Diagramme de Bode
   - ✗ description et équation des asymptotes (attention au gain statique)
   - ✗ étude de $\tan\varphi$
   - ✗ tracé des 2 courbes
   - ✗ Repérer les pulsations de coupure.

3 Filtres du premier ordre

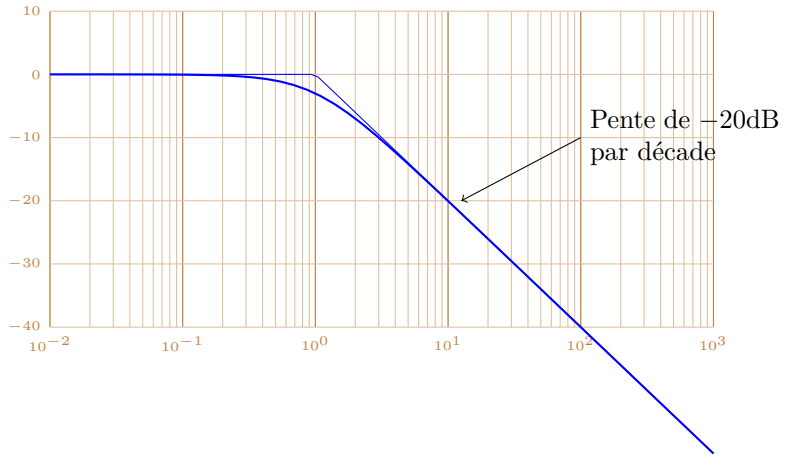
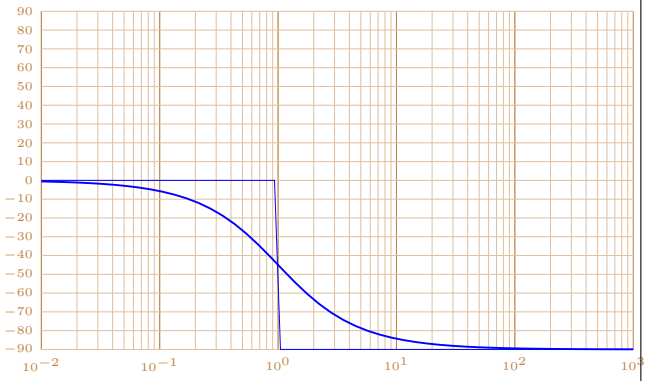
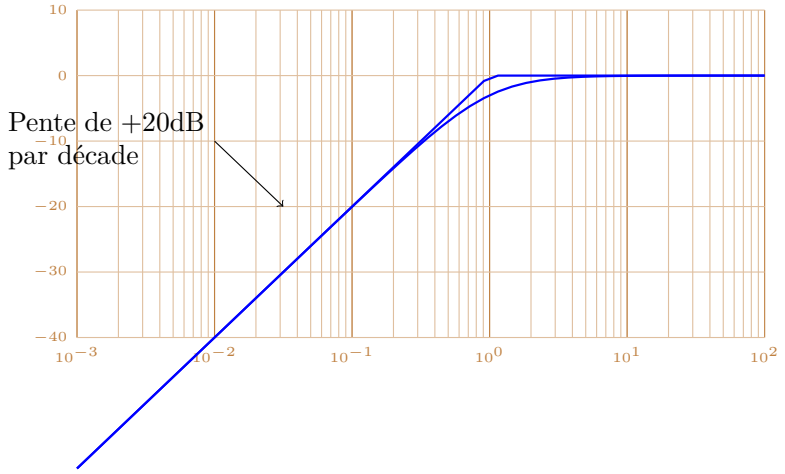
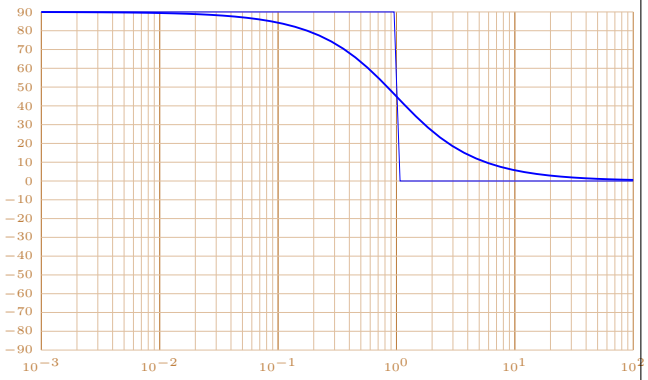
3.a Dérivateur



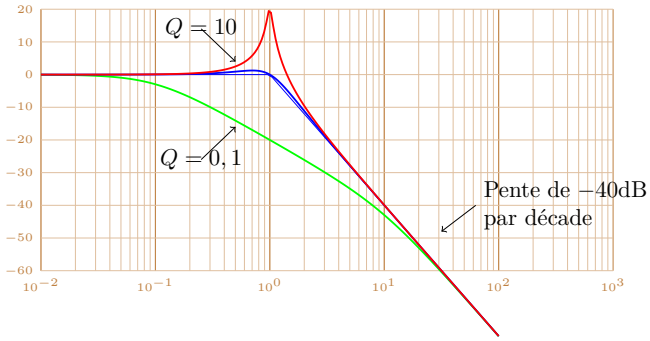
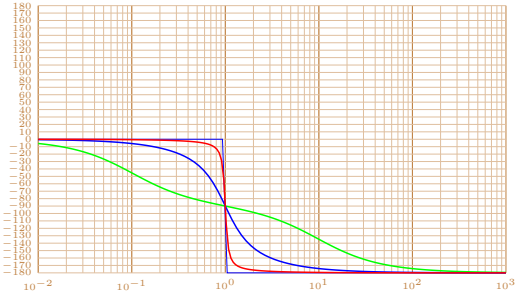
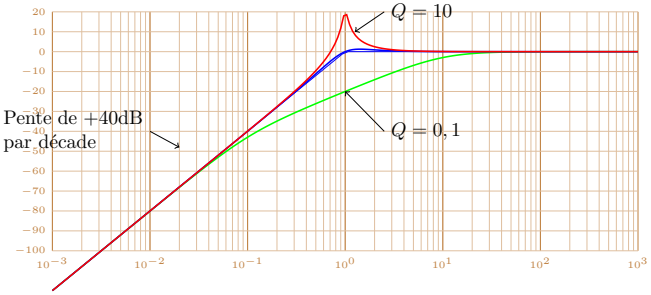
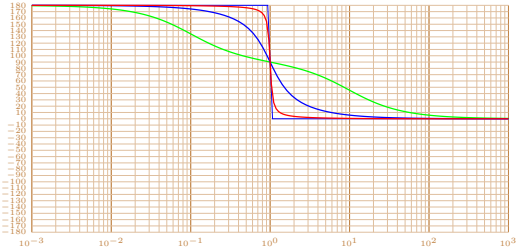
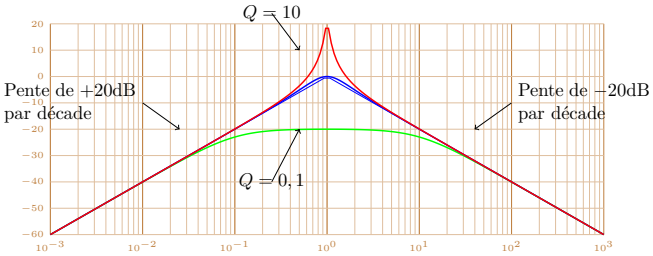
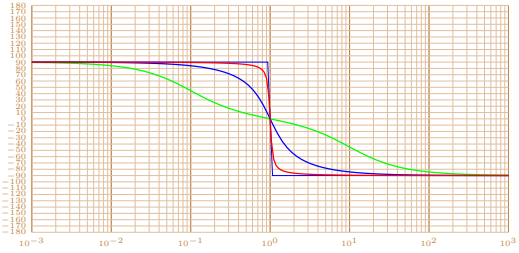
3.b Intégrateur



3.c Diagrammes de Bode

Fonction de transfert	Gain	Phase
Passe-bas d'ordre 1 $\underline{H}(jx) = \dfrac{1}{1+jx}$ *pseudo-intégrateur*		
Passe-haut d'ordre 1 $\underline{H}(jx) = \dfrac{jx}{1+jx}$ *pseudo-dérivateur*		

4 Filtres du deuxième ordre

Fonction de transfert	Gain	Phase
Passe-bas d'ordre 2 $\underline{H}(jx) = \dfrac{1}{1 + jx/Q + (jx)^2}$ *Résonance si* $Q > 1/\sqrt{2}$		
Passe-haut d'ordre 2 $\underline{H}(jx) = \dfrac{(jx)^2}{1 + jx/Q + (jx)^2}$ *Résonance si* $Q > 1/\sqrt{2}$		
Passe-bande d'ordre 2 $\underline{H}(jx) = \dfrac{jx}{1 + jx/Q + (jx)^2}$ *Bande passante à* -3 dB $\Delta\omega = \omega_0/Q$		

IV Filtrage et analyse de Fourier

1 Décomposition d'un signal, rôle du filtre

Tout signal $f(t)$ périodique de période T (soit $\omega = \frac{2\pi}{T}$), peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales. Cette somme comporte une infinité de termes , on lui donne le nom de série. On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + ... \\ f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right] \end{aligned}$$

Les nombres réels a_k et b_k se calculent par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt \end{aligned}$$

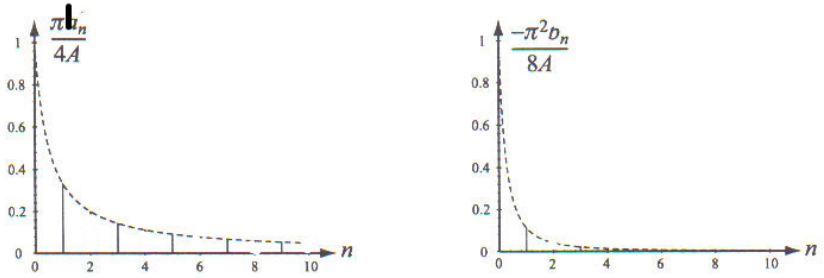
où t_0 est une date arbitraire (le calcul de l'intégrale ne dépend pas de t_0).

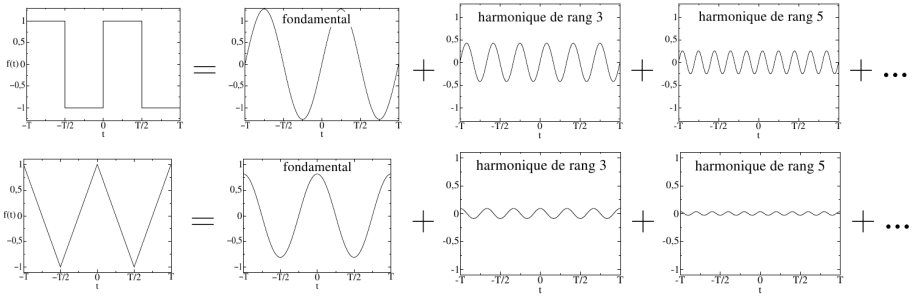
- a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de f d'ordre n ; on a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ et la série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right]$ est convergente.
- Si on calcule $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$, on écrit le développement de Fourier de la fonction f à l'ordre p.
- Si la fonction f est paire alors $\forall n,\ b_n = 0$
- Si la fonction est impaire alors $\forall n,\ a_n = 0$
- Si la fonction est symétrique par rapport à l'axe des x, alors $a_0 = 0$.

2 Exemples

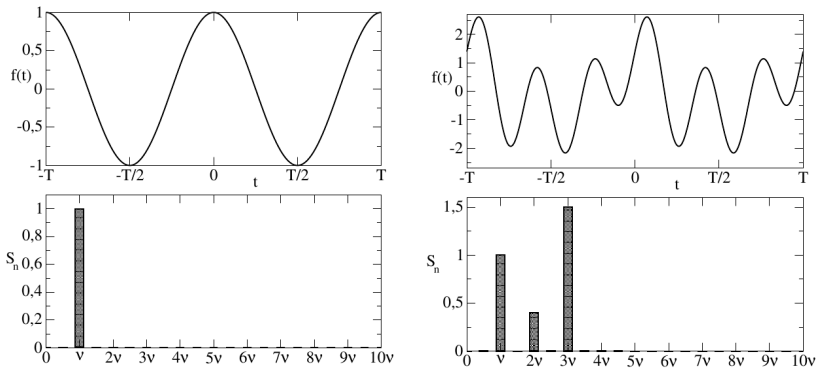
Signaux carré (impair) et triangulaire (pair) de valeur moyenne nulle

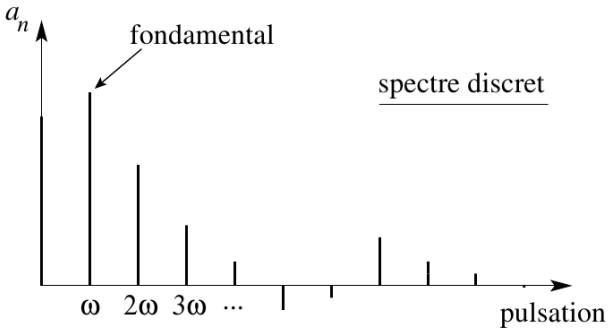
$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)\omega_0 t]}{2n+1} \qquad x(t) = -\frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos[(2n+1)\omega_0 t]}{(2n+1)^2}$$





3 Espace temporel et espace des fréquences





4 Filtrage d'un créneau par une filtre passe bande

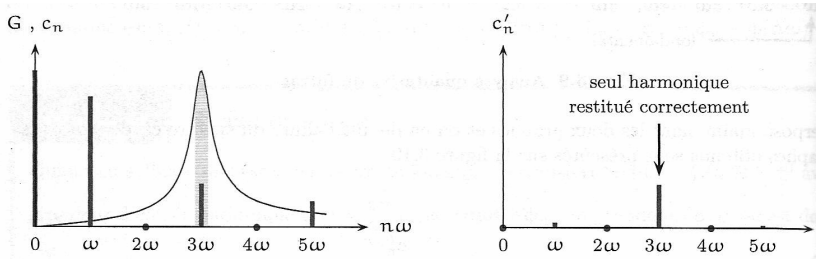
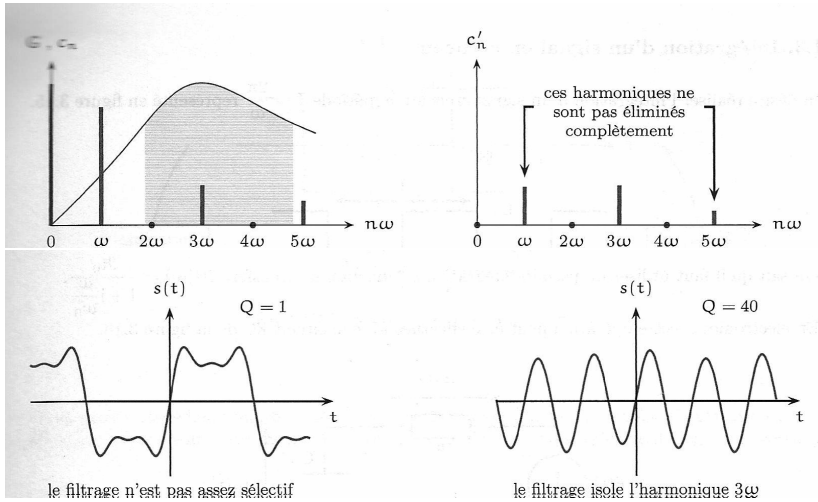
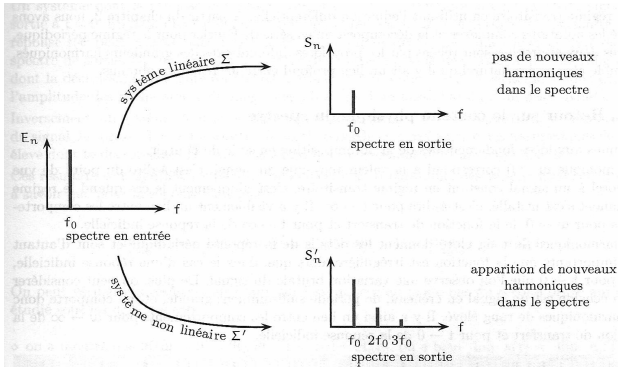


FIG. 3.12. Filtrage par un passe-bande très sélectif.



5 Test de linéarité



Chapitre A3 : Impédance d'entrée et de sortie

Haut Parleur

Partie A : Electrocinétique

A-1 : Bases de l'électrocinétique

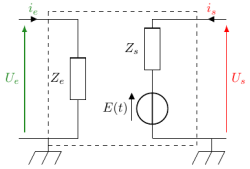
A-2 : Etude des filtres

A-3 : Impédance e/s

A-4 : Compléments

A-5 : Circuit R,L,C

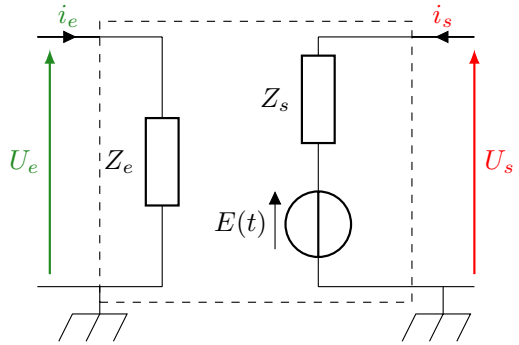
A-6 : Ampli. Op.



I Définition

Définition :

- Pour un quadripôle quelconque, on peut définir **l'impédance d'entrée** Z_e et **l'impédance de sortie** Z_s en représentant le dipôle équivalent comme ci-dessous.
- $Z_e = R_e + jX_e$, R_e **est la résistance d'entrée**.
- Du point de vue de l'étage en amont, on "voit" le quadripôle comme une impédance Z_e.
- Pour le circuit aval, le quadripôle se comporte comme une générateur de Thevenin $(E(t), Z_s)$.



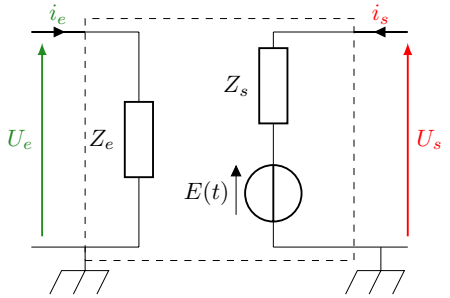
II Impédance d'entrée

1 Calculer une impédance d'entrée

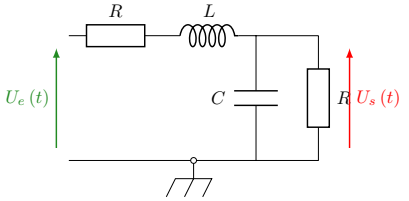
Définition :

L'impédance d'entrée d'un quadripôle est

$$Z_e = \frac{U_e}{i_e}$$



Application 1 : Exemple

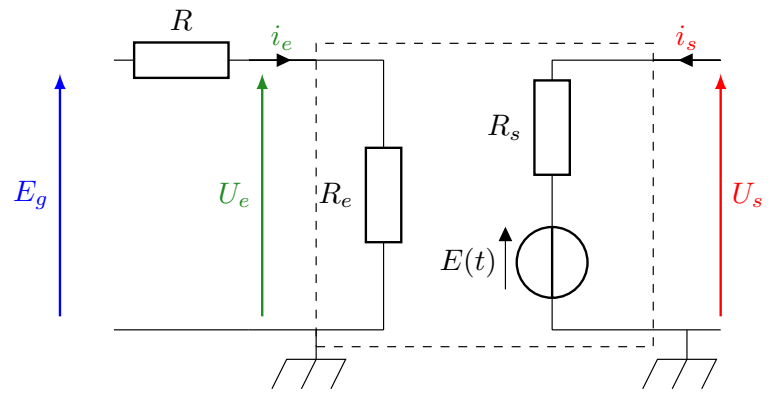


On considère le quadripôle composé de R, L en série en parallèle avec C, L. On trouve

$$Z_e = R + jL\omega \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

2 En TP, comment mesurer une résistance d'entrée

Savoir démontrer №1 : Détermination de la résistance d'entrée



✗ On utilise un GBF dont on règle la tension de sortie à E_g (on néglige la résistance de sortie du GBF).
✗ On place le GBF en série avec une résistance variable R, puis le quadripôle.
✗ On mesure la tension U_e à l'entrée du quadripôle qui vaut par la formule du diviseur de tension

$$U_e = E_g \frac{R_e}{R + R_e}$$

— On modifie la valeur de R , la valeur de U_e est donc modifiée.

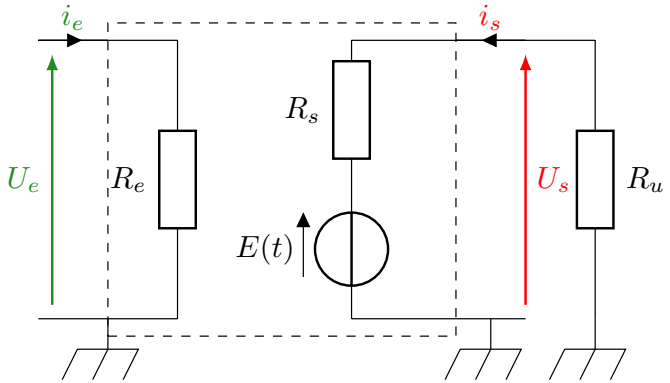
$$\text{Lorsque } U_e = \frac{E_g}{2} \rightarrow \boxed{R_e = R} \qquad \text{(A.7)}$$

III Impédance de sortie

Définition :

✗ L'impédance de sortie est **l'impédance équivalente** du modèle de Thèvenin équivalent au quadripôle qui apparait entre ses bornes de sortie.
✗ La fem équivalente au dipôle est une source de tension commandée (qui dépend des différentes fem et composants du quadripôle)

Savoir démontrer №2 : Détermination de l'impédance de sortie



Pour déterminer l'impédance de sortie d'un quadripôle, on mesure la tension de sortie à vide E, puis la tension de sortie U_s avec une charge R_u variable.
On a

$$U_s = E \frac{R_u}{R_u + R_s}$$

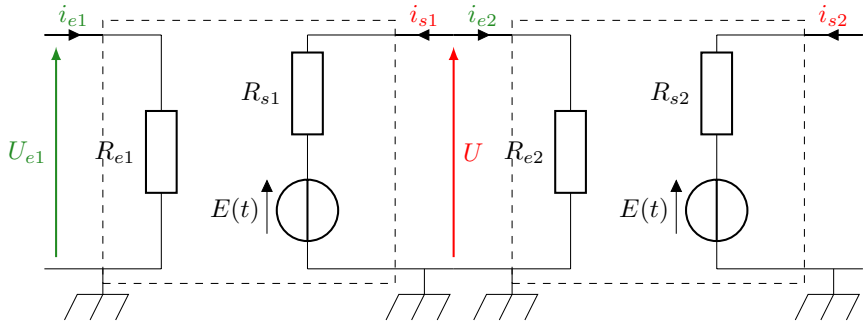
On fait varier la résistance R_u et

$$\text{lorsque } \boxed{U_s = \frac{E}{2} \rightarrow R_s = R_u} \qquad \text{(A.8)}$$

IV Un composant idéal a une résistance d'entrée grande et une résistance de sortie faible

Savoir démontrer №3 : Condition pour ne pas perturber le circuit

On utilise un montage (1) dont on a réglé la tension de sortie $E_1(t)$ à vide (c'est à dire sans rien brancher derrière).
On place un second montage (2) en aval du premier. On modelise chaque montage par son équivalent.



Le deuxième montage ne doit pas modifier le fonctionnement du premier, donc on souhaite que :

$$\forall E_1 \ \rightarrow \ U(t) = E_1(t)$$

Or

$$U(t) = E_1(t) \frac{R_{e2}}{R_{e2} + R_{s1}}$$

Il faut donc

$$\boxed{R_{e2} \gg R_{s1}}$$

Savoir démontrer №4 : Circuits idéaux

Pour être sûr que la condition soit satisfaite, un circuit idéal en amont aura :

$$\boxed{R_s \rightarrow 0}$$

Un circuit idéal en aval aura :

$$\boxed{R_e \rightarrow \infty}$$

Les circuits suivants sont quasi-idéaux :

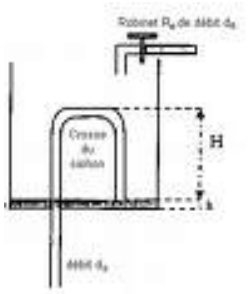
- ✗ **La résistance de sortie** d'un GBF est $R_s = 50\ \Omega$
- ✗ **La résistance d'entrée d'un oscilloscope ou d'une voltmètre** est $R_e \simeq 1\ M\Omega$
- ✗ Un AO a une impédance d'entrée sur la borne + et sur la borne − quasi-infinies , $R_{e+} = R_{e-} \simeq 10\ M\Omega$
- ✗ Un AO a une impédance de sortie très petite $R_s \simeq 10\ \Omega$

Propriétés à connaître

Un ampèremètre a une impédance d'entrée de $R_e \simeq$ qq Ω : il est **non idéal et perturbe un circuit** si il est branché en parallèle.

Propriété à connaître

Chapitre A4 : Compléments



vase de Tantale

PARTIE A : ELECTROCINÉTIQUE

A-1 : Bases de l'électrocinétique

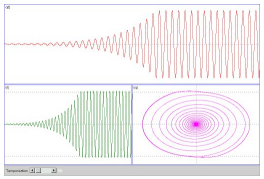
A-2 : Etude des filtres

A-3 : Impédance e/s

A-4 : Compléments

A-5 : Circuit R,L,C

A-6 : Ampli. Op.



Début des oscillations

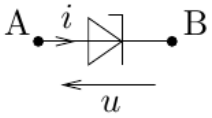
I Diodes Zener

La caractéristique d'une diode Zener présente trois domaines distincts :

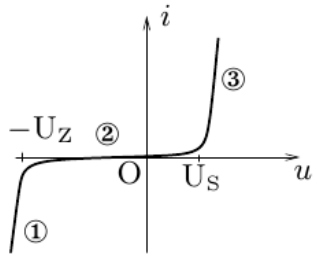
1. Domaine ①, diode passante en sens inverse
2. Domaine ②, diode bloquée $i \simeq 0$
3. Domaine ③, diode passante en sens direct.

   La tension de seuil U_S comme pour une diode à jonction est de l'ordre de $0,6$ V.

   La résistance dynamique r vaut quelques ohms.



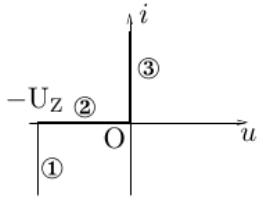
Symbole d'une diode Zéner

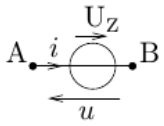
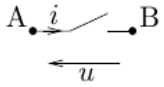
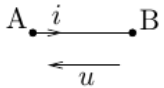


Caractéristique de la diode

La tension Zener est fixée par le dopage du semi-conducteur et elle peut varier entre quelques volts à quleques centaines de Volts .

Diode Zener Idéale :



	état	circuit équivalent	égalité	condition
		source de tension U_Z		
①	diode passante sens inverse		$u = -U_Z$	$i < 0$
		coupe-circuit		
②	diode bloquée		$i = 0$	$-U_Z < u < 0$
		court-circuit		
③	diode passante sens direct		$u = 0$	$i > 0$

II Photodiode

Une photodiode est un composant électro-optique dont la caractéristique électrique dépend de la puissance lumineuse moyenne reçue au niveau de sa surface sensible. Une photodiode, représentée sur la figure ci dessous, a une caractéristique donnée par :

$$i(u) = I_0\left(e^{u/V_0} - 1\right) - I_p$$

où I_0, V_0 sont des constantes, I_p est le photocourant est proportionnel à la puissance lumineuse reçue selon la loi $I_p = kP_l$.

Figure 2

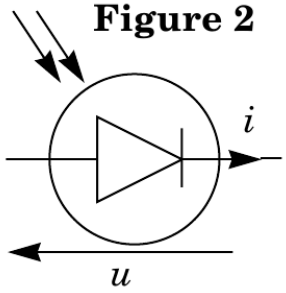
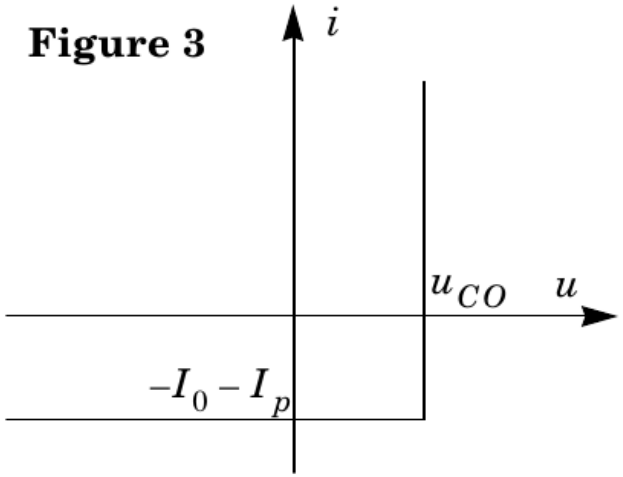
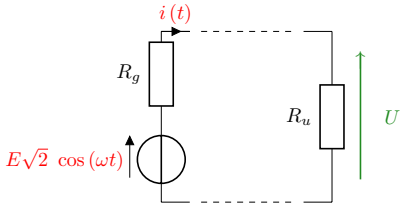


Figure 3



III Adaptation d'impédance

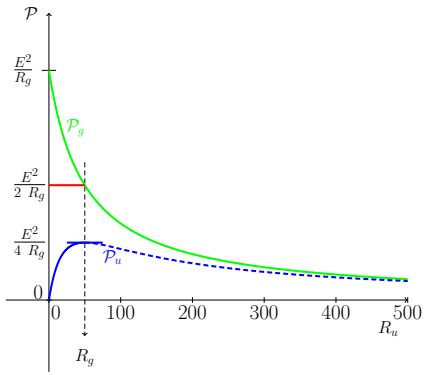


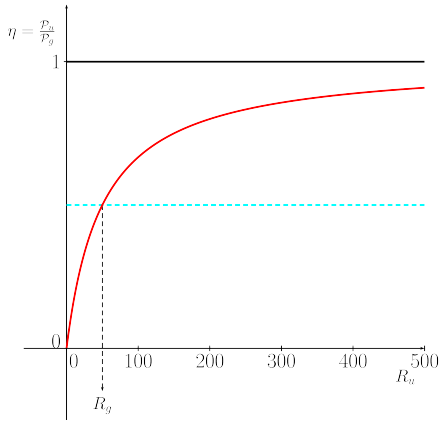
On branche un générateur de résistance de sortie R_g sur une charge résistive R_u.

On cherche à transférer un maximum de puissance à la charge R_u

La courbe ci-dessous à gauche montre que la puissance délivrée par le générateur $\mathcal{P}_u$ est maximale pour $R_g = R_u$.

Le rendement cependant est optimum pour $R_u \to \infty$.





Savoir démontrer №1 : Transfert maximum de puissance

Pour une charge complexe $\underline{Z}_c$ et une impédance du générateur complexe $\underline{Z}_u$, l'adaptation d'impédance est optimum pour

$$\overline{\underline{Z}_u} = \underline{Z}_c$$

⚠ Attention…

En électronique, on cherche à ne pas faire dissiper de puissance aux appareils, en conséquence :
- impédances de sortie sont faibles - Les impédances d'entrée sont très grandes

IV Exemple d'oscillateur quasi-sinusoïdal

1 Définitions

Définitions :

✗ Un oscillateur électronique est un système qui délivre un signal périodique
✗ Plusieurs types : à relaxation (oscillent entre deux états de fonctionnement), paramétriques (obtenus avec variation dans le temps d'un paramètre)et quasi-sinusoïdaux (donnent un signal sinusoïdal).
✗ Ils nécéssitent une alimentation.
✗ L'amplitude des oscillations est déterminée par les tensions de saturation.

2 Propriétés

✗ Pour savoir si le système va osciller, il faut résoudre l'équation différentielle du circuit.
✗ Pour un système du second-ordre :
Pour une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2v_s}{dt^2} + \alpha\omega_0\frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = 0$$

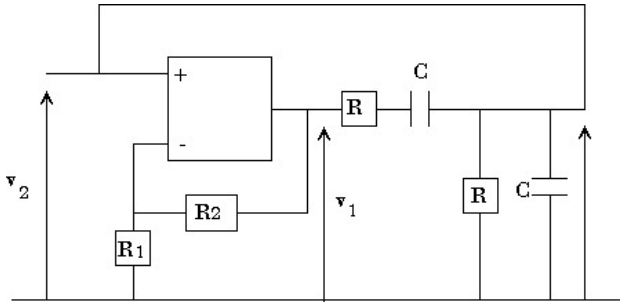
Si $\Delta < 0$, on peut avoir des oscillations, alors :
— pour $\alpha = 0$, on obtient des oscillations
— pour $\alpha < 0$, oscillations avec saturations à $\pm V_{\text{Sat}}$
— pour $\alpha > 0$, signal de sortie nul
✗ En notation complexe, les oscillations sont supposées, donc le calcul de la fonction de transfert donne directement la condition d'oscillation et la pulsation de résonance.

Conditions d'oscillation

✗ Pour l'équation différentielle :
Les conditions d'oscillation sont : $\alpha = 0$
La pulsation de d'oscillation est donnée par ω_0
✗ En notation complexe : l'étude de la partie réelle et de la partie imaginaire donne les deux conditions.

Propriétés à connaître

3 Exemple du pont de Wien



✗ Montrer que la relation entre v_2 et v_1 peut s'écrire sous la forme :

$$H = \frac{v_2}{v_1} = \frac{jx}{1 + 3jx - x^2}$$

On a posé $x = RC\omega$
✗ En déduire que l'équation différentielle vérifiée par v_s est :

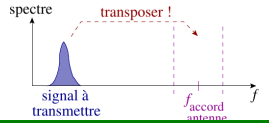
$$\frac{d^2v_s}{dt^2} + \omega_0\left(3 - k\right)\frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = 0$$

Avec $k = 1 + \frac{R_2}{R_1}$; donner la valeur de ω_0.
✗ Donner l'expression de v_s en fonction de la valeur de k.Dans quelle situation, obtient-on des oscillations ?

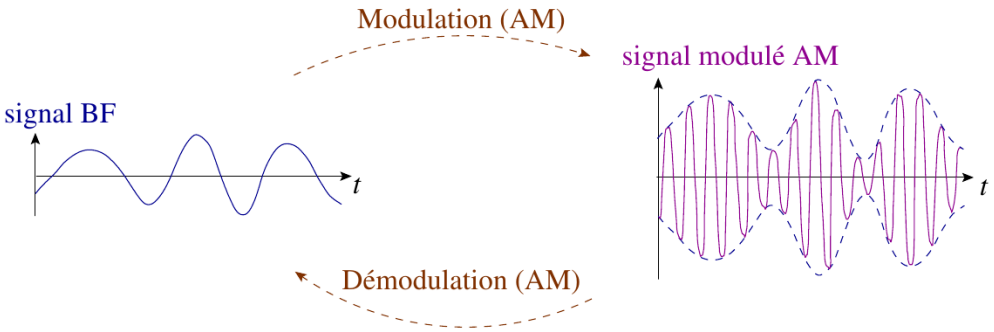
V Modulation et Démodulation

DÉFINITION :

On appelle **modulation** la technique qui permet de transposer, dans une bande étroite de fréquences autour de la fréquence d'accord de l'antenne , les informations basses fréquence à communiquer.



Exemple de la modulation d'amplitude : l'amplitude de la porteuse varie au rythme du signal basse fréquence.



Application 1 : Modulation d'amplitude

Le signal qui contient l'information est

$$s(t) = s_0 \cos \Omega t$$

,

La porteuse est

$$P(t) = p_0 \cos \omega t$$

Le signal modulé est $M = ks(t) P(t) + P(t)$

1. Donner les spectres de s, P et M.
2. Soit $m = ks_0$, le taux de modulation. Donner l'allure de $P(t)'$ lorsque $0 < m < 1$.
3. Lorsque $m > 1$, il y a surmodulation, représenter $P(t)$.

VI *Analyse par transformée de Fourier*

Le développement en séries de Fourier a été présenté dans le cours, il ne s'applique que pour les fonctions $f(t)$ périodiques.

Pour représenter le spectre d'une fonction non périodique, on utile la transformée de Fourier :

soit $f(t)$ une fonction intégrable, sa densité spectrale s'écrit :

$$\underline{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) \, \mathrm{d}t$$

— Si la fonction $f(t)$ est réelle, alors $\underline{F}(\omega)$ est paire. On n'étudie donc en physique que la partie positive.
— Si f est réelle et paire, la TF est réelle et paire.
— L'extension spatiale Δt de la fonction réelle est lié à l'extension spectrale de la TF par la relation :

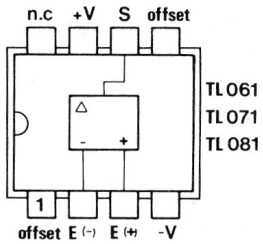
$$\Delta\omega \Delta t \simeq 2\pi$$

Propriétés à connaître

Chapitre A5 : Etude de l'Amplificateur Opérationnel

Amplificateur Opérationnel

PARTIE A : ELECTROCINÉTIQUE
A-1 : Bases de l'électrocinétique
A-2 : Etude des filtres
A-3 : Impédance e/s
A-4 : Compléments
A-5 : Circuit R,L,C
A-6 : Ampli. Op.



Composant

I Description de l'AO

1 Amplificateur opérationnel

DÉFINITIONS :

✗ Un AO est une composant **actif** alimenté en continu (en général entre +15 V et −15 V), présentant deux entrées appelées entrées inverseuse (−) et non inverseuse (+).

✗ Ce composant est conçu pour réaliser une **amplification différentielle** en tension :

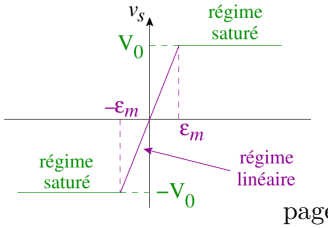
$$v_s = A\,(v_+ - v_-) = A\epsilon \quad \text{tant que} \quad |v_s| \leq V_{\text{Sat}}$$

✗ $A \simeq 10^6$ est le **gain** et ϵ la tension différentielle.

On peut donc différentier deux régimes de fonctionnement que l'on résume sur le diagramme ci-contre.

✗ Le régime linéaire pour $-\epsilon_m \leq \epsilon \leq \epsilon_m$

✗ Le régime saturé dans les autres cas.

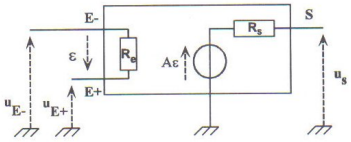


2 Résistances d'entrée et de sortie

DÉFINITIONS :

✗ On note R_e la **résistance d'entrée** de l'AO, c'est la résistance équivalente à l'AO vue de l'entrée.

$$R_e = \frac{v_+ - v_-}{i_e}$$

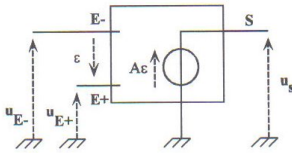


✗ On note R_s la **résistance de sortie** de l'AO, c'est la résistance équivalente hévenin de l'AO vue de la sortie.

$$u_s = A\epsilon + R_s i_s$$

Par convention, les courants i_e et i_s entrent dans l'AO.

3 Modèle de l'AO idéal



✗ **Impédance d'entrée R_e infinie**

✗ **Impédance de sortie $R_s = 0$**

✗ Gain statique est **infini** $\rightarrow \epsilon = 0$

✗ Il comporte tout de même des saturations

✗ u_s reste constante quelle que soit la charge

Propriétés à connaître

4 Fonctionnement linéaire, non linéaire

DÉFINITIONS :

✗ En **zone (ou régime) linéaire**, on a $\epsilon \to 0$ et $A \to \infty$, et

$$v_+ = v_- \quad \text{tant que} \quad |v_s| \leq V_{\text{Sat}}$$

✗ En **zone saturée**, $\epsilon \neq 0$ et

$$v_s = \text{signe}(\epsilon) \times V_{\text{Sat}}$$

✗ Lorsqu'une impédance relie **l'entrée inverseuse et la sortie**, l'AO est en régime **linéaire**
✗ Lorsqu'une impédance relie **l'entrée non-inverseuse et la sortie**, l'AO est en régime **saturé**.
✗ Si les deux bornes sont reliées à la sortie, il faut étudier l'équation différentielle pour connaitre le régime.

Propriétés à connaître

II Défauts statigues de l'AO réel

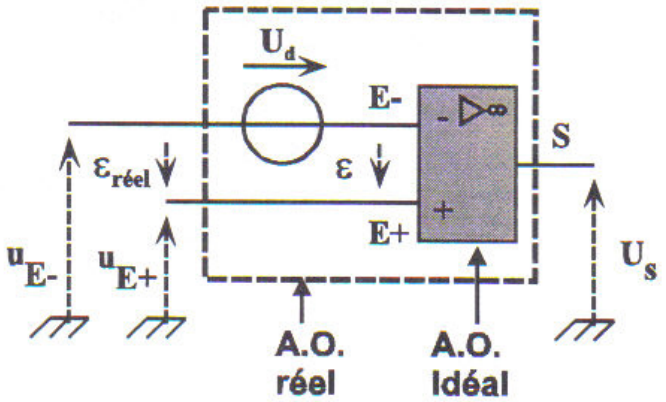
1 Saturations en tension et en courant

DÉFINITION :

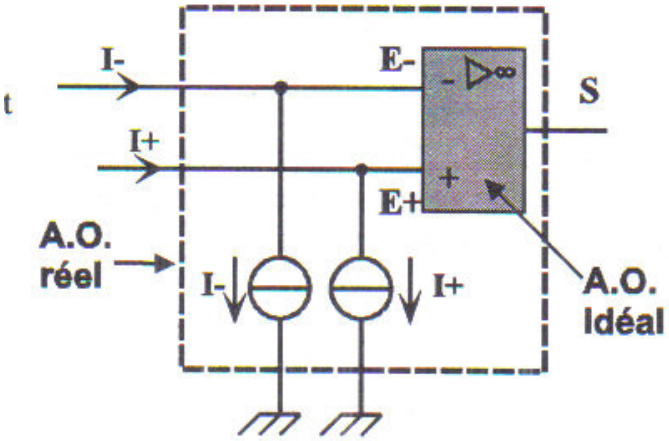
✗ La tension de sortie est limitée aux valeur $+V_{Sat} \simeq 15V$ et $-V_{Sat}$, dans ce domaine l'AO a donc un fonctionnement non linéaire.
✗ La valeur absolue de l'intensité du courant de sortie d'un AO est limité à la valeur $i_{Sat} \simeq 20$ mA.

2 Tension de décalage et courants de polarisation

Expérimentalement, on observe une différence de tension entre la borne inverseuse et non inverseuse différente de ε, Le schéma d'un AO réel peut être décrit comme celui de la figure ci-dessous :



Voici une description des courants de polarisation :



$$U_S = A\epsilon_i$$

III Comportement dynamique

1 Fonction de transfert dynamique

DÉFINITIONS :

✗ l'AO peut être modélisé par un **filtre passe-bas** du premier ordre :

$$A = \frac{A_0}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$

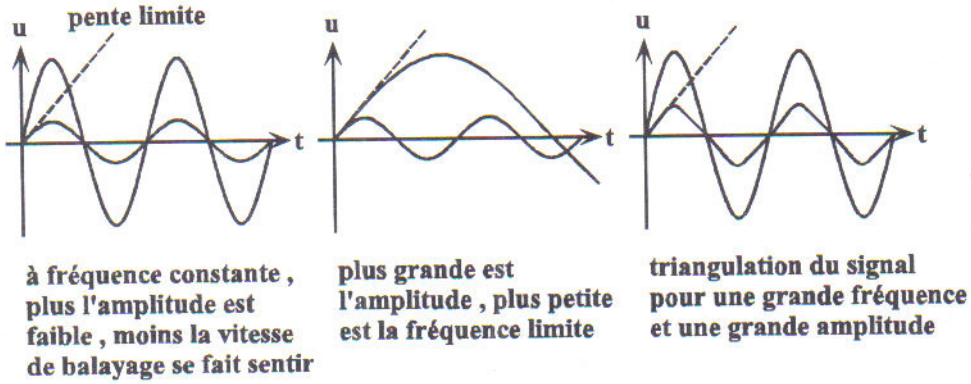
✗ $A_0 \simeq 10^5$ est le gain statique, f_0 est la fréquence de coupure $f_0 \simeq 10$ Hz.

2 Slew-rate

La pente du signal de sortie : $\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}t}$ est bornée à une valeur maximale nommée slew-rate : s_r

$$\left|\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}t}\right| \leq s_r \qquad \text{(A.9)}$$

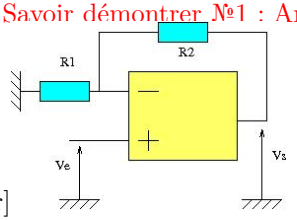
Cela provoque une déformation du signal comme on peut l'observer sur le schéma suivant :



IV Montages classiques linéaires

1 Amplificateur non inverseur

Savoir démontrer №1 : Amplificateur non inverseur



[r]

✗ La fonction de transfert avec un AO idéal est

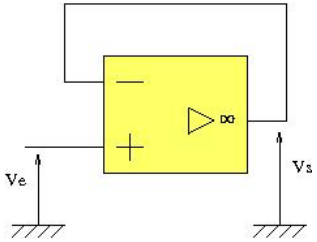
$$\underline{H} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

✗ La fonction de transfert est

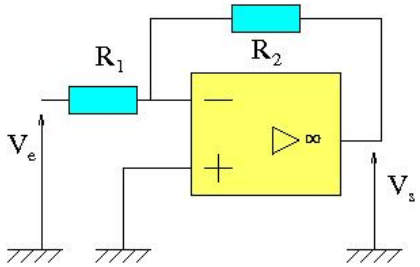
$$\underline{H} = \frac{A_0}{1 + \frac{A_0 R_1}{R_1 + R_2} + jx}$$

✗ En déduire que ce montage est stable.

2 Suiveur

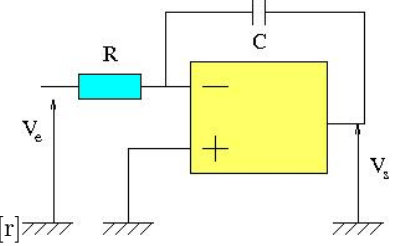


3 Amplificateur inverseur



4 Intégrateur

Savoir démontrer №2 : Intégrateur



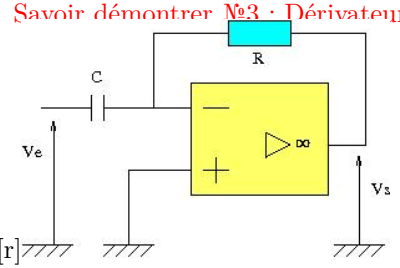
[r] Le pseudo-intégrateur est réalisé en plaçant une résistance R' en parallèle avec C, on trouve alors

$$\underline{H} = -\frac{\frac{R'}{R}}{1 + jR'C\omega}$$

Ce montage est intégrateur pour $\omega \gg \frac{1}{R'C}$

5 Dérivateur

Savoir démontrer №3 : Dérivateur

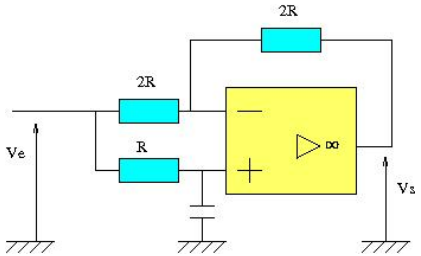


[r] Le pseudo-dérivateur est réalisé en plaçant une résistance R' en série avec C, on trouve alors

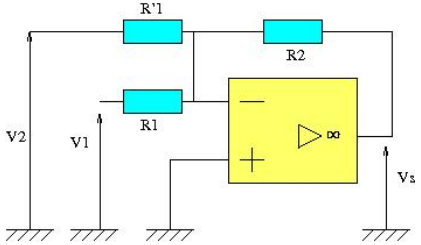
$$\underline{H} = -\frac{jRC\omega}{1 + jR'C\omega}$$

Ce montage est dérivateur pour $\omega \ll \frac{1}{R'C}$

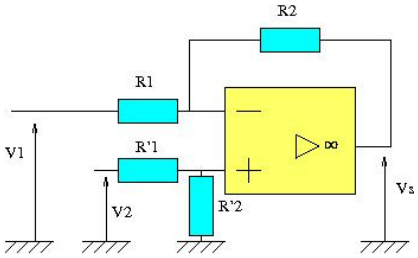
6 Déphaseur



7 Sommateur inverseur

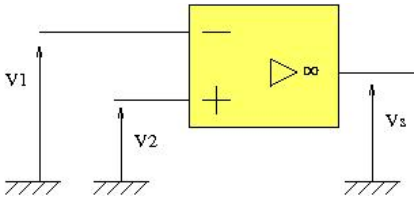


8 Soustracteur



V Montages classiques avec AO non-linéaire

1 Comparateur simple



2 Comparateur à hystérésis

2.a le comparateur à hystérésis inverseur

Méthode pour obtenir la courbe $v_s = f(v_e)$

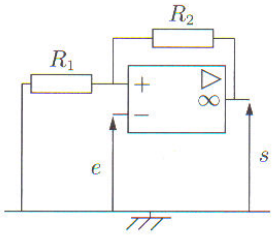
La tension extérieure est de la forme $e(t) = e_{\max}\cos(\omega t)$

L'AO est idéal en régime non linéaire, donc la tension de sortie $s = V_s = \pm V_{sat}$.

$$\varepsilon = \frac{R_1}{R_2 + R_1} V_s - e(t)$$

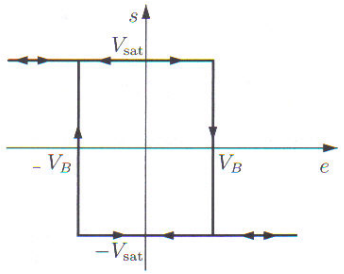
On note $\pm V_B = \pm \frac{R_1}{R_2+R_1} V_{sat}$ les tensions de bascule du montage.

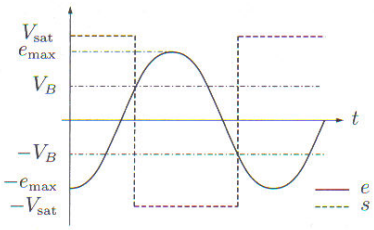
On suppose pour l'étude que $e_{max} > V_B$ pour faire une étude complète.



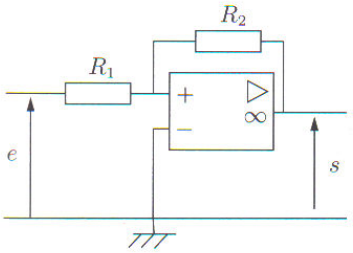
1. On suppose qu'à l'instant initial $e = -e_{max}$ et $V_s(0) = V_{sat}$.
   Rque : Si on suppose que $V_s(0) = -V_{sat}$, on trouve $\varepsilon(0) = -\frac{R_1}{R_2+R_1} V_{sat} - e_{max} > 0$, c'est en contradiction avec $V_s = -V_{sat}$.
2. On vérifie bien que $\varepsilon(0) = \frac{R_1}{R_2+R_1} V_{sat} - e_{max} > 0$, donc l'hypothèse est valable.
   On se place à $t > 0$, la tension $e(t)$ augmente.
3. L'AO va rester à V_{sat}, tant que $\varepsilon > 0$, soit tant que $e(t) < V_B$.
   Lorsque e atteint V_B, il y a bascule de l'AO, V_s passe de V_{sat} à $-V_{sat}$.
4. Pour $e(t) > V_B$, $V_S = -V_{sat}$, L'AO va rester à $-V_{sat}$, tant que $e(t) > -V_{B-}$
   La deuxième bascule a lieu pour $e(t) = -V_B$

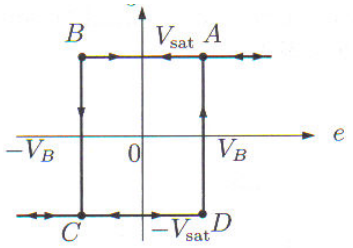
On obtient le schéma donné ci-dessous.

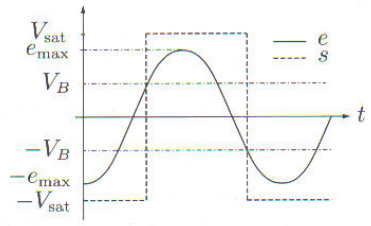




2.b Comparateur non inverseur







actéristique du comparateur non inverseur (

lu signal de sortie s obtenu avec un comparateur

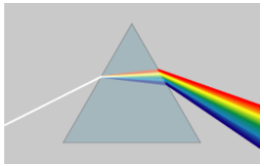
Partie B : Optique

Chapitre B0 : Optique géométrique

René Descartes (1596-1650)

Partie B : Optique

B-0 : Optique géométrique
B-1 : Modèle scalaire
B-2 : Sources lumineuses
B-3 : Interférences lumineuses
B-4 : Trous d'Young
B-5 : Exemples
B-6 : Michelson
B-7 : Diffraction
B-8 : Compléments
B-9 : Classiques Geo
B-10 : Simulations



Décomposition de la lumière par un prisme

I Les lois de l'optique géométrique

Propagation en ligne droite suivant des rayons lumineux dans un milieu LHI [1]
On définit :

- vitesse de propagation : $v = c/n$. Lorsque n dépend de la longueur d'onde ($n(\lambda)$), le milieu est dispersif.
- **chemin optique** $\mathcal{L}$: pour une distance L, parcourue dans le milieu d'indice n,

$$\mathcal{L} = nL = \int n \mathrm{d}\ell$$

L'approximation de l'optique géométrique, caractérisée par la loi de propagation rectiligne, est valable tant que l'on peut négliger le phénomène de diffraction.

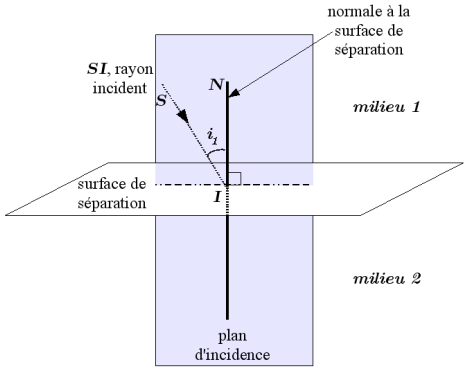
1. Linéaire Homogène Isotrope ; en général, les milieux sont également Transparents pour les longueurs d'onde optique.

Lois de la réflexion : rayon réfléchi dans le plan d'incidence et symétrique par rapport à la normale ($i' = i$)

Loi de la réfraction : rayon réfracté dans le plan d'incidence tel que : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

si $n_2 < n_1$, réflexion totale au delà d'une incidence limite $i_{\lim}$ t.q. $\sin i_{\lim} = \frac{n_2}{n_1}$ (car $i_{2\,\lim} = \frac{\pi}{2}$)

Prisme : milieu THI, d'indice n, limité par deux dioptres plans non parallèles, utile pour la **déviation** et la **dispersion** d'un faisceau lumineux.



$$\sin i = n \sin r$$
$$n \sin r' = \sin i'$$
$$r + r' = A$$
$$D = i + i' - A$$

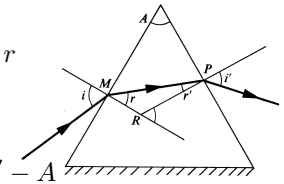


Figure B.1 – lois du prisme dans l'air

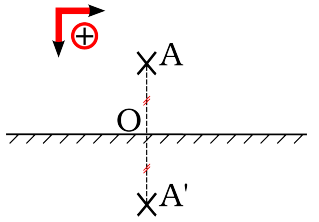


Figure B.2 – Miroir plan

Soit O, le projeté de A sur le miroir $\mathscr{M}_p$

$$\overline{OA'} = -\overline{OA}$$

II Lentilles minces et miroirs sphériques

***Stigmatisme* (d'un système optique) :** tout rayon lumineux issu d'un point A émerge du système optique en un unique point A' (image conjuguée de A).

***Aplanétisme* (d'un système optique) :** lorsque la propriété de stigmatisme est conservée dans tout plan perpendiculaire à l'axe optique.

***Conditions de Gauss* :** on ne prend en compte que les **rayons paraxiaux** (= proches de l'axe optique et peu inclinés par rapport à l'axe optique).

***Stigmatisme approché* :** (ou approximation de Gauss) pour le systèmes optiques usuels, dans les conditions de Gauss.

1 Lentilles minces

Définition : portion de milieu THI limité par 2 dioptres sphériques de sommets S_1 et S_2 confondus [2] en un point O, centre optique de la lentille

Stigmatisme rigoureux pour O.

Stigmatisme approché dans les conditions de Gauss.

Système focal centré : F et F' symétriques par rapport à O.

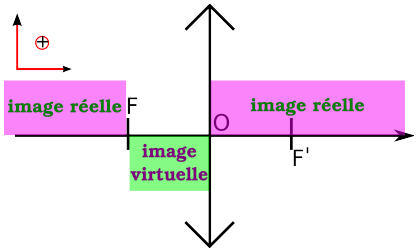
$$\mathcal{V} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OF'}} \begin{cases} \mathcal{V} > 0 & \text{pour } \mathcal{L} \text{ convergente,} \\ \mathcal{V} < 0 & \text{pour } \mathcal{L} \text{ divergente.} \end{cases}$$

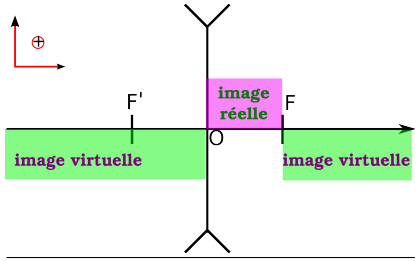
Savoir démontrer №1 : Relations de conjugaison

$$\gamma \underset{\text{déf°}}{=} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{FA'}}{f'} \quad \text{(B.1)}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \qquad \overline{FA'}.\overline{FA} = -f'^2 = f.f' \quad \text{(B.2)}$$

Avec une lentille *convergente*, la seule façon d'obtenir une image virtuelle consiste à placer un objet réel entre F et O (cf. loupe : l'image virtuelle est droite et agrandie).





Avec une lentille *divergente*, la seule façon d'obtenir une image réelle consiste à placer un objet virtuel entre O et F.

2. modèle de la lentille mince valable si $e = S_1S_2$ faible par rapport aux rayons de courbure des deux dioptres et à la distance $d = C_1C_2$.

2 Miroirs sphériques

Définition : surface sphérique réfléchissante de centre C, de sommet S et de rayon $R = \overline{SC}$

Stigmatisme rigoureux pour C et S.

Stigmatisme approché dans les conditions de Gauss.

Système focal centré : F et F' confondus (milieu de C et S).

$$\mathcal{V} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{SF}} = \frac{2}{\overline{SC}} \begin{cases} \mathcal{V} < 0, & \text{pour un miroir convergent} \\ \mathcal{V} > 0, & \text{pour un miroir divergent.} \end{cases}$$

Savoir démontrer №2 : Relations de conjugaison

$$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{FA'}}{f} \quad \text{(B.3)}$$

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \qquad \frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}} \qquad \overline{FA'}.\overline{FA} = f^2 = f.f' \quad \text{(B.4)}$$

III Constructions géométriques

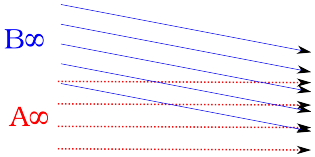
1 Infini

Deux points de la Terre distants de d, recoivent du soleil deux rayons inclinés d'un angle i. L'ordre de grandeur de cet angle est

$$\tan i \simeq i = \frac{d}{D_{TS}}$$

où D_{TS} est la distance Terre-Soleil.

Cet angle est très faible, dans la pratique, on le prend nul.



A_∞ est un point à l'infini sur l'axe : le dessin montre plusieurs rayons provenant de A_∞.

B_∞ est un point à l'infini hors de l'axe : le dessin montre plusieurs rayons provenant de B_∞.

Un point à l'infini envoie sur Terre des rayons parallèles : $i = 0$

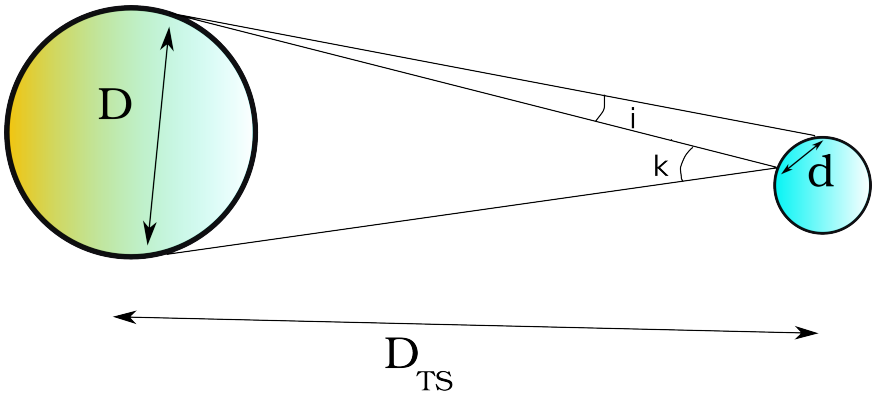


FIGURE B.3 – Point source à l'infini

Deux points du soleil distants de D, envoient des rayons qui forment un angle k entre eux :

$$\tan k \simeq k = \frac{D}{D_{TS}}$$

Cet angle est faible mais bien supérieur au précédent :

$$i \ll k \ll 1$$

Cet angle est l'angle apparent entre les deux points considérés du soleil. Il se mesure en minutes ou secondes d'arc.

DÉFINITION :

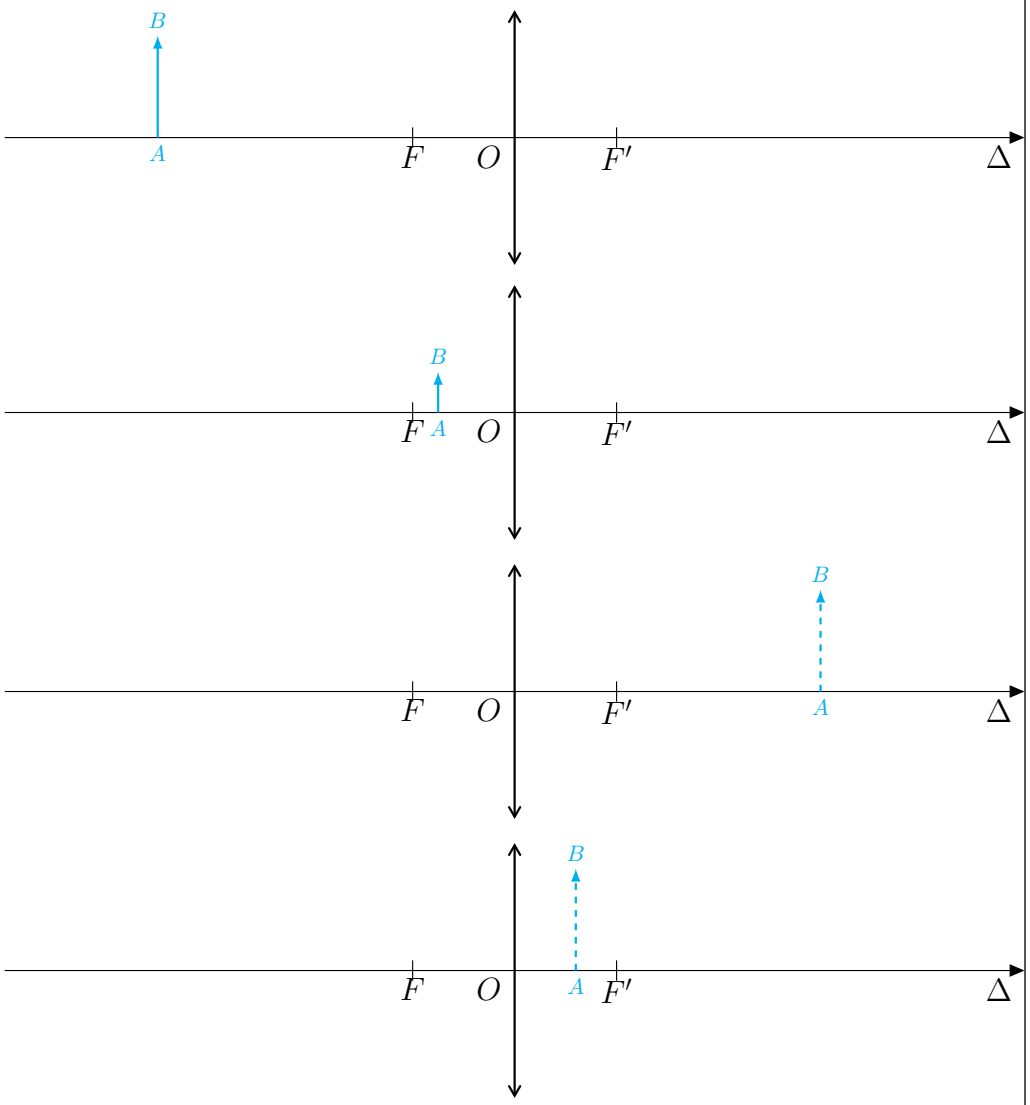
- ✗ Une **minute d'arc** $=1' = \frac{1}{60}°$
- ✗ Une **seconde d'arc** $=1'' = \frac{1}{60}' = \frac{1}{3600}°$
- ✗ Si les points sont aux pôles de l'étoile cet angle est le **diamètre apparent**.

2 Utilisation des plans focaux

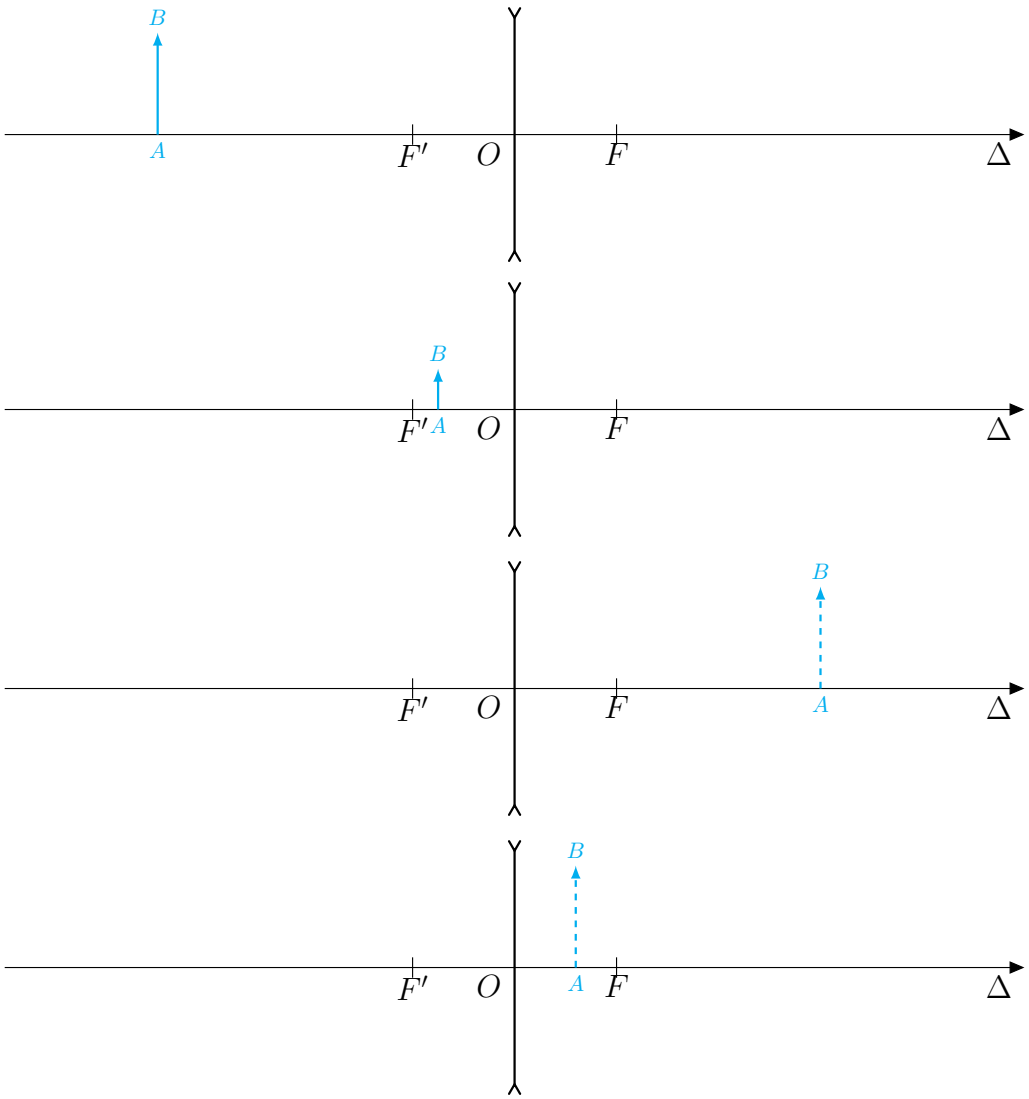
PROPRIÉTÉS À UTILISER LORS DES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

- ✗ Des rayons passant par le centre optique ne sont pas déviés.
- ✗ Des rayons incidents parallèles entre eux convergent en un point du **plan focal image**.
- ✗ Des rayons issus de **plan focal objet** ressortent parallèles entre eux.

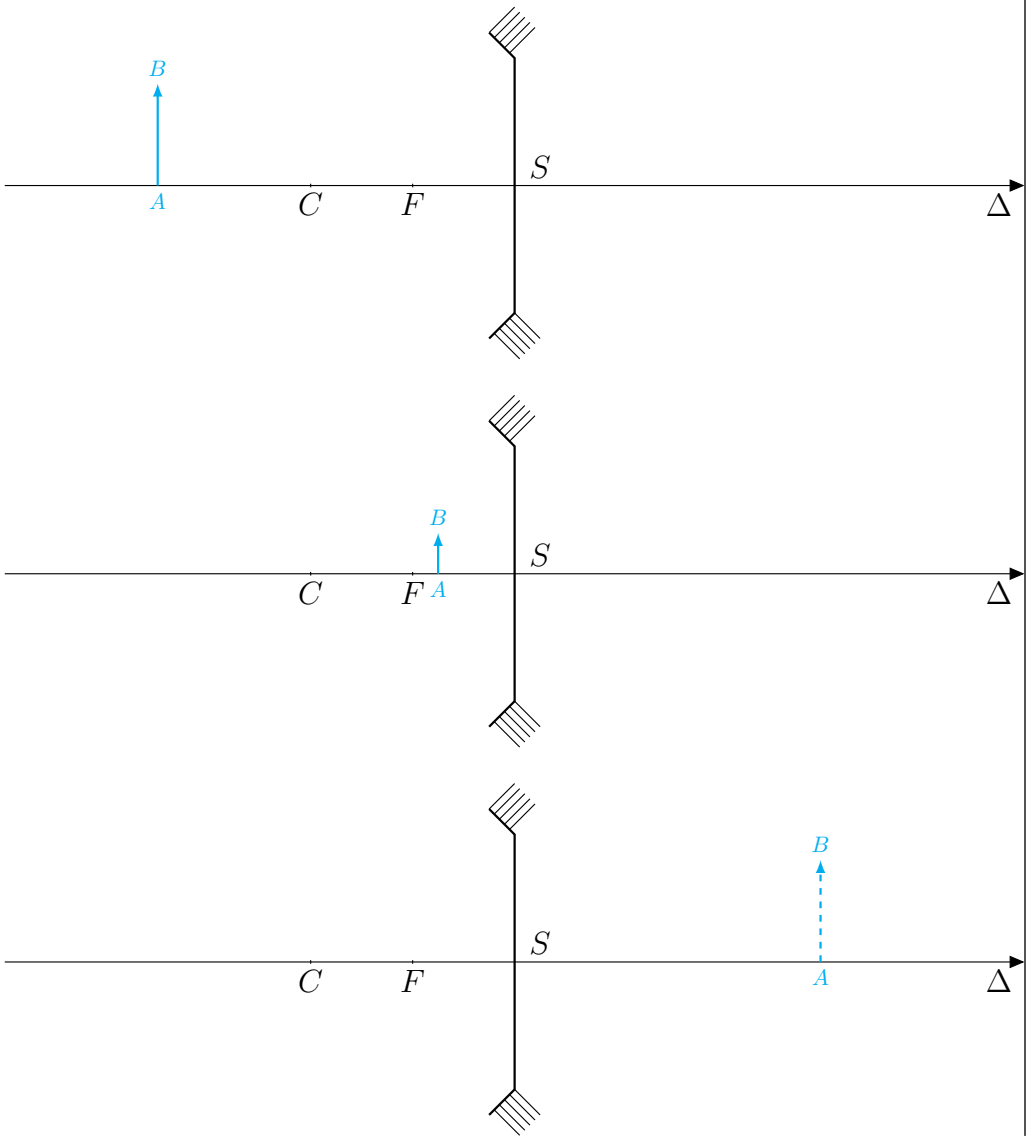
Lentille convergente



Lentille divergente



Miroir concave



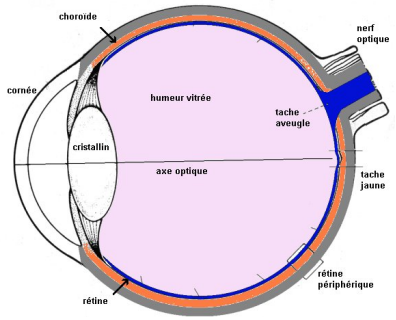
IV Ce qu'il faut connaître sur les instruments d'optique...

Par définition, un système **afocal** présente une conjugaison :

$$A_\infty \longrightarrow A'_\infty$$

Un objet à l'infini de diamètre apparent $\alpha = 2\theta$ a une image dans le PFI de taille $A_1B_1 = f'\alpha$

Une image à l'infini de diamètre apparent $\alpha' = 2\theta'$ correspond à un objet dans le PFO de taille $AB = f'\alpha'$



- L'œil peut être modélisé par une lentille mince convergente. Pour l'***œil normal ou emmétrope***, un point objet à l'infini (***punctum remotum***) est vu sans accomodation, son image se formant au foyer image sur la rétine. En bombant le cristallin, l'œil diminue sa distance focale (***accomodation***) ce qui lui permet de voir les objets jusqu'au ***punctum proximum*** ($d_m = 25$ cm ***par convention***).
- La loupe est une lentille mince convergente qui donne d'un objet AB placé entre son foyer objet F et le centre optique O, une image ***droite, virtuelle et agrandie***. Pour l'œil emmétrope placé en F', la vision sans accomodation correspond à AB placé en F (d'où image $A'B'$ à l'∞, soit au PR de l'œil).
  - *Latitude de mise au point :* distance entre positions limites de l'objet pour image entre PP et PR de l'œil.
  - *Puissance :* si α' est le diamètre apparent de l'image vue par l'œil de l'objet AB

$$\delta \text{ (dioptrie)} \longrightarrow \mathcal{P} = \frac{\alpha'}{AB} \begin{matrix} \longleftarrow \text{ rad} \\ \longleftarrow \text{ m} \end{matrix} ; \qquad \text{pour une loupe, } \mathcal{P} = \frac{1}{f'}$$

  - *Pouvoir séparateur de l'œil :* limite du plus petit objet AB résolu, c'est-à-dire A' et B' sur deux cellules rétiniennes différentes de l'œil

$$\alpha'_{\min} \gtrsim 5.10^{-4} \text{ rad} \Rightarrow AB_{\min} = \alpha'_{\min} f'$$

  - *Grossissement :* si α est le diamètre apparent de l'objet, placé à une distance L :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \mathcal{P}L$$

✍ *Grossissement commercial :* pour un objet AB, vu à l'œil nu, placé au PP (d_m), alors $\alpha = \frac{AB}{d_m}$:

$$G_C = \mathcal{P} d_m \qquad \text{exemple : } G_C = \times 10$$

✎ Un oculaire est modélisé par deux lentilles convergentes, l'une de champ (L_1) et l'autre de vue (L_2), près de l'œil :

$$AB \xrightarrow{L_1} \underset{\text{en } F_2}{A_1 B_1} \xrightarrow{L_2} A'_\infty B'_\infty \text{ (PR de l'œil en } F'_2)$$

Par la suite, un oculaire est modélisé en loupe.

✎ Un condenseur (2 lentilles plan-convexe accolées) permet d'éclairer la totalité d'un objet et de faire en sorte qu'on utilise le système optique (proche de l'objet) dans les conditions de Gauss (concentration de la lumière au voisinnage du centre optique)

✎ Un projecteur comprend une source, un condenseur éclairant l'objet, une lentille convergente pour l'agrandir et un écran, situé à $D > 4f'$ de l'objet, pour le visualiser.

✎ Un microscope : objectif $(L_1 \updownarrow)$ +oculaire $(L_2 \updownarrow)$ à distance fixe ($\Delta = \overline{F'_1 F_2}$ vaut 16 cm, en général), l'oculaire $(L_2 \updownarrow)$ jouant le rôle de **loupe** pour l'image intermédiaire $A_1 B_1$ agrandie.

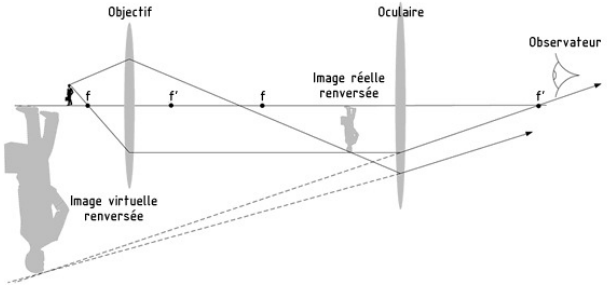


FIGURE B.4 – Sur ce schéma, l'observateur doit *accomoder* pour voir l'image virtuelle, renversée et agrandie de l'objet.

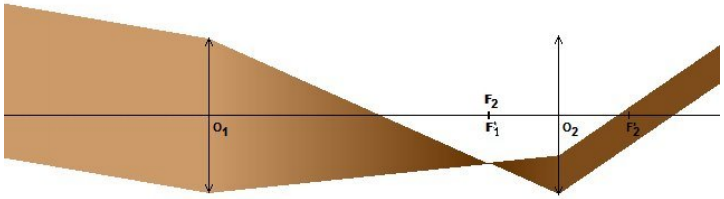
$$\text{En utilisation “normale” :} \qquad A \xrightarrow{L_1} \underset{\text{en } F_2}{A_1} \xrightarrow{L_2} A'_\infty \qquad \text{(œil)}$$

L'œil est placé au **cercle oculaire** juste après F'_2.

$$\mathcal{P} = \frac{\alpha'}{AB} = \frac{\Delta}{f'_1 f'_2} \qquad G_C = \mathcal{P} d_m = \frac{\Delta}{4 f'_1 f'_2} \text{(toutes les distances en m)}$$

✎ Un collimateur permet de former un ***objet (le réticule) à l'infini*** : source + réticule (2 fils en croix) + lentille convergente (L_c) ; en amenant le réticule en F_c, son image à l'infini peut jouer le rôle d'objet virtuel.

✎ Divers types de lunettes : objectif $(L_1 \updownarrow)$ +oculaire $(L_2 \updownarrow)$



✗ Lunette de visée à l'infini ou lunette astronomique (système afocal = conjugaison $\infty \xrightarrow{L_1} foyer \xrightarrow{L_2} \infty$) :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty \qquad \text{(œil au voisinnage du cercle oculaire)}$$

✗ Lunette autocollimatrice (afocale) : on fabrique un objet à l'infini grâce à un objectif $(L_1 \updownarrow)$ + miroir plan.

✗ Viseur à frontale fixe : lunette observant un **objet à distance finie fixe** (au foyer objet F de $\{L_1 + L_2\}$) :

$$\underset{\text{en } F}{A} \xrightarrow{L_1} \underset{\text{en } F_2 \neq F'_1}{A_1} \xrightarrow{L_2} A'_\infty \qquad \text{(œil)}$$

✎ Un télescope :

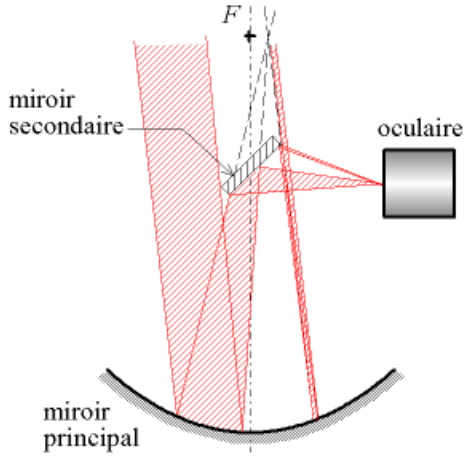
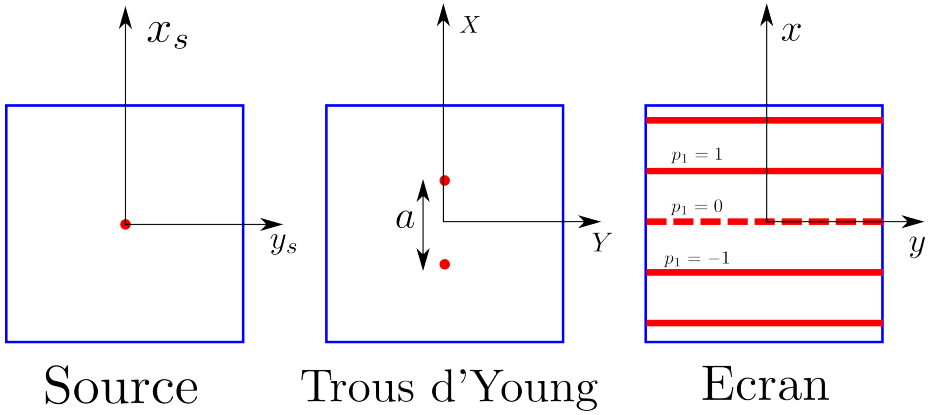


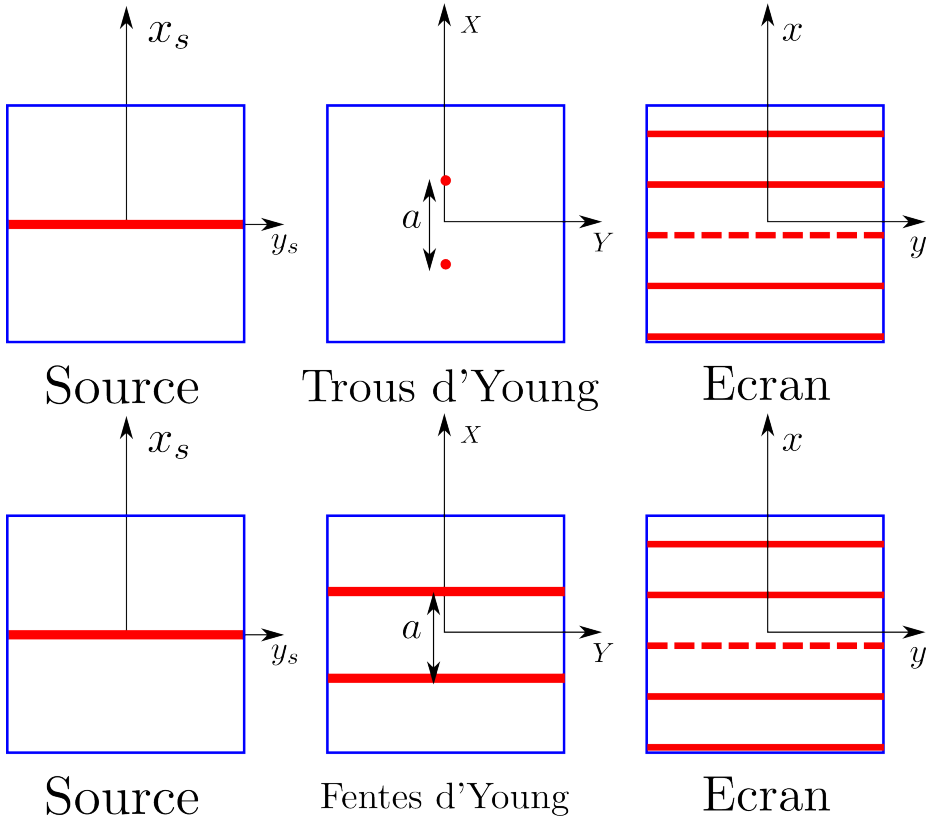
FIGURE B.5 – Schéma de principe d'un télescope

Chapitre B10 : Simulations

- ✗ Lorsque deux ondes interferent, on a des zones d'interférences **constructives (max de I, franges brillantes) et des interférences destructives (min de I, franges sombres)**.
- ✗ Lorsque deux sources S_1 et S_2 incohérentes produisent chacune une figure d'interférences, on a $I = I_1 + I_2$.
  En certains points de la figure, les maximums de I_1 et I_2 coïncident : on a **coïncidence**, ailleurs le maximum d'une figure d'interférence coïncide avec le minimum d'une autre il y a **anti-coïncidence**.
- ✗ Pour une source de lumière blanche, les différentes longueurs d'onde ont des interférogrammes différents , le **spectre** fait apparaître des zones sombres appelées cannelures.

I Trous d'Young - Fentes d'Young



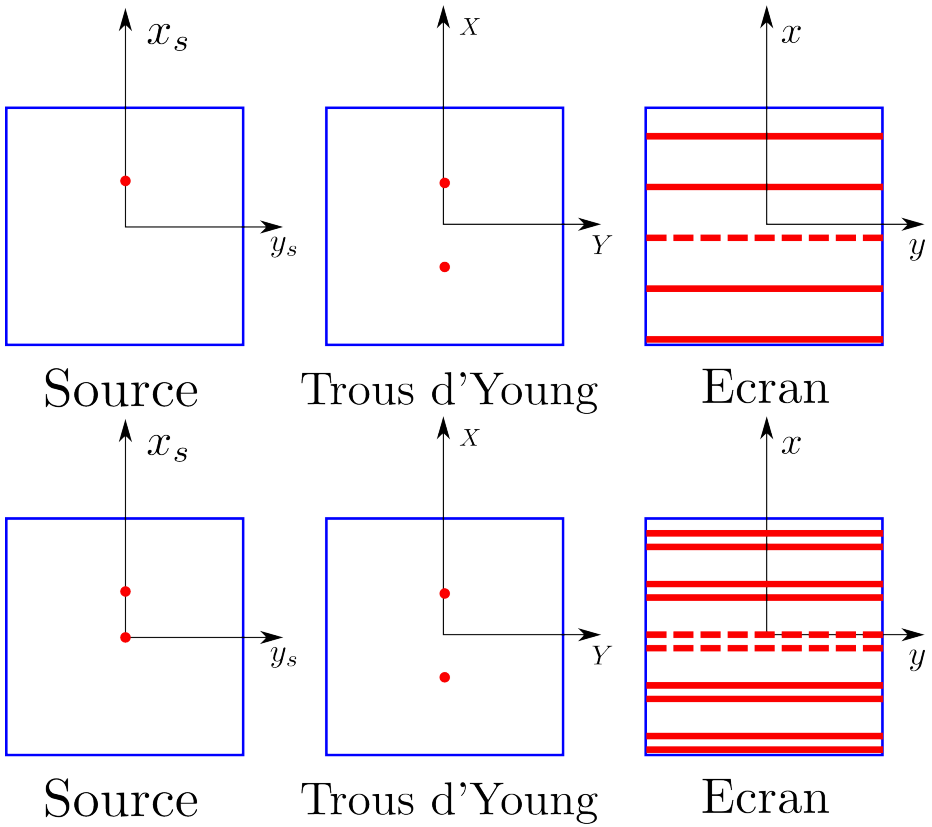


A retenir : Trous d'Young : fentes d'Young

Si on remplace les trous d'Young par une fente d'Young sur Oy, on ne modifie pas l'interférogramme ni le constraste, seule l'intensité est augmentée.

II Deux points sources

1 Description



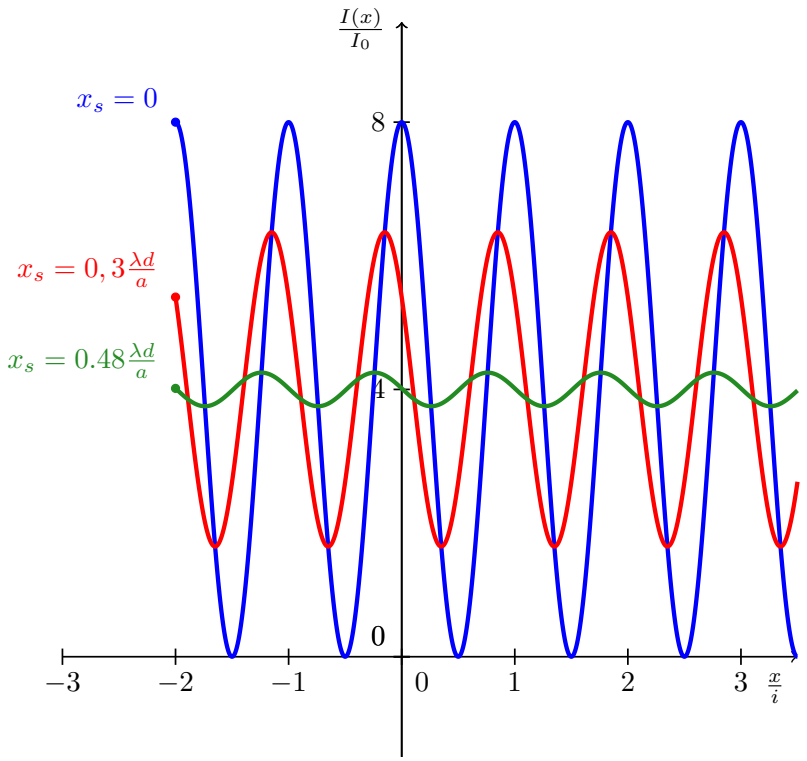


FIGURE B.12 – Intensité produite par deux sources ponctuelles éclairant des trous d'Young pour trois positions de la source

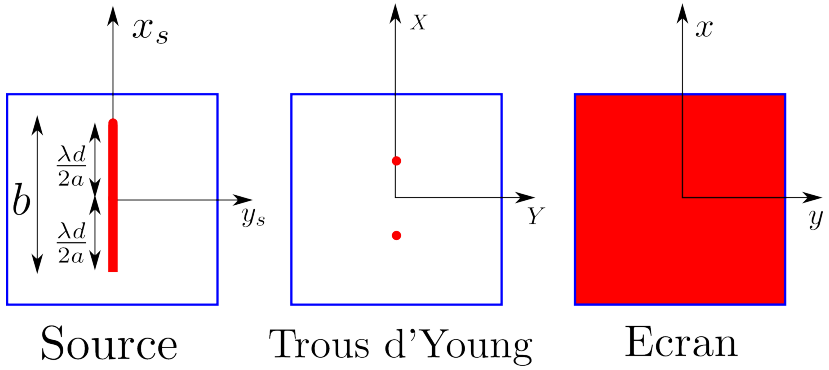
Savoir démontrer №1 : Deux sources

L'intensité produite par deux sources est :

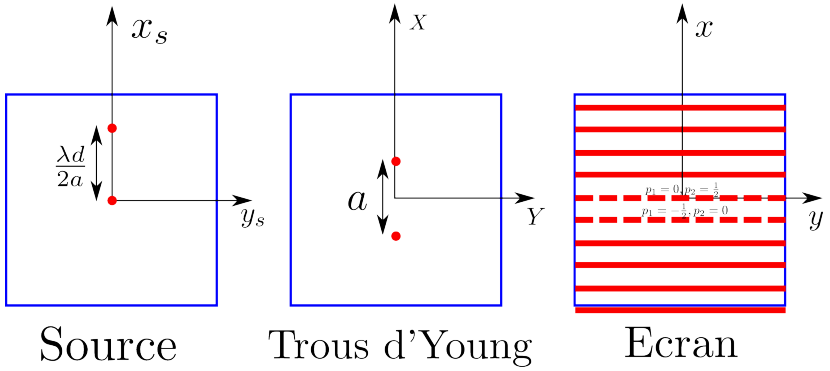
$$I = 4I_0 \left[1 + \cos\frac{\pi ab}{\lambda_0 d}\cos\left(\frac{\pi ax}{\lambda_0 D} + \frac{\pi ab}{\lambda_0 D}\right)\right]$$

Savoir démontrer №2 :

- ✗ Pour $x_s = 0$, les deux ondes se superposent : amplitude maximale $8I_0$
- ✗ Pour $x_s = 0,1\frac{\lambda d}{a}$, le contraste diminue, la frange centrale se déplace vers la gauche.
- ✗ Pour $x_s = 0,48\frac{\lambda d}{a}$, le contraste diminue fortement, la frange centrale se déplace encore vers la gauche.
- ✗ Pour $x_s = \frac{\lambda d}{2a} \rightarrow \Delta p = \frac{1}{2}$, le contraste s'annule, on peut le comprendre sur la figure ci-dessous.



2 Brouillage total



III Source étendue

Si on considère une source étendue comprise entre ces deux valeurs, on a un brouillage :

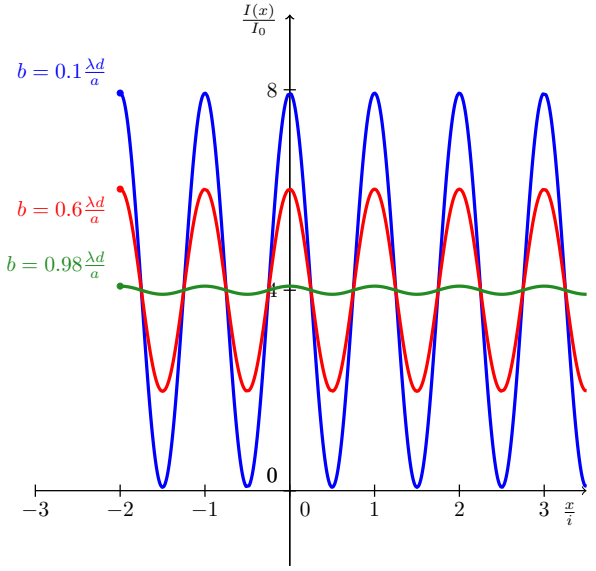


FIGURE B.13 – Intensité produite par une sources étendue de taille b cad comprise entre $\left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$ éclairant des trous d'Young

Savoir démontrer №3 : Brouillage

On a brouillage lorsque la taille de la source est

$$b = \frac{\lambda d}{a}$$

On retient que **pour une fente symétrique par rapport à l'axe des x**, si on note Δp la différence d'ordre entre le centre et une extrémité, il y a brouillage lorsque

$$|\Delta p(M)| = \frac{1}{2}$$

IV Inversion de contraste

1 Pas d'inversion pour deux sources

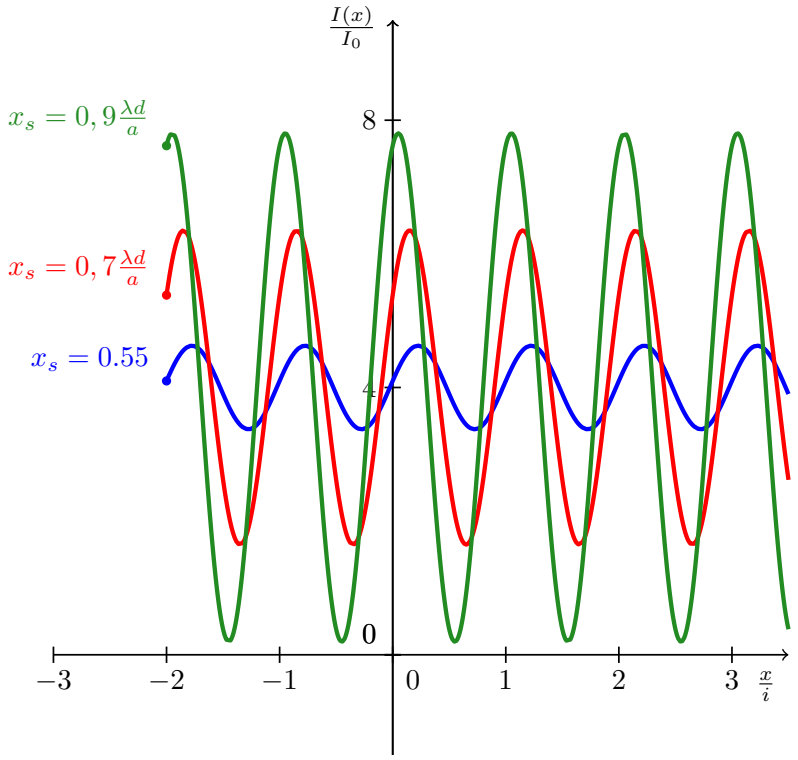


FIGURE B.14 – Intensité produite par deux sources ponctuelles éclairant des trous d'Young

2 Inversion pour une source étendue

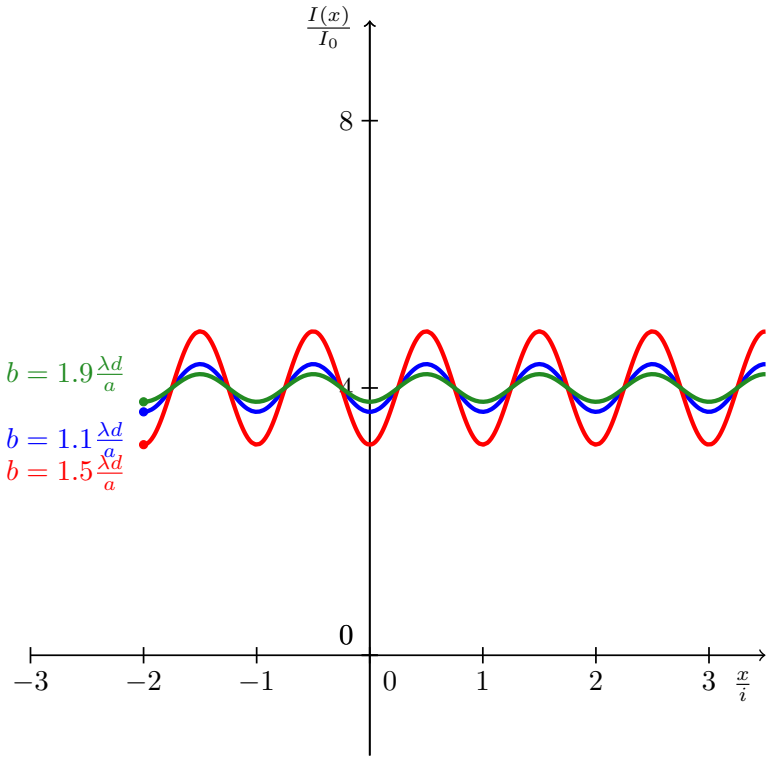


FIGURE B.15 – Intensité produite par une sources étendue de taille b cad comprise entre $\left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$ éclairant des trous d'Young

A RETENIR : BROUILLAGE

Dans la pratique il y a brouillage lorsque

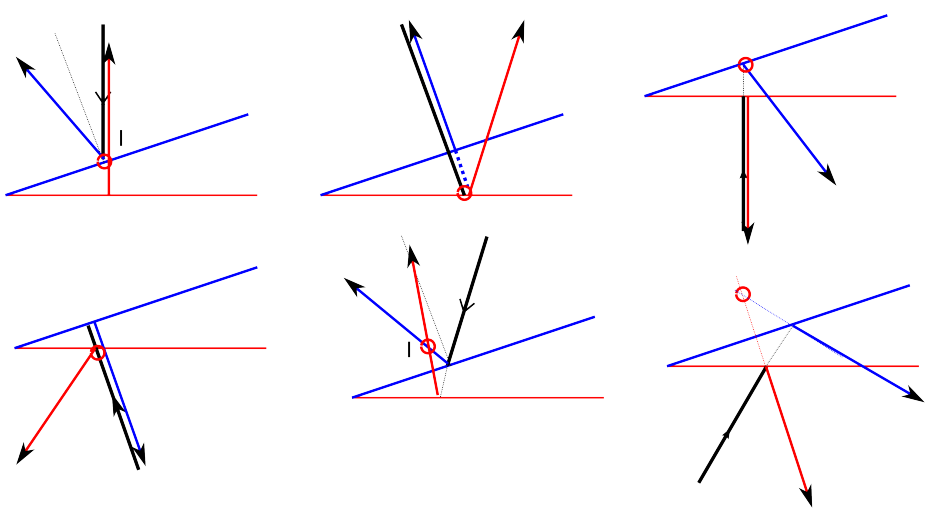
$$\boxed{b \geq \frac{\lambda d}{a}}$$

Chapitre B11 : Questions Diverses

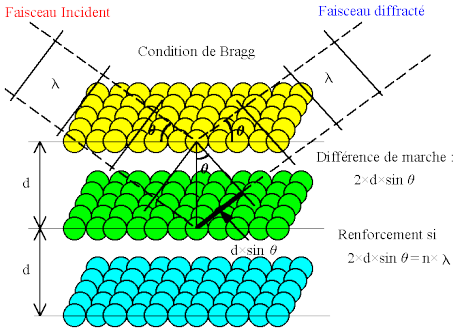
I Localisation des franges du coin d'air

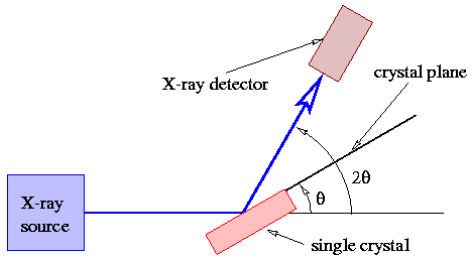
Savoir démontrer №1 : Localisation des franges

Les franges sont localisées sur les miroirs pour une incidence normale à l'un des deux miroirs.
Les franges sont localisées au voisinage des miroirs pour une incidence quelconque.



II Diffraction de Bragg





Savoir démontrer №2 : Observation des structures atomiques

On observe la lumière réfléchie dans la direction de l'optique géométrique.
On montre que l'intensité est maximale pour des valeurs de θ_p tq :

$$2d\sin\theta_p = p\lambda$$

Pour observer une structure électronique, il faut $\lambda \simeq d = 0.1$ nm
On utilise donc des rayons X.

III Comment mesurer un $\Delta\lambda$ à l'aide d'un Michelson

Il faut se placer en Anneaux ou en Franges et charioter ; On repère une première annulation du contraste, on obtient une seconde annulation du contraste , lorsque l'on a déplacer le miroir d'une quantité x telle que :

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2x}}$$

On trouve donc $\Delta\lambda = 0.6$ nm pour le doublet du sodium.

1 Démonstration 1

La démonstration la plus simple s'obtient en utilisant le résultat de SD1, du chapitre "cohérence" : pour un doublet l'éclairement vaut :

En posant

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$$

on montre que l'éclairement s'écrit

$$\boxed{\mathscr{E}(M) = 2\mathscr{E}_0 \left[1 + \gamma(M) \cos\left(2\pi\sigma_0\delta(M)\right)\right]}$$

$$\text{où } \gamma(M) = \cos\left(\pi\Delta\sigma\delta(M)\right)$$

s'interprète comme un **contraste local**

Le contraste s'annule pour $\delta = 2x = \frac{p}{\Delta\sigma} = -\frac{p\Delta\lambda}{\lambda^2}$ où p est un entier relatif.

L'écart entre deux annulations du contraste est

$$\Delta x = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

D'ou le résultat.

2 Démonstration 2

On obtient un maximum du contraste, lorsque les deux ondes interfèrent de manière constructives :

Soit x_1 une position de maximum de contraste :

$$2x_1 = p\lambda_1$$
$$2x_1 = q\lambda_2$$

La position suivante de contraste maximum,notée x_2 vérifie :

$$2x_2 = (p + r)\,\lambda_1$$
$$2x_2 = (q + r + 1)\,\lambda_2$$

si $\lambda_2 < \lambda_1$.

L'écart entre les deux positions est $\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{2} r\lambda_1$

On remarque que $r\lambda_1 = (r + 1)\,\lambda_2$ soit $r = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$

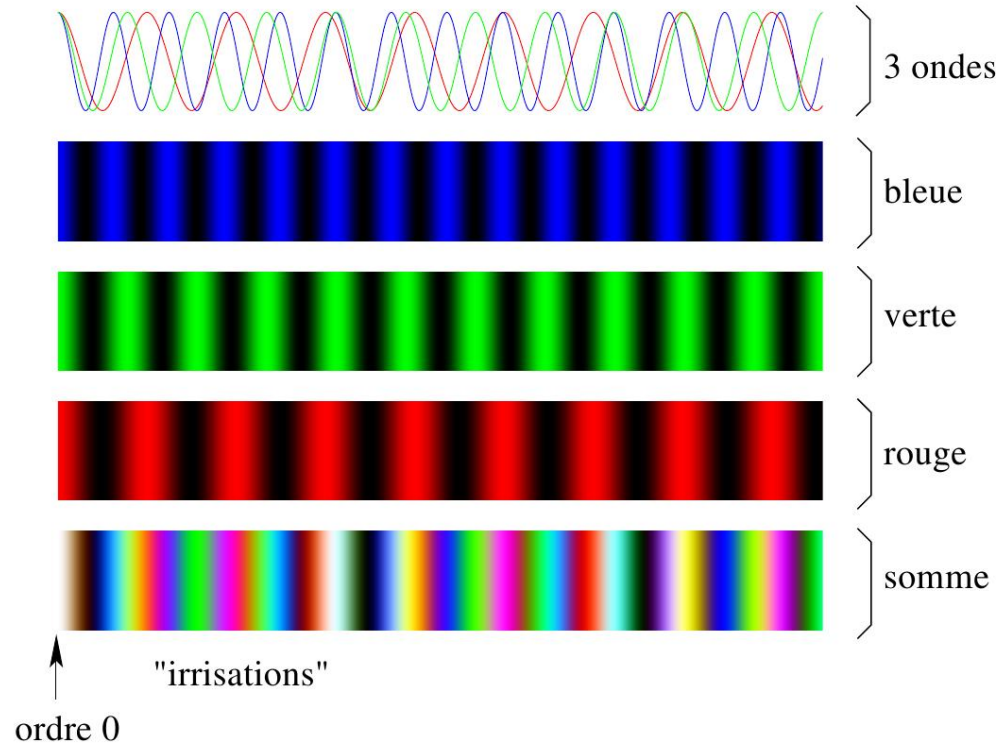
Finalement

$$\boxed{\Delta x = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\,(\lambda_1 - \lambda_2)} \simeq \frac{\lambda^2}{2\,(\Delta\lambda)}}$$

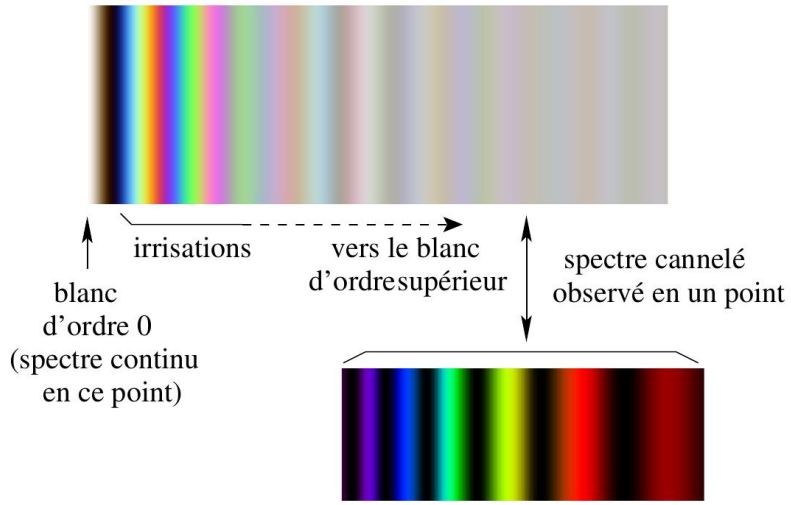
3 Lumière blanche, spectre cannelé

Exemple avec trois couleurs : raies bleue verte et rouge. L'addition des différentes longueur d'onde donne des irrisations.

On représente l'éclairement en fonction de δ :



En lumière blanche, on obtient le spectre cannelé. On représente l'éclairement en fonction de δ :



DÉFINITION :

- ✗ **Teinte plate ou blanc d'ordre 0** : teinte obtenue en lumière blanche à l'ordre 0 et qui correspond à la couleur de la source.
- ✗ **Irisations** : est l'échelle des teintes observées : ceux sont les teintes de NEWTON.
- ✗ **Blanc d'ordre supérieur** : la teinte "blanchâtre" obtenue lorsque $\delta \gg \ell_c$. Les spectre de cette lumière présente des **cannelures**.

IV Différence entre les anneaux de Newton et d'Haidinger

Les anneaux D'HAIDINGER, sont des **franges d'égale inclinaison**. On les obtient en éclairant avec différentes incidences i une lame à faces parallèles (lame de verre ou lame d'air obtenue au MICHELSON. Tous les rayons ayant la même incidence i interfèrent de manière constructive, on obtient sur un plan perpendiculaire aux rayons $i = 0$ des anneaux.

Les anneaux de Newton sont des franges d'égales épaisseur que l'on obtient avec un coin d'air qui a une symétrie de révolution : par exemple un dioptre sphérique posé sur un diopte plan. Pour les éclairer correctement , on utilise un éclairage parallèle (incidence proche de $i = 0$), comme pour le coin d'air.

V Facteur 2 ou 4 sur l'éclairement pour interférences réalisées par deux longueurs d'onde

Selon les notations que l'on adopte, on peut avoir un éclairement qui s'écrit

$$\boxed{\mathscr{E}(M) = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \gamma(M)\cos\left(2\pi\sigma_0\delta(M)\right)\right]}$$

ou

$$\boxed{\mathscr{E}(M) = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \gamma(M)\cos\left(2\pi\sigma_0\delta(M)\right)\right]}$$

1 Notation avec un 4

Si on prend, deux OPPH lumineuses ayant chacune l'éclairement $\mathscr{E}_0$, l'éclairement total dans un dispositif d'interférences est :

$$\mathscr{E}(M) = 2\mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda}\right)\right]$$

l'éclairement maximum correspond à une frange brillante et l'éclairement vaut $4\mathscr{E}_0$, l'éclairement moyen vaut bien sur $2\mathscr{E}_0$.

Si on considère deux longueurs d'ondes différentes qui interfèrent, on trouve alors un éclairement :

$$\mathscr{E}(M) = 4\mathscr{E}_0\left[1 + \gamma(M)\cos\left(2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda_0}\right)\right]$$

L'éclairement maximum est de $8\mathscr{E}_0$, l'éclairement moyen vaut bien sur $4\mathscr{E}_0$.

2 Notation avec un 2

on peut diviser toutes les éclairements par 2, soit : Si on prend, deux OPPH lumineuses ayant chacune l'éclairement $\frac{\mathscr{E}_0}{2}$, l'éclairement total dans un dispositif d'interférences est :

$$\mathscr{E}(M) = \mathscr{E}_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda}\right)\right]$$

l'éclairement maximum correspond à une frange brillante et l'éclairement vaut $2\mathscr{E}_0$, l'éclairement moyen vaut bien sur $\mathscr{E}_0$.

Si on considère deux longueurs d'ondes différentes qui interfèrent, on trouve alors un éclairement :

$$\mathscr{E}(M) = 2\mathscr{E}_0\left[1+\gamma(M)\cos\left(2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda_0}\right)\right]$$

L'éclairement maximum est de $4\mathscr{E}_0$, l'éclairement moyen vaut bien sur $2\mathscr{E}_0$.

VI Lorsque l'on se rapproche du contact optique les anneaux rentrent ! **

La question est "lorsque l'on se rapproche du contact optique les anneaux rentrent ou sortent ?"

Il faut comprendre la subtilité suivante :

Lorsqu'on se rapproche du contact optique (diminution de e),

1. **les anneaux rentrent dans le centre ;**
2. les anneaux visibles sur l'écran sont **plus grands et moins nombreux.**

Propriété à connaître

1. Pour une épaisseur e fixée , on analyse la figure sur l'écran et on observe des anneaux que l'on numérote avec $q \in [1, n]$.

   Pour décrire cette situation, on utilise la formule du SD4 du chapitre C4 (rayon des anneaux avec anneau au centre - au passage de SD est important et difficile), donc

   $$r_q = f'\sqrt{\frac{\lambda_0}{e}}\sqrt{q-1}$$

   d'où l'on déduit de façon immédiate si $e \searrow$ alors $r_q \nearrow$, donc à champ constant, le nombre d'anneaux visibles diminue car le rayon du $q$ième est plus grand.

   Avec cette formule, on ne peut pas suivre les anneaux un par un car lorsque e diminue, l'ordre au centre est modifié et donc le numéro de l'anneau q est modifié.

2. Pour étudier comment un anneau est modifié, il faut étudier la courbe $r(p) = r_p$ ou p est l'ordre d'interférence.

   Considérons une épaisseur e de lame d'air. Alors, un anneau donné de rayon r_p et d'ordre p vérifie

   $$p = \frac{2e}{\lambda_0}\cos i \quad \text{avec} \quad \tan i = \frac{r_n}{f'}$$

   Or $\cos i = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 i}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{r_n^2}{f'^2}}}$ d'où

   $$p = \frac{2e}{\lambda_0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_n^2}{f'^2}}}$$

   On suit un anneau (ordre p fixé) lorsque e diminue, il faut donc que r_n diminue pour rester à $p =$ cste. Autrement dit, **l'anneau évolue vers le centre pour y disparaître.**

VII Michelson en coin d'air

Question : Pour utiliser le Michelson en coin d'air, est-ce qu'il faut se placer près du contact optique pour avoir des franges planes ? J'ai l'impression que si on se place trop loin, on va plutôt observer des hyperboles avec le dessin des hyperboloïdes.

Non, on se place près du contact optique en coin d'air car si on s'en écarte trop on a un brouillage des franges à cause de la **cohérence temporelle** (trop grande largeur spectrale de la source). Il est vrai que les dessins théoriques montrent des morceaux d'hyperboles mais on ne les observa pas en général ; on voit toujours des franges parallèles.

Il est d'autre part à noter que l'on éclaire en lumière parallèle pour avoir une localisation des franges au niveau des miroirs.

VIII Formule des réseaux

Question : Pourquoi insister pour que l'on garde le fameux N^2 au dénominateur lorsque que l'on calculait l'éclairement ?

La formule de l'éclairement pour le réseau est :

$$\mathscr{E}(M) = N^2\mathscr{E}_0\text{sinc}^2(\pi u\epsilon_X)\frac{\sin^2\frac{N\phi}{2}}{N^2\sin^2\frac{\phi}{2}}$$

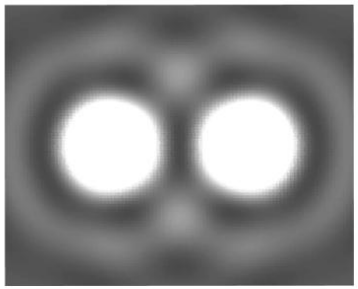
où $\Phi = \frac{2\pi a}{\lambda_0}(\sin\theta - \sin\theta_0)$

Avec cette notation, on peut voir que :

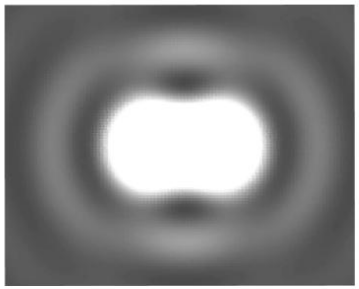
- le terme de diffraction ($\text{sinc}^2(\pi u\epsilon_X)$) d'une fente a un maximum égal à 1
- le terme d'interférences à un maximum égal à 1 : $\frac{\sin^2\frac{N\phi}{2}}{N^2\sin^2\frac{\phi}{2}}$

  On le voit avec un DL au premier ordre de $\sin\frac{\phi}{2}$ en $\phi = 2p\pi$
- Le maximum total **d'intensité est donc égal à** $N^2\mathscr{E}_0$ ce qui est bien en accord avec le fait que l'amplitude maximum vaut NA_0.

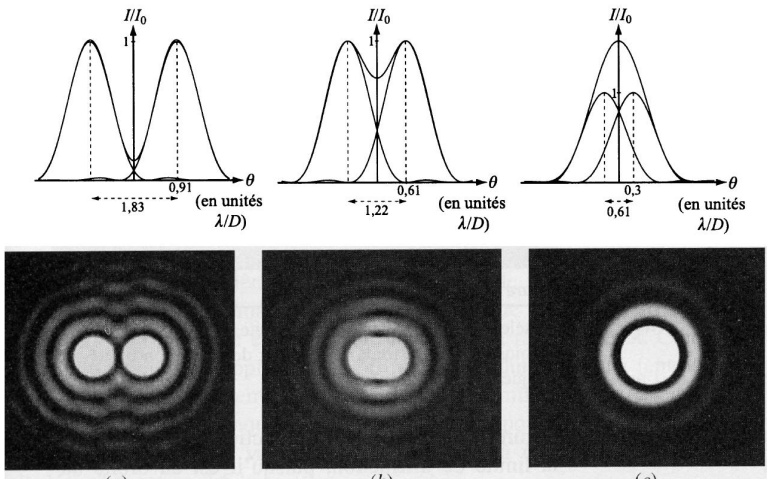
IX Formation des images - Critère de Rayleigh



Images bien résolues



Images en limite de résolution



Définitions :

Deux images sont **résolues** si on peut les distinguer, c'est à dire les **séparer**.

On parle de **résolution spatiale** pour deux objets (ex : étoiles doubles).
On parle de **résolution spectrale** pour deux raies d'un spectre.

Critère de Rayleigh

Soit α la distance angulaire entre 2 images géométriques, on dira que le critère de Rayleigh est vérifié si

$$\alpha \geqslant \theta_A = 0,61\frac{\lambda_0}{R} = 1,22\frac{\lambda_0}{D}$$

où λ_0 est la longueur d'onde à laquelle se fait l'observation et $R = \dfrac{D}{2}$ est la rayon du système optique utilisé pour former les 2 images.
D est l'ouverture du système optique.

Propriété à connaître

Chapitre B1 : Modèle scalaire des ondes lumineuses

Etienne Louis Malus de Mitry (1775-1812) X1794

Partie B : Optique

B-0 : Optique géométrique
B-1 : Modèle scalaire
B-2 : Sources lumineuses
B-3 : Interférences lumineuses
B-4 : Trous d'Young
B-5 : Exemples
B-6 : Michelson
B-7 : Diffraction
B-8 : Compléments
B-9 : Classiques Geo
B-10 : Simulations

Interférences sur une flaque d'eau huilée

I Propagation dans l'approximation de l'optique géométrique

1 Vibration lumineuse

Définition :

On appelle **vibration lumineuse** une composante quelconque du champ électrique par rapport à un axe perpendiculaire à la direction de propagation.

Les équations de Maxwell étant linéaire, dans l'hypothèse où les polarisations sont identiques, on peut énoncer le théorème de superposition.
Si plusieurs vibrations $s_i(M,t)$ arrivent au même point M alors l'amplitude totale $s(M)$ est la somme des amplitudes :

$$s(M,t) = \sum_i s_i(M,t)$$

Propriété à connaître

2 Onde lumineuse monochromatique

Définition :

On appelle lumière monochromatique une vibration idéale purement sinusoïdale de la forme :

$$s(M,t) = A_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} - \varphi_0\right)$$

- ✗ A_0 **est l'amplitude** (supposée constante = pas d'amortissement ici)
- ✗ $\varphi(M) = \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0$ **est la phase au point** M. φ_0 est la phase en O **choisie nulle dans la suite**.
- ✗ ω la pulsation.
- ✗ $\vec{k}$ est le vecteur d'onde.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2n\pi}{\lambda_0}$$

- ✗ On note λ_0 la longueur d'onde dans le vide, λ, la longueur d'onde dans le milieu d'indice n.

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}}$$

En notation complexe :

$$\underline{s}(M,t) = A_0 \exp i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)$$

Indices de réfraction usuels

Milieu	vide	air	eau	verre crown	verre flint	diamant
n	1	1,0003	1,33	1,5	1,7 à 1,8	2,5

Couleurs monochromatiques

λ_0 (nm)	380	420	490	577	597	622	780
couleur		violet	bleu	vert	jaune	orange	rouge

3 Expression du déphasage

3.a Dans un milieu d'indice n

Savoir démontrer №1 : Dans un milieu homogène d'indice n

On considère un rayon lumineux issu de S et passant par un point M on a :

$$\varphi(M) = \varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM)$$

$(SM) = n \times SM$ est le chemin optique entre S à M
λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

Propriétés à connaître

- ✗ Si la lumière traverse plusieurs milieux homogènes on utilise la même formule avec :

$$(SM) = (SI) + (IJ) + (JM)$$

- ✗ Si le milieu a un indice qui varie continuement, on a :

$$(SM) = \int_S^M n(P)\mathrm{d}s(P)$$

avec $n(P)$ l'indice optique au point P et $s(P)$ est l'abscisse curviligne sur le chemin suivi.

Définition :

$(SM_2) - (SM_1)$ est la différence de chemin optique entre le rayon (SM_2) et le rayon (SM_1), on la nomme **différence de marche**.

3.b Déphasage supplémentaire de π

Définition :

On ajoute un **déphasage supplémentaire de π** dans trois cas :

- ✗ Une réflexion sur un dioptre lorsque le rayon incident se propage dans le milieu d'indice le moins élevé ($\rightarrow$ réflexion vitreuse)
- ✗ Une réflexion métallique : sur un conducteur parfait (cas des miroir usuels)
- ✗ Lors du passage de rayons par un point de convergence : par exemple, des rayons provenant de l'infini et se focalisant en un point du PFI d'une lentille subissent un déphasage de π au passage du point de focalisation.

Savoir démontrer №2 : Lien déphasage et différence de marche

Un déphasage de π correspond à une différence de marche de $\delta = \frac{\lambda_0}{2}$.

4 Surface d'ondes et théorème de Malus

Définition :

- ✗ Une source de lumière est dite **ponctuelle**, si elle se réduit à **un seul point géométrique**.
- ✗ Une source composée de la distribution continue de sources ponctuelles est une source **étendue**.
- ✗ Soit S une source ponctuelle, on appelle **surface d'onde** l'ensemble des points M tels que le chemin optique parcouru de S à M le long d'un rayon lumineux soit constant :

$$(SM) = \text{cste} \Leftrightarrow \varphi(M) = \text{Cste}$$

Ces surfaces d'ondes sont donc des surfaces **équiphases**

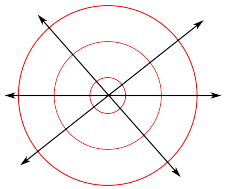
- ✗ Dans un milieu lhi, un **rayon lumineux** est une **ligne de champ** du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$.

Théorème de Malus (admis)

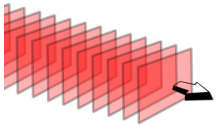
Les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'ondes.

Exemples :

Ondes sphériques : les surfaces d'ondes sont des sphères, les rayons lumineux sont les rayons du cercle.

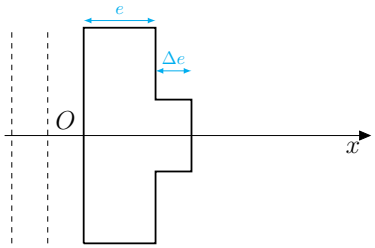


Ondes planes : les surfaces d'ondes sont des plans.



Application 1 : Défaut d'épaisseur

On considère une onde plane en incidence normale sur une lame d'épaisseur e et présentant un défaut d'épaisseur Δe en son centre.

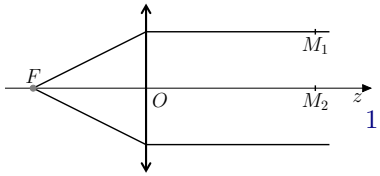


1. Donner la forme des surfaces d'onde avant et après la lame.
2. Quelle est la différence de phase après la lame à un même abscisse x selon que le rayon lumineux ait traversé ou non le défaut ?

Savoir démontrer №3 : Stigmatisme

Si A et A' sont conjugués par un système optique Σ rigoureusement stigmatique alors le chemin optique (AA') est indépendant du rayon lumineux traversant Σ, c'est-à-dire qu'on a $(AA') = \text{cste}$.

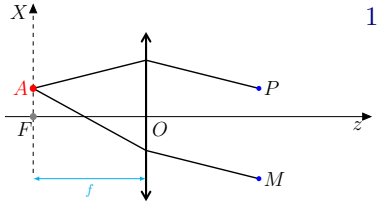
Application 2 : Transformation des surfaces d'ondes par une lentille convergente



On place une source ponctuelle au foyer objet F d'une lentille convergente (voir figure ci-contre).

1. Quelle est la forme des surfaces d'ondes avant la lentille ?
2. Qu'en est-il après la lentille ?
3. Que dire des chemins optiques (FM_1) et (FM_2) ?
4. Comment est-ce possible, vu les distances respectives parcourues ?

Application 3 : Théorème de Malus pour déterminer une différence de chemin optique



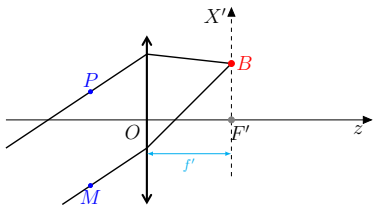
1. Calculer dans le cas de la figure ci-contre, la différence différence de marche entre le point A et les intersections P et M. $(PM) \perp (Oz)$
   Exprimer le résultat en fonction de $a = PM$, f et X_A, l'abscisse du point source A.
2. Le résultat reste-t-il valable si l'on considère maintenant le point source A', symétrique de A par rapport à l'axe optique ?

5 Principe de Fermat et loi de Malus

Principe de Fermat et retour inverse de la lumière

Le trajet suivi par la lumière pour aller de A à B correspond à une valeur extrémale du chemin optique par rapport aux chemins fictifs voisins allant de A à B.
Par conséquent, la lumière emprunte le même chemin pour aller de B à A que pour aller de A à B.

Application 4 : Théorème de MALUS et retour inverse de la lumière



Calculer dans le cas de la figure ci-contre, la différence de chemin optique (ou ***différence de marche***) entre le point B et les intersections P et M des deux rayons (lorsqu'ils sont parallèles) avec un plan perpendiculaire à l'axe optique.
Exprimer le résultat en fonction de $a = PM$, f' et X_B, l'abscisse du point image B.

II * Lentille mince dans l'approximation de Gauss

1 Onde sphérique

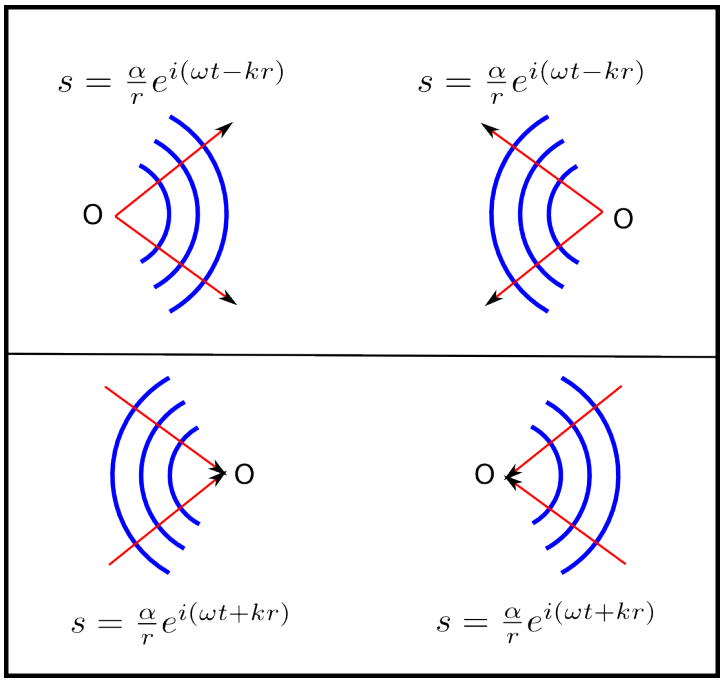
DÉFINITION :

L'amplitude en M, à la date t d'une onde sphérique **divergente de centre S, monochromatique**, se propageant dans un milieu homogène s'écrit sous la forme :

$$s(M,t) = \frac{\alpha}{r}\cos(\omega t - kr) \text{ complexe } \rightarrow \underline{s}(M,t) = \frac{\alpha}{r}\exp i(\omega t - kr)$$

L'amplitude en M, à la date t d'une onde sphérique **convergente de centre S, monochromatique**, se propageant dans un milieu homogène s'écrit sous la forme :

$$s(M,t) = \frac{\alpha}{r}\cos(\omega t + kr) \text{ complexe } \underline{s}(M,t) = \frac{\alpha}{r}\exp i(\omega t + kr)$$



Savoir démontrer №4 : Equation de d'Alembert

La solution sphérique est solution de l'équation de D'ALEMBERT en 3D. On donne le LAPLACIEN scalaire en coordonnées sphériques pour une fonction qui ne dépend que de r

$$\triangle s(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial s}{\partial r}\right)$$

- ✗ On retrouve le terme de propagation.
- ✗ **Conservation de l'énergie** de l'onde.
- ✗ Divergence non physique au centre de l'onde.

Propriétés à connaître

2 Onde plane

DÉFINITION :

L'amplitude en M, à la date t d'une onde plane monochromatique, se propageant dans un milieu homogène s'écrit sous la forme :

$$s(M,t) = \frac{\alpha}{r}\cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)$$

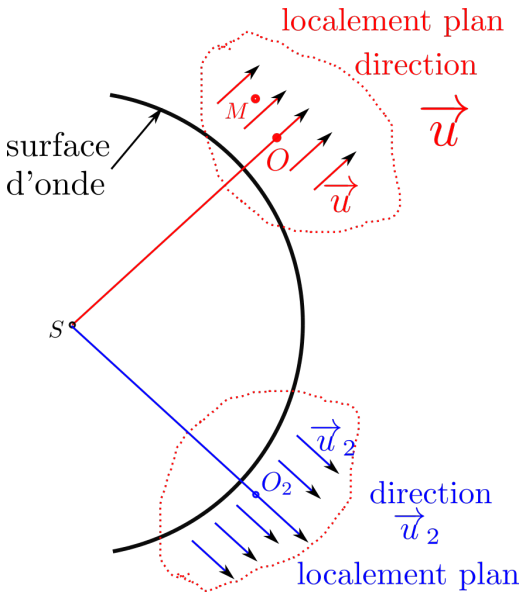
En notation complexe :

$$\underline{s}(M,t) = \frac{\alpha}{r}\exp i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)$$

3 Onde localement plane

DÉFINITION :

A grande distance de la source de l'onde sphérique et dans une petite région autour d'un point O, on va pouvoir considérer que l'onde est plane. On dit alors que l'onde est **localement plane**.
Sur la figure ci-dessous, on voir deux ondes localement planes autour de O_1 (resp. O_2) avec une direction de propagation sur $\vec{u}_1$ (resp. $\vec{u}_2$).



Savoir démontrer №5 : Approximation sur la longueur SM

On place une source S à une distance très grande d'un point O du repère. On étudie les ondes en M dans une zone proche de O de telle sorte que $SO \gg OM$.
On pose $\overrightarrow{SO} = r_0\vec{u}$.
On trouve au premier ordre en $\frac{OM}{SO}$ que

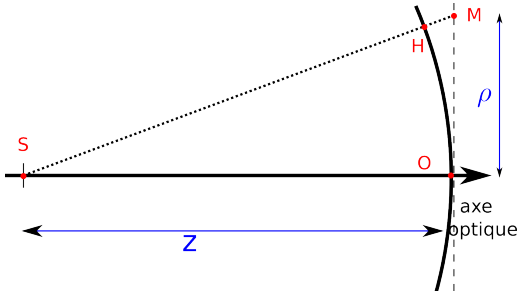
$$SM \simeq r_0 + \vec{u}.\overrightarrow{OM}$$

Savoir démontrer №6 : Expression de l'onde localement plane

Une onde sphérique s'approxime donc **localement** par une onde plane.

$$M \text{ proche de } O \;\rightarrow\; s(M) = \frac{\alpha}{r}e^{i(\omega t - kSM)} \rightarrow s \simeq \frac{\alpha}{r_0}e^{-ikr_0}\; e^{i\left(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM}\right)}$$

4 Cas de l'approximation de Gauss : approximation paraxiale



- ✗ On place $S\,(z=0)$ au centre du repère et $O\,(z)$ est le centre de la lentille.
- ✗ On se place sur l'axe optique, ainsi $SO = r_0 = z$.
- ✗ On note $\overrightarrow{SO} = z\vec{u}_z$ et $OM = \rho$ en notation cylindrique.
- ✗ On cherche à évaluer SM pour M dans un plan perpendiculaire à l'axe optique, ainsi $\vec{u}_z.\overrightarrow{OM} = 0$, il est donc nécessaire de calculer le terme d'ordre 2.

Savoir démontrer №7 : Approximation paraxiale

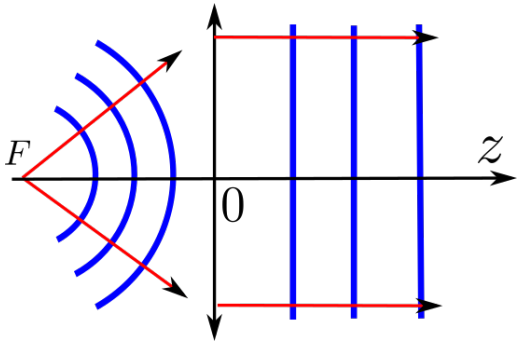
Au second ordre , on a

$$SM \simeq z + \frac{\rho^2}{2z}$$

Une onde sphérique s'approxime donc par une onde non plane du type :

$$s = \frac{\alpha}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad \rightarrow \quad s \simeq \frac{\alpha}{z} e^{i\left(\omega t - kz - \frac{k\rho^2}{2z}\right)}$$

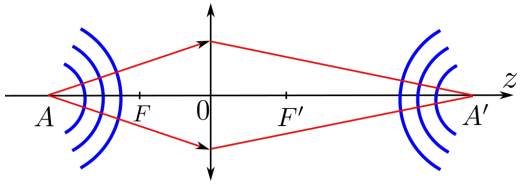
5 Lentille mince



Savoir démontrer №8 : Transmittance d'une lentille

La lentille mince transforme issus du foyer $S = F$ en un faisceau parallèle, sa transmittance peut donc s'écrire :

$$t(\rho) = \exp\left(i\frac{k\rho^2}{2f'}\right)$$



Savoir démontrer №9 : Formules de conjugaison

Soit A un point objet, son image par la lentille est le point A' On retrouve la formule de conjugaison pour une lentille mince :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{f'}$$

6 Eclairement - Intensité vibratoire

6.a Récepteurs

Propriétés des détecteurs :

- ✓ Un détecteur est sensible au champ électrique $\vec{E}(M,t)$ plutôt qu'au champ magnétique.
- ✓ Les détecteurs usuels sont **quadratiques**, sensibles donc à $\vec{E}^2$.
- ✓ Les temps de réponse des détecteurs (au mieux μs ou qq. ns) sont très supérieurs à la période de la lumière (10^{-15} s), les détecteurs ne sont donc sensibles qu'à la valeur moyenne du signal soit à $\langle \vec{E}^2(M,t) \rangle$

Récepteur	Temps de réponse
Oeil	$\tau_R \simeq 40$ms
Photodiode	$\tau_R \simeq 1$ms
Photoconducteur rapide	$\tau_R \simeq 0.1\mu$s

6.b Définitions

DÉFINITION :

L'**intensité** $I(M,t)$ au point M d'un écran ou d'un photodétecteur est la puissance surfacique moyennée sur τ_R et s'exprime en W.m^{-2}. A ce stade du cours on ne fait pas de différence entre éclairement et intensité.
En notation réelle :

$$\boxed{I\left(M\right)) = K\langle s^2\rangle}$$

En notation complexe :

$$\boxed{I\left(M\right)) = K|\underline{s}^2||}$$

K est une constante homogène à W.m^{-2}.

Savoir démontrer №10 : Intensité d'une OPPH

Pour une OPPH $s\left(M,t\right) = A\cos\left(\omega t - kx\right)$, l'intensité lumineuse est

$$I = \frac{1}{2}KA^2$$

Chapitre B2 : Sources lumineuses

Etienne Louis Malus de Mitry (1775-1812) X1794

Partie B : Optique

B-0 : Optique géométrique
B-1 : Modèle scalaire
B-2 : Sources lumineuses
B-3 : Interférences lumineuses
B-4 : Trous d'Young
B-5 : Exemples
B-6 : Michelson
B-7 : Diffraction
B-8 : Compléments
B-9 : Classiques Geo
B-10 : Simulations

Interférences sur une flaque d'eau huilée

I Différents types de lampes

1 Spectres de lampes

Blanche	Continu
Hg	404,7 nm, 435 nm, 546 nm
He-Ne	633 nm

2 Densité spectrale d'éclairement

Définition :

Pour une longueur d'onde λ_0, soit une fréquence $\nu = \frac{c}{\lambda_0}$, on peut définir :

✗ La **densité spectrale d'éclairement dans l'espace des longueurs d'ondes** : $\mathcal{E}_\lambda(\lambda_0)$.

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \mathcal{E}_\lambda \, \mathrm{d}\lambda_0$$

$\mathcal{E}_\lambda(\lambda_0)$ est une fonction de la longueur d'onde.

✗ La **densité spectrale d'éclairement dans l'espace des longueurs fréquences** : $\mathcal{E}_\nu(\nu)$.

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \mathcal{E}_\nu \, \mathrm{d}\nu$$

$\mathcal{E}_\nu(\nu)$ est une fonction de la fréquence.

✗ On a

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \mathcal{E}_\lambda \, \mathrm{d}\lambda_0 = \mathcal{E}_\nu \, \mathrm{d}\nu$$

✗ l'éclairement total de la lampe est

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{E}_\lambda \, \mathrm{d}\lambda_0 = \int_0^\infty \mathcal{E}_\nu \, \mathrm{d}\nu$$

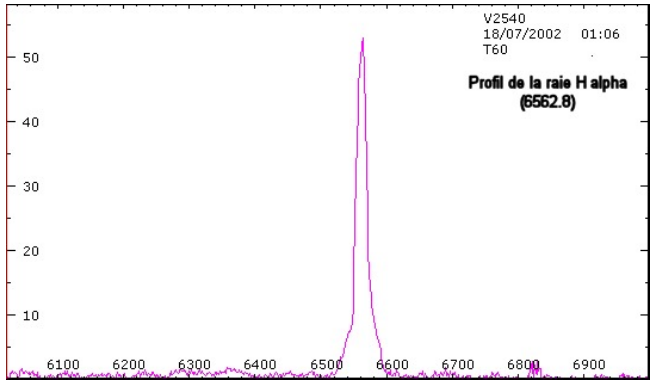
Propriétés à connaître

Savoir démontrer №1 : Relation entre les densités d'éclairement

Soit $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$.
L'intervalle : $[\lambda_0, \lambda_0 + \mathrm{d}\lambda]$ correspond à l'intervalle $[\nu_0 - \mathrm{d}\nu, \nu_0]$

$$\boxed{\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\nu \, \frac{c}{\lambda_0^2}}$$

Application 1 : Largeur spectrale



Evaluer en GHz la largeur spectrale de la raie H_α de l'hydrogène.

La courbe ci-contre est graduée en $\mathring{A}$.

II Notions de transformée de Fourier

1 Définition

DÉFINITION :

✗ On considère une fonction du temps $s(t)$, sa transformée de FOURIER est $\hat{s}(\nu)$.

$$\hat{s}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(2i\pi\nu t)\, \mathrm{d}t$$

✗ Pour des fonctions continues, on a la formule de transformation :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(\nu) \exp(-2i\pi\nu t)\, \mathrm{d}\nu$$

✗ En physique, $\nu \in [0, \infty[$.

Pour une amplitude lumineuse $s(t)$ réelle, on peut définir $\hat{s}(\nu)$.
On remarque que $\hat{s}(-\nu) = -\hat{s}(\nu)^*$, ainsi

$$s(t) = \int_0^{\infty} 2|\hat{s}| \cos(2\pi\nu t + arg(\hat{s}))\, \mathrm{d}\nu$$

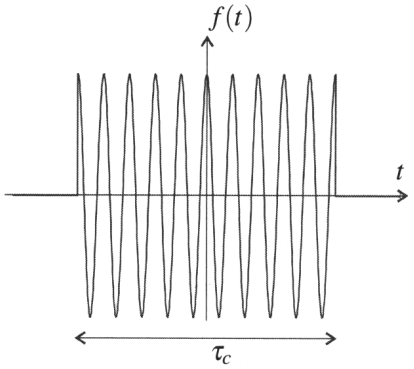
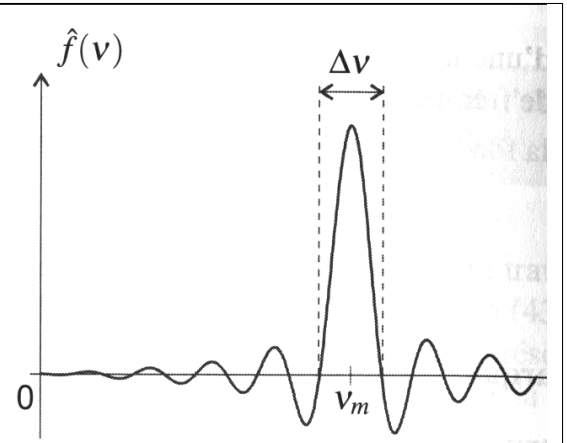
✗ **$s(t)$ est la superposition d'une infinité d'ondes monochromatiques d'amplitude $2|\hat{s}|$**

✗ On peut montrer que

$$\mathcal{E}_\nu \propto |\hat{s}|^2$$

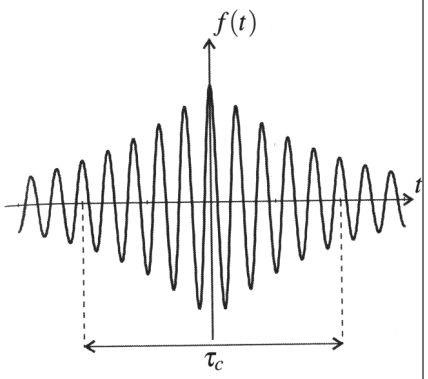
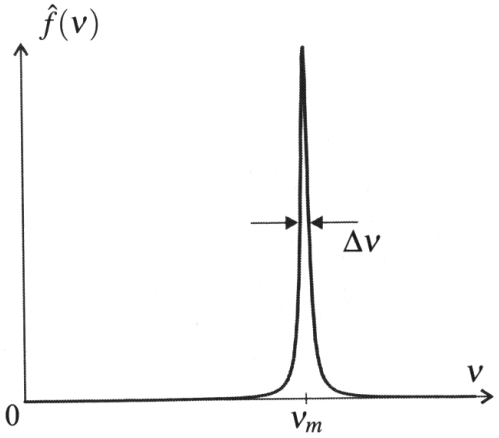
Propriété à connaître

2 Exemples

	
$s(t) = A\cos(2\pi\nu_m t)$	$\hat{s} = \frac{A\tau_c}{2}\mathrm{sinc}\left[\pi(\nu-\nu_m)\tau_c\right] + \frac{A\tau_c}{2}\mathrm{sinc}\left[\pi(\nu+\nu_m)\tau_c\right]$
$t \in \left[-\frac{\tau_c}{2}, \frac{\tau_c}{2}\right]$	$\nu \in \left[\nu_m - \frac{1}{\tau_c}, \nu_m + \frac{1}{\tau_c}\right]$

A retenir : TF d'une sinusoïde tronquée

- ✗ Le pic est centré sur ν_m
- ✗ La largeur spectrale est $\Delta\nu = \frac{2}{\tau_c}$
- ✗ Amplitude maximale en éclairement est proportionelle à A^2.

	
$A\exp\left(-\frac{\lvert t\rvert}{\tau_c}\right)\cos\left(2\pi\nu_m t\right)$	$A\tau_c\frac{1}{1+\left(2\pi\left(\nu-\nu_m\right)\tau_c\right)^2}+$ $A\tau_c\frac{1}{1+\left(2\pi\left(\nu+\nu_m\right)\tau_c\right)^2}$
$t\in\left[-\frac{\tau_c}{2},\frac{\tau_c}{2}\right]$	$\nu\in\left[\nu_m-\frac{1}{2\pi\tau_c},\nu_m+\frac{1}{2\pi\tau_c}\right]$

A retenir : Largeur spectrale : cas général

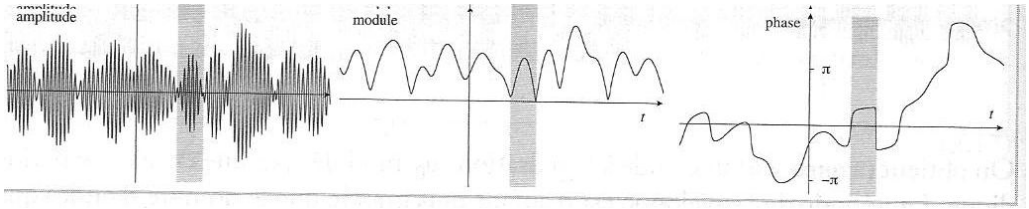
- ✗ Le pic est centré sur ν_m
- ✗ La largeur spectrale est

$$\Delta\nu \simeq \frac{1}{\tau_c}$$

III Modèle des trains d'onde

1 Exemple

Amplitude , module et phase pour l'addition de 100 OPPH de pulsations $\nu \in \left[\nu_m - \frac{\Delta\nu}{2}, \nu_m + \frac{\Delta\nu}{2}\right]$



Sur chaque train d'onde n, on peut écrire l'amplitude :

$$A = A_n \exp j\left(\omega_0 t + \varphi_n\right)$$

A_n et φ_n varient beaucoup d'un train d'onde à l'autre .

2 Définition

Définitions :

- ✗ Une onde lumineuse de fréquence centrale ν_m et de largeur $\Delta\nu$ peut être décrite comme une sinusoïde de fréquence ν_m tronquée sur une durée de l'ordre de $\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}$.
- ✗ On peut donc voir l'onde comme une succession de **trains d'onde** : de fréquence ν_m et de durée τ_c nommé **temps de cohérence**.
- ✗ L'amplitude et la phase **varient énormément d'un train d'onde à l'autre**.
- ✗ ℓ_c est la longueur de cohérence.

✗ On peut définir la **longueur de cohérence** ℓ_c

$$\boxed{\ell_c = c\tau_c}$$

Propriétés à connaître

✗ C'est l'extension **spatiale** d'un train d'onde.
✗ τ_c est l'extension **temporelle** du train d'onde.

Source	λ_0 (nm) (couleur)	ν_0 $(\times 10^{14}$ Hz)	τ_c (s)	ℓ_c (vide)
lampe blanche	400-800 nm (visible)	3,5 à 7,5	$2,5.10^{-15}$	750 nm $\simeq \lambda_0$
lampe Hg haute pression	546,1 nm (verte)	5,49	10^{-12}	0,3 mm $\simeq 5.10^2\lambda_0$
lampe Hg basse pression	546,1 nm (verte)	5,49	10^{-9}	0,3 m $\simeq 5.10^5\lambda_0$
laser HeNe ordinaire (TP)	632,8 nm (verte)	4,74	10^{-9}	0,3 m $\simeq 5.10^5\lambda_0$
laser HeNe stabilisé	632,8 nm (verte)	4,74	10^{-4}	30 km $\simeq 5.10^{10}\lambda_0$

3 Elargissement d'une raie spectrale

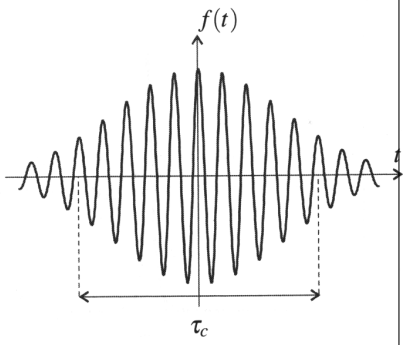
Causes d'un élargissement des raies atomiques.

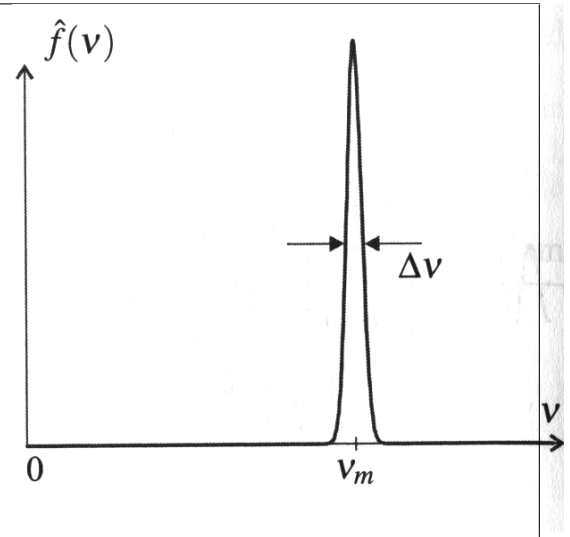
Type d'élargissement	Origine	largeur OdG
Largeur naturelle	$\delta\nu \simeq \frac{1}{\tau}$	10 MHz
Largeur Doppler [3]	Effet Doppler	10 GHz
Largeur collisionnelle [4]	Chocs entre atomes	100 GHz

3. Elargissement spectral de forme gaussienne : une raie gaussienne, centrée sur σ_0, présente un spectre en $\mathscr{E}(\sigma) = \mathscr{E}_0 \exp\left[-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{2(\Delta\sigma)^2}\right]$ de largeur caractéristique $\Delta\sigma$.

4. Elargissement spectral de forme lorentzienne : une raie lorentzienne, centrée sur σ_0, présente un spectre en $\mathscr{E}(\sigma) = \dfrac{\mathscr{E}_0}{1+\left(\dfrac{2(\sigma-\sigma_0)}{\Delta\sigma}\right)^2}$ de largeur caractéristique $\Delta\sigma$.

ANNEXE :





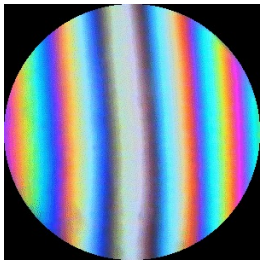
$A\exp\left(-\frac{t^2}{\tau_c^2}\right)\cos(2\pi\nu_m t)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}A\tau_c\left[\exp -\pi^2(\nu-\nu_m)^2\tau_c^2\right] + \frac{\sqrt{\pi}}{2}A\tau_c\left[\exp -\pi^2(\nu+\nu_m)^2\tau_c^2\right]$
$t \in \left[-\frac{\tau_c}{2}, \frac{\tau_c}{2}\right]$	$\nu \in \left[\nu_m - \frac{\sqrt{\ln 2}}{\pi\tau_c}, \nu_m + \frac{\sqrt{\ln 2}}{\pi\tau_c}\right]$

Chapitre B3 : Interférences lumineuses

Augustin Fresnel (1788-1827)

Partie B : Optique

B-0 : Optique géométrique
B-1 : Modèle scalaire
B-2 : Sources lumineuses
B-3 : Interférences lumineuses
B-4 : Trous d'Young
B-5 : Exemples
B-6 : Michelson
B-7 : Diffraction
B-8 : Compléments
B-9 : Classiques Geo
B-10 : Simulations



Interférences en lumière blanche

Observations d'interférences

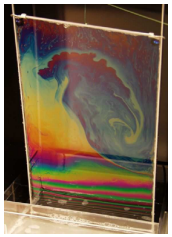
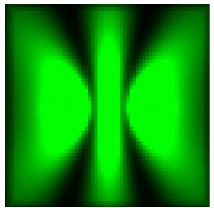


Figure B.6 – Interférences sur une lame de savon

Ce sont des manisfestations relativement peu fréquentes car elles imposent des contraintes.
Les interférences naissent de la **superposition des ondes** effectuant différents trajets et de l'**observation par un détecteur** dont le temps de réponse est toujours grand devant la période temporelle des ondes.



La présence de zones sombres/éclairées ne s'expliquent pas par l'optique géométrique : il faut passer par l'**analyse de la phase des ondes**.

Champs d'application

- ✗ spectroscopie
- ✗ mesures de distances, vitesses, temps...
- ✗ microscopie à contraste de phase
- ✗ contrôle et recherche de défauts sur les surfaces optiques
- ✗ holographie
- ✗ speckle...

I Phénomènes d'interférences à deux ondes et approximation scalaire

Notation vectorielle : $I = \left\langle \|\vec{E}\|^2 \right\rangle_{\tau_R}$

Approximation scalaire $I = \left\langle s(t)^2 \right\rangle_{\tau_R}$

Notation complexe : $I = \frac{1}{2}\underline{s}(t)\,\underline{s}^*(t) = \frac{1}{2}|\underline{s}|^2$

1 Superposition de 2 ondes - Conditions d'obtention d'interférences

Savoir démontrer №1 : Eclairement associé à la superposition de 2 ondes quasi-planes

Soient 2 ondes quasi-planes en M, de pulsation ω_1 et ω_2, à priori différentes, on montre que l'intensité en M s'écrit

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + I_{12}(M)$$

avec

$$I_{12}(M) = n\varepsilon_0 c\vec{E}_{01}.\vec{E}_{02}\langle\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t-(\varphi_1-\varphi_2)\right]\rangle_{\tau_R}$$

Définitions :

Lorsque l'intensité résultant de la superposition de 2 ondes est égal à la somme des intensités : $I = I_1 + I_2$, il n'y a **pas d'interférence** et les ondes sont dites **incohérentes** entre elles.
Dans le cas contraire $I \neq I_1 + I_2$, il y a **phénomène d'interférences** ; on parle alors d'ondes **cohérentes** entre elles. Et, l'ensemble des points M tels que $I_{12} \neq 0$ est appelé **champ d'interférences**.

Savoir démontrer №2 : Premières conditions d'interférences

On donne : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.
Soient 2 ondes quasi-planes monochromatiques, polarisées rectilignement.
Pour que ces ondes puissent être **cohérentes entre elles**, il est nécessaire (non suffisant) que

✗ **CONDITION 1** les sources doivent être synchrones :

$$\omega_1 = \omega_2$$

✗ **CONDITION 2** les directions de polarisations des ondes ne doivent pas être orthogonales :

$$\vec{E}_{01}.\vec{E}_{02} \neq 0$$

2 Formule de Fresnel des interférences à deux ondes

2.a En notation réelle

Savoir démontrer №3 : Formule de Fresnel à partir des notations réelles

Pour deux ondes cohérentes, vérifiant les conditions d'interférences,

$$s_1(M,t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1(M))$$
$$s_2(M,t) = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2(M))$$

l'intensité sur un écran, définie par $2\langle a^2(M,t)\rangle_{\tau_R}$ est

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)\ I_2(M)}\cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$$

2.b En notation complexe

Savoir démontrer №4 : Formule de Fresnel à partir des notations complexes

Pour deux ondes cohérentes, vérifiant les conditions d'interférences, qui s'écrivent en notations complexes

$$\underline{s}_1(M,t) = A_1 e^{i(\omega t - \varphi_1(M))}$$
$$\underline{s}_2(M,t) = A_2 e^{i(\omega t - \varphi_2(M))}$$

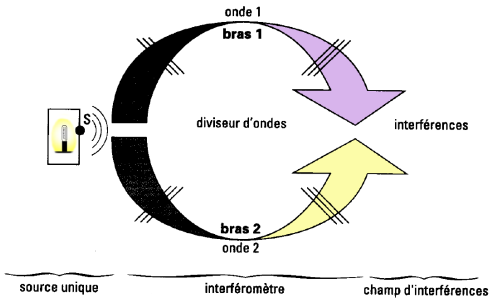
l'intensité vibratoire sur un écran est

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)\ I_2(M)}\cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$$

C'est ainsi que *lumière + lumière = obscurité* !!

II Outils de description des interférences

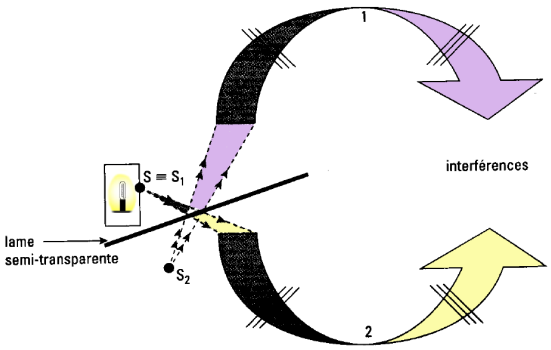
1 Interféromètre

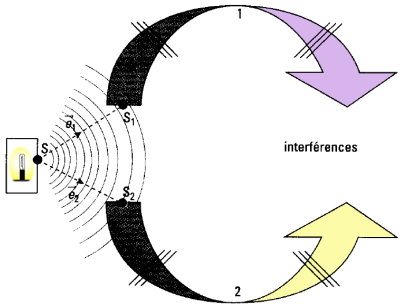


En résumé, ***Interférences*** = superposition de 2 ondes issues de sources cohérentes, soit pour simplifier une même source que l'on « divise » en 2 grâce à un **interféromètre**. Ces ondes suivent des chemins différents dans les **bras** (ou voies) de l'interféromètre puis se recombinent (i.e. se superposent) en M.

Il existe deux types de division :

On parle de **division d'amplitude** lorsqu'une surface partiellement réfléchissante opère une division du flux lumineux incident et que les faisceaux émergeants (cohérents entre eux) peuvent interférer après avoir parcouru des chemins différents.





On parle de **division du front d'onde** lorsqu'on prélève sur un faisceau incident deux faisceaux provenant de deux endroits différents du front d'onde.

2 Champ d'interférences

Définition :

On appelle **champ d'interférence** la zone de l'espace éclairée par les deux ondes cohérentes.

3 Différence de marche

Définition :

La **différence de marche** au point M entre les deux ondes est la différence de chemin optique en ce point

$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1$$

Le déphasage $\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ entre les deux ondes cohérentes est

$$\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)$$

Propriété à connaître

4 Ordre d'interférence ; franges brillantes - franges sombres

Définition :

On appelle **ordre d'interférences** $p(M)$ au point M la quantité sans dimension

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{\varphi_2(M) - \varphi_1(M)}{2\pi}$$

L'intérêt est de pouvoir référencer les franges d'interférences.

Définition :

Les **franges d'interférences** sont les intersections des surfaces iso-ordre$p$ avec la surface d'obervation (écran, capteur CCD, plan de pointé d'un viseur...)

Savoir démontrer №5 : Lien ordre d'interférences et nature des franges

Une frange **brillante** correspond à un ordre $p(M)$ **entier** ($p \in \mathbb{Z}$).
Une frange **sombre** correspond à un ordre $p(M)$ « **demi-entier** » (c'est-à-dire $p(M) = q + \frac{1}{2}$ avec $q \in \mathbb{Z}$).

Des ondes en phase au point M produisent des **interférences constructives**.

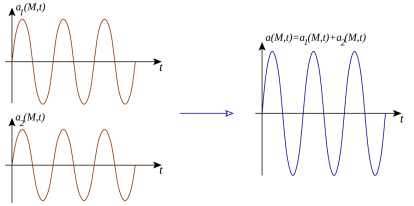


FIGURE B.7 – Amplitudes en situation constructive.

Des ondes en opposition de phase au point M produisent des **interférences destructives**.

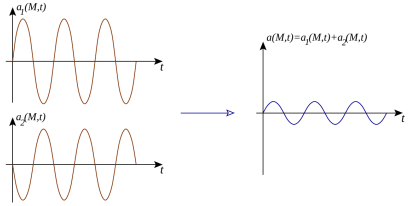


FIGURE B.8 – Amplitudes en situation destructive.

5 Interfrange

DÉFINITION :

L'**interfrange** $i(M)$ est la plus petite distance entre deux points du plan d'observation correspondant à une variation d'ordre p d'une unité (au voisinage de M).

ATTENTION…

L'interfrange n'est pas forcément uniforme ! Dans le cas où il l'est, il représente la période spatiale des franges (voir figures suivantes).

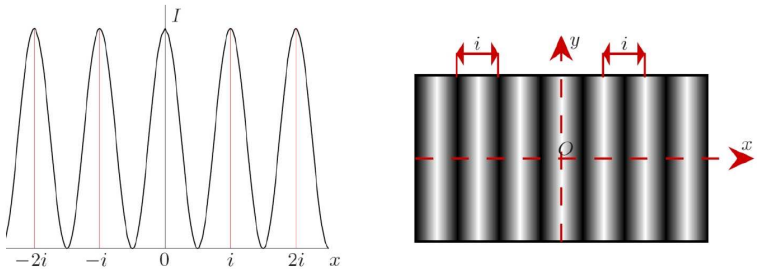


FIGURE B.9 – Cas d'un interfrange uniforme.

6 Contraste (ou visibilité)

DÉFINITION :

Dans une zone d'observation des interférences, on définit le **contraste** (ou la **visibilité**) des interférences sur cette zone par

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad \in [0;1]$$

où $I_{\max}$ (resp. $I_{\min}$) représente l'intensité maximale (resp. minimale) mesurée sur la zone considérée.

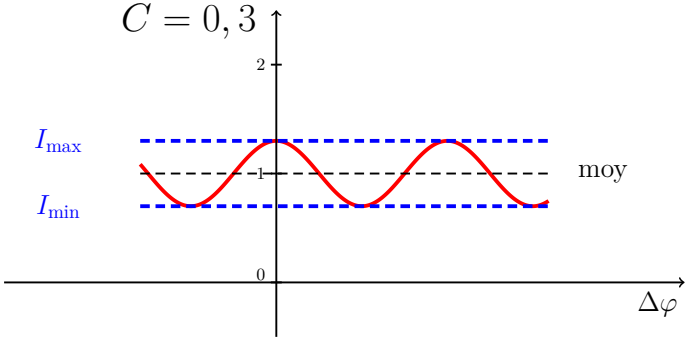
Remarques :

- ✗ $C \in [0,1]$
- ✗ Le cas où $\mathcal{C} = 0$ correspond à la situation sans interférences (**brouillage total**).
- ✗ Le cas où $\mathcal{C} = 1$ correspond à la situation des interférences les plus contrastées avec des franges sombres noires ($I_{\min} = 0$).
- ✗ L'œil humain n'est sensible qu'à des contrastes $\gtrsim 5\%$.

Savoir démontrer №6 : Formule de FRESNEL avec le contraste

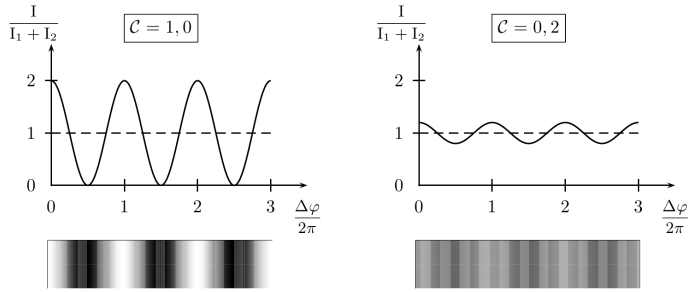
Dans le cas d'interférences à deux ondes cohérentes avec I_1 et I_2 uniformes,

$$I(M) = (I_1 + I_2)\left[1 + \mathcal{C}\cos\left(\varphi_{2M} - \varphi_{1M}\right)\right]$$



avec $\mathcal{C} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$

Application 1 : lien contraste et « visibilité » des franges



On donne l'évolution de l'intensité en fonction de $\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$ pour différents contrastes.
On constate que le celui-ci est **optimal** pour des sources telles que $I_1 = I_2$: on retiendra qu'on observe de belles interférences si $I_1 \simeq I_2$.

III Cohérence

1 Sources différentes

Savoir démontrer №7 : Sources incohérentes

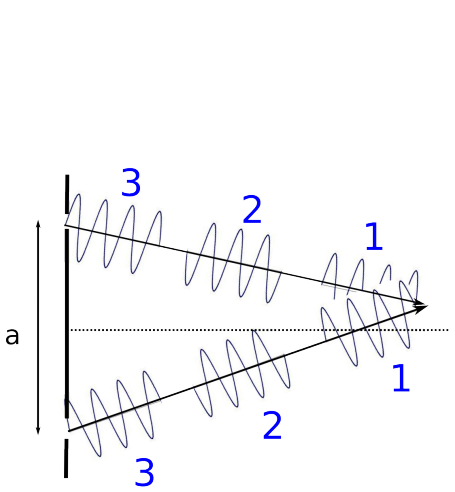
Si les deux sources sont différentes, il n'y a pas de relations de phase entre les différents trains d'ondes , on n'observe pas d'interférences.

2 Brouillage

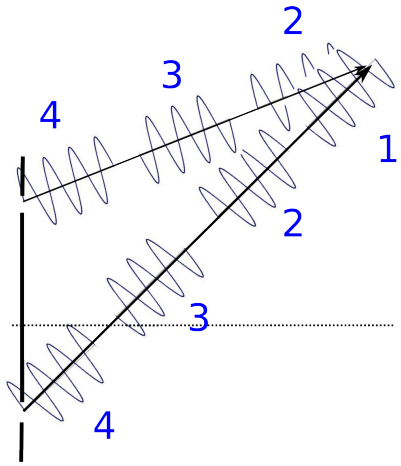
Savoir démontrer №8 : Brouillage

A l'aide du modèle des trains d'onde, on montre qu'il n'ya plus d'interférences lorsque des trains d'onde différents arrivent en M,

$$\boxed{\text{Brouillage} \iff \delta \geq \ell_c = c\tau_c}$$



$\delta \leq \ell_c$



$\delta > \ell_c$

Savoir démontrer №9 : Modèle des trains d'onde

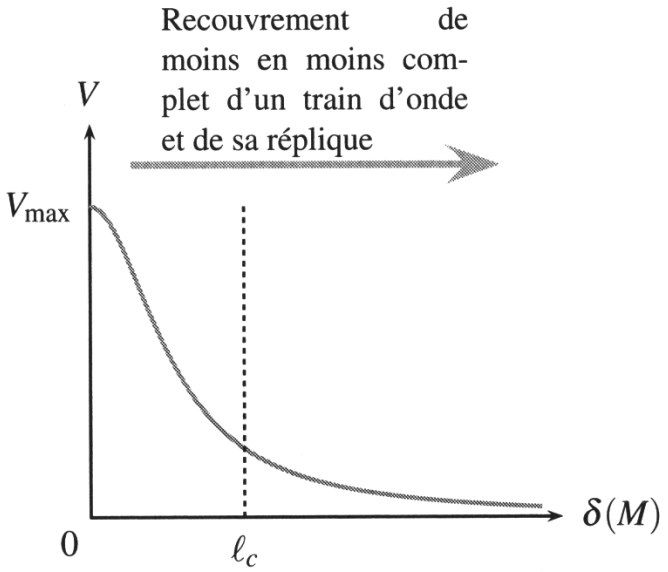
Lorsque $\delta \gg \ell_c = c\tau_c$,

$$\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = 0$$

il y a brouillage des franges.

- ✗ **CONDITION 3** Les sources doivent être identiques [a]
- ✗ **CONDITION 4** On observe des interférences uniquement dans la zone $\delta < \ell_c$.

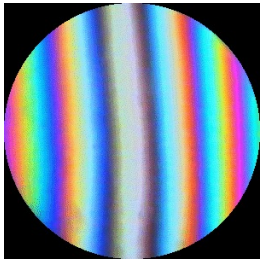
a. Exception : pour des lasers stabilisés tels que $\tau_c \gg \tau_R$, on peut observer des interférences pendant une durée τ_c avec deux lasers différents


Recouvrement de moins en moins complet d'un train d'onde et de sa réplique
V
V_{max}
0
ℓ_c
$\delta(M)$

Chapitre B4 : Trous d'Young

Augustin FRESNEL (1788-1827)

PARTIE B : OPTIQUE
B-0 : Optique géométrique
B-1 : Modèle scalaire
B-2 : Sources lumineuses
B-3 : Interférences lumineuses
B-4 : Trous d'Young
B-5 : Exemples
B-6 : Michelson
B-7 : Diffraction
B-8 : Compléments
B-9 : Classiques Geo
B-10 : Simulations

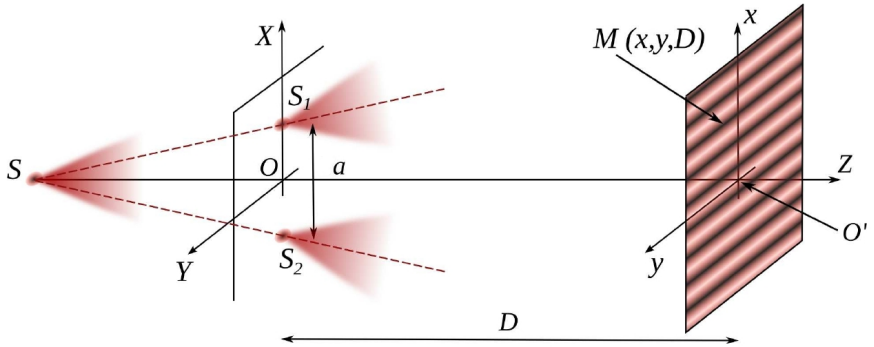


Interférences en lumière blanche

I Expérience des trous d'Young

1 Dispositif sans lentille de projection

1.a Présentation du montage expérimental



- ✗ La lumière est émise par une source **ponctuelle** S monochromatique.
- ✗ Un plan percé de 2 trous S_1 et S_2 (équidistants de S) intercepte la lumière.
- ✗ Un écran recueille la lumière **diffractée** par S_1 et S_2 et on observe dans la **zone de recouvrement** des interférences.

Soit $M(x, y, D)$ les coordonnées d'un point sur l'écran.

Ordres de grandeurs : $S_1S_2 = a \simeq 1$ mm

$D = OO' \simeq 40$ cm à 1 m avec $x \ll D$ et $y \ll D$.

1.b Calcul de la différence de marche

Savoir démontrer №1 : Différence de marche

Dans l'expérience des trous de YOUNG, la différence de marche en un point M de l'écran est

$$\delta(M) \simeq \frac{ax}{D}$$

Il faut multiplier ce résultat par n si le milieu compris entre l'écran et les trous est d'indice n.

On constate que la différence de marche ne dépend que de x : on observe des **franges rectilignes parallèles à** (Oy).

Propriété à connaître

1.c Interfrange

Savoir démontrer №2 : Interfrange uniforme

Dans l'expérience des trous de YOUNG, l'interfrange est uniforme et vaut

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

où $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ est la longueur d'onde de la lumière monochromatique utilisée.

Application 1 : Ordres de grandeur associés à un interfrange

1. Calculer l'interfrange pour les valeurs suivantes

$$a = 1 \text{ mm} \quad D = 50 \text{ cm} \quad \lambda_0 = 0,60 \ \mu\text{m et} \quad n = 1$$

Les franges sont-elles visibles à l'œil nu ?

2. Quelle doit être la distance maximale entre les deux sources secondaires pour que l'interfrange soit au moins de 1 mm sur un écran placé à 1 m des sources. On prendra $\lambda_0 = 0,60 \ \mu$m.

1.d Intensité

Savoir démontrer №3 : Formule de Fresnel appliquée aux trous de Young

Dans l'expérience des trous de Young, l'intensité s'écrit

$$\boxed{I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}\right)\right] = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right)\right]}$$

Application 2 : Courbe d'intensité

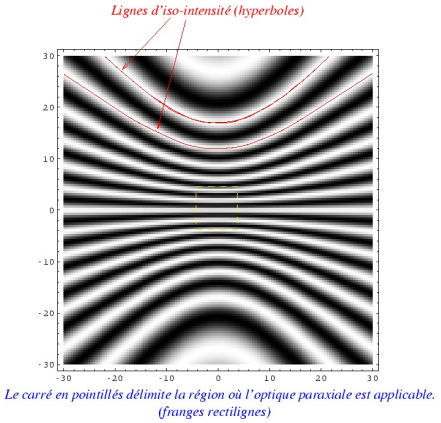
Tracer l'intensité sur l'écran en fonction de x dans le champ d'interférences.

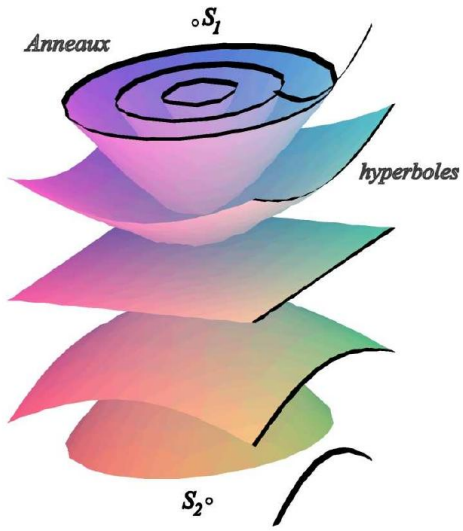
1.e Figure d'interférences : hyperboloïde de révolution et position de l'écran

Savoir démontrer №4 : Lien déphasage - surfaces d'égal intensité dans le champ d'interférences

Soient deux sources secondaires synchrones S_1 et S_2 (émettant en phase des ondes dans tout l'espace) de même nature (réelles ou virtuelles [a]), alors les surfaces d'égal intensité sont des **hyperboloïdes de révolution de foyers S_1 et S_2.**

a. Dans le cas où ces sources sont images à travers un système optique de sources physiques réellement utilisées.





Remarque :

Dans le cas Cte $= 0$, $S_1M = S_2M$ (excentricité de l'hyperbole infinie), les points M appartiennent au plan médiateur des points S_1 et S_2.
Alors $\cos(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}) = 1$ et $I(M) = 4I$ est maximale.

Suivant la position de l'écran, l'allure de la figure d'interférences change radicalement

- **Ecran parallèle à** (S_1S_2) : **franges hyperboliques** (voir figure ci-dessus).
  $\Rightarrow$ *Franges quasi-rectilignes.*
- **Ecran orthogonal à** (S_1S_2) : **franges circulaires (ou anneaux)**.

Propriété à connaître

Thomas Young 1773 - 1829

- ✗ À l'âge de six ans, Thomas Young a déjà lu deux fois la Bible ! Étudiant, il traduit cinq ou six langues anciennes, il comprend le sens des hiéroglyphes égyptiennes, il parle une dizaine de langues modernes. Esprit universel, il se passionne pour la botanique, pour la médecine, pour la philosophie. En 1815, en concurrence avec J. Champollion, il participe au déchiffrage de la pierre de Rosette.
- ✗ Il commence à exercer la médecine mais il enseigne la physique. Il effectue des recherches sur le mécanisme d'accomodation de l'œil, sur la vision des cou-leurs, sur l'arc-en-ciel, sur la dynamique des fluides, sur les marées.
- ✗ Sa principale contribution à la physique concerne le domaine de l'optique. Souhaitant établir un parallèle entre la lumière et le son, il est conduit à proposer en 1801 une théorie des interférences lumineuses. En 1803, il cherche une expérimentation qui lui permette de justifier son approche théorique et il analyse en détail le phénomène de la diffraction. En 1807, afin de tester la théorie ondulatoire de la lumière, il invente la fameuse expérience qui porte son nom.
- ✗ Il donne l'explication des couleurs des lames minces observées et décrites pour la première fois par I. Newton.
- ✗ La description ondulatoire contredit la théorie corpusculaire de I. Newton, théorie qui continue à faire autorité jusqu'au début du XIXe siècle. T. Young est donc critiqué par la plupart de ses contemporains qui ne prennent pas au sérieux ses résultats. Ses travaux trop souvent qualitatifs agacent parfois A. Fresnel qui traite des mêmes sujets de manière plus quantitative mais qui, arrivant plus tard, ne bénéficie pas de la primeur. Une sévère controverse oppose les deux physiciens sur la nature de la polarisation de la lumière.

A. Rousset et J. Six, Physiciens de A à Z, Ed. Ellipses.

2 Effet du déplacement de la source

Définition :

On appelle **frange centrale** la frange d'interférence où la différence de marche **géométrique** est nulle.
Pour celle-ci, la lumière met le même temps pour aller de la source primaire S au point M, quelque soit la voie de l'interféromètre empruntée (voie 1 ou 2).

Savoir démontrer №5 : Décalage latéral de la source

On reprend le dispositif initial (sans lentille) en supposant que la source primaire S est sur l'axe (Sz). Soit $(X_s, 0, -d)$ ses coordonnées. On montre que

$$\delta = \frac{ax}{D} + \frac{aX_s}{d}$$

La frange centrale est en

$$x_0 = -\frac{X_s D}{d}$$

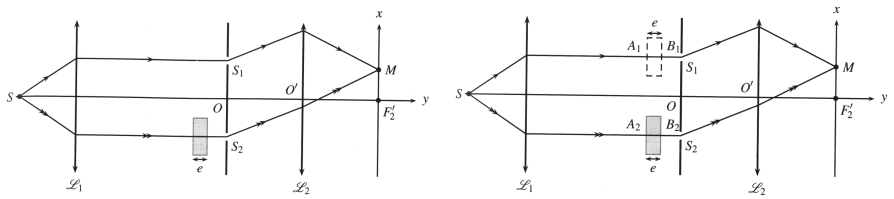
Application 3 : Déplacement dans les autres directions

Que se passe-t-il sur la figure d'interférences si

1. l'on déplace la source suivant l'axe (Oz) ?
2. l'on déplace la source suivant l'axe (OY) ?

3 Ajout d'une lame à faces parallèles

Savoir démontrer №6 : Ajout d'une lame à faces parallèles



On trouve une intensité sur l'écran :

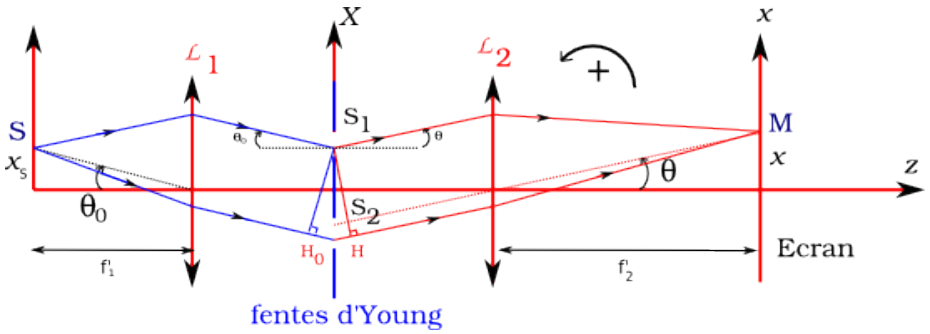
$$I(M) = I_m \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi nax}{\lambda_0 f'} + (N-n)\frac{2\pi e}{\lambda_0}\right)\right)$$

5

4 Dispositif avec lentille de projection : Fraunhofer

Convention : θ_0 et θ sont orientés de l'axe vers le rayon. en conséquence, sur le dessin

$\theta_0 < 0$ et $\theta > 0$



Savoir démontrer №7 : Dispositif avec lentille

La différence de marche entre les deux rayons est

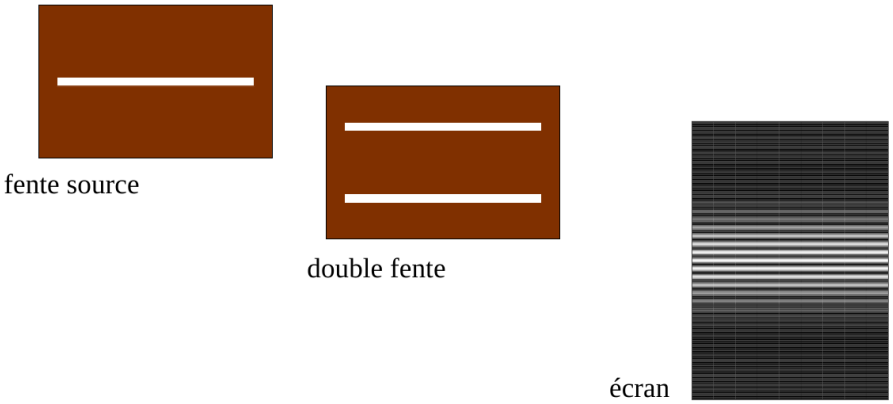
$$\delta = (H_0S_2) + (S_2H) = a\,(-\sin\theta_0 + \sin\theta)$$

⚠ Attention… $\sin\theta_0 = -\frac{X_s}{f'_1} < 0$

5 Expérience des fentes d'Young

Figure d'interférences en fentes d'Young

On retiendra que la figure d'interférences est identique en terme d'interfrange à celle observé dans le cas des trous, avec une luminosité accrue et répartie différemment.



Application 4 : Fentes d'Young éclairées sous incidence oblique en lumière parallèle

On considère deux fentes distantes de a et éclairées par une onde plane progressive monochromatique parvenant sous une incidence repérée par l'angle α.

1. Faire un schéma. Où se trouve le point S ?
2. Déterminer l'intensité sur un écran situé à une distance D de la double fente. Commenter le résultat (interfrange, frange centrale).

II Source spatialement étendue

Définitions :

✗ Une source de lumière est dite **ponctuelle**, si elle se réduit à un seul point géométrique.

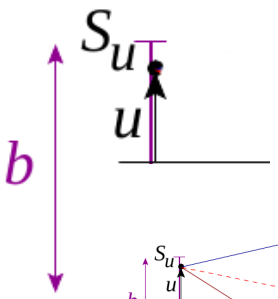
✗ Un source composée de la distribution continue de sources ponctuelles est une source **étendue**.

Soit di l'intensité produit par un élément de hauteur du de la source.
On a

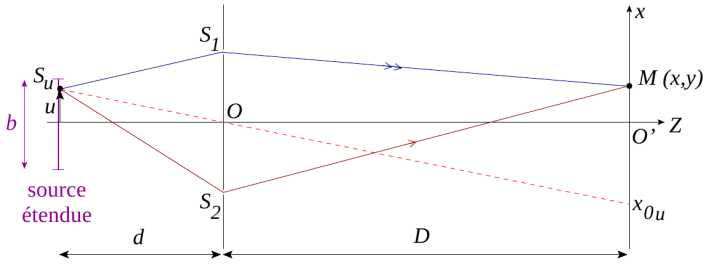
$$di = i\,(u)\,du$$

Dans le cas d'une source étendue de largeur b, on la décompose en une infinité de (fentes) sources élémentaires de largeur du **incohérentes** entre elles,

de densité linéique d'intensité **uniforme** $i(u)$, vérifiant



$$I_1 = I_2 = I_0 = \int_{u_{\inf}}^{u^{\sup}} i(u)\mathrm{d}u = i_0 b \quad \text{soit} \quad \boxed{i_0 = \frac{I_0}{b}}$$



Savoir démontrer №8 : Intensité en source étendue

En un point M d'observation, l'intensité obtenue avec une source étendue de largeur b se met sous la forme

$$I(M) = I_0\left[1 + \gamma(b)\cos\left(2\pi\frac{x}{i}\right)\right]$$

avec $\gamma(b) = \mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi a b}{\lambda_0 d}\right)$ est le **degré de cohérence spatiale**

et $i = \dfrac{\lambda_0 D}{a}$ est l'interfrange.

Application 5 : Etude du contraste

1. Rappeler la définition du contraste puis l'exprimer en fonction de $\gamma(b)$.
2. Repérer l'annulation de contraste et l'inversion de contraste.

III Source spectralement étendue

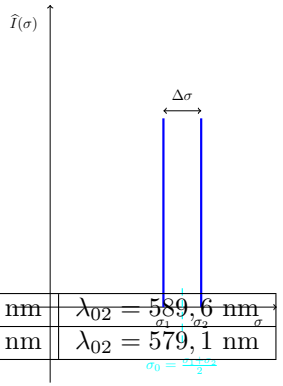
1 Doublet du sodium et battements

On dit qu'une lampe spectrale émet un **doublet** lorsque le spectre est composé de deux longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 **proches** et **d'amplitudes égales**.

On pose $\lambda_0 = \frac{\lambda_2+\lambda_1}{2}$

On a donc

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \ll \lambda_0$$



Lampe à vapeur de Sodium	Doublet Jaune	$\lambda_{01} = 589,0$ nm	$\lambda_{02} = 589,6$ nm
Lampe à vapeur de Mercure	Doublet jaune	$\lambda_{01} = 577,0$ nm	$\lambda_{02} = 579,1$ nm

On rappelle que le **nombre d'onde** σ est défini par

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \quad \text{s'exprime en} \quad m^{-1}$$

On travaillera plutôt avec un spectre en nombre d'onde σ (ou en fréquence $\nu = c\sigma$) car cela simplifie les calculs.

On utilisera $\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$.

Savoir démontrer №9 : Calcul de l'intensité

Soit un interféromètre à deux ondes éclairé par une telle source ; les deux radiations étant **incohérentes**, on somme les intensités en supposant que $\delta(M)$ la différence de marche au point M est la même pour les deux raies [a]
En posant

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$$

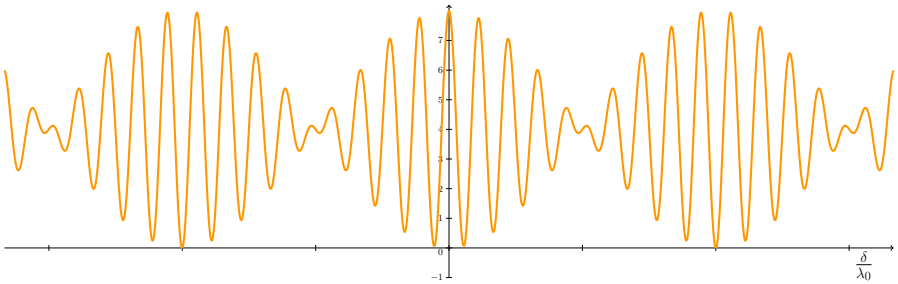
on montre que l'intensité s'écrit

$$\boxed{I(M) = 2I_0\left[1 + \gamma(M)\cos\left(2\pi\sigma_0\delta(M)\right)\right]}$$

$$\text{où } \gamma(M) = \cos\left(\pi\Delta\sigma\delta(M)\right)$$

s'interprète comme un **contraste local**

a. Cela suppose que l'indice du milieu traversé est indépendant de la longueur d'onde : milieu non dipersif.



Intensité obtenu avec un doublet dans un dispositif d'interférences à deux ondes.

Le contraste obtenu pour cette figure d'interférence dépend de la différence de marche, autrement dit du point M donc de la zone observée sur l'écran.

Définition :

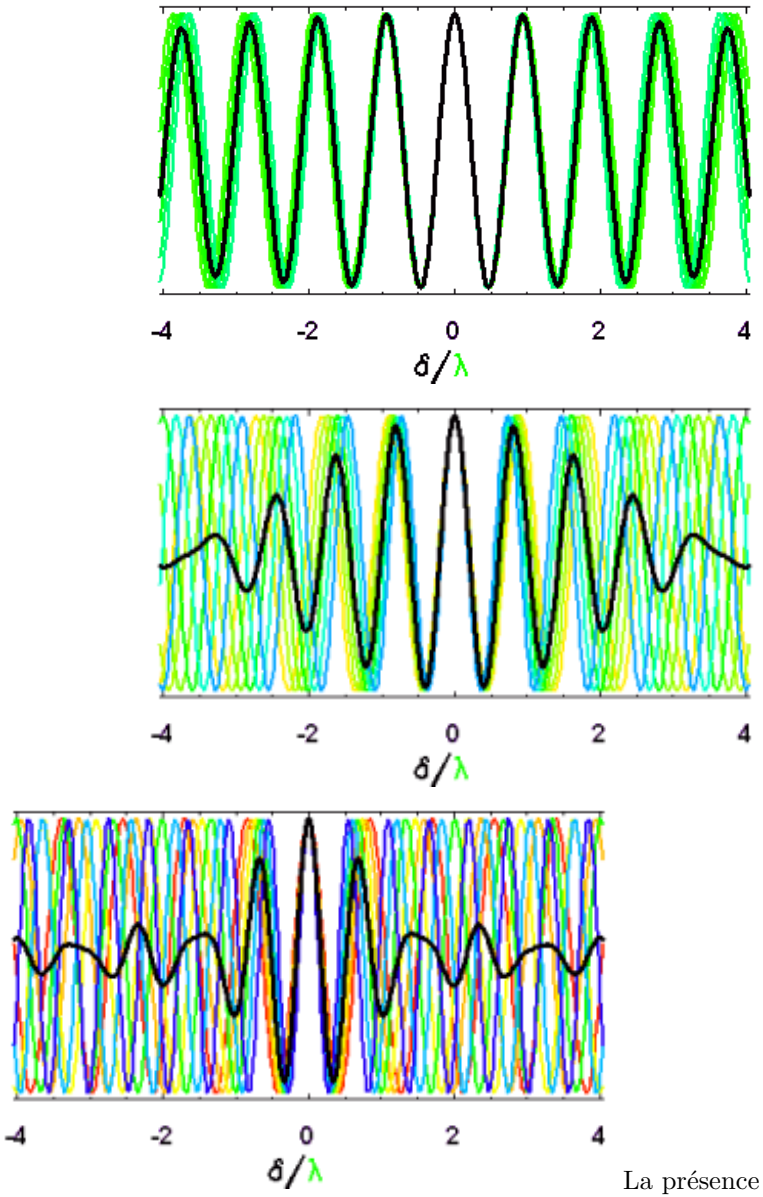
Lorsque le contraste est maximal, les 2 radiations sont **en phase** : on parle de **coïncidence** des deux systèmes de franges.
En particulier, on observe des zones de **brouillage** pour lesquelles le contraste est nul, du au fait que les 2 radiations sont en **opposition de phase** : on parle d'**anticoïncidence**.

Remarque :

On peut également écrire l'intensité en M en fonction des longueurs d'ondes

$$I(M) = 2I_0\left[1+\cos\left(\pi\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\delta(M)\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right)\right]$$

2 Brouillage



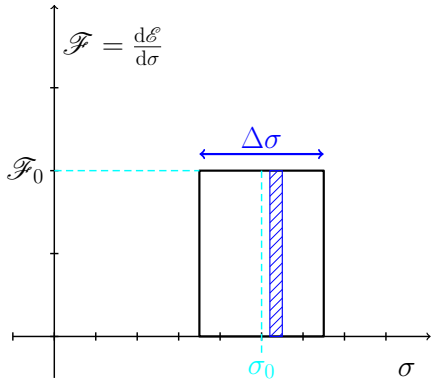
La présence de plusieurs longueurs d'onde amène un brouillage de la figure d'interférences.

3 Cas du profil rectangulaire

Entre les nombres d'onde σ et $\sigma + \Delta\sigma$ la lampe émet une onde d'intensité

$$\mathrm{d}I = \mathscr{I}_\sigma(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

On pose $I_0 = \mathscr{F}_0\ \Delta\sigma$.

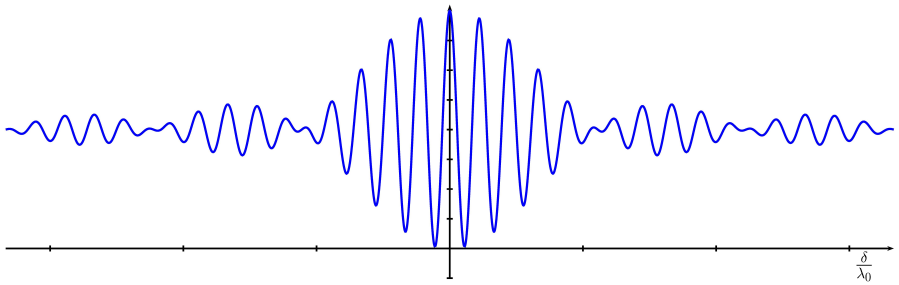


Savoir démontrer №10 : Intensité pour une source à profil rectangulaire

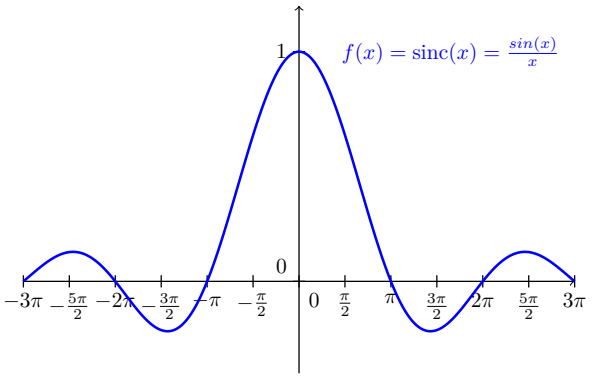
Pour une répartition spectrale uniforme dans un domaine de largeur $\Delta\sigma$, l'intensité obtenu en un point M du champ d'interférences s'écrit

$$I(M) = 2I_0\left(1 + \gamma\left(M\right)\cos\left(2\pi\sigma_0\delta(M)\right)\right)$$

et avec $\gamma\left(M\right) = \mathrm{sinc}\left(\pi\Delta\sigma\delta(M)\right)$



Intensité obtenue avec une source de spectre large dans un dispositif d'interférences à deux ondes

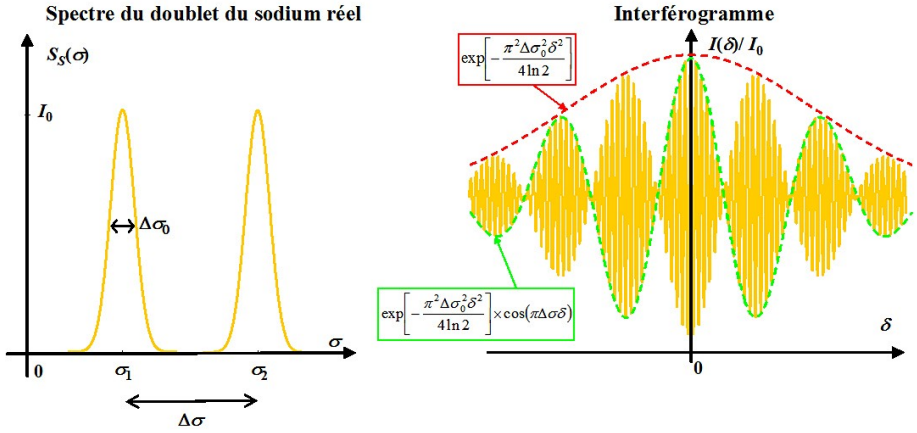


La fonction est prolongée par continuité en $x = 0$, on a $\text{sinc}(0) = 1$.
Annulations pour $x = q\pi$ avec $q \in \mathbb{Z}^*$
Lorsque $x \to \pm\infty$, $\text{sinc}(x) \to 0$.
$\text{sinc}(x)$ est une fonction **paire** (rapport de 2 fonctions impaires).

Propriétés à connaître

4 Doublet avec largeur des raies

On reprend l'exemple du doublet du sodium en tenant compte de la largeur des raies : $\Delta\sigma_0$, on obtient la figure suivante :



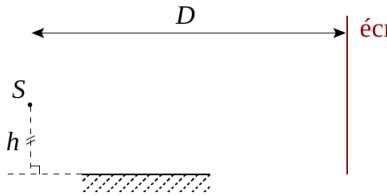
IV Autres dispositifs - HP

Point méthode - Dispositifs à sources secondaires à distance finie

1. Déterminer le champ d'interférences par le tracé des **rayons marginaux** qui le délimitent.
2. Tracer deux rayons (éventuellement sur un autre schéma) interférent en un point M quelconque du champ d'interférences.
3. Repérer les sources secondaires et mener les calculs de différence de marche (le plus souvent : application directe de la formule du cours).
4. Vérifier et commenter les résultats obtenus.

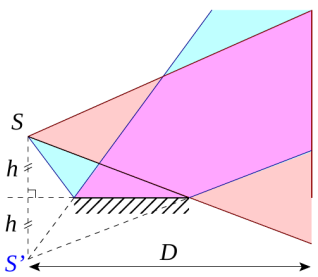
1 Miroir de Lloyd

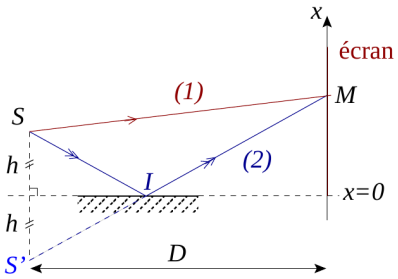
Application 6 : Mirois de Llyod



On place une source S ponctuelle monochromatique à la verticale d'un miroir plan distant de h. On observe des interférences sur un écran placé à une distance D de la source. On indique que $h \ll D$.

1. Exprimer l'intensité en $M(x, y, D)$.
2. Déterminer l'interfrange. **A.N.**→ $\lambda_0 = 0,5$ μm, $D = 4$ m et $h = 1$ mm.
3. En déduire la largeur du champ d'interférence dans le cas d'un miroir de largeur $\ell = 10$ cm, situé à 10 cm du plan source et le nombre N de franges visibles.

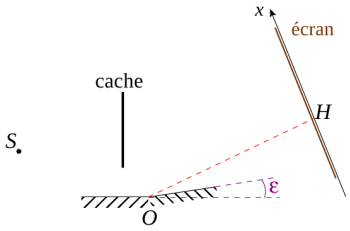




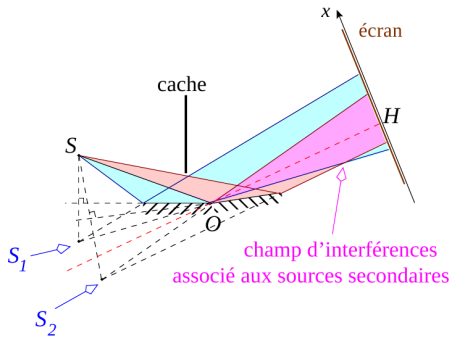
2 Miroirs de Fresnel

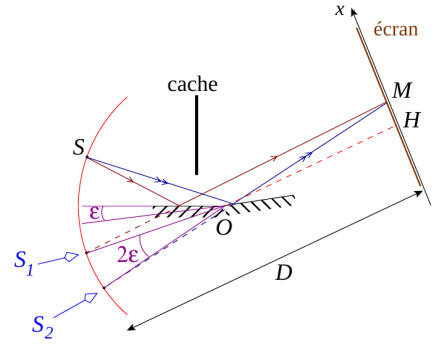
Application 7 : Mirois de Fresnel

Une source S ponctuelle monochromatique éclaire deux miroirs plans qui forment un petit angle ε. On observe des interférences sur un écran placé à une distance OH.



1. Déterminer la zone où ont lieu les interférences.
2. Préciser la position des sources secondaires S_1 et S_2 pour ce dispositif.
3. Exprimer l'intensité sur un écran en M, en fonction de ε, $OS = \ell$ et $OH = d$. Calculer l'interfrange dans le cas $\varepsilon = 17'$ et $OS = OH$.

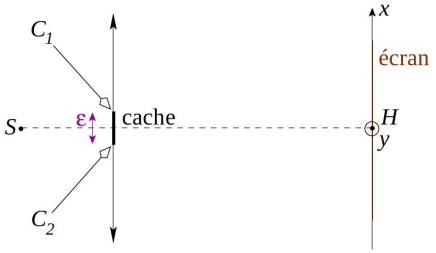




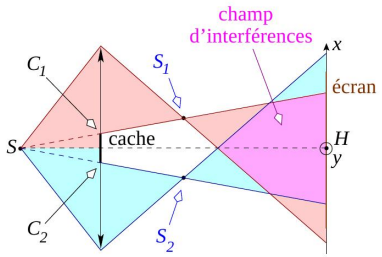
3 Bilentilles de Billet

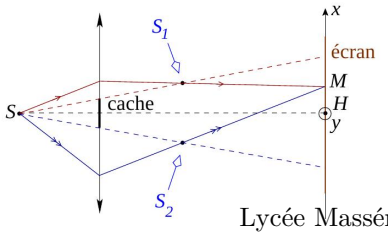
Application 8 : Bilentilles

Une lentille convergente est coupée en son centre, sur l'axe optique en deux parties symétriques. On note C_1 et C_2 les centres des deux lentilles. On place un cache entre C_1 et C_2 pour empêcher la lumière directe de traverser le système. Une source S ponctuelle monochromatique éclaire les deux demi-lentilles.



Etudier le système.



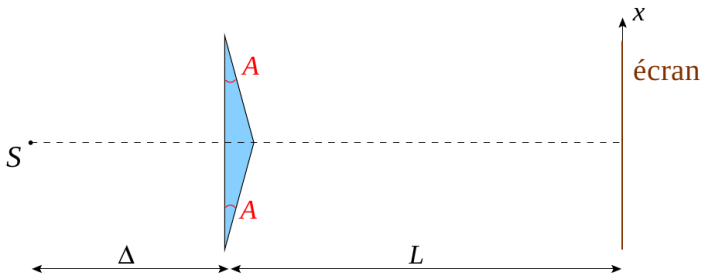


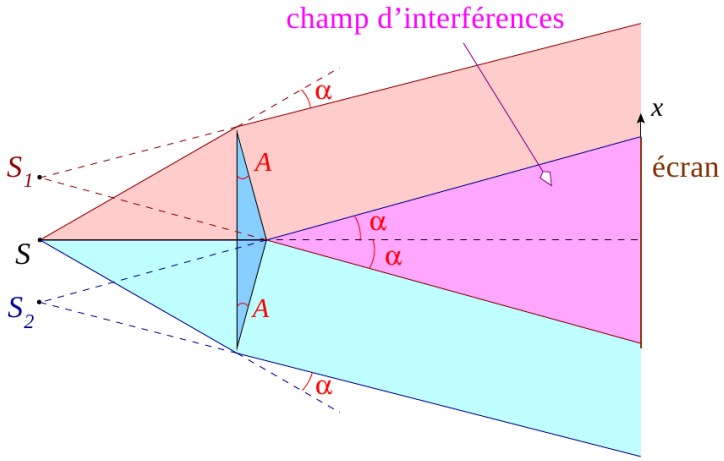
4 Biprisme de Fresnel

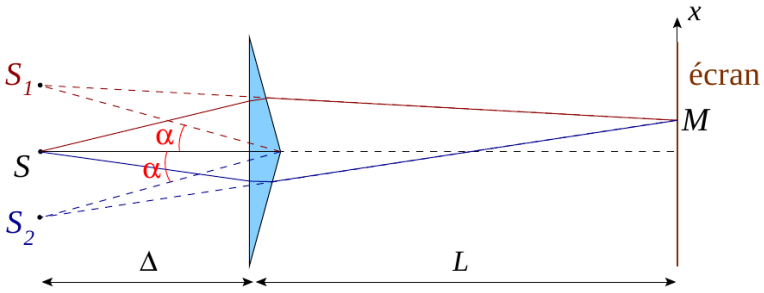
Application 9 : Biprismes de Fresnel

Une source S ponctuelle monochromatique éclaire deux prismes d'angle $A \ll 1$ placé comme indiqué sur la figure ci-dessous.
On observe des interférences sur un écran placée à une distance L des prismes.

1. Etudier le système :
   (a) en déterminant la déviation subie par les rayons arrivant sur le biprisme en incidence quasi-normale ;
   (b) en construisant le champ d'interférences.
2. Où faut-il placer l'écran pour observer le plus grand nombre de franges ?



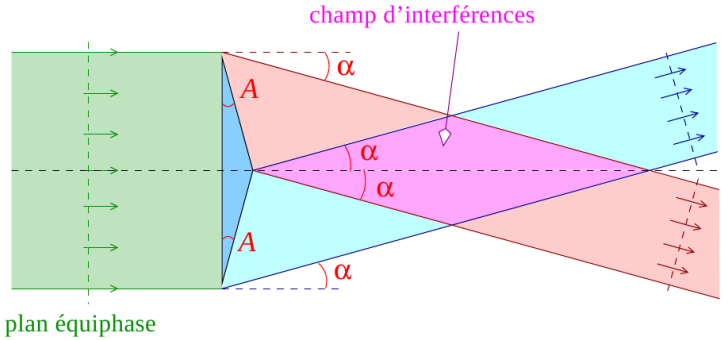




V Interférences entre deux faisceaux parallèles cohérents

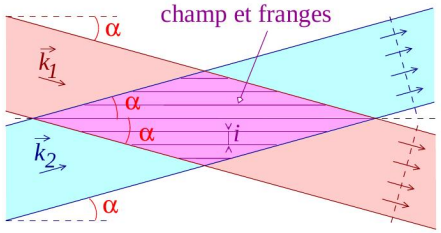
On s'intéresse au cas spécifique où les ondes qui interfèrent sont des faisceaux parallèles : les **sources secondaires sont (en général) réjetées à l'infini**. Le traitement est donc particulier...

Exemple de dispositif :



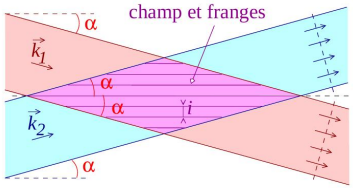
Savoir démontrer №11 : Déphasage entre deux faisecaux parallèles

Soient deux faisceaux parallèles (de surfaces d'ondes planes) cohérents, de vecteurs d'onde $\overrightarrow{k}_1$ et $\overrightarrow{k}_2$.
On pose O un point de référence où ces deux faisceaux sont en phase , alors le déphasage $\varphi(M)$ en un point M du champ d'interférences est



$$\boxed{\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \left(\overrightarrow{k}_2 - \overrightarrow{k}_1\right).\overrightarrow{OM}}$$

Savoir démontrer №12 : Caractérisation des interférences



Soient deux faisceaux parallèles (de surfaces d'ondes planes) cohérents, de longueur d'onde λ_0 dans le vide et de vecteurs d'onde $\overrightarrow{k}_1$ et $\overrightarrow{k}_2$, dans un milieu d'indice n.
Les deux faisceaux parallèles formant un angle 2α se croisent et produisent ainsi un système d'interférences.
On montre que les surfaces equi-intensité sont des plans parallèles à la bissectrice des vecteurs $\overrightarrow{k}_1$ et $\overrightarrow{k}_2$.
La distance entre deux plans consécutifs vaut

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0}{2n\sin\alpha}}$$

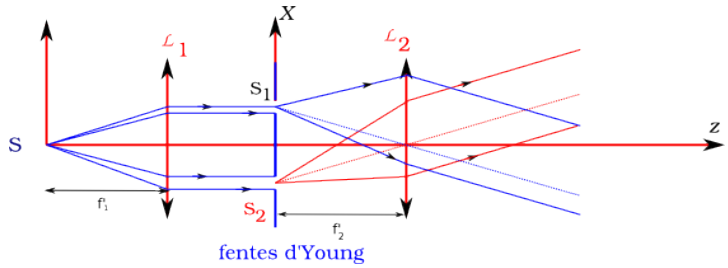
1 Trous de Young dans le PFO d'une lentille convergente

Application 10 : Trous d'YOUNG en ondes planes

On considère une source primaire ponctuelle placée au foyer d'une lentille convergente de focale L_1 de focale f'.
On place un écran opaque percé de deux trous S_1 et S_2 dans le PFO d'une seconde lentille L_2. S_1 et S_2 sont symétriques par rapport à l'axe optique.

1. Construire le champ d'interférences ;
2. Déterminer l'interfrange qu'on déterminera.

Réponse :



fentes d'Young

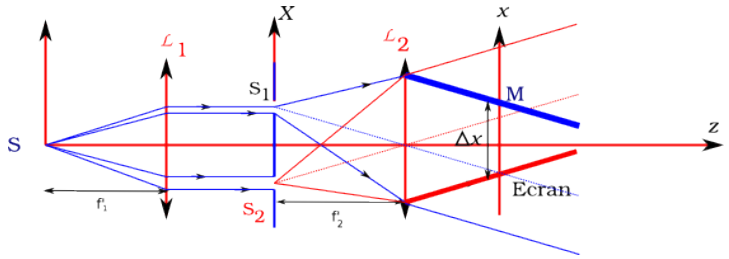
1. *Les chemins optiques entre (SS_1) et (SS_2) sont identiques.*
   S_1 est dans la plan focal objet de la lentille L_2 donc les rayons issus de S_1 vont ressortir parallèles entre eux. De même pour S_2.
   Après la lentille L_2, on se retrouve donc dans une situation d'interférences d'ondes parallèles formant un angle 2α.
   On a

$$\tan\alpha = \frac{S_1S_2}{2f'_2}$$

   L'interfrange dans un plan parallèle aux trous est :

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0}{2\sin\alpha}}$$

2. *Les franges sont localisées dans la zone comprise entre les deux traits en gras représentés sur la figure :*



Selon l'endroit où l'on place l'écran on peut compter le nombre de franges :

✗ *On note ΔX la largeur de la zone d'interférences*

✗ *Il y a une frange brillante au centre.*

✗ *De chaque coté on compte $E\frac{\Delta X}{2i}$ franges (E est la partie entière)*

✗ *le nombre de franges est donc*

$$\boxed{N = 2E\frac{\Delta X}{2i} + 1}$$

2 Biprismes de Fresnel

Application 11 : Biprismes de Fresnel

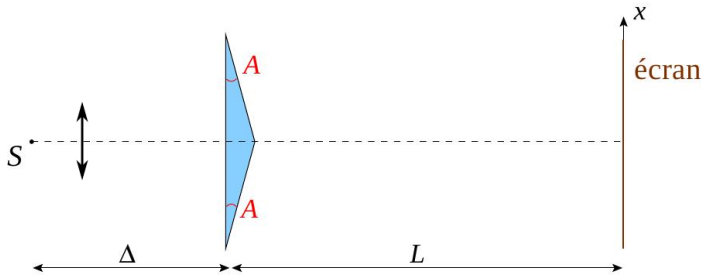
Une source S ponctuelle monochromatique, placée au foyer objet d'une lentille mince, éclaire deux prismes d'angle $A \ll 1$ placés comme indiqué sur la figure ci-dessous.
On observe des interférences.

(a) Etudier le système :

i. en déterminant la déviation subie par les rayons arrivant sur le biprisme en incidence quasi-normale ;

ii. en construisant le champ d'interférences.

(b) Où faut-il placer l'écran pour observer le plus grand nombre de franges ?

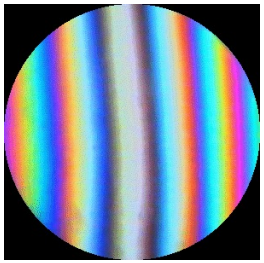


Chapitre B5 : Exemples d'interférences

Augustin Fresnel (1788-1827)

Partie B : Optique

B-0 : Optique géométrique
B-1 : Modèle scalaire
B-2 : Sources lumineuses
B-3 : Interférences lumineuses
B-4 : Trous d'Young
B-5 : Exemples
B-6 : Michelson
B-7 : Diffraction
B-8 : Compléments
B-9 : Classiques Geo
B-10 : Simulations



Interférences en lumière blanche

I Interférence sur une lame à faces parallèles : anneaux localisés à l'infini

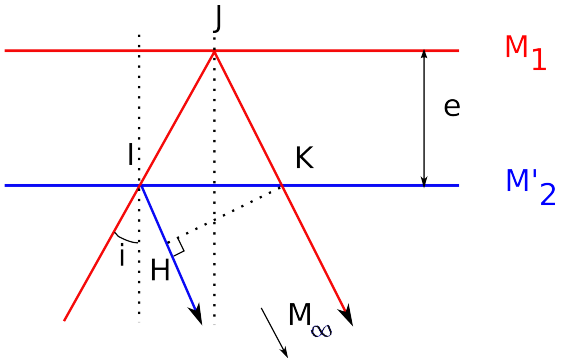
Dans cette partie (sauf dernière sous partie), la source est étendue et placée à l'infini (les rayons incidents sont parallèles).

1 Déphasage

Définitions :

- ✗ Si les deux rayons qui interfèrent sont parallèles après le dispositif expérimental, les **franges sont localisées à l'infini**.
- ✗ Expérimentalement on obseve les franges au **foyer image d'une lentille convergente** ou à très grande distance de l'interferomètre.
- ✗ Un **lame d'air** est une couche d'air emprisonnée entre deux plans (dioptres) parallèles distants de e.
- ✗ Un **lame de verre** est un morceau de verre d'indice n et d'epaisseur constante e.
- ✗ Pour de interférences à deux ondes, on ne considère que les deux premiers rayons réfléchis.

Savoir démontrer №1 : Lame d'air en réflexion



La différence de marche en un point M s'écrit

$$\boxed{\delta(M) = 2e\cos i}$$

Réponse :

On remarque que

$$\delta = (IJK) - (IH) = 2\,(IJ) - (IH) = 2\;IJ - IH$$

Dans le triangle I, J, P :

$$\cos i = \frac{e}{IJ} \qquad IJ = \frac{e}{\cos i}$$
$$\tan i = \frac{IK}{2e} \qquad IK = 2e\tan i$$

Dans le triangle I, H, K :

$$\sin i = \frac{IH}{IK} = \frac{IH}{2e\tan i} \rightarrow (IH) = \frac{2e\sin^2 i}{\cos i} \tag{B.5}$$

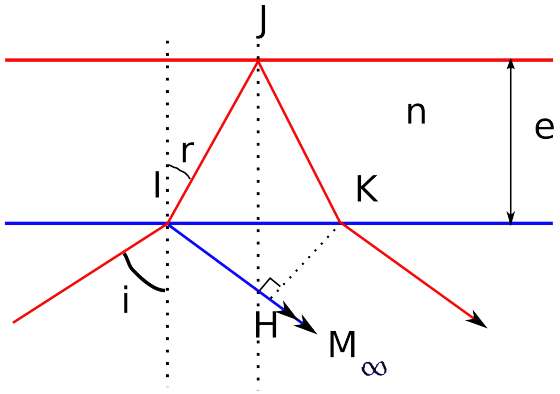
Finalement

$$\delta = \frac{2e}{\cos i} - \frac{2e\sin^2 i}{\cos i} = \frac{2e\cos^2 i}{\cos i}$$

Donc

$$\boxed{\delta = 2e\cos i}$$

Savoir démontrer №2 : Lame de verre en réflexion



La différence de marche en un point M s'écrit

$$\boxed{\delta(M) = 2ne\cos r - \frac{\lambda_0}{2}}$$

Réponse :

On remarque que

$$\delta = (IJK) - (IH) - \frac{1}{2}\lambda_0 = 2\,(IJ) - (IH) - \frac{\lambda_0}{2}$$

- Ne pas oublier le déphasage de π (soit une différence de marche de $\frac{\lambda_0}{2}$) due à la réflexion en I , lors du passage d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent.
- Pas de déphasage pour la réflexion en J.
Dans le triangle I, J, P :

$$\cos r = \frac{e}{IJ} \qquad (IJ) = \frac{ne}{\cos r}$$
$$\tan r = \frac{IK}{2e} \qquad IK = 2e\tan r$$

Dans le triangle I, H, K :

$$\sin i = \frac{IH}{IK} = \frac{IH}{2e\tan r} \rightarrow IH = 2e\tan r\sin i \qquad \text{(B.6)}$$

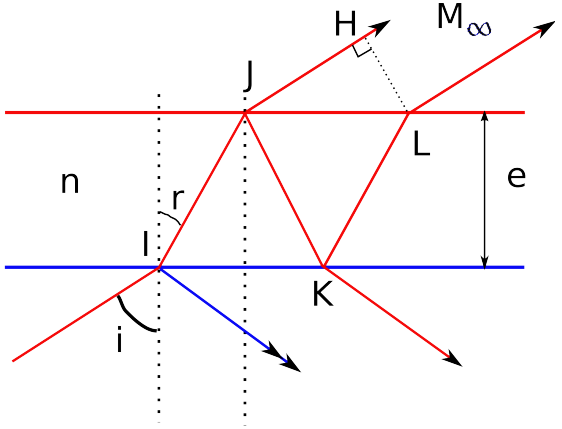
Relation de Descartes *:* $\sin i = n\sin r$
Finalement

$$\delta = \frac{2ne}{\cos r} - 2e\tan r\sin i - \frac{\lambda_0}{2} = \frac{2ne}{\cos r} - 2ne\tan r\sin r - \frac{\lambda_0}{2}$$

et $1 - \sin^2 r = \cos^2 r$, *donc*

$$\boxed{\delta = 2ne\cos r - \frac{\lambda_0}{2}}$$

Savoir démontrer №3 : Lame de verre en transmission



La différence de marche entre deux rayons transmis est :

$$\boxed{\delta(M) = 2ne(M)\cos r}$$

2 Amplitude des ondes

Définitions :

✗ Lors d'une réflexion d'un milieu 1 vers le milieu 2, l'amplitude de l'onde réfléchie est $a_r = ra_i$, avec

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

✗ En optique la convention choisie est de prendre

$$r = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right|$$

et d'ajouter un déphasage de π lorsque la réflexion se fait d'un milieu - réfringent vers un milieu plus réfringent.

Définitions :

✗ On définit également le coefficient de transmission en amplitude t, on a $a_t = ta_i$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

✗ Le coefficient de réflexion en puissance est R et transmission est T :

$$R = \left|r^2\right| \text{ et } T = 1 - R$$

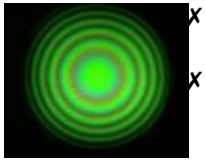
Savoir démontrer №4 : Amplitude réfléchie

Dans le cas de la lame de verre en réflexion, si on note a_0 l'amplitude incidente on a a_1 et a_2 les amplitude réfléchies qui valent :

$$a_1 = ra_0e^{-j\varphi_1} \quad a_2 = rt^2a_0e^{-j(\varphi_1+\varphi)}$$

3 Figure d'interférences

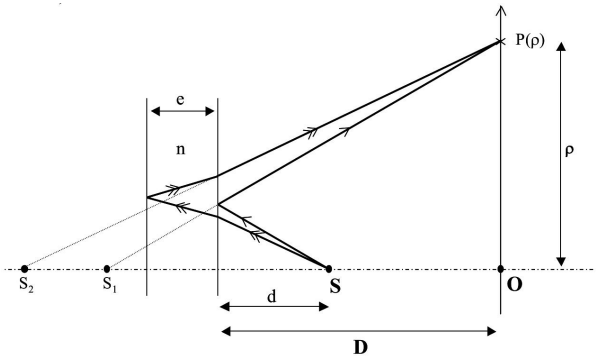
Savoir démontrer №5 : Anneaux



✗ Les franges sont localisées à l'infini, on observe au foyer d'une lentille convergente.

✗ Il y a une symétrie de rotation de l'axe de la lentille. On observe des anneaux centrés sur l'axe optique de la lentille.

4 Cas d'une source à distance finie : lame de Pöhl

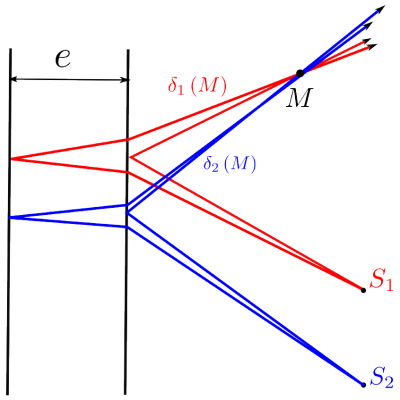


Savoir démontrer №6 :

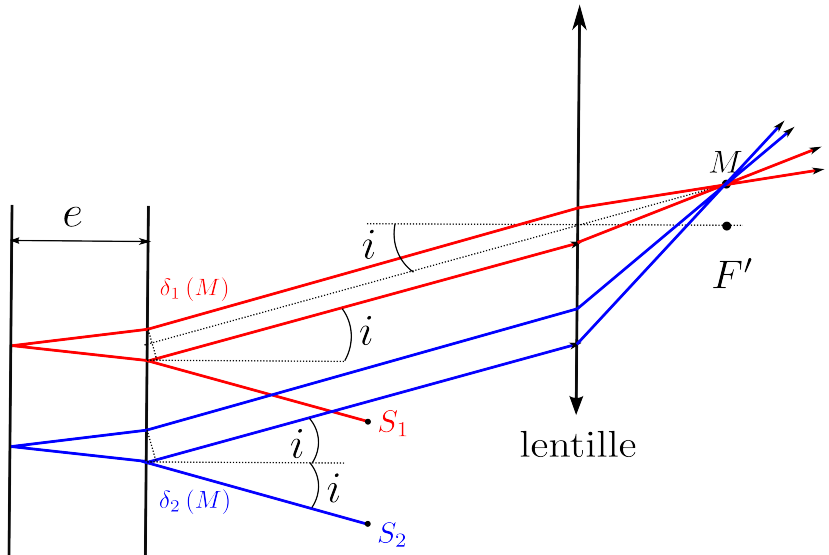
Si la source est ponctuelle les anneaux sont non localisés. Pour une source étendue, les anneaux sont localisés à l'infini

Réponse :

1. *La source S_1, en rouge, produit deux ondes qui interfèrent en M. La différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent est $\delta_1(M)$.*
   Au point M, la source S_1 produit un éclairement $I_1(M) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi\delta_1(M)}{\lambda_0}\right)\right)$
   La source S_1 produit des interférences.
2. *La source S_2, en bleu, produit également deux ondes qui interfèrent en M. La différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent est $\delta_2(M)$.*
   Au point M, la source S_2 produit un éclairement $I_2(M) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi\delta_2(M)}{\lambda_0}\right)\right)$
   Comme $\delta_1(M) \neq \delta_2(M)$, les interférogrammes autour de M sont différents.



3. *Les sources sont différentes donc **incohérentes**, on additionne les intensités. L'intensité totale au point M est*
$$I(M) = I_1(M) + I_2(M)$$
4. *Si la source est étendue, elle est composée de toutes les sources comprises entre S_1 et S_2 et elles sont incohérentes entre elles. Les interférogrammes s'ajoutent :*
   *Ainsi les intensités en M ne sont pas identiques = il y a **brouillage des franges.***



5. $\delta_1 = \delta_2 = 2e\cos i$

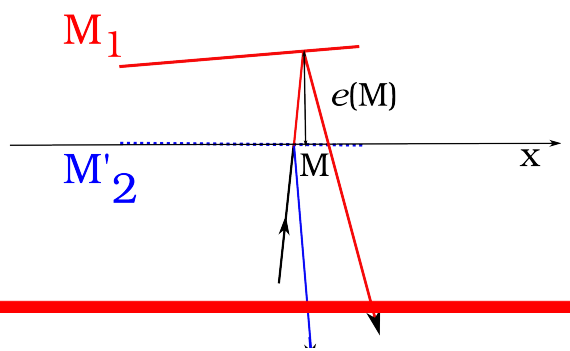
On remarque tout de même que si on observe au foyer d'une lentille alors dans ce cas particulier $\delta_1(M) = \delta_2(M)$ (voir la deuxième figure).
Chaque source produit des interférogrammes identiques et ils s'ajoutent = on voit des anneaux très lumineux.

6. *Finalement, en étendant la source, les franges sont brouillées sauf à l'infini : on dit **les franges sont localisées à l'infini**.*

II Interférence sur un coin d'air : franges localisés sur la lame

1 Coin de verre

Savoir démontrer №7 : Expression de δ

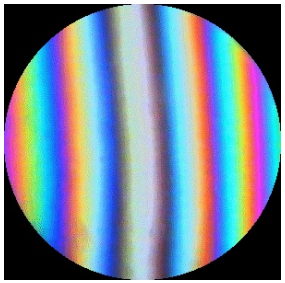


On admet que la différence de marche en un point M s'écrit

$$\delta(M) \simeq 2ne(M)\cos i - \frac{1}{2}\lambda_0$$

$$\delta(M) \simeq 2ne(M) - \frac{1}{2}\lambda_0$$

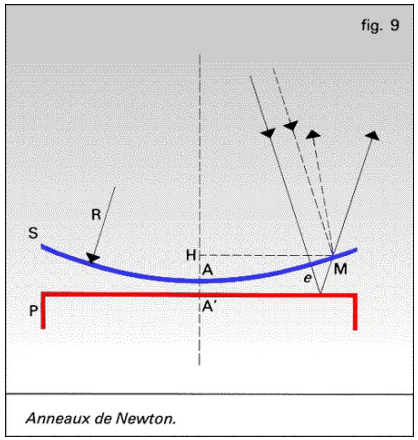
Savoir démontrer №8 : Interfrange

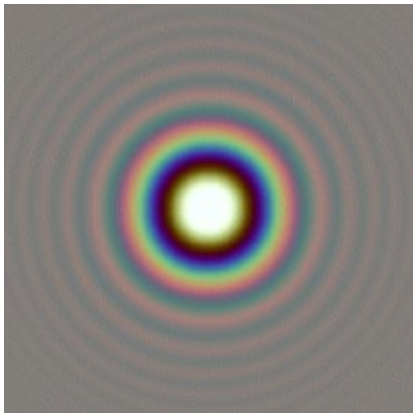


Pour un éclairage en incidence quasi-normale, sur un coin d'air d'angle α l'interfrange est

$$i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

2 Anneaux de Newton





⚠ ATTENTION…

Ne pas les confondre avec les anneaux d'HAIDINGER et les anneaux de NEWTON !

III Interférence à ondes multiples

1 Définition - Position du problème

DÉFINITIONS :

Un **réseau** est une surface diffractante sur laquelle se trouve une structure **périodique** qui transmet (réseau en transmission) ou qui réfléchit (réseau en réflexion) la lumière.
La période spatiale caractérisant la surface est appelée **pas du réseau**.

Exemple : *N fentes identiques infiniment fines distantes de a*

L'amplitude diffractée à l'infini par un réseau résulte des interférences entre les ondes issues de de tous les motifs éclairés : on parle d'**interférences à N ondes**.

Propriété à connaître

FRESNEL

Après des études à l'Ecole centrale de Caen, à l'Ecole polytechnique (où il entre à 16 ans), à l'Ecole des ponts et chaussées, il est envoyé aspirant en Vendée en 1809. Ingénieur à Nyons (où il est sous surveillance pour avoir rejoint l'armée royaliste), il achève la nationale Briançon Pont-Saint-Esprit. Lorsque Napoléon débarque à Golfe-Juan, il quitte son poste et s'engage dans l'armée du duc d'Angoulême en 1815.
Il poursuit ses expériences sur la diffraction de la lumière et met en évidence la double réfraction dans tous les cristaux. Réintégré, il est affecté en Ille-et-Vilaine à la surveillance des ateliers de charité de Rennes. Employé au canal de l'Ourcq, au cadastre de Paris en 1818, il est adjoint en 1819, puis secrétaire en 1823 à la commission des phares. Prix de l'Académie des sciences en 1819, qui lui ouvre ses portes en 1823, il est examinateur puis répétiteur de physique et géométrie à l'Ecole polytechnique en 1821.
On lui doit la théorie ondulatoire de la lumière, les miroirs de Fresnel, la lentille à échelons servant à augmenter le pouvoir éclairant des phares (phares lenticulaires). Sur son lit de mort, il reçoit d'Arago (X1803), avec qui il travailla sur la lumière polarisée, la médaille Rumford de la Société royale de Londres.

2 Calcul de la différence de marche

Savoir démontrer №9 : Expression de la différence de marche (cas en transmission)

soit δ la différence de marche entre deux ondes consécutives

$$\delta = a\,[\sin\theta - \sin\theta_0]$$

En prenant S_0 comme référence, l'onde m présente un différence de marche par rapport à l'onde 1 qui s'écrit

$$\delta_m = m\delta = ma\,[\sin\theta - \sin\theta_0]$$

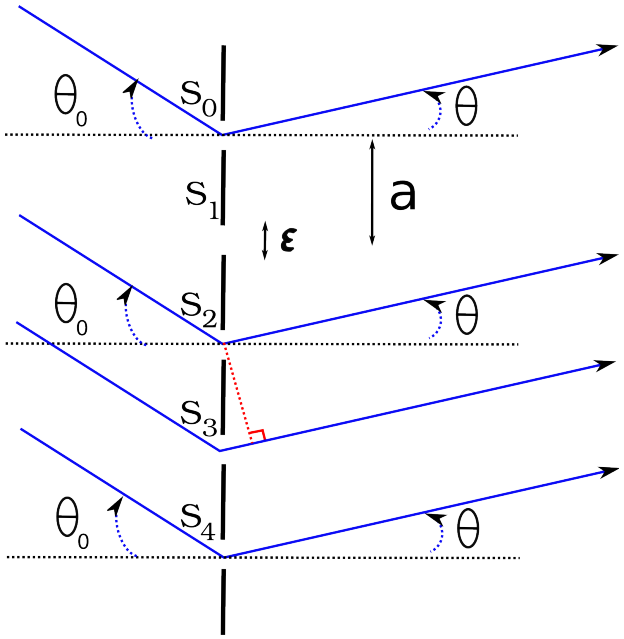


FIGURE B.10 – Quelques fentes de largeur ϵ d'un réseau, de pas a.

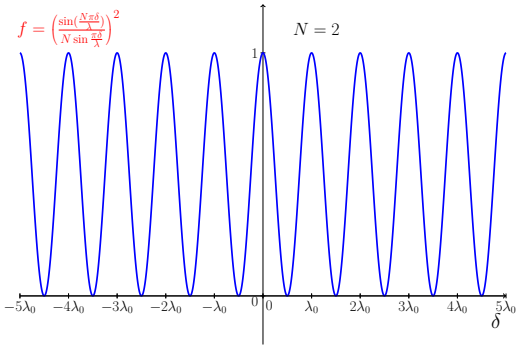
3 Eclairement (cas des « traits »)

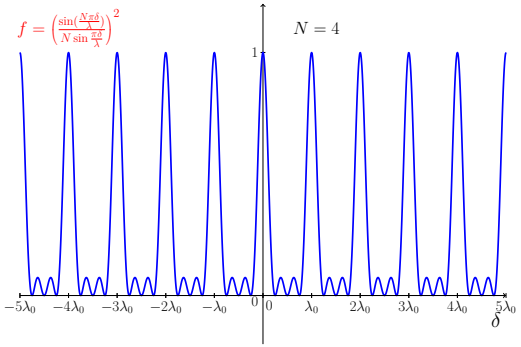
Savoir démontrer №10 : Fonction réseau

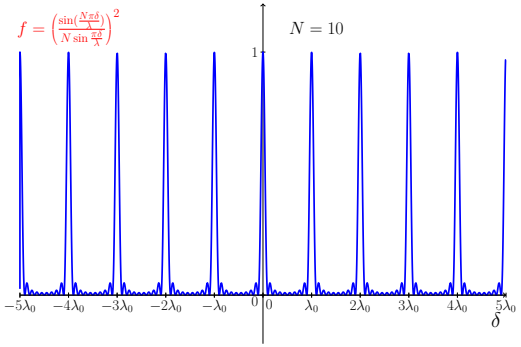
Dans le cas où on peut négliger la largeur des fentes (devant a), l'éclairement obtenu en M, s'écrit

$$\mathscr{E}(M) = N^2 \mathscr{E}_0 \frac{\sin^2 \frac{N\phi}{2}}{N^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

où $\Phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi a}{\lambda_0}(\sin\theta - \sin\theta_0)$







4 Ordres du réseau - Formule des réseaux

Savoir démontrer №11 : Formule fondamentale du réseau par transmission

Les directions θ_p des maxima principaux sont données par la formule des réseaux

$$\sin\theta - \sin\theta_0 = p\frac{\lambda_0}{a}$$

Définition :

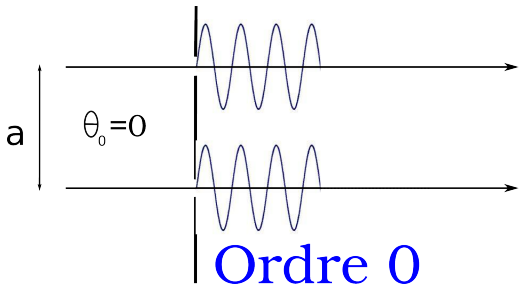
p est appelé **ordre du réseau**.

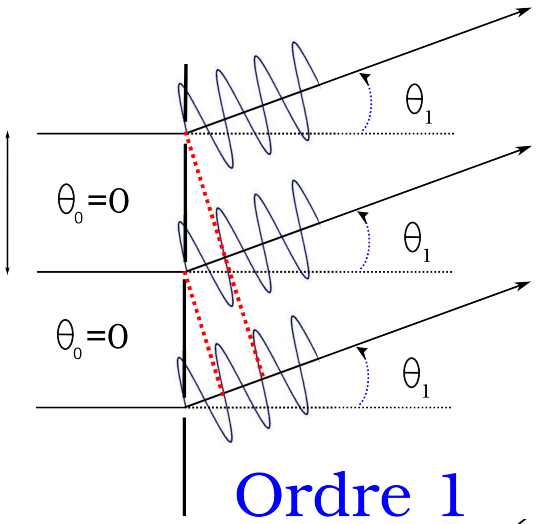
L'ordre 0 correspond à la direction de l'optique géométrique.

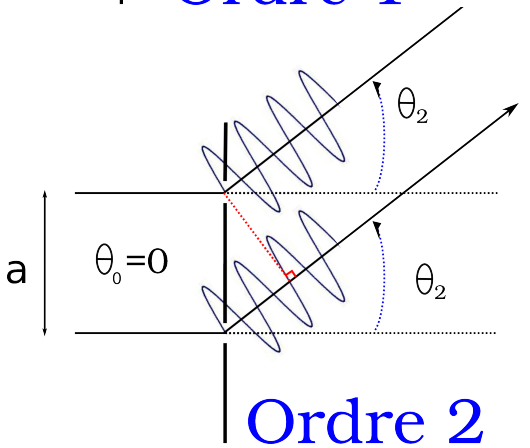
Propriété à connaître

Application 1 : Détermination des directions des maxima principaux

On se place en incidence normale. Proposer un moyen de déterminer graphiquement la direction θ_p des premiers maxima principaux.



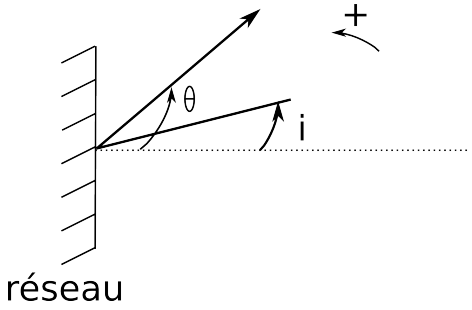




5 Réseau par réflexion

Savoir démontrer №12 : Réseau par réflexion

On considère un réseau en réflexion pour lequel les conventions d'orientation sont données sur la figure ci-dessous :



Montrer que la formule des réseaux s'écrit alors

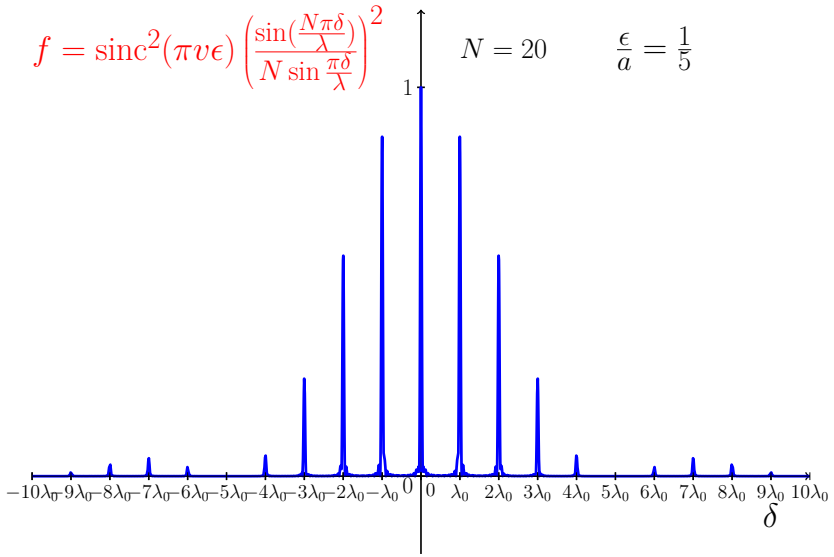
$$\sin\theta + \sin i = p\frac{\lambda_0}{a}$$

6 Largeur des pics - Interférences et diffraction

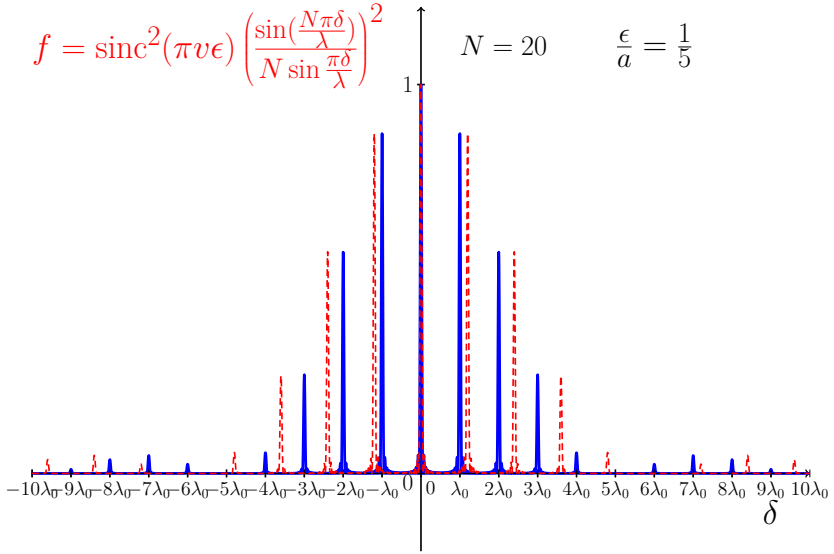
Dans le cas où on ne peut négliger pas la largeur des fentes (devant a), l'éclairement obtenu en M, s'écrit

$$\mathscr{E}(M) = N^2\mathscr{E}_0\text{sinc}^2\left(\pi u\epsilon_X\right)\frac{\sin^2\frac{N\phi}{2}}{N^2\sin^2\frac{\phi}{2}}$$

où $\Phi = \frac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right)$



7 Dispersion : application à la spectrométrie



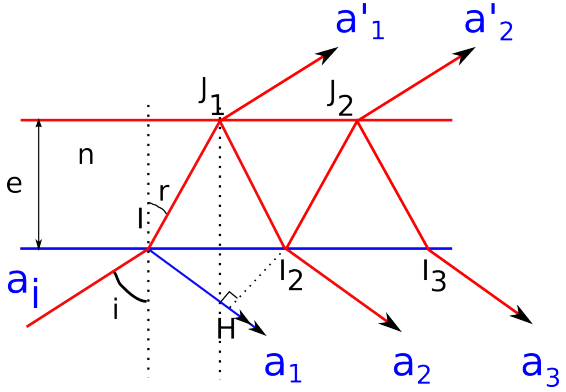
Application 2 : Pas d'un réseau

1. Un réseau comporte 500 traits par mm, quel est son pas ?
2. Quel est l'écart angulaire $\Delta\theta$ entre deux rayons dispersés dans l'ordre 2 du réseau ayant un $\Delta\lambda = 10$ nm autour de $\lambda_0 = 500$ nm ?

IV Interférences d'ondes multiples (HP)

1 Amplitude complexe

Savoir démontrer №13 : Expression des différences de marche



La différence de marche entre deux rayons réfléchis ou deux rayons transmis est

$$\delta = 2ne\cos r$$

Le déphasage entre deux rayons transmis est

$$\phi = \frac{4\pi ne\cos r}{\lambda}$$

Définitions :

Le **coefficient de réflexion en amplitude et en intensité** est :

$$r_1 = r_{1\to 2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -r_2 \text{ et } R = r_{1\to 2}^2$$

Le **coefficient de transmission** en amplitude est :

$$t_1 = t_{1\to 2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \text{ et } t_2 = t_{2\to 1} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}$$

Savoir démontrer №14 : Amplitudes complexes des multiples ondes transmises

Soit a_i l'amplitude incidente en I.
Soit $\underline{a}_m$ l'amplitude des ondes réfléchies aux différents points I_m et $\underline{a'}_m$ l'amplitude des ondes transmises (aux points J_m).

$$\underline{a}_1 = r_1\ \underline{a}_i$$
$$\underline{a}_m = t_1\ t_2\ \underline{a}_i\ r_2^{2m-3}\ \exp\left(-(m-1)i\phi\right)$$
$$\underline{a'}_m = \underline{a'}_1\ r_2^{2(m-1)}\ \exp\left(-mi\phi\right)$$

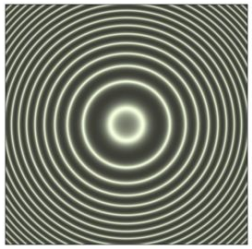
2 Application à l'interferomètre de Fabry-Perot

Cet interféromètre est constitué de deux lames hautement réfléchissantes (qui sont généralement deux miroirs) parallèles en vis-à-vis. Mais une faible partie de la lumière est transmise à chaque incidence et l'ensemble de ces ondes ainsi transmises vont interférer à l'infini. Ici $n = 1$

Remarque : Un **filtre interférentiel** et **cavité laser** peuvent être modélisés de la même façon.

2.a Eclairement

Savoir démontrer №15 : Eclairement à partir de l'amplitude complexe en M



L'amplitude totale transmise est

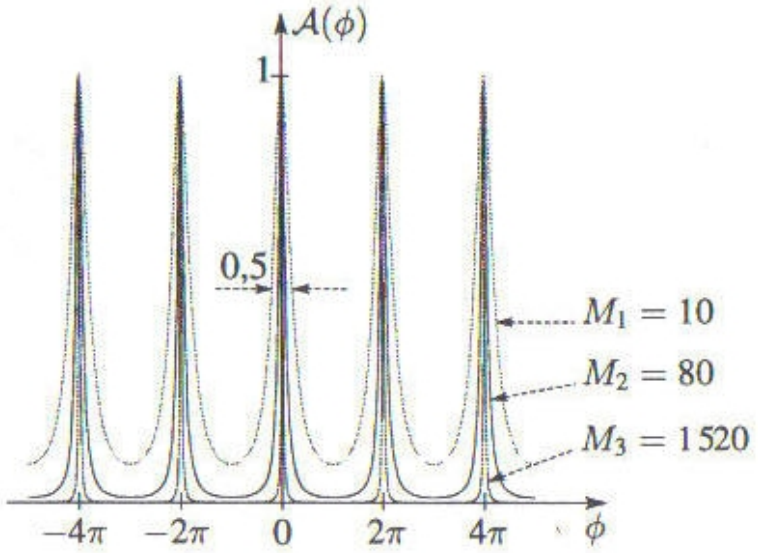
$$\underline{a}(M) = \underline{a}_0 \frac{1}{1 - R\exp(-i\phi)}$$

L'éclairement transmis est alors :

$$\mathscr{E}(M) = \frac{\mathscr{E}_{\max}}{1 + R^2 - 2R\cos\phi} = \frac{\mathscr{E}_{\max}}{1 + \left(\frac{2\mathscr{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2\frac{\phi}{2}}$$

où $\mathscr{F}$, la **finesse**, est reliée au coefficient de réflexion en intensité par

$$\mathscr{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$



2.b Calcul de la largeur à mi-hauteur - Lien avec la finesse

Savoir démontrer №16 : Largeur à mi-hauteur

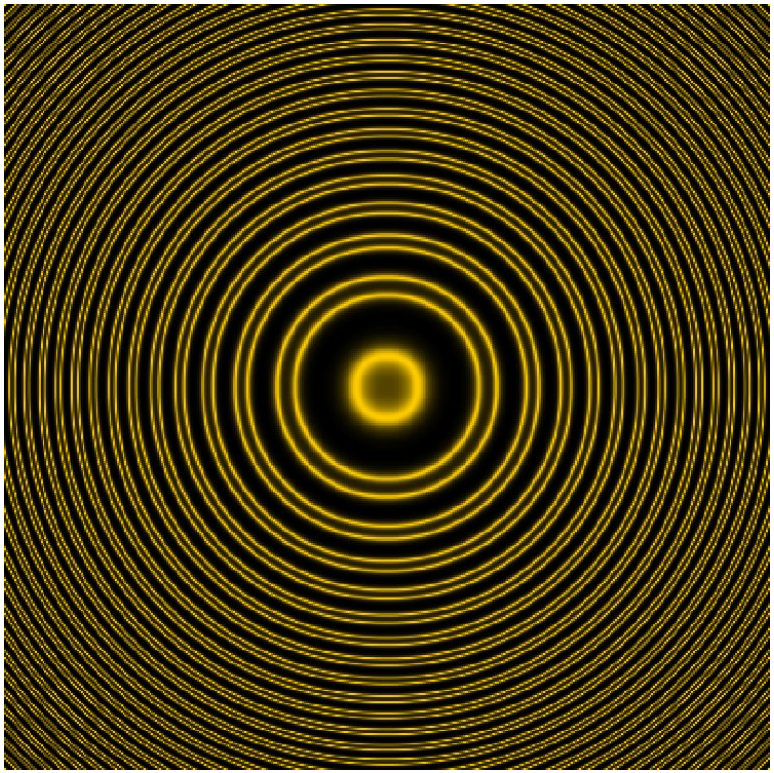
Montrer que la largeur à mi-hauteur des pics est

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\mathscr{F}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

DÉFINITION :

On appelle **finesse** de la cavité (deux miroirs en vis-à-vis) le nombre $\mathscr{F}$ défini par

$$\mathscr{F} = \frac{M\pi}{2}$$



Résolution des raies du sodium. On voit les deux systèmes de raies dues aux deux longueurs d'ondes.

V Résolution des instruments d'optique

1 Définition -Critère de Rayleigh

Savoir démontrer №17 :

- ✗ Deux images sont **résolues** si on peut les distinguer.
- ✗ On parle de réolution **spatiale** pour deux objet et de **résolution spectrale** dans un spectre.
- ✗ Critère de Rayleigh

$$\alpha \geqslant 0.61\frac{\lambda}{R}$$

2 Pouvoir séparateur d'un télescope

Définitions :

Le pouvoir de **résolution, ou pouvoir de séparation**, est la distance minimale qui doit exister entre deux points contigus pour qu'ils soient correctement discernés au travers d'un système optique

Savoir démontrer №18 : Pouvoir séparateur

On considère une télescope d'ouverture D, et de focale f'.
Le pouvoir séparateur ce de télescope est

$$\theta_{\min} = \frac{\lambda}{a}$$

3 Résolution spectrale d'un spectroscope à réseau

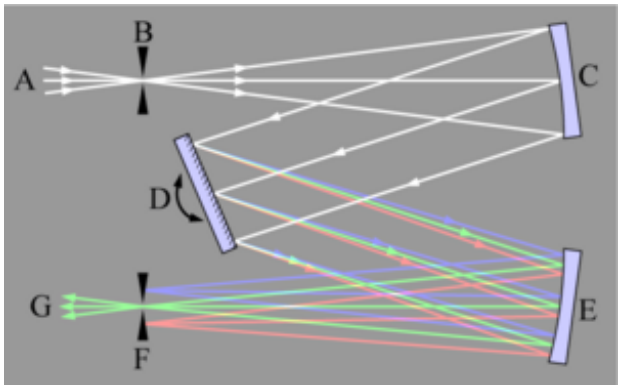
Savoir démontrer №19 : P

our pouvoir êtres résolues par un raiseau, deux raies distantes de $\Delta\lambda$ doivent vérifier :

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \geqslant \frac{1}{kN}}$$

N est le nombre de traits cohérents éclairés et k est l'odre du réseau.

4 monochromateur à réseau

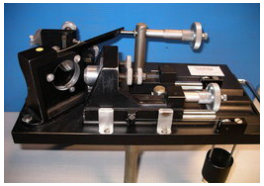


Chapitre B6 : Interféromètre de Michelson

Albert A. Michelson (1852-1931)

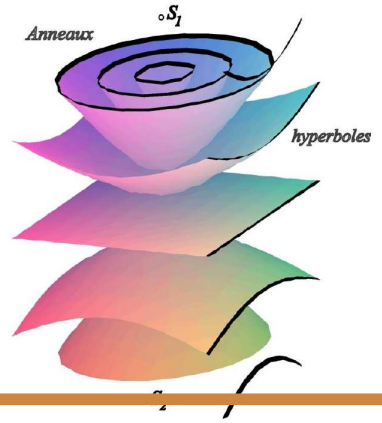
Partie B : Optique

B-0 : Optique géométrique
B-1 : Modèle scalaire
B-2 : Sources lumineuses
B-3 : Interférences lumineuses
B-4 : Trous d'Young
B-5 : Exemples
B-6 : Michelson
B-7 : Diffraction
B-8 : Compléments
B-9 : Classiques Geo
B-10 : Simulations



Vue générale de l'interféromètre

Rappel : Allures de franges



Lorsque le plan d'observation est perpendiculaire à la droite S_1S_2 formée par les sources fictives S_1 et S_2 on observe des anneaux. Lorsque le plan d'observation est parallèle à la droite S_1S_2 on observe des franges quasi-rectilignes.

I Interferomètre de Michelson

1 Description de l'appareil

L'interféromètre de Michelson est constitué par deux miroirs M_1 et M_2 orthogonaux et d'une lame semi transparente la séparatrice Sp placée à 45°des axes des miroirs. Les rayons qui traversent cette lame sont retardés par rapport à ceux qui sont réfléchis aussi on place dans un faisceau une lame transparente de même épaisseur la compensatrice (en général, non représentée sur les schémas).

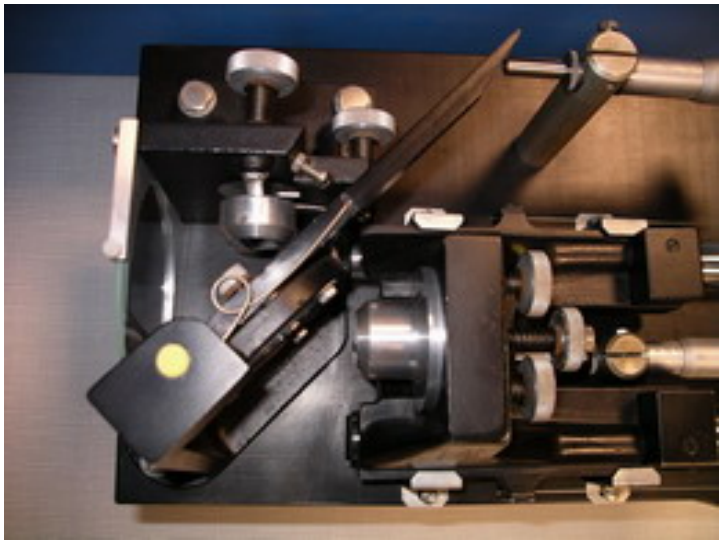


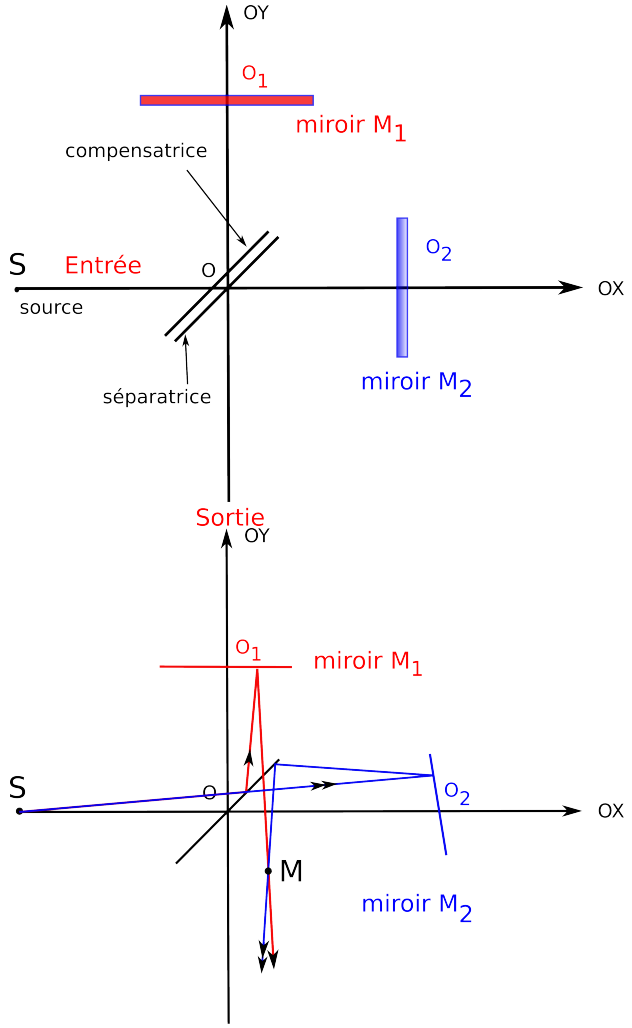
Photo d'un interféromètre vu de dessus.

Expérience de Michelson et Morley

Albert Abraham Michelson et Edward Morley ont cherché à mettre en évidence la différence de vitesse de la lumière entre deux directions perpendiculaires et à deux périodes espacées de 6 mois, et concluent (contrairement à l'attente) que cette différence était nulle.
En fait, il s'agit de toute une série d'expériences entre 1881 (Michelson seul) et 1887 (ensemble), date à laquelle le résultat est définitivement admis (bien que cette expérience soit régulièrement refaite à chaque fois qu'un progrès technique permet de gagner en précision, avec toujours le même résultat).

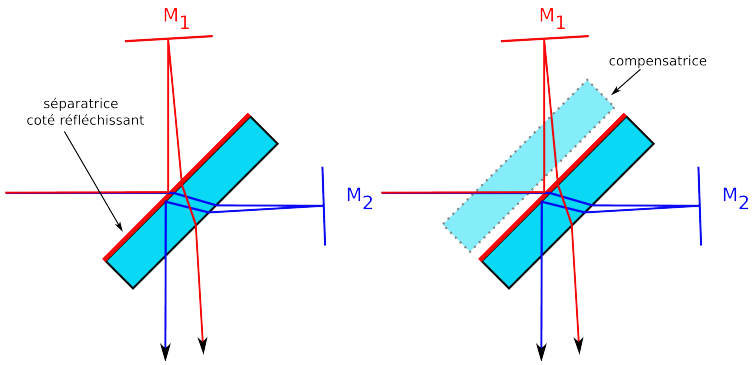
Expérience de Michelson et Morley

L'interprétation de ce résultat a conduit les physiciens à conclure que l'éther (hypothétique support matériel des vibrations d'une onde électromagnétique comme la lumière) n'existe pas. Cela montre aussi que la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions. C'est dans l'histoire de la physique une des plus importantes et une des plus célèbres expériences, elle valut à Michelson le prix Nobel de physique en 1907.



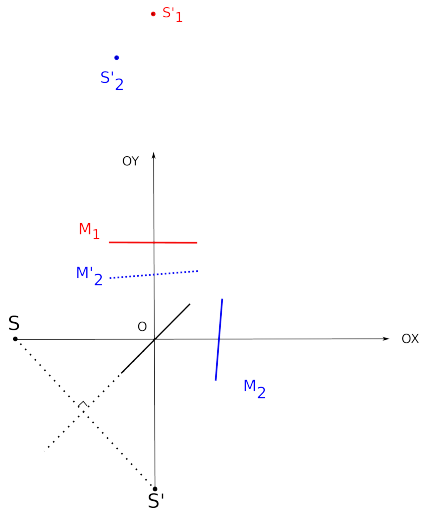
2 Rôle de la compensatrice

Savoir démontrer №1 : Compensatrice



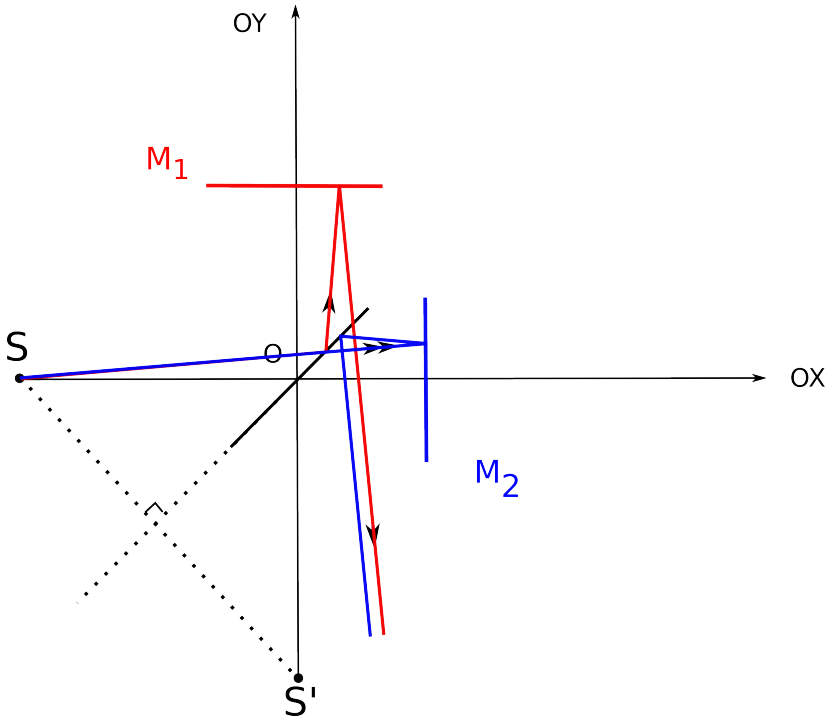
Grace à la compensatrice, le faisceau traverse autant de fois le milieu d'indice n.
Il n'y a plus de déphasage dépendant de λ.

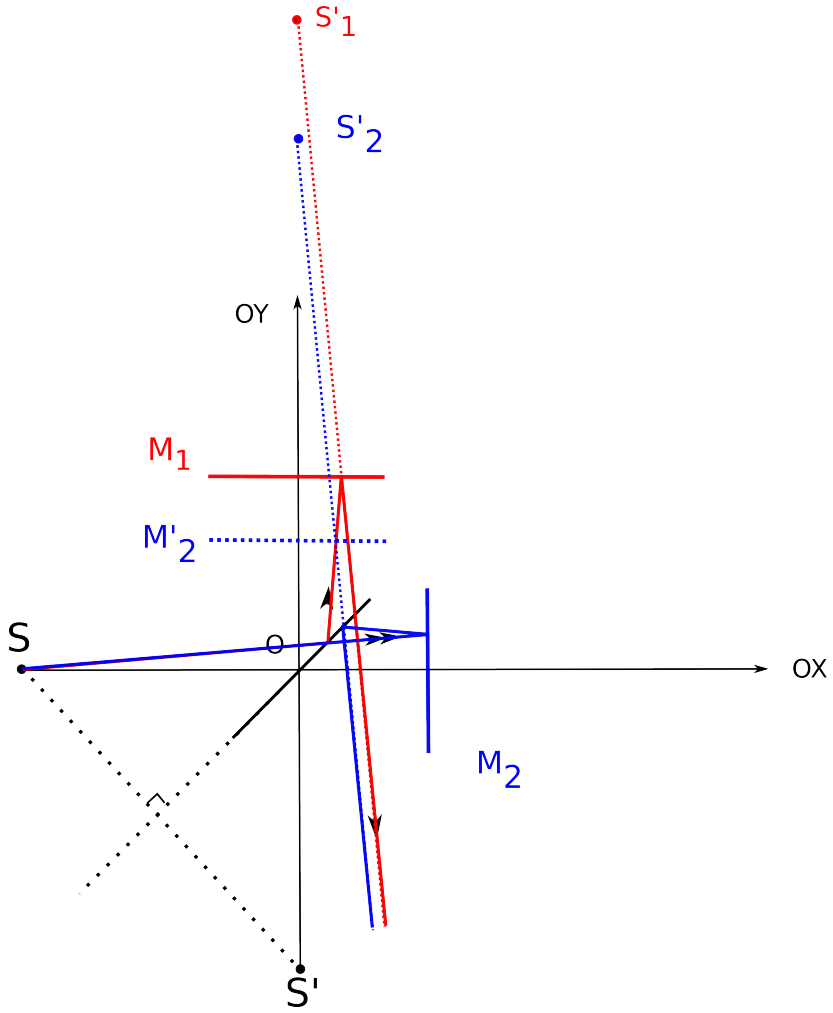
3 Schéma équivalent : construction des sources secondaires



II Etude en lame d'air M1 // M'2

1 Schéma équivalent





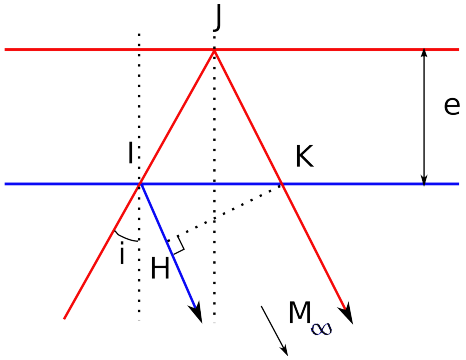
Définition :

Lorsque la distance entre les deux miroirs est nulle, on se trouve au **contact optique**.

2 Source à distance finie

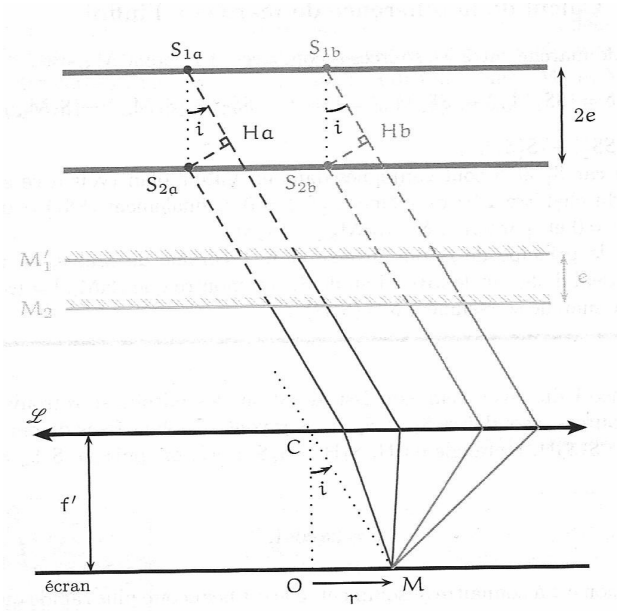
2.a Calcul de la différence de marche

Savoir démontrer №2 : Expression de δ



La différence de marche est

$$\delta = 2e\cos i$$



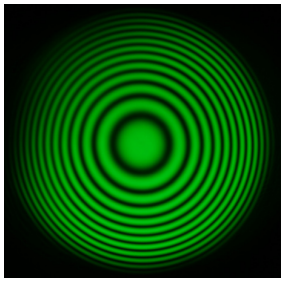
2.b Localisation des franges avec une source étendue

Savoir démontrer №3 : Localisation à l'infini des anneaux

Les franges d'interférences d'un interféromètre de MICHELSON utilisé en lame d'air et éclairé par une source étendue sont localisées à l'infini.
Les franges sont appellées franges d'égale inclinaison ou anneaux d'HAIDINGER .

3 Rayons des anneaux

Savoir démontrer №4 : Expression des rayons



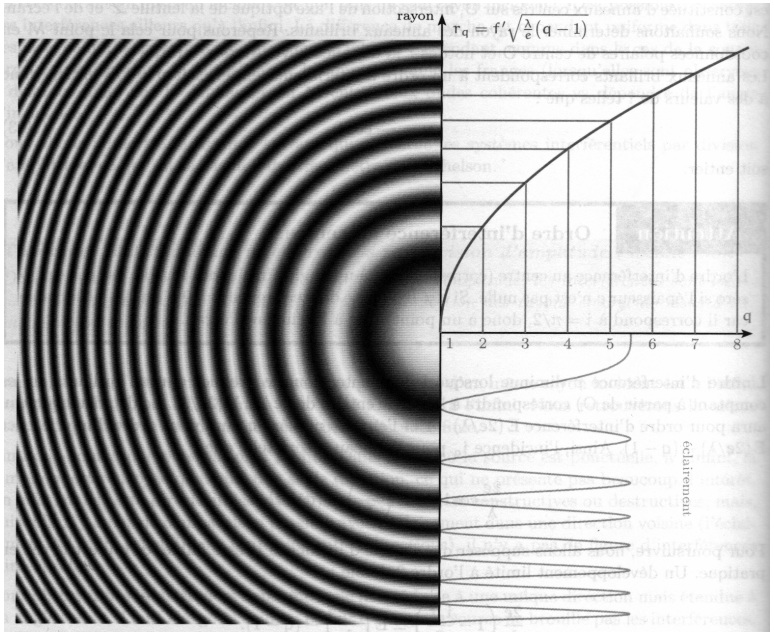
On suppose qu'au centre de la figure il y a un anneau brillant, soit p_0, l'ordre au centre : $2e = p_0\lambda$
On note q lu numéro du q-ième anneau compté par rapport au centre, c'est à dire l'ordre $p = p_0 - q + 1$
Le rayon des anneaux est

$$r_q = f'\sqrt{\frac{\lambda_0}{e}}\sqrt{q-1}$$

Lorsque l'épaisseur e diminue, les rayons des franges d'égale inclinaison (anneaux) augmentent.

⚠ ATTENTION…

Ne pas confondre l'ordre d'interférence p et le numéro des anneaux q comptés par rapport au centre !



Lorsqu'on se rapproche du contact optique (diminution de e),
- ☞ les anneaux rentrent dans le centre ;
- ☞ les anneaux visibles sur l'écran sont plus grands et moins nombreux.

Propriété à connaître

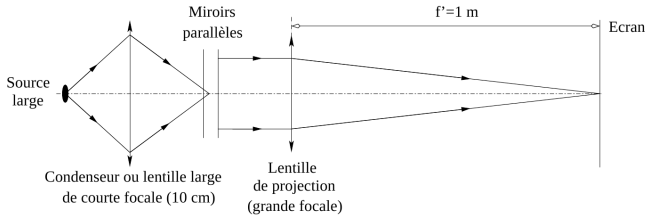
Ce que l'on peut démontrer à l'aide de résultats déjà obtenus :

4 Applications

4.a Observation expérimentale des anneaux d'égale inclinaison

Dispositif expérimental d'observation des franges d'égale inclinaison

Ce dispositif est à connaître parfaitement, tant d'un point de vue théorique qu'expérimental.



⚠ L'interféromètre est représenté sous la forme de ses miroirs équivalents.

Application 1 : Interpréter les différents éléments du montage

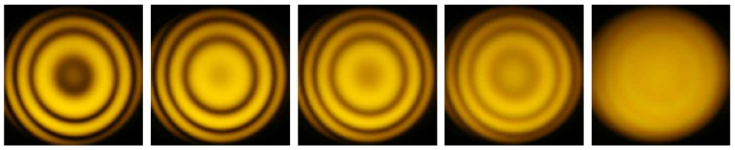
1. Justifier le rôle de la seconde lentille et sa focale $f' = 1$ m.
2. Justifier le rôle de la première lentille de courte focale (condenseur).

4.b Application à la spectrométrie interférentielle

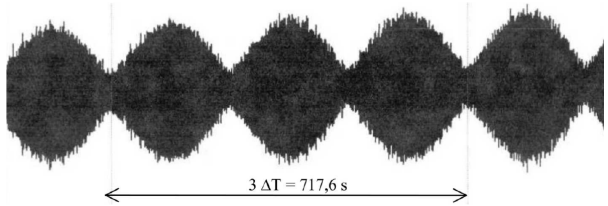
Jusque là, la source utilisée était considérée monochromatique. Si tel n'est pas le cas, l'interféromètre de Michelson peut être utilisé en lame d'air pour réaliser des interférogrammes visant à obtenir des informations sur le spectre de la source (technique de spectrométrie interférentielle).

Application 2 : Utilisation de la lampe à vapeur de sodium

1. Les images suivantes sont des photos d'anneaux d'égale inclinaison prises pour diverses épaisseurs de lame d'air avec une lampe spectrale à vapeur de sodium comme source.



2. On place une cellule de détection supposée quasi-ponctuelle au centre des anneaux. De plus, un moteur permet de charioter à vitesse constante $v = 1,20\ \mu\text{m.}\ \text{s}^{-1}$ le miroir $\mathcal{M}_1$. Le relevé brut de l'intensité perçue par le détecteur (ordonnée) en fonction du temps (abscisse) est le suivant



Que peut-on déduire de ce tracé ? On donne $\lambda_0 = 589,3$ nm pour longueur d'onde moyenne d'émission de la lampe.

Réponse :

1. *On constate que le contraste diminue de gauche à droite et est quasiment nul pour la dernière photo ! Cela vient de la non monochromaticité de la source (qui présente un doublet, ce qui est confirmé par l'interférogramme.*
2. *Au centre des anneaux, la différence de marche est $\delta(t) = 2e(t) = 2vt$ (en choisissant l'origine des temps au contact optique).*

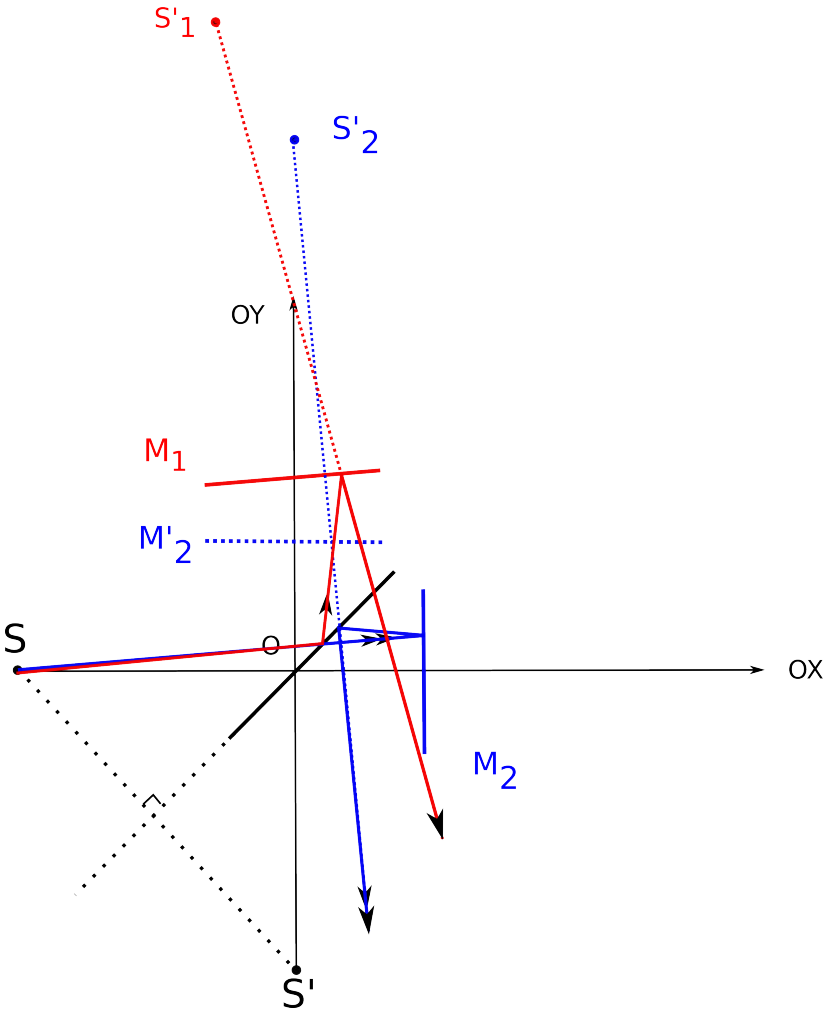
   L'interférogramme montre des battements caractéristiques de la présence d'un doublet spectral pour la source. L'étude du doublet a déjà, été menée au chapitre précédent. On a vu que l'écart $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ du doublet est relié à l'intervalle en différence de marche $\Delta_\delta = 2v\Delta T$ entre deux anti-coïncidences par

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{\Delta_\delta} = \frac{\lambda_0^2}{2v\Delta T} = 0,60 \text{ nm}$$

On peut imaginer avoir une meilleure précision sur ce résultat si l'on tient compte de la non-monochromaticité de chaque raie et des intensités différentes de chacune qui expliquent que l'amplitude des battements n'est pas parfaitement conservée et qu'il n'y a pas d'annulation parfaite du contraste aux anti-coïncidences.

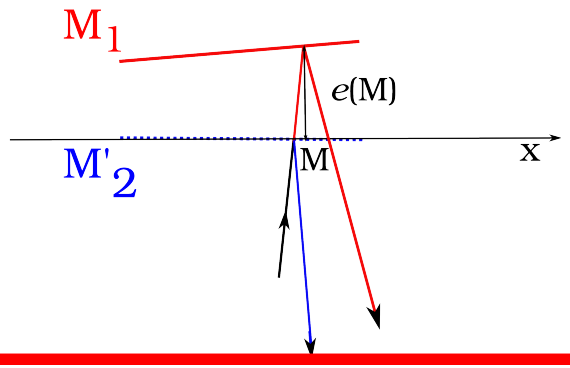
III Utilisation en coin d'air

1 Schéma équivalent



2 Calcul de la différence de marche

Savoir démontrer №5 : Expression de δ



On admet que la différence de marche en un point M s'écrit

$$\delta(M) \simeq 2e(M)\cos i \simeq 2e(M)$$

Application 3 : Cas de faisceaux sous faible incidence

Réécrire cette différence de marche dans le cas d'une faible incidence et d'un angle entre les deux miroirs très petit ($\alpha \ll 1$).

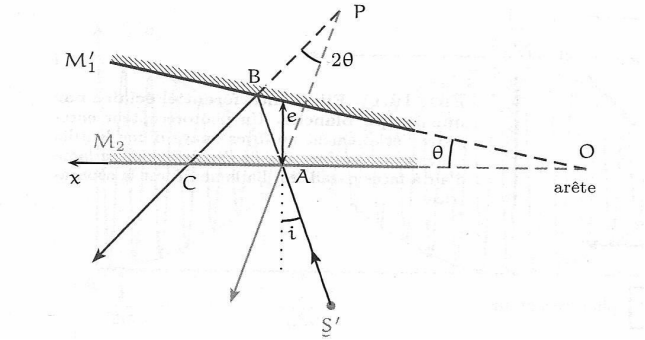
3 Localisation des franges avec une source étendue

Théorème de localisation

Dans le cas d'un interféromètre par division d'amplitude, les interférences sont nécessairement localisées au voisinage de la **surface de localisation**, définie par **l'intersection des rayons émergents issus d'un même rayon incident divisé en amplitude**.

Ce théorème est admis. En conséquence, on a la propriété suivante

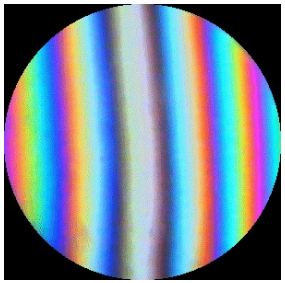
Savoir démontrer №6 : Localisation des franges de coin d'air



Les franges d'interférences d'un interféromètre de Michelson utilisé en coin d'air et éclairé par une source étendue sous incidence quasi-normale sont localisées au voisinage des miroirs. Les franges ainsi obtenues sont appellées **franges d'égale épaisseur** ou **franges de Fizeau**.

4 Nature et description des franges d'interférences

Savoir démontrer №7 : Interfrange dans le Michelson en coin d'air



Pour un éclairage en incidence quasi-normale, sur un coin d'air d'angle α l'interfrange est

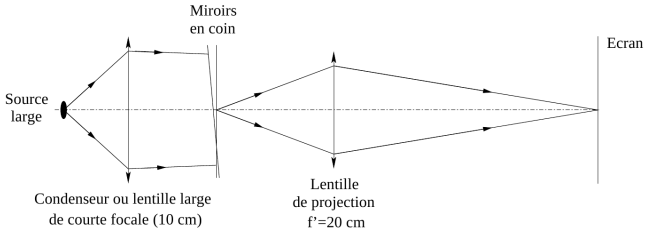
$$i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

5 Applications

5.a Observation expérimentale des franges d'égale épaisseur

Dispositif expérimental d'observation des franges d'égale épaisseur

Ce dispositif est à connaître parfaitement, tant d'un point de vue théorique qu'expérimental.



⚠ L'interféromètre est représenté sous la forme de ses miroirs équivalents.

Application 4 : Interpréter les différents éléments du montage

1. Justifier le rôle de la seconde lentille et sa focale $f' = 20$ cm.
2. Justifier le rôle de la première lentille de courte focale (condenseur).

Pour des sources ponctuelles, les **interférences sont non localisée**. Pour des sources étendues : on a

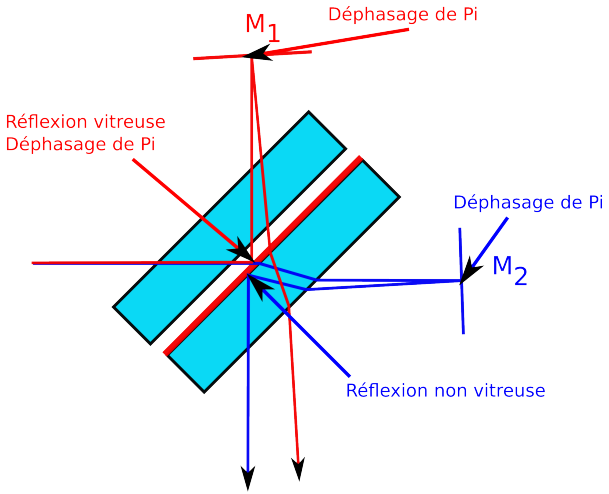
	Lame d'air	Coins d'air
Franges	Franges d'égales inclinaisons	Franges d'égales épaisseurs
Eclairement	anneaux d'Haidinger	Franges rectilignes
Localisation	Localisées à l'infini	Localisées sur les miroirs
Observation	Au foyer de $f' = 1000$ mm	Image des miroirs $f' = 50$ mm

IV Michelson éclairé en lumière blanche

1 Déphasage à la réflexion vitreuse

⚠ Attention...

Une lame de verre est un milieu dispersif, ainsi la présence de la lame compensatrice est primordiale pour un éclairage en lumière polychromatique.



Lors d'une **réflexion vitreuse** (reflexion lors de l'interface entre un milieu d'indice faible (portant le rayon incident) vers un milieu d'indice élevé (portant l'éventuel rayon transmis)), il y a un déphasage de π.

Savoir démontrer №8 : Différence de marche

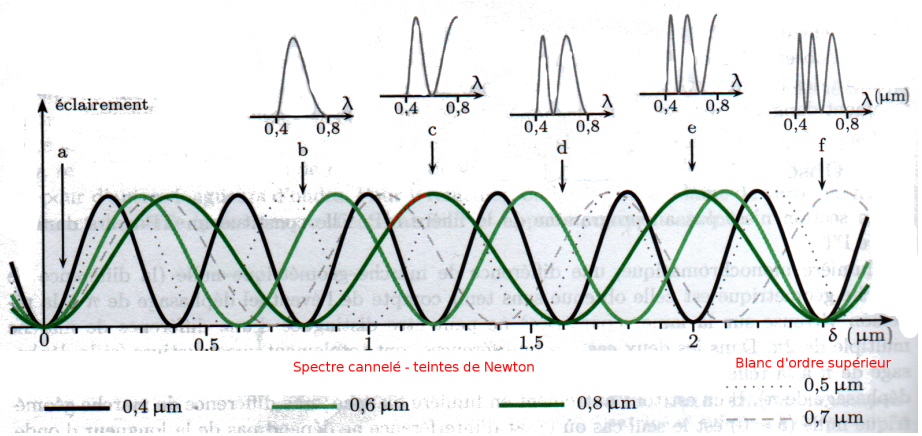
Ainsi pour un inteferomètre de Michelson non compensé (ou non corrigé), la différence de marche entre les deux bras est

$$\delta_{\text{non corrigé}} = 2e\cos i + \frac{\lambda}{2}$$

Sur certains interferomètres cette différence est compensée, alors

$$\delta_{\text{corrigé}} = 2e\cos i$$

2 Teintes de Newton



Point	Diff. de marche	Couleur	Remarque
	$\delta = 0$	Noir	Eclairement nul
a	$\delta = 0.1$ μm	Gris	
b	$\delta = 0.8$ μm	Vert - jaune	Couleur vive
d	$\delta = 1.6$ μm	couleur pastel	Spectre comprenant 1 canelure
f	$\delta = 2.5$ μm	blanc d'ordre supérieur	Spectre comprenant 2 canelures

DÉFINITION :

Lorsque le spectre comporte plus d'une cannelure, on parle de **blanc d'ordre supérieur**.

Quelques teintes de Newton proposées par Michel-Levy en fonction de la différence de marche δ.

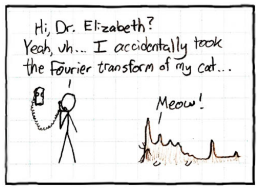
Ordre d'interférence	δ (en μm)	$\frac{\delta}{\lambda}$	Teinte (centre noir)	Teinte (centre blanc)
Premier ordre	0	0	noir	blanc
	0,259	$\frac{1}{2}$	blanc	rouge clair
	0,332		jaune vif	bleu
	0,505		orangé	vert bleuâtre
Deuxième ordre	0,565	1	pourpre	vert
	0,747		vert	rouge carmin
	0,910		jaune pur	indigo
Troisième ordre	1, 128	2	violet clair	vert jaunâtre
	1,33		vert de mer	rouge-brun

Chapitre B7 : Diffraction à l'infini

Joseph von Fraunhofer (1787-1826)

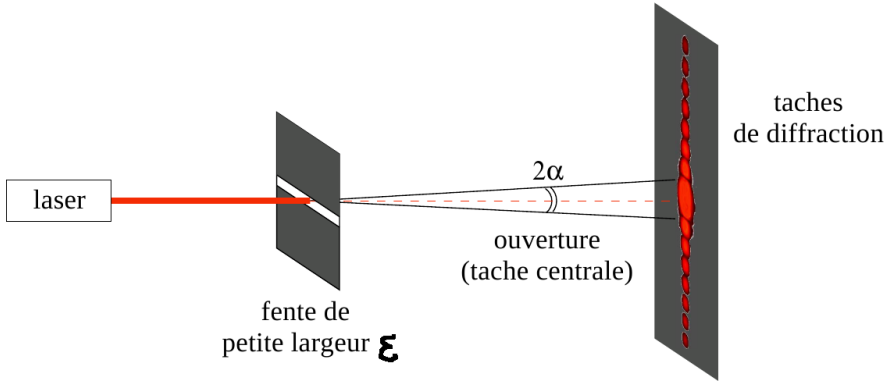
Partie B : Optique

B-0 : Optique géométrique
B-1 : Modèle scalaire
B-2 : Sources lumineuses
B-3 : Interférences lumineuses
B-4 : Trous d'Young
B-5 : Exemples
B-6 : Michelson
B-7 : Diffraction
B-8 : Compléments
B-9 : Prisme
B-10 : Simulations



Le bloc 5 est essentiellement expérimental.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5. Approche expérimentale : onde transmise par un objet diffractant plan éclairé par une onde plane sous incidence normale.	
Réseau unidimensionnel d'extension infinie de coefficient de transmission t(X) sinusoïdal et de pas supérieur à la longueur d'onde. Plan de Fourier.	Construire l'onde transmise par superposition de trois ondes planes définies par la condition aux limites sur le réseau. Interpréter les observations dans le plan de Fourier.
Mire unidimensionnelle d'extension latérale infinie de N traits parallèles équidistants. Fréquence spatiale.	**Relier une fréquence spatiale du spectre de la mire à la position d'un point du plan de Fourier. Relier l'amplitude de l'onde en ce point à la composante du spectre de Fourier correspondant. Interpréter les observations dans le plan de Fourier.**
Fente rectiligne de coefficient de transmission uniforme.	**Relier une fréquence spatiale du spectre de la fente à la position d'un point du plan de Fourier. Relier l'amplitude de l'onde en ce point à la composante du spectre de Fourier correspondant. Interpréter les observations dans le plan de Fourier.**



Un objet de taille ε, **diffracte la lumière dans un angle**

$$\boxed{2\alpha = \frac{2\lambda}{\epsilon}}$$

A.N. : $\lambda = 600$ nm , $\varepsilon = 6$ μm $\rightarrow 2\alpha = 6°$

Savoir démontrer №1 : Principe d'incertitude

D'après le principe d'Heisenberg, il est impossible de connaitre simultanément la position et l'impulsion d'une particule.
Soit un corpuscule de quantité de mouvement $p_z = \frac{h}{\lambda}$ ($h \simeq 6,6.10^{-34}$ Js est la constante de Planck) contraint à traverser une fente de taille $\Delta x = \epsilon$.
Il aquiert une quantité de mouvement p_x donnée par l'équation d'Heisenberg :

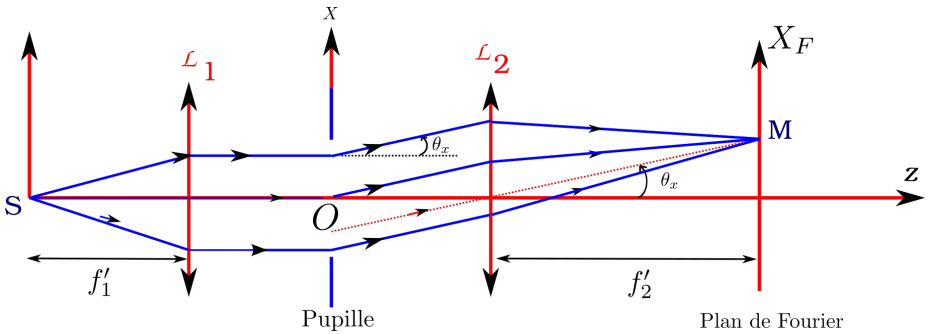
$$p_x \ \Delta x \simeq \frac{\hbar}{2}$$

On en déduit l'ouverture de la tache centrale de diffraction :

$$\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}}$$

I Montage de Fraunhofer

1 Montage



Définitions :

- ✗ L'objet diffractant est nommé **pupille** il est éclairé par un faisceau parallèle issu d'une source pontuelle S placée au foyer objet de $\mathcal{L}_1$.
- ✗ L'écran est placé au foyer d'une seconde lentille $\mathcal{L}_2$ de focale f'_2. Le plan focal de la lentille est le **plan de Fourier**.

2 Définition de la transparence

Définition :

On définit la **transparence complexe** de la pupille (ou facteur de transmission ou **transmittance**) $\underline{t}(P)$ par

$$\underline{a}(P^+) = \underline{t}(P)\ \underline{a}_{\text{Sans lame}}(P^+)$$

Fonction qu'on écrira le plus souvent

$$\underline{t}(P) = |\underline{t}(P)| \exp\left(-j\Phi(P)\right)$$

- ✗ Si $|\underline{t}(P)| = 1$ la pupille est transparente au point P
- ✗ Si $|\underline{t}(P)| < 1$ la pupille est absorbante au point P
- ✗ Si $|\underline{t}(P)| = 0$ la pupille est opaque au point P
- ✗ Si $\Phi(P) = 0 + 2p\pi$ la pupille ne déphase pas, sinon elle est déphasante.

Propriétés à connaître

Définitions :

Si $\underline{t}(P)$ est réelle, l'objet est un **objet d'amplitude**.
Si $\underline{t}(P)$ est complexe, de module 1 , l'objet est un **objet de phase**.

Application 1 : Exemples de pupilles planes

- ✗ Pour un miroir métallique parfait $\underline{t}(P) = -1 = e^{-j\pi}$
- ✗ Pour deux pupilles accolées (placées l'une derrière l'autre) $\underline{t}(P) = \underline{t_1}(P)\ \underline{t_2}(P)$
- ✗ Pour une lame de verre d'indice n et d'épaisseur $e(P)$, traversée en incidence normale par une onde en $\mathrm{e}^{+j\omega t}$,

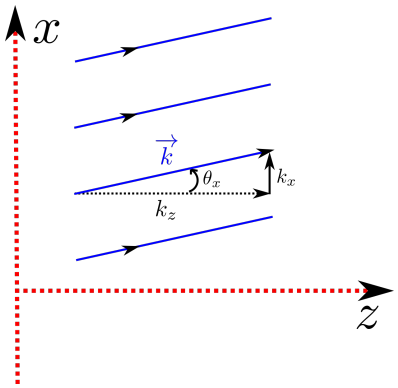
$$\underline{t}(P) = t_0 \exp\left[-\frac{2j\pi}{\lambda_0}(n-1)e(P)\right] \quad \text{avec } t_0 \leqslant 1$$

- ✗ Pour une lentille $\underline{t}(P) = e^{j\frac{k\rho^2}{2f'}}$.

II Diffraction par une pupille sinusoïdale

1 Ondes planes

Définition :



On considère une onde plane se propageant suivant un vecteur proche de l'axe Oz = petits angles.
Soit

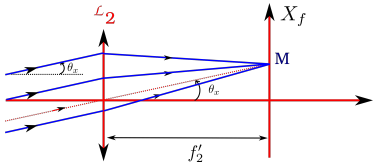
$$\vec{k} = \begin{cases} k_x = k\sin\theta_x \\ k_y = 0 \\ k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} \simeq k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{cases}$$

L'amplitude est donc

$$a = A_0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)} = A_0 e^{i(\omega t - kz)} e^{-ik\sin\theta_x X}$$

2 Rôle de la lentille

Savoir démontrer №2 : Lentille



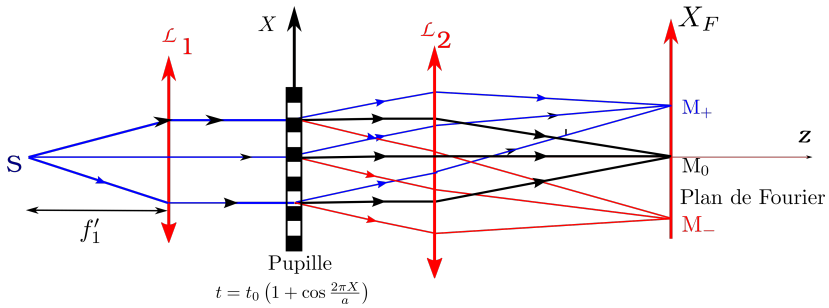
Si on place la lentille de focale f' après un faisceau parallèle , les rayons incidents avec l'angle θ_x vont converger en M d'abscisse X_f du plan focal :

$$\boxed{\sin\theta_x = \frac{X_f}{f'}}$$

3 Diffraction par une pupille sinusoïdale

HYPOTHESES :

- ✗ Soit une onde incidente d'amplitude **uniforme $A_0 e^{i\omega t - kz}$ sur la pupille = Onde incidente parallèle à l'axe optique**.
- ✗ $t = t_0\left(1 + \cos\frac{2\pi X}{a}\right) = t_0\left(1 + \frac{1}{2}e^{\frac{2i\pi X}{a}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-2i\pi X}{a}}\right)$



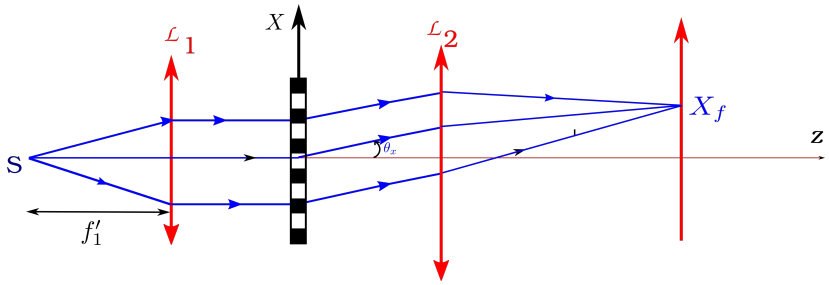
Savoir démontrer №3 : Intensité diffractée

L'intensité diffractée est composée de 3 pics pour

$$\sin\theta_x = 0 \rightarrow X_f = 0$$
$$\sin\theta_x = +\frac{\lambda}{a} \rightarrow X_f = +\frac{\lambda f'}{a}$$
$$\sin\theta_x = -\frac{\lambda}{a} \rightarrow X_f = -\frac{\lambda f'}{a}$$

Les pics latéraux ont une amplitude 2 fois inférieure à celle du pic central, soit une intensité 4 fois inférieure.

Bilan : une pupille $t(X) = e^{i\alpha X}$ diffracte de la lumière dans la direction $\sin\theta_x = \frac{\alpha}{k}$:



$$t = e^{i\alpha X} \longrightarrow k\sin\theta_x = \alpha \longrightarrow X_f = \frac{\alpha f'}{k}$$

III Diffraction par une pupille quelconque - HP

1 Transformée de Fourier

Définition :

- ✗ Soit $t(X)$ la transparence de la pupille.
- ✗ Soit $\hat{t}(u)$ sa transformée de Fourier, suivant la relation :

$$\hat{t}(u) = \int_{\mathbb{R}} t(X)\, e^{2i\pi uX} \mathrm{d}X$$

- ✗ X et u sont les variables conjuguées par la transformée de Fourier.
- ✗ On peut définir la transformée de Fourier inverse :

$$t(X) = \int_{\mathbb{R}} \hat{t}(u)\, e^{-2i\pi uX} \mathrm{d}u$$

Savoir démontrer №4 : Pupille quelconque

L'intensité en X_f sur l'écran est proportionnelle à $\left|\hat{t}\right|^2\left(\frac{X}{\lambda f'}\right)$.

Réponse :

Après la pupille, en $z = 0^+$ l'amplitude est multipliée par t :

$$a\left(X, Y, 0^+\right) = A_0 t(X) = A_0 e^{i\omega t} \int_{\mathbb{R}} \hat{t}(u)\, e^{-2i\pi uX} \mathrm{d}u$$

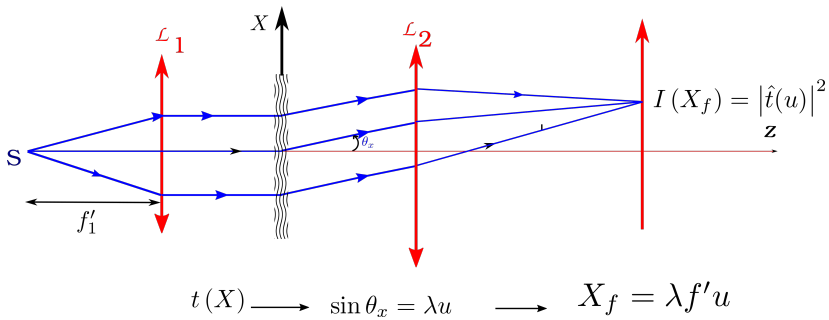
On admet que l'amplitude en (x, y, z) est :

$$a(X, z) = A_0 e^{i\omega t - k_z z} \int_{\mathbb{R}} \hat{t}(u)\, e^{-2i\pi uX} \mathrm{d}u$$

L'amplitude diffractée dans la direction θ_x est :

$$\boxed{\mathrm{d}a(X, z) = A_0 e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{t}(u)\, \mathrm{d}u}$$

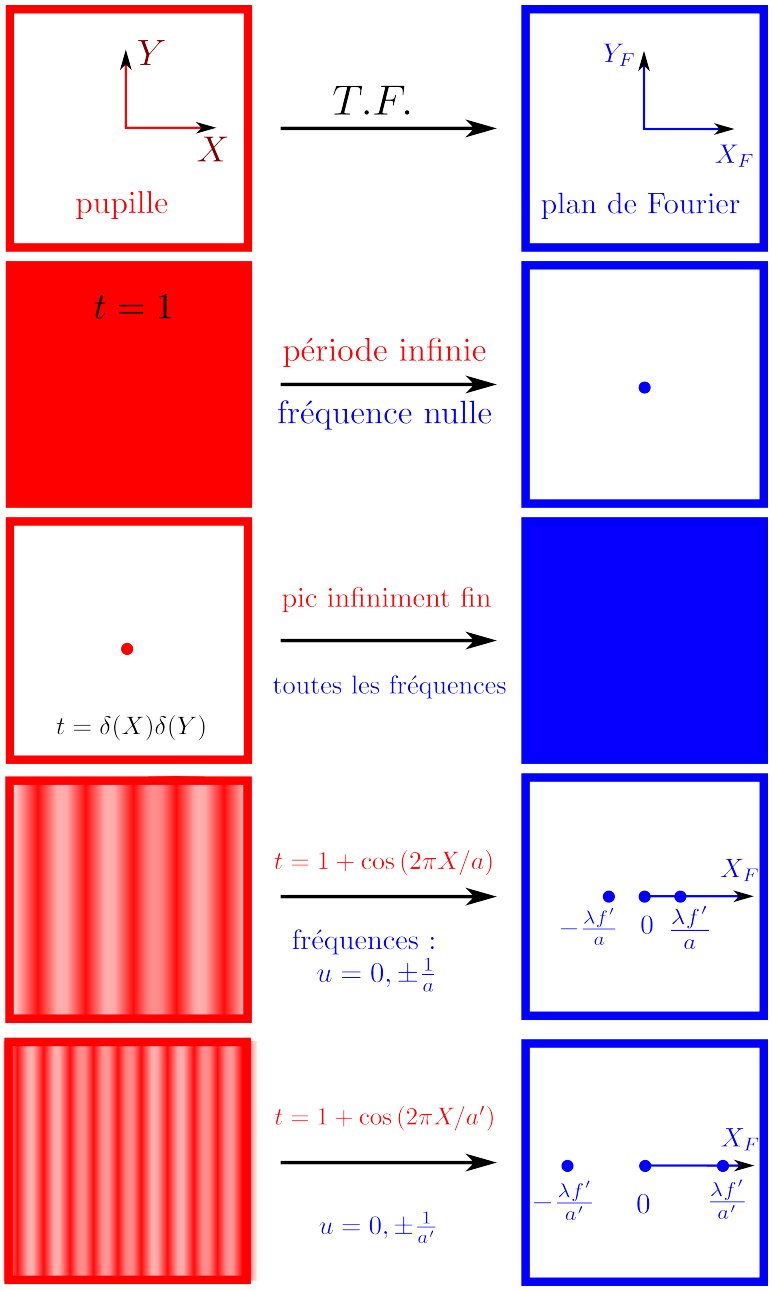
On a $k \sin\theta_x = 2\pi u$ ce qui donne la direction associée à l'amplitude.

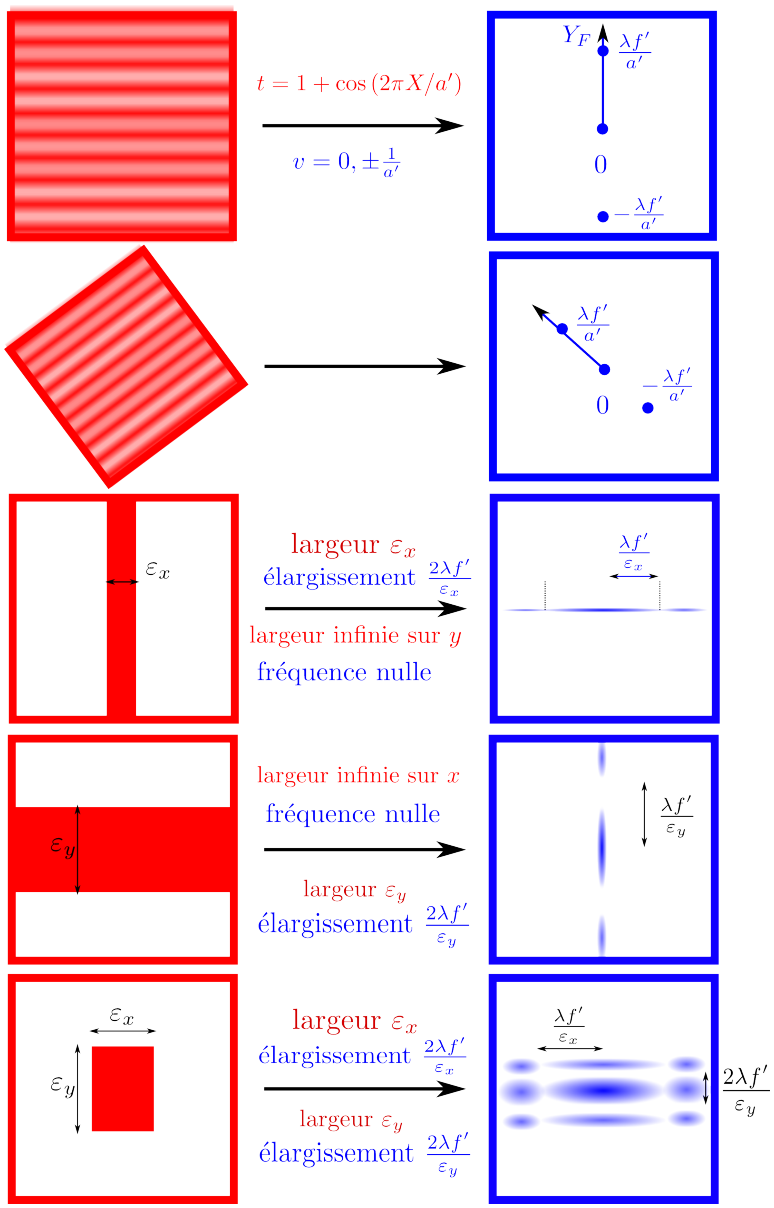


$$t(X) \longrightarrow \sin\theta_x = \lambda u \longrightarrow X_f = \lambda f' u$$

1. Si la pupille possède un motif périodique de période ΔX, on dit que la pupille possède une fréquence $u = \frac{1}{\Delta X}$.
   On trouve sur la figure de diffraction deux taches en $\pm X_f = \pm\frac{\lambda f'}{\Delta X}$
2. Si la pupille présente un motif de taille caractéristique a, la figure de diffraction aura une taille caractéristique $\pm X_f = \pm\frac{\lambda f'}{a}$.
3. Si la pupille présente différents éléments de symétrie, on les retrouve sur la figure de diffraction avec un terme d'interférences.

Propriétés à connaître

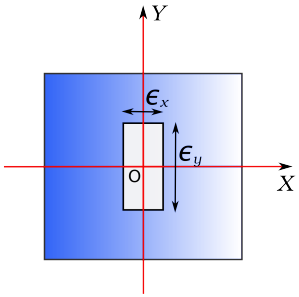

Y
X
pupille
T.F.
Y_F
X_F
plan de Fourier
$t = 1$
période infinie
fréquence nulle
$t = \delta(X)\delta(Y)$
pic infiniment fin
toutes les fréquences
$t = 1 + \cos(2\pi X/a)$
fréquences :
$u = 0, \pm\frac{1}{a}$
$-\frac{\lambda f'}{a}$
0
$\frac{\lambda f'}{a}$
$t = 1 + \cos(2\pi X/a')$
$u = 0, \pm\frac{1}{a'}$
$-\frac{\lambda f'}{a'}$
0
$\frac{\lambda f'}{a'}$


$t = 1 + \cos(2\pi X/a')$
$v = 0, \pm\frac{1}{a'}$
Y_F
$\frac{\lambda f'}{a'}$
0
$-\frac{\lambda f'}{a'}$
ε_x
largeur ε_x
élargissement $\frac{2\lambda f'}{\varepsilon_x}$
largeur infinie sur y
fréquence nulle
$\frac{\lambda f'}{\varepsilon_x}$
ε_y
largeur infinie sur x
fréquence nulle
largeur ε_y
élargissement $\frac{2\lambda f'}{\varepsilon_y}$
$\frac{\lambda f'}{\varepsilon_y}$
largeur ε_x
élargissement $\frac{2\lambda f'}{\varepsilon_x}$
largeur ε_y
élargissement $\frac{2\lambda f'}{\varepsilon_y}$
$\frac{2\lambda f'}{\varepsilon_y}$

IV Exemple de figures de diffraction

1 Pupille rectangulaire

$$\underline{t}(X,Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (X,Y) \in \left[-\frac{\epsilon_x}{2};\frac{\epsilon_x}{2}\right] \times \left[-\frac{\epsilon_y}{2};\frac{\epsilon_y}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Cette fonction peut s'écrire comme le produit de deux fonctions $\underline{t} = t_x(X)\ t_x(Y)$

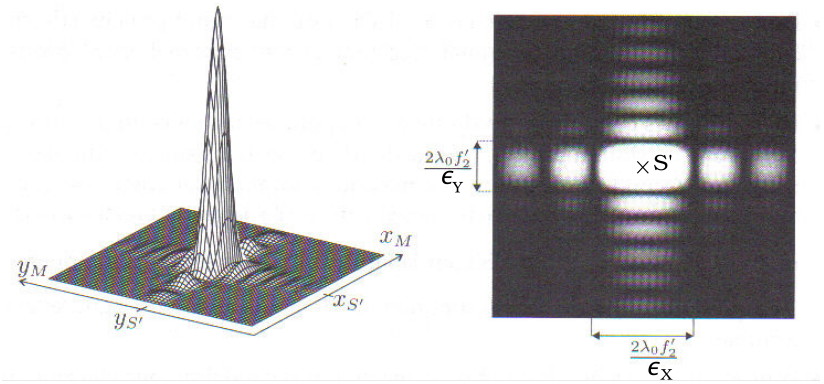
Définition :

Dans les conditions de Fraunhofer, l'intensité obtenu par diffraction sur une pupille rectangulaire (ϵ_x, ϵ_y) est

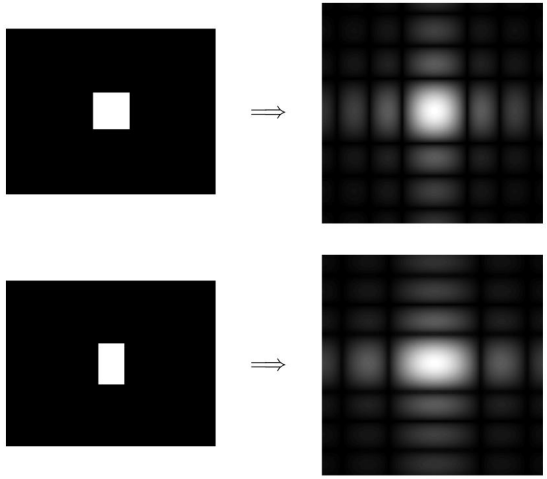
$$I(M) = I_0 \text{sinc}^2(\pi u \epsilon_x)\ \text{sinc}^2(\pi v \epsilon_y)$$

avec

$$u = \frac{X_f}{\lambda_0 f'} \qquad v = \frac{Y_F}{\lambda_0 f'}$$



1.a Dilatation de la pupille

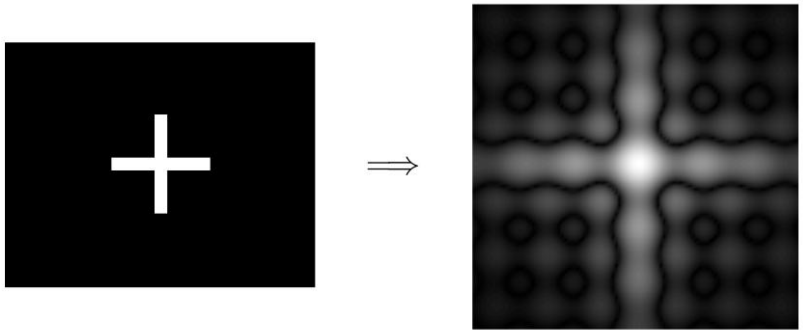


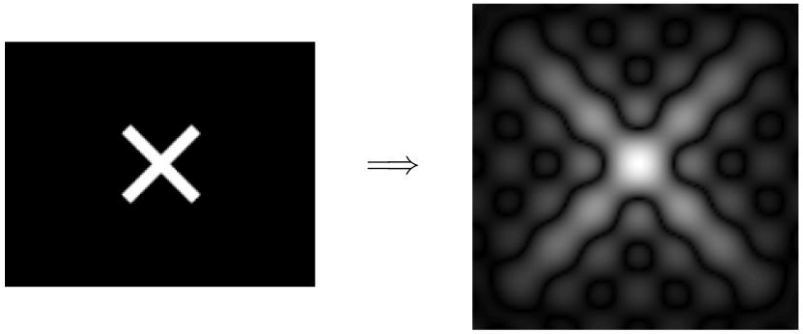
1.b Déplacement de la source S

Si on fait varier la direction de la source à l'infini, cela revient à déplacer la source ponctuelle dans le PFO de la première lentille. L'image géométrique S' se déplace et la figure de diffraction centrée sur S' se déplace en bloc avec S'.

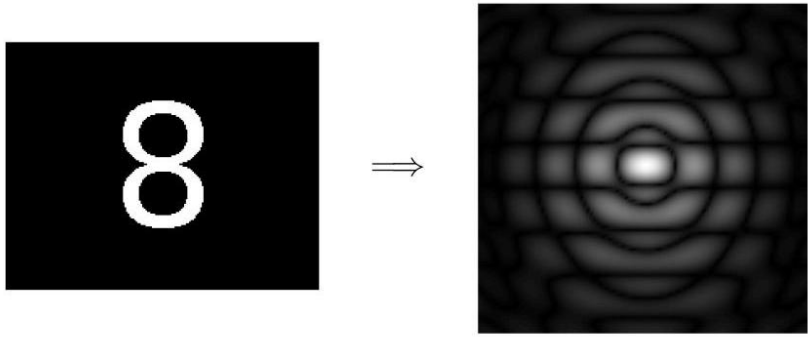
Propriété à connaître

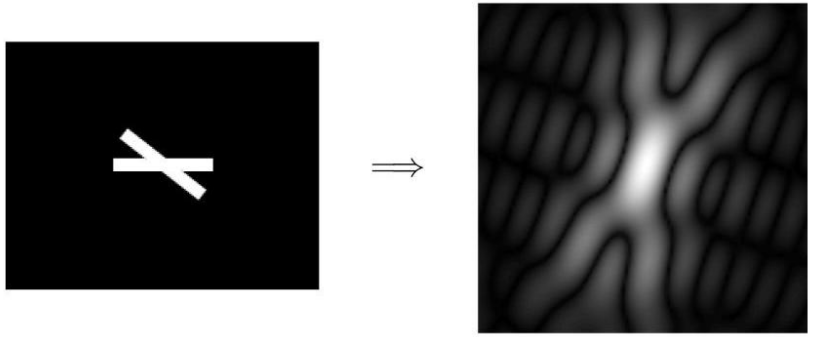
1.c Rotation de la pupille dans son plan





1.d Symétries





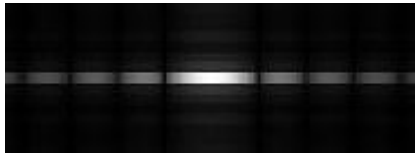
1.e Diffraction par une fente fine

On suppose que l'ouverture est très longue dans la direction Y ou, ce qui est équivalent, très fine selon X. Cela se traduit par $\epsilon_y \gg \epsilon_x$ et on a toujours $\epsilon_x \gg \lambda_0$.

Savoir démontrer №5 : Intensité diffracté par une fente fine

Dans la direction (Oy), le seul endroit où il y a de la lumière correspond à la direction de l'optique géométrique (soit $v = 0$ ou $\beta = \beta_0$), alors

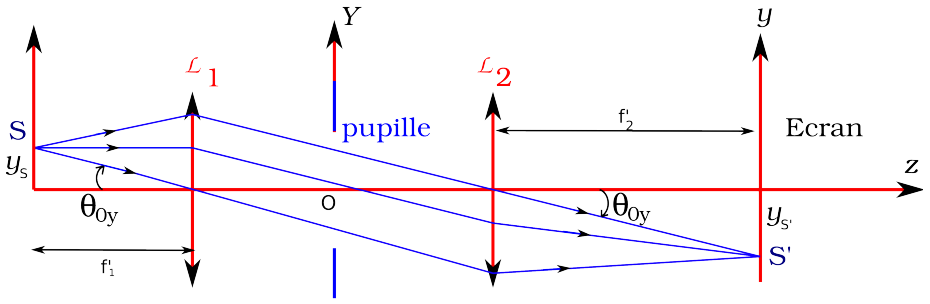
$$I(M) = I_0' \text{sinc}^2(\pi u \epsilon_x)$$



⚠ Attention…

La lumière est diffractée dans la direction perpendiculaire à la fente.

1.f Incidence oblique



Translation de la figure de diffraction qui est centrée sur l'image géométrique.

V Propriétés

1 Propriétés

Savoir démontrer №6 : Translation d'une pupille sinusoïdale

On fait une translation de X_0 d'une pupille sinusoïdale.
L'amplitude est multipliée par $e^{2i\pi X_0/a}$.
L'intensité n'est pas modifiée.

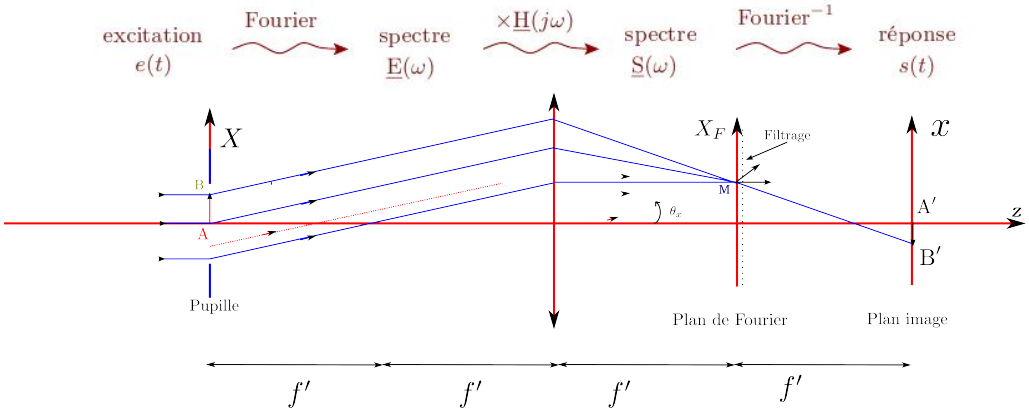
Si on fait varier la direction de la source à l'infini, cela revient à déplacer la source ponctuelle dans le PFO de la première lentille. L'image géométrique S' se déplace et la figure de diffraction centrée sur S' se déplace en bloc avec S'.

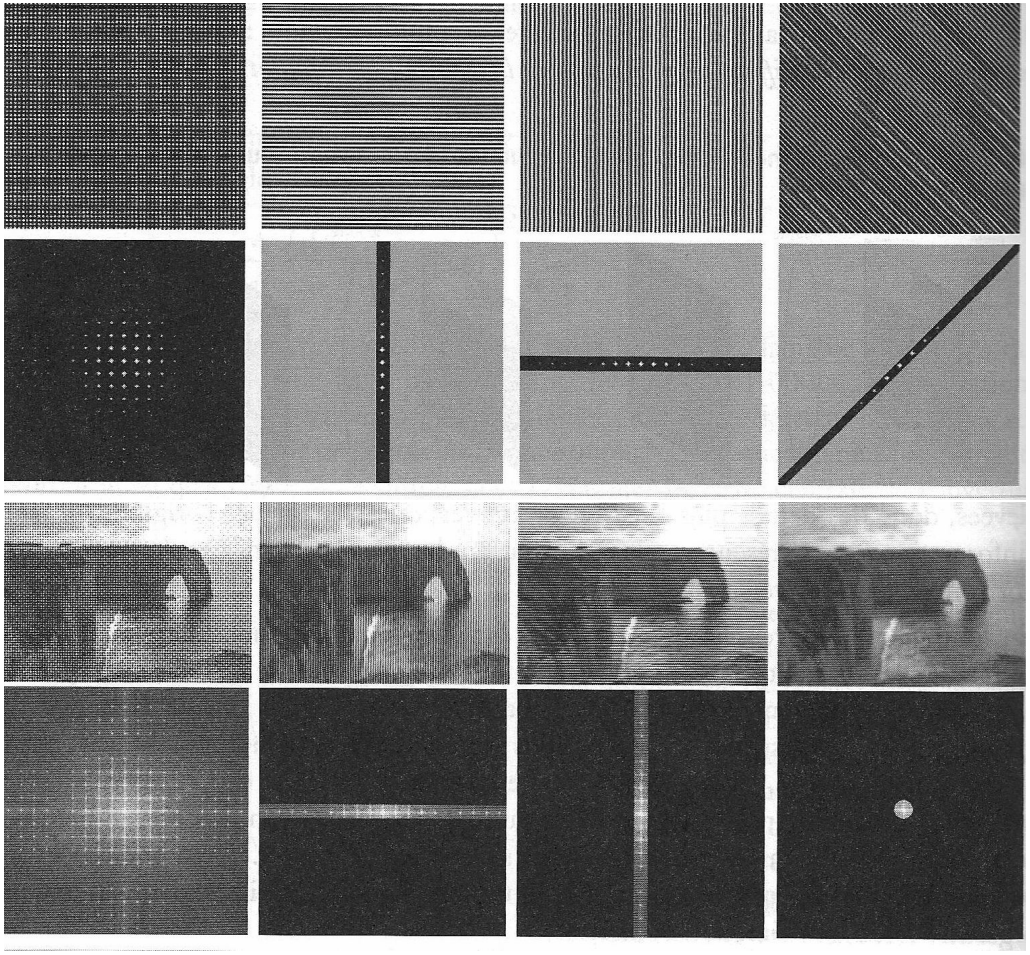
Propriété à connaître

2 Bilan

Action	Fonction	T F
Translation	$t(X - X_0)$	$\hat{t}(u)\, e^{-2i\pi u X_0}$
Répétition	$\sum_n t(X - na)$	$\hat{t}(u) \sum_n e^{-2ni\pi ua}$
Complémentaire	$1 - t(X)$	$\delta(u) - \hat{t}(u)$
Dilatation	$t(\lambda X)$	$\frac{1}{\lambda}\hat{t}\left(\frac{u}{\lambda}\right)$

VI Filtrage optique

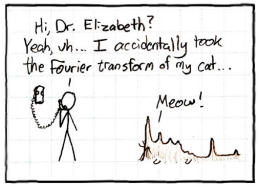




Chapitre B8 : Compléments

Joseph von Fraunhofer (1787-1826)

Partie B : Optique
B-0 : Optique géométrique
B-1 : Modèle scalaire
B-2 : Sources lumineuses
B-3 : Interférences lumineuses
B-4 : Trous d'Young
B-5 : Exemples
B-6 : Michelson
B-7 : Diffraction
B-8 : Compléments
B-9 : Classiques Geo
B-10 : Simulations



I Comment mesurer un $\Delta\lambda$ d'une lampe spectrale à l'aide d'un Michelson

Il faut se placer en Anneaux ou en Franges et charioter ; On repère une première annulation du contraste, on obtient une seconde annulation du contraste , lorsque l'on a déplacer le miroir d'une quantité x telle que :

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2x}}$$

On trouve donc $\Delta\lambda = 0.6$ nm pour le doublet du sodium.

1 Démonstration 1

La démonstration la plus simple s'obtient en utilisant le résultat de SD1, du chapitre "cohérence" : pour un doublet l'éclairement vaut :

En posant

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$$

on montre que l'éclairement s'écrit

$$\boxed{\mathscr{E}(M) = 2\mathscr{E}_0 \left[1 + \gamma(M)\cos\left(2\pi\sigma_0\delta(M)\right)\right]}$$

où $\gamma(M) = \cos\left(\pi\Delta\sigma\delta(M)\right)$

s'interprète comme un **contraste local**

Le constraste s'annule pour $\delta = 2x = \frac{p}{\Delta\sigma} = -\frac{p\Delta\lambda}{\lambda^2}$ où p est un entier relatif.

L'écart entre deux annulations du constraste est

$$\Delta x = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

D'ou le résultat.

2 Démonstration 2

On obtient un maximum du constraste, lorsque les deux ondes interfèrent de manière constructives :

Soit x_1 une position de maximum de constraste :

$$2x_1 = p\lambda_1$$
$$2x_1 = q\lambda_2$$

La position suivante de contraste maximum,notée x_2 vérifie :

$$2x_2 = (p + r)\,\lambda_1$$
$$2x_2 = (q + r + 1)\,\lambda_2$$

si $\lambda_2 < \lambda_1$.

L'écart entre les deux positions est $\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{2}r\lambda_1$

On remarque que $r\lambda_1 = (r+1)\,\lambda_2$ soit $r = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$

Finalement

$$\boxed{\Delta x = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\,(\lambda_1 - \lambda_2)} \simeq \frac{\lambda^2}{2\,(\Delta\lambda)}}$$

II Différence entre les anneaux de Newton et d'Haidinger

Les anneaux D'Haidinger, sont des **franges d'égale inclinaison**. On les obtient en éclairant avec différentes incidences i une lame à faces parallèles (lamme de verre ou lame d'air obtenue au Michelson. Tous les rayons ayant la même incidence i interfèrent de manière constructive, on obtient sur un plan perpendiculaire aux rayons $i = 0$ des anneaux.

Les anneaux de Newton sont des franges d'égales épaisseur que l'on obtient avec un coin d'air qui a une symétrie de révolution : par exemple un dioptre sphérique posé sur un diopte plan. Pour les éclairer correctement , on utilise un éclairage parallèle (incidence proche de $i = 0$), comme pour le coin d'air.

III Lorsque l'on se rapproche du contact optique les anneaux rentrent ! **

La question est "lorsque l'on se rapproche du contact optique les anneaux rentrent ou sortent ?"

Il faut comprendre la subtilité suivante :

Lorsqu'on se rapproche du contact optique (diminution de e),

1. **les anneaux rentrent dans le centre ;**
2. les anneaux visibles sur l'écran sont **plus grands et moins nombreux.**

Propriété à connaître

1. Pour une épaisseur e fixée , on analyse la figure sur l'écran et on observe des anneaux que l'on numérote avec $q \in [1, n]$.
   Pour décrire cette situation, on utilise la formule du SD4 du chapitre C4 (rayon des anneaux avec anneau au centre - au passage de SD est important et difficile), donc
   $$r_q = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}} \sqrt{q-1}$$
   d'où l'on déduit de façon immédiate si $e \searrow$ alors $r_q \nearrow$, donc à champ constant, le nombre d'anneaux visibles diminue car le rayon du $q$ième est plus grand.
   Avec cette formule, on ne peut pas suivre les anneaux un par un car lorsque e diminue, l'ordre au centre est modifié et donc le numéro de l'anneau q est modifié.
2. Pour étudier comment un anneau est modifié, il faut étudier la courbe $r(p) = r_p$ ou p est l'ordre d'interférence.
   Considérons une épaisseur e de lame d'air. Alors, un anneau donné de rayon r_p et d'ordre p vérifie
   $$p = \frac{2e}{\lambda_0} \cos i \quad \text{avec} \quad \tan i = \frac{r_p}{f'}$$
   Or $\cos i = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 i}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{r_n^2}{f'^2}}}$ d'où
   $$p = \frac{2e}{\lambda_0} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_p^2}{f'^2}}}$$

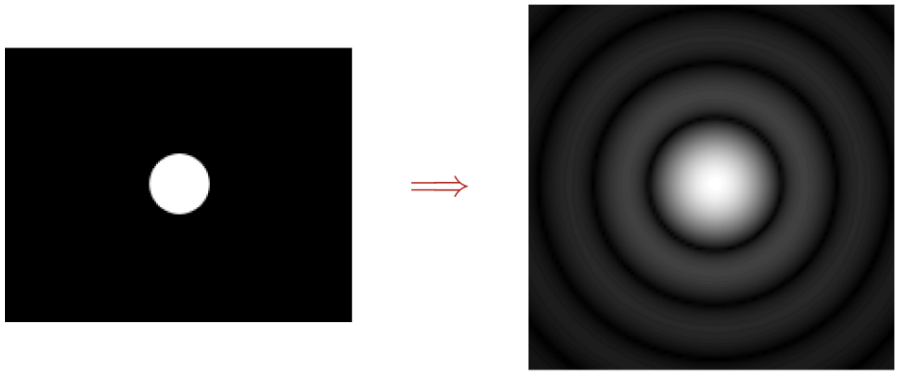
On suit un anneau (ordre p fixé) lorsque e diminue, il faut donc que r_p diminue pour rester à $p =$ cste. Autrement dit, **l'anneau évolue vers le centre pour y disparaître.**

IV Diffraction par une pupille circulaire

1 Tache d'Airy

Le figure de diffraction d'une pupille circulaire de diamètre $D = 2R$ est constituée d'un disque très lumineux de rayon $0,61\frac{\lambda_0 f'_2}{R}$ entourée d'anneaux moins lumineux (dont l'intensité a été exagérée sur la figure ci-dessous).
Elle est appellée **tache d'Airy**.

Propriété à connaître



L'essentiel de l'énergie lumineuse est concentrée dans la frange centrale de rayon angulaire

$$\theta_A = 0,61\frac{\lambda_0}{R}$$

c'est-à-dire dans un cône de demi-angle au sommet θ_A et d'axe le rayon lumineux incident (O_2S').

On dira que la rayon de la tache d'Airy vaut $r_A = f'_2\theta_A$, soit

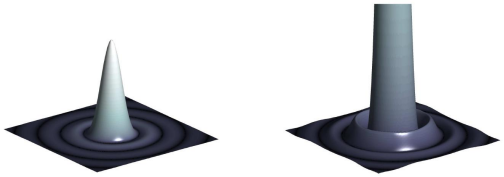
$$\boxed{r_A = 0,61\frac{\lambda_0 f'_2}{R}}$$

⚠ Attention...

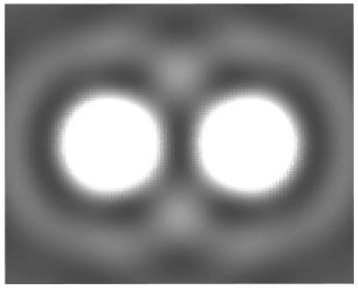
On peut raisonner sur le diamètre d_A de cette tache image

$$d_A = 1,22\frac{\lambda_0 f'_2}{R}$$

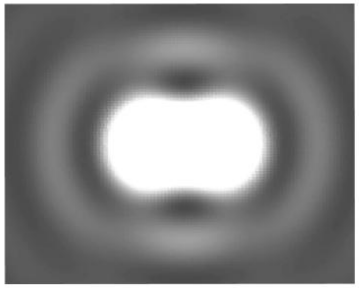
ou encore avec le diamètre $D = 2R$ de l'ouverture.



2 Formation des images - Critère de Rayleigh



Images bien résolues



Images en limite de résolution

Définitions :

Deux images sont **résolues** si on peut les distinguer, c'est à dire les **séparer**.

On parle de **résolution spatiale** pour deux objets (ex : étoiles doubles).
On parle de **résolution spectrale** pour deux raies d'un spectre.

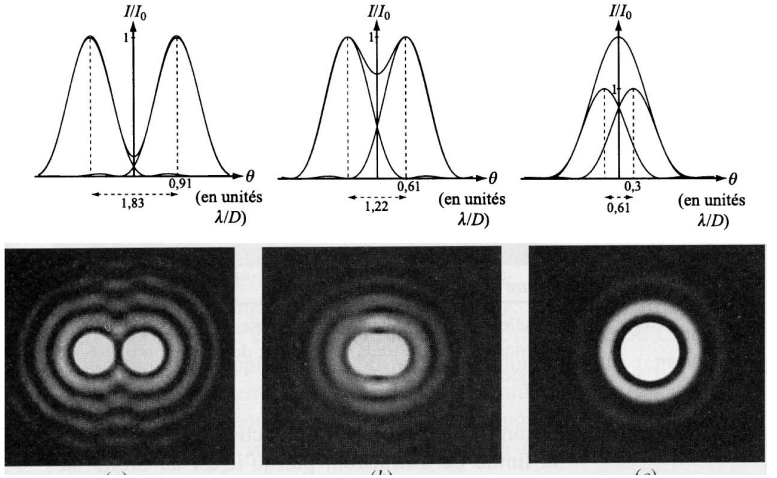
Critère de Rayleigh

Soit α la distance angulaire entre 2 images géométriques, on dira que le critère de Rayleigh est vérifié si

$$\alpha \geqslant \theta_A = 0,61\frac{\lambda_0}{R} = 1,22\frac{\lambda_0}{D}$$

où λ_0 est la longueur d'onde à laquelle se fait l'observation et $R = \dfrac{D}{2}$ est la rayon du système optique utilisé pour former les 2 images.
D est l'ouverture du système optique.

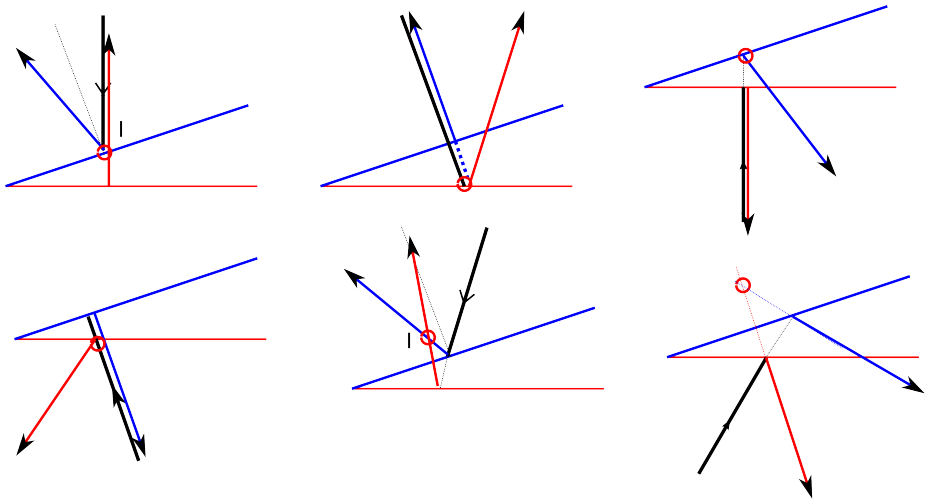
Propriété à connaître



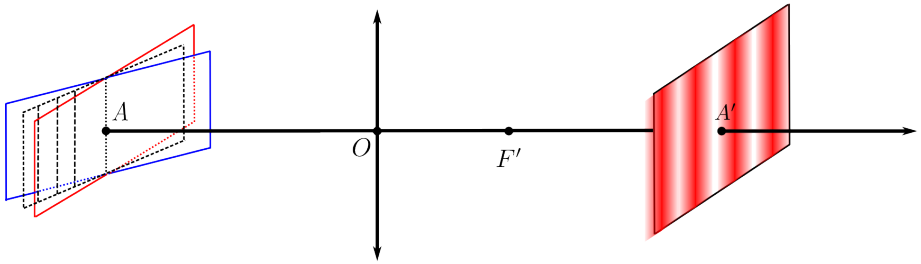
V Localisation des franges du coin d'air

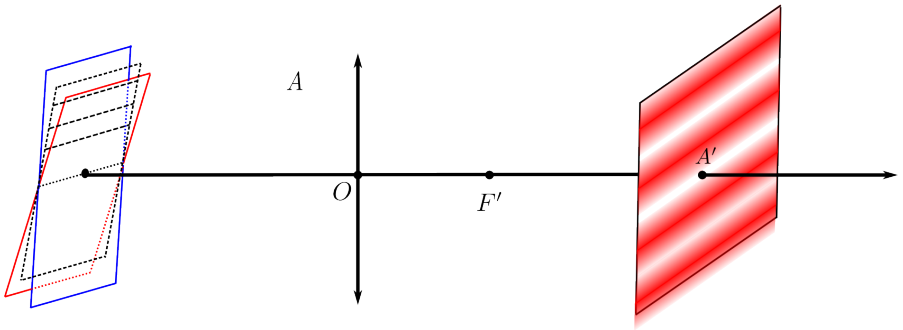
Savoir démontrer №1 : Localisation des franges

Les franges sont localisées sur les miroirs pour une incidence normale à l'un des deux miroirs.
Les franges sont localisées au voisinage des miroirs pour une incidence quelconque.

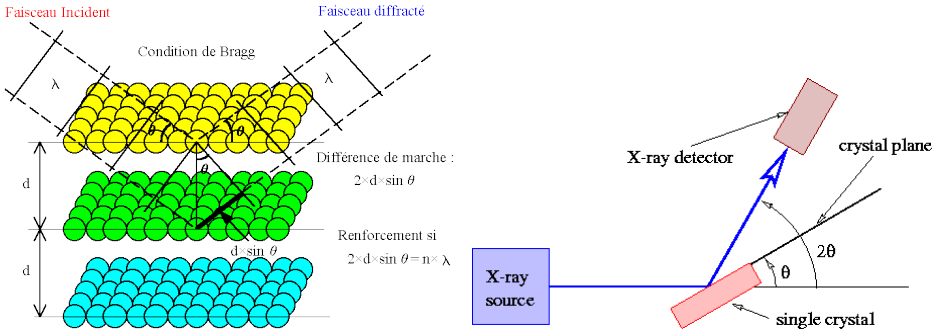


A trois dimensions, on trouve les figures suivantes :





VI Diffraction de Bragg



Savoir démontrer №2 : Observation des structures atomiques

On observe la lumière réfléchie dans la direction de l'optique géométrique.
On montre que l'intensité est maximale pour des valeurs de θ_p tq :

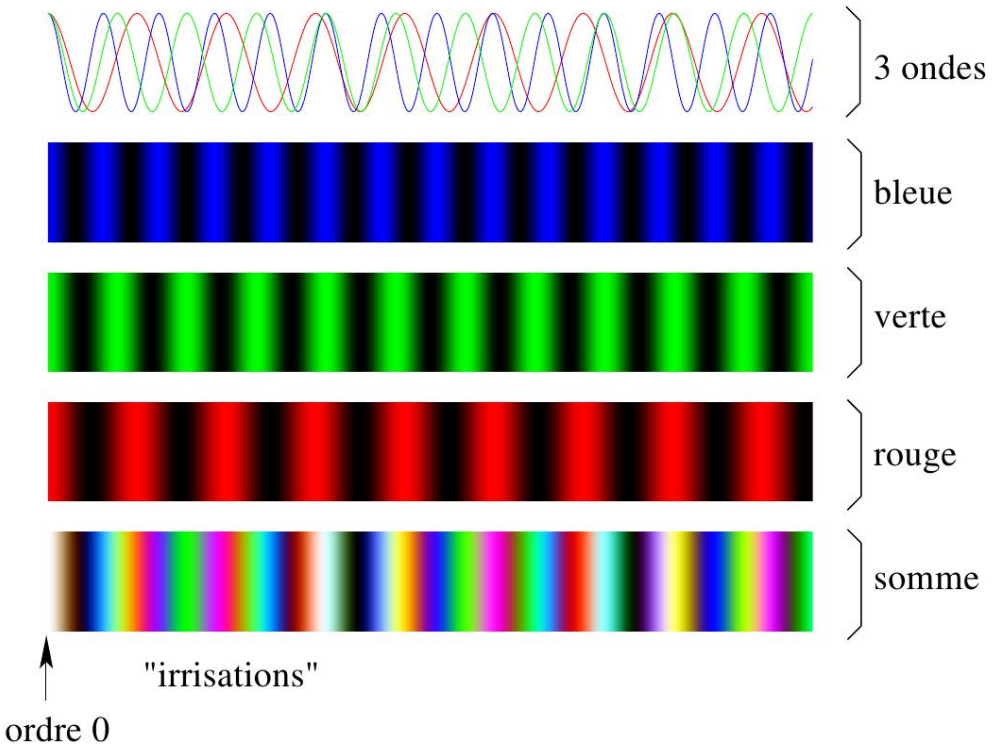
$$2d\sin\theta_p = p\lambda$$

Pour observer une structure électronique, il faut $\lambda \simeq d = 0.1$ nm
On utilise donc des rayons X.

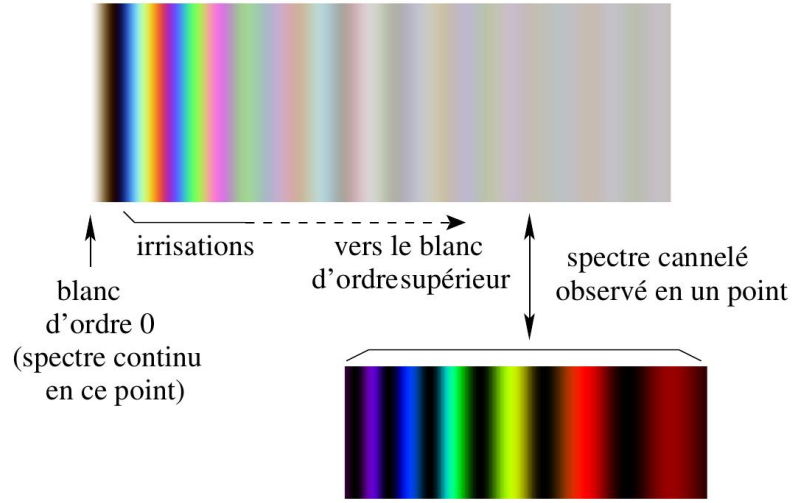
VII Lumière blanche, spectre cannelé

Exemple avec trois couleurs : raies bleue verte et rouge. L'addition des différentes longueur d'onde donne des irrisations.

On représente l'éclairement en fonction de δ :



En lumière blanche, on obtient le spectre cannelé. On représente l'éclairement en fonction de δ :



Définition :

- ✗ **Teinte plate ou blanc d'ordre 0** : teinte obtenue en lumière blanche à l'ordre 0 et qui correspond à la couleur de la source.
- ✗ **Irrisations** : est l'échelle des teintes observées : ceux sont les teintes de Newton.
- ✗ **Blanc d'ordre supérieur** : la teinte "blanchâtre" obtenue lorsque $\delta \gg \ell_c$. Les spectre de cette lumière présente des **cannelures**.

VIII Optique de Fourier

1 Transformée de Fourier

Par définition, on note la transformée de fourier de la fonction t, notée $\hat{t}$:

$$\mathcal{F}(t)(u) = \hat{t}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(x) \exp(-2j\pi ux)\ \mathrm{d}x$$

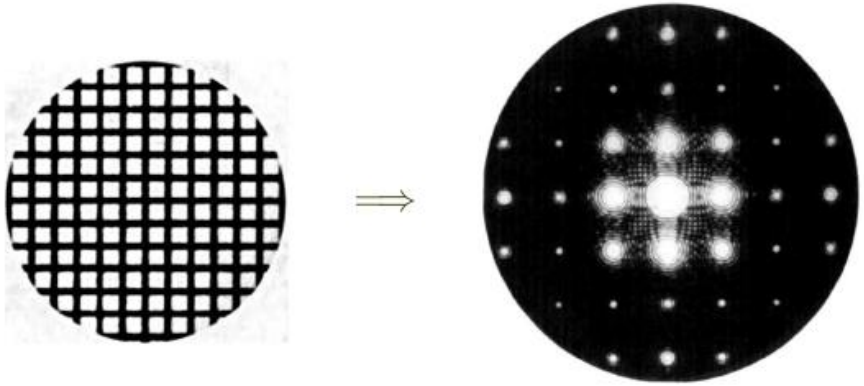
Finalement, l'éclairement peut s'écrire en fonction de la transformée de Fourier de la transparence de la pupille.

A une dimension , en incidence normale :

$$\boxed{\underline{a}(M) = \underline{K} \exp\left[-jk_0(SOM)\right] \hat{t}\,(u)}$$

2 Propriétés de la transformée de Fourier

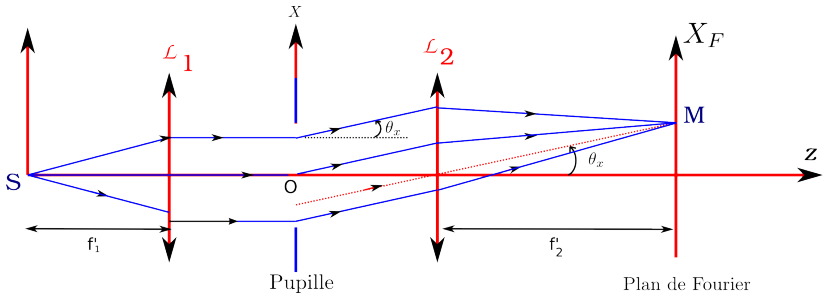
Linéarité	$\mathcal{F}\left(t_1(X) + t_2(X)\right) = \mathcal{F}\left(t_1(X)\right) + \mathcal{F}\left(t_2(X)\right)$
Convolution	$\mathcal{F}\left(t_1(X) \ * \ t_2(X)\right) = \mathcal{F}\left(t_1(X)\right).\mathcal{F}\left(t_2(X)\right)$
Dilatation	$t\left(\hat{a}X\right) = \frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{t}\left(\frac{u}{a}\right)$
Translation	$\hat{t}\left(X - X_0\right) = \exp\left(-2j\pi u X_0\right)\hat{t}\left(u\right)$



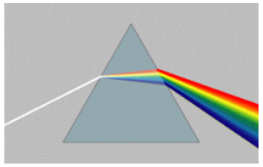
Les grandes périodes spatiales de la transmission t, correspondent aux petites fréquences de l'espace de Fourier.

Les petites périodes spatiales de la transmission t, correspondent aux hautes fréquences de l'espace de Fourier.

3 Exemples



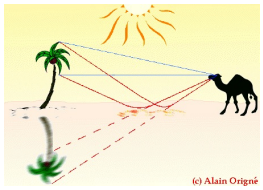
Chapitre B9 : Les Classiques en Optique géo.



Dispersion par un prisme

PARTIE B : OPTIQUE

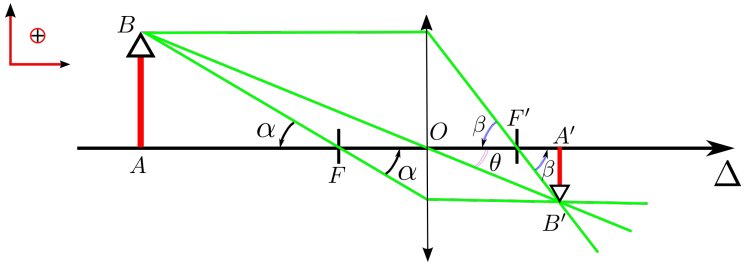
B-0 : Optique géométrique
B-1 : Modèle scalaire
B-2 : Sources lumineuses
B-3 : Interférences lumineuses
B-4 : Trous d'Young
B-5 : Exemples
B-6 : Michelson
B-7 : Diffraction
B-8 : Compléments
B-9 : Classiques Geo
B-10 : Simulations



Mirage inférieur

I Relations de conjugaison des lentilles

Savoir démontrer №1 : Relations avec origine aux foyers = Newton



On a les relations de NEWTON

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

Réponse :

On écrit $\tan\alpha$ *et* $\tan\beta$ *de deux manières différentes :*

⚠ ATTENTION… *Toujours prendre des longueurs algébriques positives dans le calcul des angles*

$$\tan\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{FO}} \qquad \boxed{\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f}{\overline{FA}}}$$

$$\tan\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{F'A'}} \qquad \boxed{\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}}$$

Le rapport des deux relations obtenues permet d'obtenir la troisième relation :

$$1 = \frac{\overline{F'A'}\ \overline{FA}}{ff'} \quad \rightarrow \quad \boxed{\overline{F'A'}\ \overline{FA} = ff'}$$

Savoir démontrer №2 : Relations avec origine au centre

La relation sur le grandissement :

$$\boxed{\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}}$$

Relation de conjugaison avec origine au centre :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}$$

Réponse :

On écrit $\tan\theta$ *de deux manières différentes :*

$$\tan\theta = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} \rightarrow \boxed{\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}}$$

On développe ensuite la relation de NEWTON, *en utilisant* $\overline{FA} = \overline{FO} + \overline{OA}$ *et* $\overline{F'A'} = \overline{F'O} + \overline{OA'}$.

Cela donne :

$$\left(\overline{FO}+\overline{OA}\right)\left(\overline{F'O}+\overline{OA'}\right)=ff'$$
$$ff'+f'\overline{OA'}-f'\overline{OA}+\overline{OA}\;\overline{OA'}=ff'$$

On divise le tout par $\overline{OA}\;\overline{OA'}\;f'$*, soit :*

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}}-\frac{1}{\overline{OA}}=\frac{1}{f'}}$$

II Dispersion par un prisme

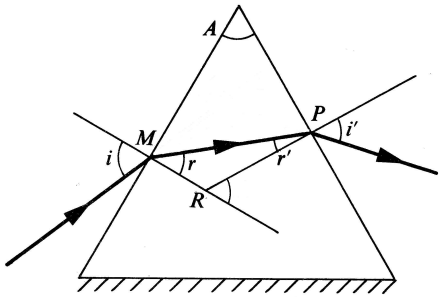
1 Définitions

Les lois de Descartes permettent d'avoir les relations :

$$\sin i=n\sin r \quad \text{et} \quad n\sin r'=\sin i'$$

La somme des angles du triangle AMP donne : $A+\frac{\pi}{2}-r+\frac{\pi}{2}-r'=\pi$, soit

$$r+r'=A$$



2 Petits angles

Savoir démontrer №3 : Déviation

Pour les petits angles, on trouve

$$\boxed{D=(n-1)\,A}$$

On en déduit la déviation ΔD en fonction de $\Delta\lambda$:

$$\boxed{\Delta D\simeq A\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\Delta\lambda}$$

Réponse :

La déviation du rayon est $D=i-r+i'-r'$ *soit*

$$\boxed{D=i+i'-A}$$

Pour de petits angles les lois de Descartes *se simplifient :* $i\simeq nr$ *et* $i'\simeq nr'$*, on trouve*

$$\boxed{D=(n-1)\,A}$$

Rque : L'approximation est assez étonnante car les angles r *et* i' *sont rarement faibles ...*

On peut dériver cette expression par rapport à λ*, cela donne :*

$$\mathrm{d}D=A\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda$$

Pour des déviations faibles, on peut approximer $\mathrm{d}\lambda\simeq\Delta\lambda$ *et* $\mathrm{d}D\simeq\Delta D$*, on a :*

$$\boxed{\Delta D\simeq A\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\Delta\lambda}$$

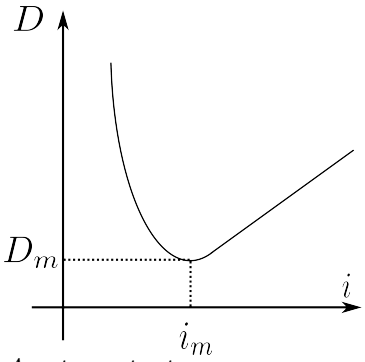
3 Cas général

Savoir démontrer №4 : Minimum de déviation

La déviation dans un prisme dépend de l'angle d'incidence, en suivant la courbe ci-contre.
On observe un minimum de déviation obtenu pour

$$\boxed{n=\frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}}$$

Réponse :



A est constant :

Dans le montage à prisme précédent, on mesure la déviation D pour différentes valeurs de l'angle d'incidence. On obtient la courbe $D(i)$ (dessin de gauche). On remarque que cette courbe a un minimum pour $i = i_m$ soit D_m le minimum.

On recherche la valeur i_m correspondant à la dévation minimale par le prisme. Il est donc naturel de rechercher la valeur pour laquelle la dérivée de la fonction $D(i)$ s'annule.

On part de l'expression de D : $D = i + i' - A$. On dérive cette expression par rapport à l'angle i, soit, comme

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

$$\boxed{\frac{dD}{di} = 0 \Longleftrightarrow \frac{di'}{di} = -1}$$

On a également $A = r + r'$, donc $\frac{dr}{di} = -\frac{dr'}{di}$.

D'autre part, on dérive également les deux équations de Descartes par rapport à i :

$$\begin{aligned} \sin i &= n \sin r \Rightarrow \cos i = n \frac{dr}{di} \cos r \\ \sin i' &= n \sin r' \Rightarrow \frac{di'}{di} \cos i' = n \frac{dr'}{di} \cos r' \end{aligned}$$

Comme au minimum de déviation, on a $\frac{di'}{di} = -1$ et $\frac{dr}{di} = -\frac{dr'}{di}$, les équations se simplifient :

$$\cos i = n \frac{dr}{di} \cos r \ \text{ et } \ \cos i' = n \frac{dr}{di} \cos r'$$

Soit finalement :

$$\frac{\cos i}{\cos r} = \frac{\cos i'}{\cos r'} \Rightarrow \frac{1 - n^2 \sin^2 r}{\cos^2 r} = \frac{1 - n^2 \sin^2 r'}{\cos^2 r'}$$

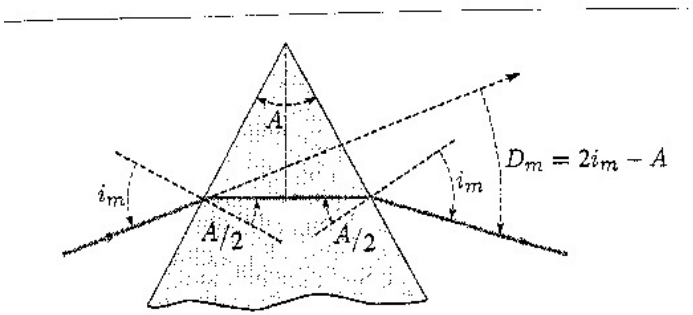
On admet que cette fonction est bijective sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut conclure que alors $r_m = r'_m$ et donc au minimum de déviation : $r_m = r'_m = \frac{A}{2}$ et donc $i_m = i'_m$. Au final, au minimum de déviation :

$$\boxed{r_m = r'_m = \tfrac{A}{2} \ \text{ et } \ i_m = i'_m = \tfrac{A + D_m}{2}}$$

On trouve alors que l'indice peut s'exprimer en fonction de D_m, soit :

$$\boxed{n = \frac{\sin \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}}$$

On obtient le montage particulier suivant :



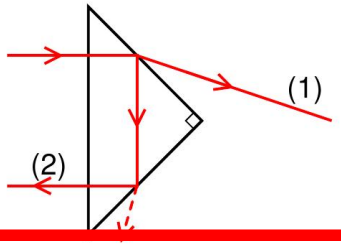
4 Prisme à réflexion totale

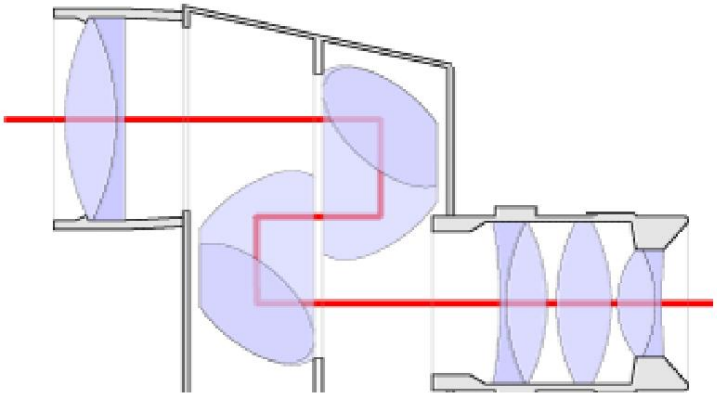
Savoir démontrer №5 : Réflexion totale

Il peut y avoir réflexion totale pour

$$n > \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

Dans cette situation le rayon (1) représenté disparait. Un tel prisme est utilisé pour retourner des images dans des jumelles.



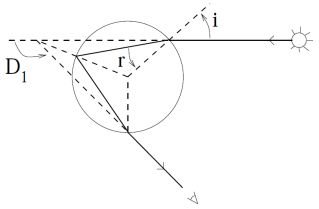


III L'Arc en ciel

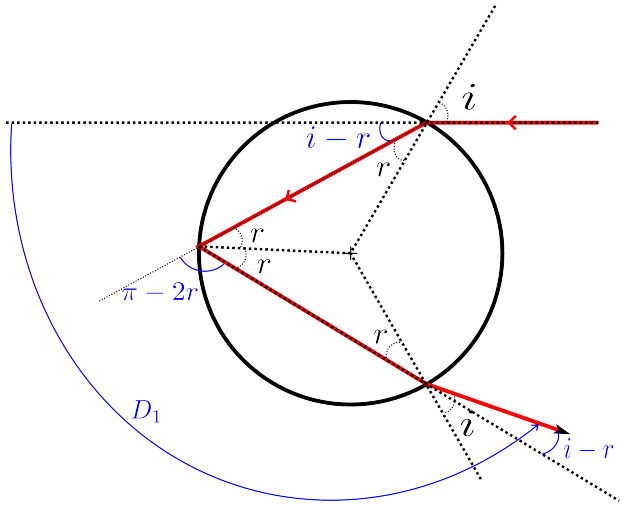
Savoir démontrer №6 : Déviation d'un rayon réfracté dans une goutte d'eau

Une goutte d'eau sphérique d'indice n est éclairée par le Soleil supposé ponctuel. Soit D_N la déviation algébrique totale d'un rayon pénétrant sous l'incidence i et émergeant après N réflexions internes ($N = 0$ s'il n'y a pas de réflexion).
On a

$$\boxed{D_N = 2i - 2r(1+N) + N\pi}$$



Réponse :



Les angles utilisés sont orientés et comptés positivement dans le sens trigonométrique.

Un point important est que l'angle de réflexion interne dans la goutte correspond à l'angle d'incidence r dans la goutte et c'est valable à chaque réflexion interne. On a toujours un angle r entre la normale et le rayon dans la goutte.

1. *Traitons le cas d'une seule réflexion .*

   On va cumuler simplement les déviations algébriques pour chaque changement de direction (les angles en bleu sur la figure).

2. *À l'entrée dans la goutte, la déviation vaut $i - r$.*

3. *Pour le réflexion la déviation est $\pi - 2r$*

4. *A la sortie de la goutte, la déviation est $i - r$ à nouveau.*

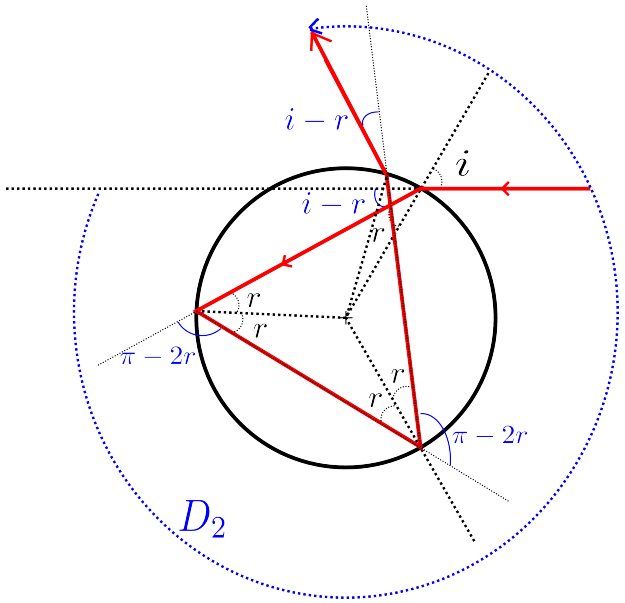
   La déviation est donc

$$D_1 = (i - r + \pi - 2r + i - r) = \pi + 2i - 4r$$

5. *Dans le cas des réflexions multiples, la déviation supplémentaire à chaque réflexion est $\pi - 2r$. Comme le montre le schéma ci-dessous avec 2 réflexions.*

   On en déduit donc que

$$D_N = (i - r + N(\pi - 2r) + i - r) \rightarrow \boxed{D_N = 2i - 2r(1+N) + N\pi}$$



- Le soleil étant à l'infini, il émet des rayons parallèles à l'axe optique. Cela permet d'avoir plusieurs valeurs de l'angle i.
- Pour un rayon passant par le centre de la goutte, $i = 0$
- Pour un rayon passant par le pôle nord de la goutte, $i = \frac{\pi}{2}$
- La déviation est une fonction de l'angle i avec $i \in]0, \pi/2[$

Propriétés à connaître

Savoir démontrer №7 : Extrémum de déviation

Pour $N > 1$, on montre que la courbe $D_N(i)$ admet un minimum.
On désigne par D_N^m la valeur extrémale de D_N et par i_N^m la valeur correspondante de i. Calculer numériquement i_N^m et D_N^m pour $N = 1$ et $N = 2$ en prenant $n = 1,33$.

Réponse :

D_N présente un extremum s'il est possible d'annuler $\dfrac{\mathrm{d}D_N}{\mathrm{d}i}$. *Or, lorsque i varie, r varie suivant la relation de* Descartes *:* $\sin i = n \sin r$. *Cette relation différenciée conduit à*

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r} \quad \textit{donc} \quad \frac{\mathrm{d}D_N}{\mathrm{d}i} = 2\left(1 - \frac{1+N}{n}\frac{\cos i}{\cos r}\right)$$

L'annulation de cette dérivée n'est possible que pour i_N^m et r_N^m tels que $n\cos r_N^m = (1+N)\cos i_N^m$ *soit*

$$n^2\left(1 - \frac{\sin^2 i_N^m}{n^2}\right) = n^2 - 1 + \cos^2 i_N^m = (1+N)^2\cos^2 i_N^m$$

d'où $\boxed{\cos^2 i_N^m = \dfrac{n^2-1}{(1+N)^2-1}}$

Cette relation n'est possible que si $0 \leqslant \cos^2 i_N^m \leqslant 1$ *; en pratique,* $n \simeq 1,33$ *pour l'eau, donc on a forcément (avec* $N \in \mathbb{N}^*$*),*

$$\boxed{N \geqslant 1}$$

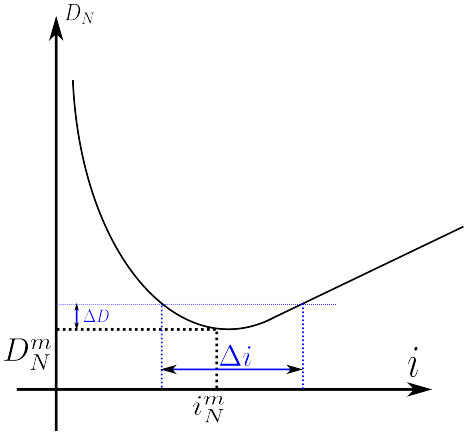
Dans ce cas, D_N a bien un extremum unique.

Un calcul de signe de dérivée seconde montrerait que cet extremum est en fait un ***minimum de déviation****.* ***A.N.***$\rightarrow$

$$i_1^m = 59,6\,° \qquad D_1^m = 137,5\,° \qquad i_2^m = 71,9\,° \qquad D_2^m = 230,1\,°$$

Pour les valeurs autour de i_m, les valeurs de déviations sont très proches de D_m comme l'illustre le schéma ci-dessous. On voit que pour un grand nombre de valeurs dans l'intervalle de largeur Δi, les valeurs de déviations sont contenues dans un très petit intervalle de taille ΔD. Tous ces rayons vont sortir de la goutte avec quasiment le même angle.

Il y aura donc une accumulation de lumière dans cette direction. C'est en fait la seule direction du ciel qui va donner un phénomène lumineux : c'est l'arc en ciel.

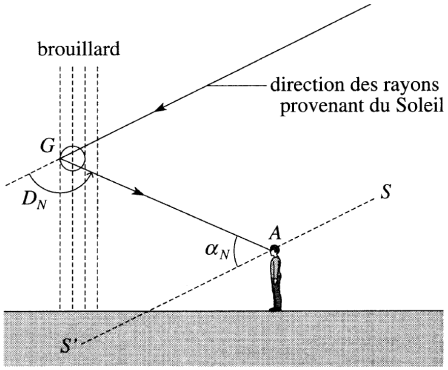


Savoir démontrer №8 : Arc en ciel

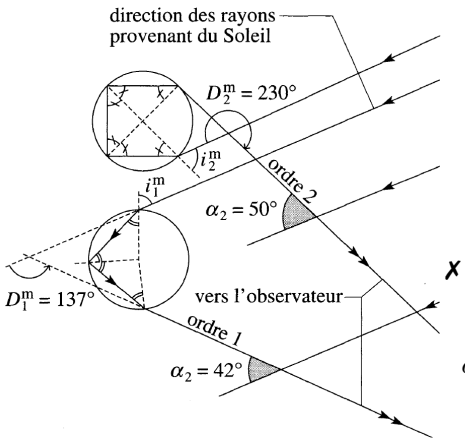
Le phénomène lumineux est observable depuis le sol dans un cône centré sur l'observateur et d'axe parallèle à la lumière incidente du soleil.
La sol coupe une partie du phénomène , on ne voit donc qu'un arc.
Pour chaque valeur de N, on observe un arc différent. Dans la pratique seulement au maximum deux arcs sont observables.
Calculer numériquement (en prenant $n = 1,33$) les rayons angulaires pour $N = 1$ et $N = 2$, valeurs qui correspondent quasiment aux seuls arcs-en-ciel visibles.
Préciser le domaine des hauteurs angulaires du Soleil au-dessus de l'horizon pour lequel le phénomène est observable.

Réponse :

✗ *Parmi toutes les gouttes de pluie, celles qui donnent la déviation minimale D_N^m (N fixé) apparaissent brillantes à l'observateur. Or, il y a symétrie de révolution autour de l'axe (SA) (voir figure ; on ne tient pas encore compte du sol ici). Par conséquent, les gouttes brillantes se répartissent sur des « arcs de cercles » (les arcs sont différents pour N différent car D_N^m change). Il y a plusieurs arcs mais, en pratique, on voit surtout celui à $N = 1$ (et éventuellement $N = 2$ avec de la chance) car il y a perte de luminosité, la réflexion n'étant que partielle dans les gouttes. L'arc correspondant à $N = 2$ paraît pour l'observateur au-dessus de celui pour $N = 1$.*



✗



L'arc-en-ciel n'est observable que pour la partie au-dessus de l'horizon, c'est-à-dire si la « hauteur angulaire » du Soleil au-dessus de l'horizon est inférieure au rayon angulaire

$$\alpha_N = |\pi - D_N^m|$$

✗ *Les rayons angulaires, obtenus par la formule précédente, sont*

$$\alpha_1 = 42,5\,° \quad et \quad \alpha_2 = 50,1\,°$$

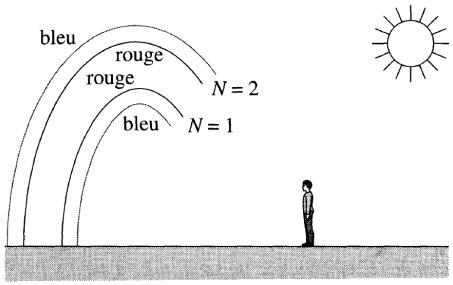
Le phénomène d'arc-en-ciel n'est observable, avec les arcs à une ou deux réflexions internes, que si la « hauteur angulaire » du Soleil est inférieure à ces rayons angulaires. C'est réalisé en général une bonne partie de la journée (mais pas vraiment vers le milieu du jour...).

Savoir démontrer №9 : Dispersion *

On tient compte maintenant de la dispersion. Calculer la dérivée de D_N^m par rapport à n. Calculer numériquement la variation de rayon apparent des arcs-en-ciel d'ordre 1 et 2 entre les couleurs extrêmes, de longueur d'onde $0,8$ μm et $0,4$ μm pour lesquelles on prendra respectivement $n_{0,8} = 1,33 - 5.10^{-3}$ et $n_{0,4} = 1,33 + 5.10^{-3}$.
Faire un schéma indicatif de ce qui est vu par l'observateur, en précisant la succession des couleurs.

Réponse :

✗ *On effectue le calcul à N fixé. On a $D_N^m = 2i_N^m - 2r_N^m(1+N) + N\pi$ et on calcule la dérivée par rapport à n : en fait, ce sont i_N^m et r_N^m qui dépendent de n.*



$$\frac{\mathrm{d}D_N^m}{\mathrm{d}n} = 2\frac{\mathrm{d}i_N^m}{\mathrm{d}n} - 2(1+N)\frac{\mathrm{d}r_N^m}{\mathrm{d}n}$$

Or, la dérivation de la loi de Descartes *donne*

$$\frac{\mathrm{d}i_N^m}{\mathrm{d}n}\cos i_N^m = \sin r_N^m + n\cos r_N^m \frac{\mathrm{d}r_N^m}{\mathrm{d}n}$$

et on a vu que

$$n\cos r_N^m = (1+N)\cos i_N^m$$

donc, après simplifications, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}D_N^m}{\mathrm{d}n} = \frac{2}{n}\tan i_N^m$$

Enfin, la variation relative d'indice étant très faible, on en déduit la variation de déviation

$$\boxed{\Delta D_N^m = \frac{2\Delta n}{n}\tan i_N^m}$$

A.N.$\rightarrow$ $\boxed{\Delta D_1^m = 1,5\,° \quad et \quad \Delta D_2^m = 2,6\,°}$

✗ *Du rouge au bleu, n augmente et D_N^m augmente. Un observateur verra donc un arc-en-ciel lumineux correspondant à $N = 1$ avec des couleurs évoluant du bleu au rouge en montant ($\alpha_1 = \pi - D_1^m$). Au-dessus de cet arc-en-ciel se trouve celui pour $N = 2$, bien moins lumineux, avec les couleurs en ordre inverse ($\alpha_2 = D_2^m - \pi$).*

Entre les deux arcs de couleurs inversées, il y a une zone plus sombre du ciel appelée espace sombre d'Alexandre (puisque les rayons lumineux s'accumulent sur les deux arcs).

✗ *Le Soleil a un diamètre apparent non nul de $0,5\,°$donc les arcs pour chaque longueur d'onde ont une certaine largeur angulaire ($\simeq 0,5\,°$) et se chevauchent entre eux. Cela rend les couleurs de l'arc-en-ciel moins pures.*

IV Fibre optique

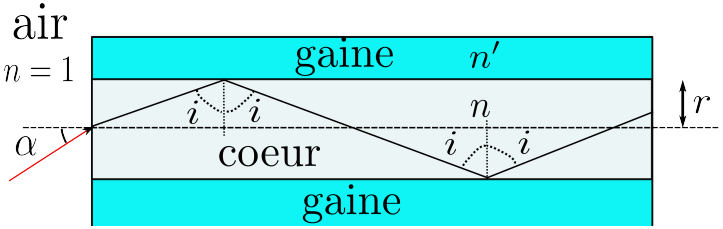
1 Fibre à saut d'indice

Définition :

✗ Une fibre optique est formée d'un cylindre de longueur L, de rayon r et d'indice n entourée par une gaine d'indice $n' < n$.

✗ Un rayon lumineux venant de l'air d'indice 1 arrive sur la face plane de gauche du cylindre, en son centre, avec un angle d'incidence α.

✗ Il doit y avoir réflexion totale entre le coeur et la gaine.



Savoir démontrer №10 : Fibre à gradient d'indice

(a) La propagation n'est possible que si

$$\boxed{\alpha < \alpha_m = \arcsin\sqrt{n^2 - n'^2}}$$

(b) Déterminer les variations possibles de durée de traversée de la fibre par un rayon.

(c) En déduire la fréquence maximale de l'information transmise sous la forme d'impulsions très brèves (bits d'information numérique).

Réponse :

(a) La $2^{ème}$ loi de Snell-Descartes, appliquée à l'entrée donne :

$$1\sin\alpha = n\sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = n\cos i$$

et appliquée au dioptre entre l'âme et la gaine de la fibre optique donne :

$$n \sin i = n' \sin i'$$

On en déduit alors :

$$\sin i' = \frac{n}{n'} \sin i = \frac{n}{n'} \sqrt{1 - \cos^2 i} = \frac{n}{n'} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}$$

Pour que le rayon reste prisonnier de la fibre, il faut qu'il y ait réflexion totale au niveau du dioptre séparant l'âme et la gaine de la fibre optique, donc que l'éqaution en $\sin i'$ soit impossible, ce qui conduit à :

$$\frac{n}{n'} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} > 1 \text{ soit } \alpha < \alpha_m = \arcsin \sqrt{n^2 - n'^2}$$

La distance parcourue par le rayon lumineux dans la fibre optique est la longueur de la ligne brisée, qu'on peut étirer en ligne droite et faisant un angle i avec la perpendiculaire à l'axe du cylindre (voir schéma) :

$$d = \frac{L}{\sin i}$$

L'intervalle de varaiation de α est $[0, \alpha_m]$; avec

- ✗ *pour $\alpha = 0$, $i = \pi/2$ donc $\sin i = 1$*
- ✗ *pour $\alpha = \alpha_m$, on est à la limite de la réflexion totale au niveau de la gaine donc $\sin i = \frac{n'}{n}$.*

  L'intervalle de variation de $\sin i$ est donc $\left[\frac{n'}{n}, 1\right]$. L'intervalle de variation de d est donc $\left[L, \frac{n}{n'}L\right]$. Or, par définition de l'indice, la vitesse de propagation de la lumière dans l'âme de la fibre est $v = c/n$, donc le temps de parcours est $\tau = \frac{d}{v} = \frac{nd}{c}$. L'intervalle de variation de cette durée est :

$$\tau \in \left[\frac{nL}{c}, \frac{n}{n'} \times \frac{nL}{c}\right]$$

(b) Il y aura brouillage de l'information si un bit d'information (une impulsion lumineuse) commence à arriver alors que le précédent n'a pas fini d'arriver. Au pire, si le premier envoyé met la durée maximale de parcours et que le second, émis T secondes plus tard, met la durée minimale. Il faut donc que :

$$0 + \frac{n}{n'} \times \frac{nL}{c} < T + \frac{nL}{c}$$

soit

$$T > \frac{nL}{n'c}(n - n')$$

soit finalement

$$f < \frac{c}{L} \times \frac{n'}{n(n - n')}$$

Pour $L = 100$ km, $n = 1,5$, $n = 1$, on obtient $f < 4000$ Hz (soit 4000 bits par seconde).

2 Fibre à gradient d'indice

Définition :

Dans une fibre à gradient d'indice, l'indice du coeur varie avec r. La gaine ne sert qu'à protéger le coeur.
Il doit y avoir réflexion totale à l'intérieur du coeur

V Propagation dans un milieu d'indice variable

Définition :

Equation des rayons lumineux - HP Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire colinéaire au rayon lumineux.
Soit s la distance parcourue sur la trajectoire = c'est **l'abscisse curviligne**.

$$\frac{\mathrm{d}(n\overrightarrow{u})}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$$

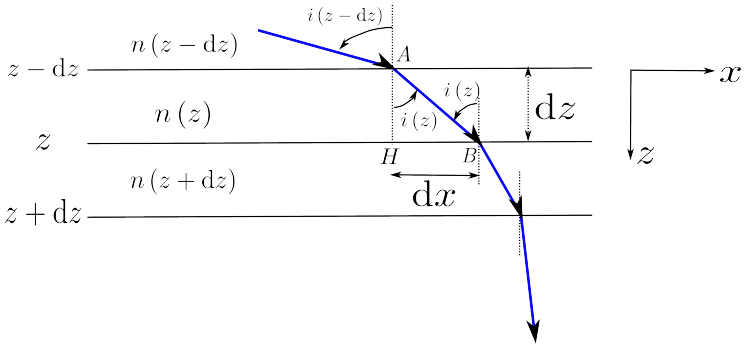
Le rayon est incurvé dans le sens du gradient de n.

Réponse :

- ✗ *Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$ est orienté des petites valeurs de n vers les grandes.*

✗ *Si n varie lentement, on a localement $\frac{\mathrm{d}(n\vec{u})}{\mathrm{d}s} \simeq n\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}s}$ la variation de la direction de propagation est orientée vers $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$, on en conclut que* ***le rayon est incurvé dans le sens du gradient de n.***

Savoir démontrer №11 : On décompose le milieu en strates



On découpe le milieu en strates d'indice $n(z)$.
A chaque strate, on a la relation :

$$n(z-\mathrm{d}z)\sin(i(z-\mathrm{d}z)) = n(z)\sin(i(z)) = n(z+\mathrm{d}z)\sin(i(z+\mathrm{d}z)) = n_0 \sin i_0$$

Réponse :

On utilise la loi de Descartes *à chaque interface.*
La grandeur $n(z)\sin(i(z))$ est donc ***invariante*** *lors de la propagation.*

1 Equation de la trajectoire

Savoir démontrer №12 : Equation de la trajectoire

On obtient la relation :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\left(\frac{n(z)}{n_0 \sin i_0}\right)^2 - 1}$$

Réponse :

Il faut utiliser le schéma présenté sur la figure précédente, on exprime le sinus dans le triangle AHB

$$\sin i = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(z')^2}}$$

On a noté $z' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ la dérivée de la fonction $z(x)$ qui représente la trajectoire du rayon dans le milieu.
Si on remplace $\sin i$ dans la loi de Descartes*, on trouve le résultat demandé.*
Pour trouver l'équation de la trajectoire, il faut connaître $n(z)$

Application 1 : Milieu d'indice variable

On suppose que l'incidence est rasante sur le milieu : $i_0 = \frac{\pi}{2}$
L'indice varie avec z en suivant la relation

$$n^2(z) = n_0^2\left(1+\alpha^2 z\right)$$

La trajectoire est une parabole.

Réponse :

On a $\sqrt{\left(\frac{n(z)}{n_0 \sin i_0}\right)^2 - 1} = \alpha\sqrt{z}$

L'équation devient :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \alpha\sqrt{z} \\
\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} &= \alpha \mathrm{d}x \\
2\sqrt{z} &= \alpha x + \beta \\
z &= (ax+b)^2
\end{aligned}$$

Les constantes a, b, c sont déterminées par les conditions initiales.
La trajectoire est une parabole.

VI Décalage d'un rayon à la traversée d'une lame à faces parallèles

Application 2 : Décalage d'un rayon à la traversée d'une lame à faces parallèles

Une lame de verre d'indice $n = 1,5$ a une épaisseur e. Elle est attaquée par un laser faisant un angle i avec la normale à la lame faible. i est petit de sorte que l'on pourra considérer pour tous les angles i que $\sin i \approx i$ et $\tan i \approx i$.

(a) Donner l'expression du décalage latéral, δ, entre le faisceau incident et le faisceau transmis.

(b) **A.N.**→ Calculer ce décalage pour $e = 10$ mm et $i = 20°$.

(c) Montrer qualitativement que c'est un moyen précis de contrôler la position d'un faisceau, tout en conservant sa direction.

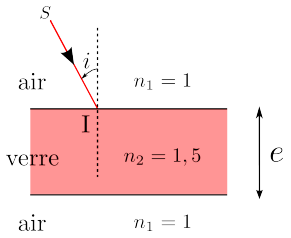
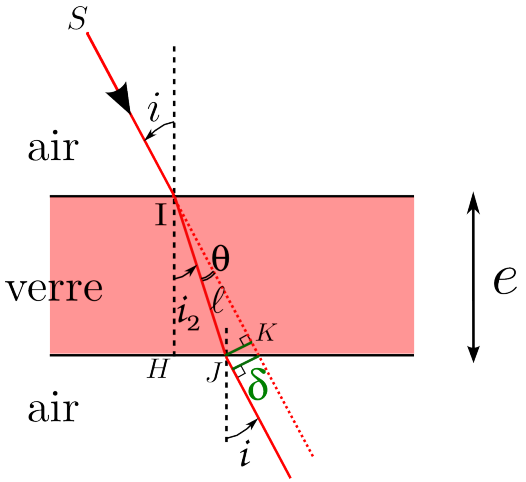


FIGURE B.11 – Lame de verre.

Réponse :



Le faisceau émergent ressort parallèlement au faisceau incident.
Soit $\delta = IJ$. On a dans le triangle IJK : $\delta = \ell \sin\theta$ avec $\theta = i - i_2$.

Dans le triangle (IJH), $\cos i_2 = \dfrac{e}{\ell}$.
Dans l'approximation des petits angles, $\cos i_2 \simeq 1$, $\sin(i - i_2) \simeq i - i_2$ et l'utilisation de la loi de réfraction de DESCARTES *conduit à*

$$\boxed{\delta = ei\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)}$$

A.N.→ $\delta = 1,2$ mm.

VII Problèmes

CCP -PC - 2013

2) Spectroscope à prisme

Avertissement : dans tout le problème, les résultats numériques concernant les angles doivent obligatoirement être exprimés en degrés.

2.1) On considère un prisme en verre dont l'indice évolue en fonction de la longueur d'onde λ suivant la loi de Cauchy $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$.

Ce prisme est plongé dans l'air dont l'indice est considéré égal à l'unité. Son angle au sommet mesure $A = 60°$.
Il est éclairé par un pinceau de lumière parallèle blanche, sous une incidence $i = 60°$ par rapport à la normale à la face d'entrée du prisme.
La lumière émerge sous un angle $\theta(\lambda)$ par rapport à la normale à la face de sortie du prisme.

Effectuer un dessin du dispositif en précisant de quel côté de la normale (vers le sommet ou vers la base du prisme) il convient de positionner le rayon incident pour éviter toute réflexion totale.

Compléter la figure en détaillant tout le trajet suivi par un rayon monochromatique.

Définir les angles utiles et les orientations adoptées, puis écrire les formules associées du prisme. Conclure en exprimant *sin*(θ) en fonction de A , i et n ***exclusivement***.

2.2) La longueur d'onde λ étant celle du rayonnement incident et son unité étant le nanomètre, les coefficients de Cauchy sont définis par $a = 1{,}620$ et $b = (102{,}2\ \text{nm})^2$.

Calculer la valeur numérique de l'indice n pour un rayonnement de longueur d'onde $\lambda = 578$ nm correspondant au centre du doublet jaune du mercure.
En déduire la valeur numérique de l'angle d'émergence θ .

Un calcul littéral (non demandé) conduit à l'expression suivante de la dispersion angulaire :

$$D_a = \frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{2\,b}{\lambda^3}\frac{\sin A}{\cos\theta\sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}}} .$$

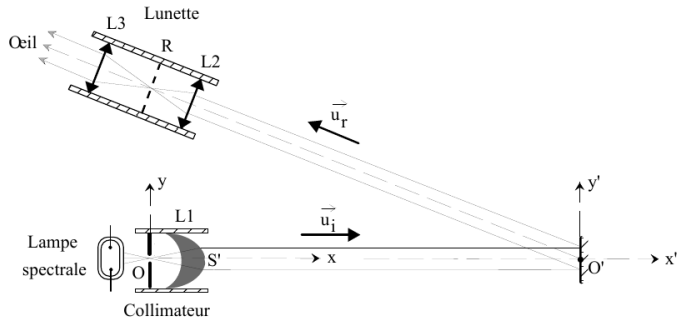
Quel sens physique peut-on attribuer à cette grandeur ?
Calculer sa valeur numérique, exprimée en °/µm , pour $\lambda = 578$ nm .

En déduire l'écart angulaire à l'émergence entre les deux raies ($\lambda_1 = 577$ nm et $\lambda_2 = 579$ nm) du doublet du mercure.
Est-il observable à travers une lunette afocale de grossissement égal à 10, par un œil dont la limite de résolution (plus petit écart angulaire discernable) est de 1' (une minute d'angle) ?

3) Spectroscope à réseau réflecteur échelette

3.1) Montage goniométrique

Le goniomètre étant l'instrument le mieux adapté à la mesure d'angles, on se placera dans le cas de la figure 1, le réseau réflecteur posé sur la platine.
La lumière, issue d'une lampe spectrale est émise sous forme d'un faisceau parallèle grâce à l'interposition d'un collimateur dont l'orifice d'entrée O est accolé à la lampe.
Une lunette de visée, autocollimatrice, permet l'observation à l'infini du faisceau réfléchi.



N.B. : Les axes Oz et O'z', non dessinés, sont perpendiculaires au plan de figure.

Figure 1

3.1.1) ***Le collimateur***

Confection d'un large faisceau de lumière parallèle, à partir d'une source ponctuelle.

Une lentille L1 en verre d'indice n (figures 1 et 2) possède une face d'entrée sphérique de centre O , de sommet S et de rayon $R = OS = 3$ cm . (Toute donnée N cm sous-entendra N,00 cm).
Sa face de sortie est un ellipsoïde de sommet S' , de révolution autour de l'axe Ox d'un repère orthonormé cartésien (O,x,y,z) et dont la coupe axiale dans le plan xOy a pour équation : $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ où x et y sont exprimés en cm. On a ainsi OS' = 5 cm .

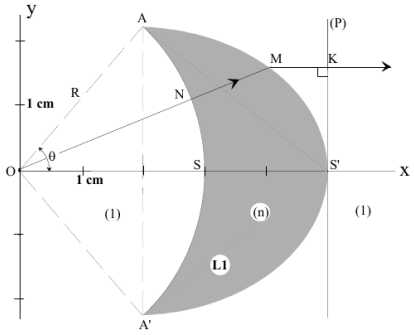


Figure 2

Une source ponctuelle de lumière est située au centre O de la face d'entrée et l'on souhaite que tous les rayons émergents MK soient parallèles à l'axe optique Ox .

3.1.1.a) Déterminer les coordonnées du point A , puis en déduire la valeur $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OA})$ de l'angle d'ouverture du faisceau incident.

3.1.1.b) Exprimer OM^2 puis écrire la longueur OM sous la forme $OM = a\,x + b$.

3.1.1.c) Exprimer la distance MK du point M jusqu'au plan tangent au dioptre de sortie.

3.1.1.d) Sachant que la lentille est placée dans l'air, d'indice supposé égal à celui du vide, exprimer le chemin optique $\mathcal{L}$(OMK) et montrer que, pour une valeur particulière de l'indice n de la lentille, ce chemin optique devient indépendant de la position du point M sur la face de sortie. Préciser la valeur numérique de cet indice et la longueur du chemin optique correspondante.

3.1.1.e) Préciser, dans ce cas, la propriété essentielle du plan (P) et conclure quant à la forme du faisceau émergent.

3.1.1.f) Est-il nécessaire de se limiter aux conditions de Gauss pour atteindre l'objectif fixé initialement ?

3.1.2) ***La lunette***

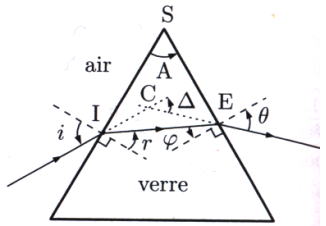
La lunette possède un réticule fixe R , un oculaire assimilable à une lentille mobile L3 et un objectif à tirage réglable, assimilable à une lentille mobile L2 .
Initialement, la position de la lentille L1 reste à ajuster par rapport à l'orifice O pour obtenir une collimation à l'infini. En outre, on veut rendre la lunette afocale pour une visée à l'infini.
Pour effectuer ces réglages, on dispose d'un miroir plan auxiliaire que l'on peut, lorsque nécessaire, poser sur le plateau du goniomètre.
Décrire le processus de mise au point en précisant l'ordre chronologique du déplacement des trois lentilles.

3.2) Rediffusion d'une onde plane par des récepteurs ponctuels

Considérons (figure 3) une onde plane se propageant dans le vide avec la vitesse c dans le sens d'un vecteur unitaire $\vec{u}_i$ et admettons qu'à réception par deux points matériels O' et M , cette onde soit déviée instantanément, sans modification de fréquence, dans une direction de vecteur unitaire $\vec{u}_r$ (figure 4). Dans tout ce qui suit, on pourra faire abstraction du déphasage au contact des points considérés en le supposant identique en chacun de ces points.

2. Spectroscope à prisme

2.1 On représente ci-contre la marche d'un rayon lumineux à travers le prisme. Le rayon incident doit provenir du côté base du prisme afin d'éviter toute réflexion totale lors de la traversée du second dioptre verre/air. L'application des lois de Snell-Descartes aux points I et E donne



$$\boxed{\begin{cases} \sin i = n \sin r \\ \sin\theta = n \sin\varphi \end{cases}}$$

Par ailleurs, dans le triangle SEI, on a

$$A + (90° - r) + (90° - \varphi) = 180° \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A = r + \varphi}$$

Enfin, l'angle de déviation Δ, non utilisé dans la suite, vérifie

$$\boxed{\Delta = i + \theta - A}$$

En utilisant les trois premières formules du prisme établies ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} \sin\theta &= n \sin(A - r) \\ &= n(\sin A \cos r - \cos A \sin r) \\ &= n \sin A \sqrt{1 - \sin^2 r} - \cos A \sin i \qquad \text{car } r \in [0,\pi/2] \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\sin\theta = \sin A \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos A \sin i}$$

2.2 L'indice optique du verre est donné par la formule de Cauchy,

$$\boxed{n(\lambda = 578 \text{ nm}) = 1{,}65}$$

En utilisant ce résultat, ainsi que $A = i = 60°$, dans la formule donnant $\sin\theta$ établie à la fin de la question précédente, on obtient

$$\sin\theta = 0{,}783$$

soit

$$\boxed{\theta = 51{,}6°}$$

La dispersion angulaire $D_a = d\theta/d\lambda$ représente la propension du prisme à séparer les composantes spectrales du rayon lumineux incident. Au voisinage de $\lambda = 578$ nm, cette quantité vaut

$$\boxed{D_a = -10{,}1 \ °/\mu m}$$

> Attention, la valeur de D_a obtenue par substitution est en unités S.I., donc en rad/μm. Il faut convertir les radians en degrés pour obtenir la valeur demandée.

Les deux raies du doublet jaune du mercure ayant des longueurs d'onde voisines, on peut estimer leur écart angulaire en sortie du prisme par un développement limité

$$\theta(\lambda_1) - \theta(\lambda_2) \approx D_a(\lambda_1 - \lambda_2)$$

Application numérique : $\boxed{\theta(\lambda_1) - \theta(\lambda_2) = 1{,}21'}$

Cette séparation est difficilement observable à l'œil nu (limite de résolution). L'utilisation d'une lunette afocale de grossissement 10 permet de ramener cette séparation angulaire à 12,1′, ce qui est tout à fait observable.

3. Spectroscope à réseau réflecteur échelette

3.1.1.a Le point A est l'intersection supérieure des faces d'entrée et de sortie. Ses coordonnées (x_A, y_A) satisfont donc au système d'équations

$$\begin{cases} {x_A}^2 + {y_A}^2 = 9 \\ \dfrac{(x_A - 2)^2}{9} + \dfrac{{y_A}^2}{5} = 1 \end{cases}$$

où x_A et y_A sont tacitement exprimés en centimètres. En injectant la première équation dans la seconde, on obtient

$$\frac{(x_A - 2)^2}{9} + \frac{9 - {x_A}^2}{5} = 1$$

qui, après développement du carré et réarrangement des termes, devient

$${x_A}^2 + 5\,x_A - 14 = 0$$

Cette équation du second degré a pour seule solution positive

$$\boxed{x_A = 2 \text{ cm}}$$

En utilisant par ailleurs l'équation de la lentille sphérique, on trouve

$$\boxed{y_A = +\sqrt{9 - {x_A}^2} = 2{,}24 \text{ cm}}$$

Ceci permet d'évaluer l'ouverture angulaire $\theta = (Ox, \overrightarrow{OA})$ du faisceau incident :

$$\boxed{\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y_A}{x_A}\right) = 48{,}2°}$$

3.1.1.b Le point M est l'intersection entre un rayon lumineux issu de O et le dioptre de sortie. Notons qu'un tel rayon n'est pas dévié par le dioptre d'entrée (sphérique), puisque O est justement son centre de courbure. Ainsi, la distance OM étant fixée, les coordonnées (x, y) de M vérifient le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \text{OM}^2 \\ \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1 \end{cases}$$

> On remarque ici une omission regrettable de l'énoncé : la notation x, qui désigne bien l'abscisse du point M, n'est définie nulle part !

Éliminons y en injectant la seconde équation dans la première, puis simplifions :

$$\text{OM}^2 = 5 + x^2 - \frac{5}{9}(x-2)^2 = \frac{4}{9}\left[x^2 + 5\,x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] = \frac{4}{9}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$$

d'où finalement $\boxed{\text{OM} = \dfrac{2\,x + 5}{3}}$

> Il est recommandé de tester l'exactitude du calcul sur un cas limite. Par exemple, l'intersection entre un rayon *horizontal* et le dioptre de sortie est le sommet $(x = 5, y = 0)$ de ce dernier. On trouve dans ce cas $\text{OM} = (2 \times 5 + 5)/3 = 5 = x$, conformément à ce qui est attendu.

3.1.1.c Si l'on présuppose que la portion MK du rayon lumineux est parallèle à l'axe optique, on voit immédiatement que

$$\boxed{\text{MK} = 5 - x}$$

3.1.1.d Le chemin optique $\mathscr{L}(\text{OMK})$ se décompose en la somme de trois termes

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(\text{OMK}) &= \mathscr{L}(\text{ON}) + \mathscr{L}(\text{NM}) + \mathscr{L}(\text{MK}) \\ &= \text{ON} + n\,\text{NM} + \text{MK} \\ &= \text{ON} + n\,(\text{OM} - \text{ON}) + \text{MK} \\ &= 3 + n\left(\frac{2\,x+5}{3} - 3\right) + 5 - x \\ \mathscr{L}(\text{OMK}) &= \frac{2n-3}{3}\,x + 8 - \frac{4n}{3} \end{aligned}$$

Ce chemin est indépendant du point M si son expression ne dépend pas de x. Cette condition est réalisée si et seulement si $2n - 3 = 0$, soit

$$\boxed{n = 1{,}5}$$

Et dans ce cas, le chemin optique vaut

$$\boxed{\mathscr{L}(\text{OMK}) = 6 \text{ cm}}$$

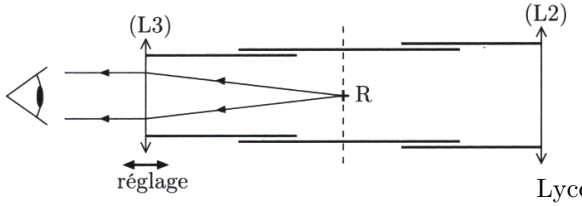
3.1.1.e Quand la condition $n = 1{,}5$ est satisfaite, tous les rayons issus de O sont **en phase** lorsqu'ils atteignent le plan P. Celui-ci est donc un **plan d'onde**, orthogonal à tous les rayons qui le traversent (théorème de Malus). Par conséquent, le faisceau émergent est intégralement **parallèle à l'axe optique**.

3.1.1.f Si $n = 1{,}5$, alors le point source O est **rigoureusement** conjugué à l'infini, il n'est donc **pas nécessaire de se restreindre aux conditions de Gauss** pour atteindre l'objectif fixé initialement.

> La conjugaison rigoureuse justifie l'intérêt du collimateur par rapport à une lentille quelconque. En effet, ne pas se restreindre aux conditions de Gauss permet une bien plus grande ouverture pour le faisceau incident, donc beaucoup plus de lumière dans le dispositif optique.

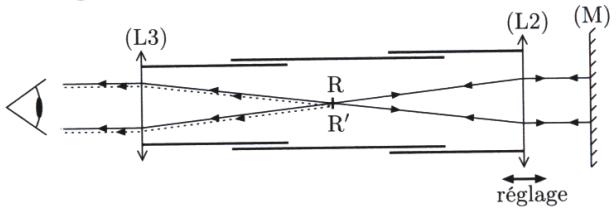
3.1.2 La mise au point consiste en les trois étapes suivantes.

1. **Réglage de l'oculaire**. Régler la position de la lentille (L3) de sorte à voir nettement le réticule R à travers celle-ci, sans accommoder.



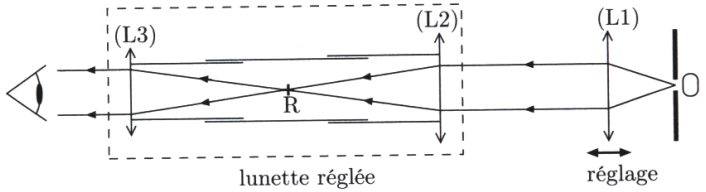
> Cette étape de la mise au point dépend de la vue de l'expérimentateur qui utilise le goniomètre. Il s'agit d'un réglage de confort qui n'affecte en rien les mesures réalisées par la suite.

2. **Réglage de l'objectif** par la méthode d'autocollimation. Placer un miroir (M) en sortie de la lunette (derrière l'objectif). On peut alors observer, en plus du réticule R, son image R′ formée par le système (L2) + (M). Régler la position de (L2) jusqu'à voir R′ aussi nettement que R à travers (L3). À ce stade, la lunette est réglée à l'infini pour la vue de l'expérimentateur.



> La lunette joue ici plusieurs rôles. D'une part, en tant que dispositif optique, il s'agit d'un système afocal de grossissement supérieur à 1, qui accroît donc la résolution du montage. D'autre part, en tant que pièce mobile du goniomètre, c'est sa position qui est utilisée pour repérer les différents rayons lumineux séparés par le réseau.

3. **Réglage du collimateur**. Viser le collimateur avec la lunette préalablement réglée, et déplacer la lentille (L1) jusqu'à observer la source lumineuse nettement sans accommoder. La source lumineuse se situe alors dans le plan focal objet de la lentille (L1).



3.2 Avant la réflexion, le rayon perpendiculaire à (P_i) et passant par M parcourt, par rapport au rayon passant par O′, une distance supplémentaire égale à

$$H_iM = O'M\cos\theta_i = \overrightarrow{O'M}\cdot\vec{u_i}$$

Après la réflexion, c'est le rayon passant par O′ qui voit son trajet allongé pour rejoindre le plan (P_i), d'une distance

$$O'H_r = O'M\cos\theta_r = \overrightarrow{O'M}\cdot\vec{u_r}$$

En prenant en compte ces deux effets, le retard de l'onde rediffusée par M sur l'onde rediffusée par O′ s'écrit

$$\tau = \tau_M - \tau_{O'} = \frac{H_iM - O'H_r}{c}$$

puisque l'onde se propage à la célérité c. Donc, d'après les résultats précédents,

$$\boxed{\tau = \frac{1}{c}\overrightarrow{O'M}\cdot(\vec{u_i}-\vec{u_r})}$$

2 Analyse d'un mirage

On cherche à expliquer dans cette partie le phénomène de mirage qui se produit au-dessus d'une route goudronnée fortement chauffée par le soleil. On traitera la propagation de la lumière dans le cadre de l'optique géométrique. On modélise l'air par un milieu dont l'indice optique $n(y)$ dépend de l'altitude y au-dessus du sol (qui correspond à la surface $y = 0$), comme schématisé sur la figure 1. On suppose que $n(y) = n_0$ pour $y \geq l$, et que n varie de manière monotone et continue de n_s pour $y = 0$ à n_0 pour $y = l$. L'œil d'un observateur est placé au point M à la hauteur h au-dessus de la couche d'indice variable, i.e. en $(x_M, y_M) = (0, l + h)$.

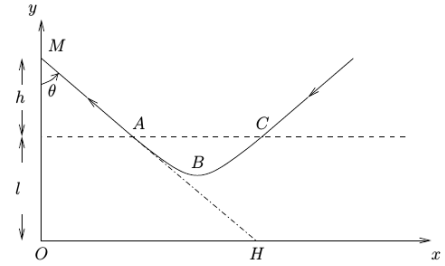


FIG. 1: Trajectoire d'un rayon lumineux dans un mirage.

Q21. On considère un rayon de trajectoire $y(x)$, arrivant en M avec un angle θ par rapport à la verticale. Dans la suite on paramétrisera le rayon par θ, ou de manière équivalente par la pente $\beta = -y'(x = 0)$ du rayon en M. Exprimer β en fonction de θ.

Q22. Quelle est la trajectoire du rayon dans la zone $y \geq l$? En déduire les coordonnées (x_A, y_A) du point A où le rayon émerge de la couche d'indice variable, en fonction de h, β et l.

Q23. On note $i(y)$ l'angle (positif) que fait le rayon avec la verticale à l'altitude y. En utilisant la loi de Descartes, établir une relation entre $n(y)$, $i(y)$, n_0, et le paramètre θ du rayon.

Q23. On note $i(y)$ l'angle (positif) que fait le rayon avec la verticale à l'altitude y. En utilisant la loi de Descartes, établir une relation entre $n(y)$, $i(y)$, n_0, et le paramètre θ du rayon.

Q24. D'après le schéma de la figure 1, quel est le sens de variation de $n(y)$ sur l'intervalle $[0, l]$? En assimilant l'air à un mélange idéal de gaz parfaits et en négligeant les variations de pression entre $y = 0$ et $y = l$, comparer les températures T_s (au niveau du sol) et T_0 (en $y = l$). On pourra s'appuyer sur la réponse à la question 18. Commenter le signe de $T_s - T_0$.

Q25. Que vaut l'indice $n_m = n(y_B)$ au point B de rebroussement du rayon ? Exprimer les paramètres θ_l et β_l du rayon limite tel que $y_B = 0$, en fonction de n_0 et n_s.

Q26. Faire un schéma de la trajectoire d'un rayon avec $\theta < \theta_l$ (ou de manière équivalente $\beta > \beta_l$).

Q27. Le cerveau de l'observateur interprète le rayon reçu en supposant le milieu homogène, et perçoit donc l'image du ciel comme si elle était sur le sol au point H de la figure 1. Quelle est, en fonction de l, h, n_s et n_0, la distance minimale OH à laquelle un mirage peut être observé ?

Q28. Faire l'application numérique pour un observateur mesurant 1m70, en supposant un écart de température $|T_0 - T_s|$ de 10°C, et en utilisant les valeurs des indices calculées à la question 19. Commenter sur le caractère relativement exceptionnel des conditions nécessaires à l'observation

d'un mirage.

Q29. Ré-écrire la relation de la question 23 en éliminant $i(y)$ au profit de $y'(x)$.

On suppose dans la suite de cette partie que $n^2(y)$ est une fonction affine de l'altitude dans la couche $0 \leq y \leq l$, soit $n^2(y) = n_s^2 + a\,y$ avec $a = \frac{n_0^2 - n_s^2}{l}$.

Q30. Donner la valeur de $y''(x)$ pour $x \in [x_A, x_C]$, en fonction de a, n_0 et θ. Quel type de trajectoire le rayon parcourt-il entre les points C et A ?

Q31. Exprimer la valeur de $y''(x)$ en faisant apparaître n_m, l'indice au point B. Pour simplifier la suite des calculs on remplacera ici n_m par 1. Cette approximation vous semble-t-elle légitime ?

Q32. En déduire l'expression de $y(x)$ pour $x \in [x_A, x_C]$ en fonction de x, a, h, l et β.

Q33. Quelles sont les coordonnées (x_B, y_B) du point de rebroussement, en fonction de a, h, l et β ?

Q34. En déduire l'expression du paramètre limite β_l dans le cadre de cette approximation.

Q35. Donner les coordonnées (x_C, y_C) du point d'entrée du rayon dans la couche d'indice variable. Montrer que pour $x \geq x_C$ la trajectoire du rayon est $y(x) = \beta x + l - h - 4\frac{\beta^2}{a}$.

ULM - PC - 2011

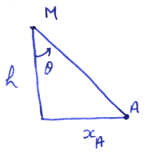
Analyse d'un mirage

Q21

$|\tan\theta| = \left|\frac{dn}{dy}\right|$ ici $\frac{dy}{dn} < 0$ et $\tan\theta > 0$

donc $\frac{dy}{dn} = -\frac{1}{\tan\theta}$ $\boxed{\beta = \frac{1}{\tan\theta}}$

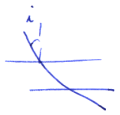
Q22 $y \geqslant l$, l'indice est constant, la trajectoire est rectiligne



$\tan\theta = \frac{x_A}{h}$

$\boxed{x_A = h\tan\theta = \frac{h}{\beta} \qquad y_A = l}$

Q23



Descartes $n(y)\sin i(y) = cte$ à chaque interface $= n_0 \sin\theta$

$\boxed{n(y)\sin i(y) = n_0 \sin\theta}$

Q24 - Le gradient d'indice est orienté vers le haut

$n \downarrow$ lorsque $y \uparrow$, n est croissante

- comme $n(T)$ est décroissante la température est supérieure en $y = 0$ qu'en $y > 0$.

$T_S > T_0$

(2)

Q25 Au point B, il y a une "réflexion" totale

donc $n(B)\sin i(B) = n_0 \sin\theta$ (avec $i(B) = \pi/2$)

$\boxed{n_m = n(y_B) = n_0 \sin\theta}$

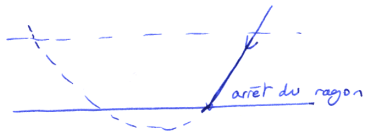
* si B est en $y=0$, alors $n_m = n_S = n_0 \sin\theta \Rightarrow \theta_\ell = \arcsin\frac{n_S}{n_0}$

$\boxed{\sin\theta_\ell = \frac{n_S}{n_0}}$

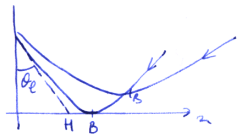
et $\beta_\ell = \frac{1}{\tan\theta_\ell} = \frac{\cos\theta_\ell}{\sin\theta_\ell} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta_\ell}}{\sin\theta_\ell}$

$$\beta_\ell = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta_\ell} - 1} = \boxed{\sqrt{\frac{n_0^2}{n_S^2} - 1}}$$

Q26 Si $\theta < \theta_\ell$, on "traverserait" $y_B < 0$ ce qui est impossible



Q27



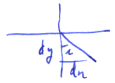
* (OH) va être minimale lorsque B va être sur l'axe donc pour l'angle θ_ℓ
* $\tan\theta_\ell = \frac{OH_{min}}{h+\ell} \rightarrow OH_{min} = (h+\ell)\tan\theta_\ell$

$$\boxed{OH_{min} = \frac{h+\ell}{\beta_\ell}}$$

Q28 On trouve $\beta_\ell = 4{,}24\ 10^{-3}$ et $OH_{min} \simeq 400$ m

(3)

Q29 On utilise l'expression de $\sin i(y) = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$



$n(y)\sin i(y) = n_0 \sin\theta = \frac{n(y)}{\sqrt{1+y'^2}}$

$1+y'^2 = \frac{n^2}{n_0^2\sin^2\theta}$ $\quad y' = \sqrt{\frac{n^2}{n_0^2\sin^2\theta} - 1}$

On choisit le signe $\ominus$ car $y(x)$ est décroissante

Q30 $\left(n(y) = n_S + \frac{y}{\ell}(n_0 - n_S)\right)$ - Ici on pose $n^2 = n_S^2 + ay$

donc $y' = -\sqrt{\frac{n_S^2 + ay}{n_0^2\sin^2\theta} - 1}$

On dérive le carré :

$2y'y'' = \frac{a}{n_S^2\sin^2\theta}y'$ donc $y'' = \frac{a}{2n_0^2\sin^2\theta} = cte > 0$

La dérivée seconde est une constante positive $\Rightarrow$ la traj. est une parabole

Q31 $y'' = \frac{a}{2n_m^2} \sim \frac{a}{2}$ - Les indices de l'air, chaud ou froid sont très proches de 1.

Q32 $y'' = a/2$

$y' = \frac{a}{2}(x - x_A) - \beta = \frac{1}{2}ax - \frac{ah}{2\beta} - \beta$

donc $\boxed{y = \frac{1}{4}a(x-x_A)^2 - \beta(x-x_A) + \ell}$

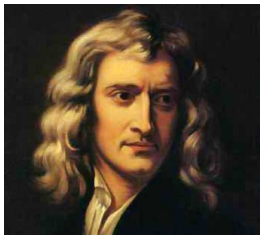
Q33 On trouve le point de rebroussement en supposant que $y'(x_B) = 0$

soit $x_B = \frac{h}{\beta} + \frac{2\beta}{a}$ $\quad y_B = \ell - \beta^2/a$

Q34 $y_B \geq 0 \Rightarrow \beta < \beta_\ell = \sqrt{a\ell} = (n_0^2 - n_S^2)^{1/2}$ - Très voisin du résultat de la question Q25 avec $n_S \simeq 1$

Partie C : Mécanique

Chapitre C0 : Mécanique du point

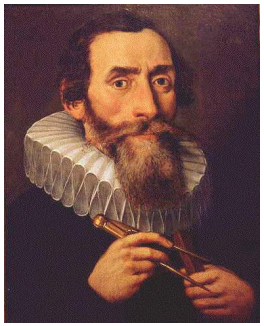


Newton (1643 - 1727)

Partie C : Mécanique

C-0 : Mécanique du point

C-1 : Gravitation
C-2 : Mouvement dans E et B
C-3 : Chang^{t} de Référentiel
C-4 : Dynamique
C-5 : Vehicule à roues



Kepler (1571-1630)

I Relation fondamentale de la dynamique

1 Vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées

✗ Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

✗ Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

✗ Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

2 Exemples de forces

✗ Force élastique

✗ La force élastique est proportionnelle à l'allongement du ressort : il faut exprimer la longueur du ressort ℓ et retrancher la longueur à vide ℓ_0

✗ Le vecteur $\overrightarrow{u}_x$ est un vecteur unitaire **dans le sens de l'allongement** du ressort.

✗ On détermine le sens de la force en exploitant le fait que la force est attractive lorsque $\ell > \ell_0$.

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -k\left(\ell - \ell_0\right)\overrightarrow{u_x}}$$

1. Forces de liaison ou réaction

   La force de réaction d'un solide sur un autre a deux composantes $\boxed{\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_T + \overrightarrow{R}_N}$

   — $\overrightarrow{R}_N$ est la réaction normale au support
   — $\overrightarrow{R}_T$ est tangente à la trajectoire ; c'est une force de frottement solide, considérée en général comme constante. Cette force est nulle si on néglige les frottements.
   — Pour un solide à l'équilibre : situation statique $\left\|\overrightarrow{R}_T\right\| \leqslant f_0\left\|\overrightarrow{R}_N\right\|$, f_0 est le coefficient de frottement statique.
   — En mouvement de glissement : situation dynamique ,f est le coefficient de frottement dynamique.

   $$\boxed{\left\|\overrightarrow{R}_T\right\| = f\left\|\overrightarrow{R}_N\right\|}$$

2. Force de frottement fluide

   C'est une force de frottement proportionnelle à la vitesse

   $$\boxed{\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}}$$

3. Tension d'un fil

   Lorsqu'une masse est reliée à un fil tendu, la force qu'exerce le fil sur la masse est la tension du fil $\overrightarrow{T}$. Cette force est colinéaire à la direction du fil.

3 Relation fondamentale de la dynamique

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen, on a la relation suivante :

$$\boxed{m\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'} = \sum\overrightarrow{F}}$$

On obtient les équations du mouvement en projetant la relation fondamentale de la dynamique sur les axes de projection.

II Théorème de l'énergie mécanique

1 Travail d'une force

Le travail élémentaire d'une force $\overrightarrow{F}$ est $\delta W = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl}$. Entre deux points A et B, le travail de cette force est

$$\boxed{W = \int_A^B \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl}}$$

✗ Si la trajectoire entre A et B est connue, alors on peut facilement exprimer $\overrightarrow{dl}$, qui doit être un vecteur élémentaire colinéaire à la trajectoire.

Exemples : trajectoire rectiligne suivant $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{dl} = dx\overrightarrow{u_x}$; trajactoire circulaire autour de (Oz), alors en coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{dl} = \rho d\theta \overrightarrow{u_\theta}$.

✗ Si la trajectoire est inconnue, on choisit le système de coordonnées le mieux adapté et on exprime $\overrightarrow{dl}$ sous la forme la plus générale :
Exemple : coordonnées spériques : $\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r(\sin\theta)\, d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$

2 Puissance d'une force

Pendant le durée dt, le point matériel se déplace de $\overrightarrow{dl}$ sur une trajectoire, on a la relation : $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{v}dt$.

La puissance instantannée d'une force est par définition la quantité $P = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}$. On a donc :

$$\boxed{\delta W = Pdt}$$

3 Force conservative

✗ Dans certains cas particulier le travail est une différentielle exacte : δW peut s'écrire comme la différentielle d'une fonction.

$$\delta W = -dE_p$$

On dit alors que la force $\overrightarrow{F}$ dérive de l'énergie potentielle E_p. On a également les deux relations suivantes :

$$\boxed{\delta W = -dE_p \iff \overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p) \iff \int_A^B \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} = E_p(A) - E_p(B)}$$

Corrolaire : le long d'un contour fermé, le travail d'une force conservative est nul :

$$\text{si } \overrightarrow{F} \text{ est conservative alors } \oint \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} = 0$$

Exemples : $\overrightarrow{F_1}(x,y) = 3xy\overrightarrow{u_x} + y^2\overrightarrow{u_y}$, $\delta W_1 = 3xydx + y^2dy$ ne peut pas s'écrire comme la différentielle d'une fonction.
$\overrightarrow{F_2}(x,y) = 3x^2y^3\overrightarrow{u_x} + 3x^3y^2\overrightarrow{u_y}$, $\delta W = 3x^2y^3dx + 3x^3y^2dy = d\left(x^3y^3\right) = -d\left(-x^3y^3 + cte\right)$.
Une énergie potentielle est définie à une constante près.

4 Travail des forces d'inertie

Dans un référentiel non galiléen R', il faut calculer le travail des forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis.

✗ $\delta W_{ie} = -m\overrightarrow{a_e}.\overrightarrow{dl}$. Il faut effectuer le calcul pour voir si la force est conservative.

✗ $\delta W_{iC} = -m\overrightarrow{a_C}.\overrightarrow{dl} = -m\left(2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}}(M)\right).\overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}}(M)\, dt = 0$. La force de Coriolis ne travaille pas.

5 Théorème de l'énergie cinétique

A partir de la RFD, on démontre que la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces appliquées au point matériel.

$$dE_c = \sum \delta W \iff \Delta E_c = \Delta W$$

6 Théorème de l'énergie mécanique

Les forces peuvent se diviser en deux catégories, les forces conservatives $\delta W = -dE_p$ et le forces non-conservatives (NC). En rassemblant les termes, on obtient :

$$d\left(E_c + \sum E_p\right) = \sum_{NC} \delta W \iff \boxed{\Delta\left(E_c + \sum E_p\right) = \Delta W_{NC}}$$

L'énergie mécanique $E_m = E_c + \sum E_p$.

III Théorème du moment cinétique

Ce théorème se démontre à partir de la relation fondamentale de la dynamique et donne rapidement une équation différentielle pour les problèmes dans lesquels il y a une rotation autour d'une axe. On peut l'écrire sous forme vectorielle ou scalaire.

1 Forme vectorielle

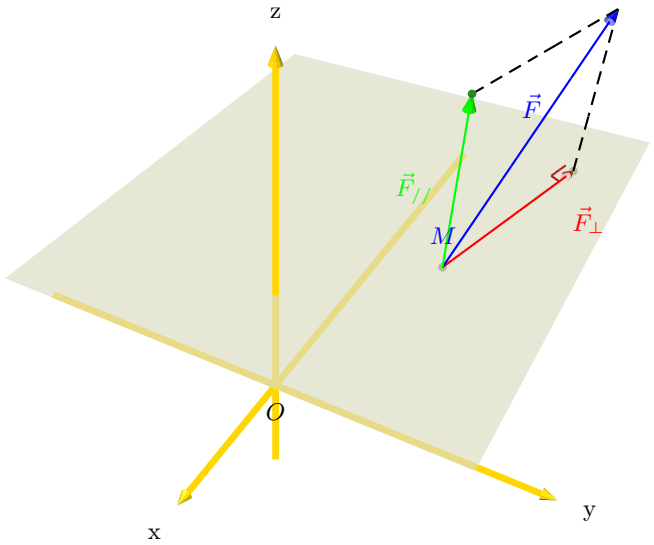
— Le **moment cinétique** par rapport à O, dans $\mathcal{R}$, d'un point matériel est

$$\boxed{\overrightarrow{L_{O,\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M)}$$

— Le **moment en O d'une force** est $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$

— Si O est un point fixe, on a le TMC

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_{o,\mathcal{R}}}(M)}{dt} = \sum_{forces} \overrightarrow{\mathcal{M}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{Fie} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{FiC}}$$



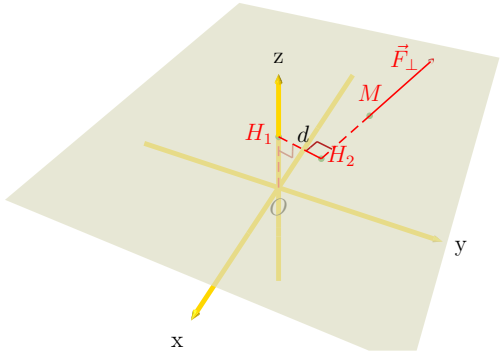
2 Forme scalaire

Pour une rotation autour d'un axe fixe passant par (Oz). L'orientation de $\overrightarrow{u_z}$ donne l'orientation du plan (Oxy)

— Le moment cinétique sur l'axe : $L_z = \overrightarrow{L_{o,\mathcal{R}}}(M).\overrightarrow{u_z} = \left[\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M)\right].\overrightarrow{u_z}$

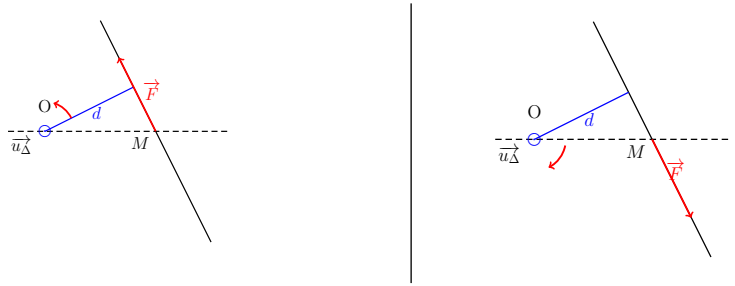
— Le moment par rapport à l'axe des forces : $\mathcal{M}_z = \overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{u_z}$. $\mathcal{M}_z$ peut se calculer facilement avec la méthode suivante :

— $|\mathcal{M}_z|$ est (l'intensité de la force) $\times$ (bras de levier).



où la distance $d = \|\overrightarrow{H_1H_2}\|$ entre l'axe de rotation (Δ) et la droite support $(\mathscr{D})$ de la force $\overrightarrow{F}_{\perp}$ est appelée **bras de levier**.

— Signe positif "si la force fait tourner dans le sens positif", négatif sinon.



— Dans ces conditions :

$$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = \sum_{forces} \mathcal{M}_z + \mathcal{M}_{zFie} + \mathcal{M}_{zFiC}}$$

3 Exemples

M en rotation à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe (Oz), on a $\overrightarrow{L_{o,\mathcal{R}}}(M) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$, soit $\boxed{L_z = mr^2\dot{\theta}}$.

Extrait de concours - Mines PC 2013

AUTOUR D'UN DRAGSTER À RÉACTION

Il existe des courses automobiles pour lesquelles le but est de parcourir le plus rapidement quelques centaines de mètres. Pour cela, des engins surpuissants appelés dragsters sont fabriqués par des passionnés, de façon « artisanale » au sens où il ne s'agit pas de modèles de série. Ce problème aborde certaines problématiques que l'on peut rencontrer lors de la fabrication de tels engins. Pour les applications numériques on utlisera 3 chiffres significatifs, le module de l'accélération de la pesanteur sera $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires $\widehat{e_x}$ ou d'une flèche dans le cas général $\vec{v}$. La dérivée totale par rapport au temps sera notée par un point : $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes.

I. — Mesure de l'accélération par un système embarqué

Pour mesurer l'accélération du dragster, le choix se porte sur un MEMS (Micro-Electro-Mechanical-System). Il s'agit d'une famille technologique très utilisée par l'industrie automobile (notamment pour l'airbag) mais aussi par les particuliers car on les retrouve dans certaines manettes de consoles de jeu. La taille de ces capteurs est inférieure à celle d'une pièce de monnaie !

I.A. — Analyse du mouvement mécanique

On modélise le fonctionnement du MEMS par le système représenté sur la figure 1. Seule la masse mobile de masse m, cube d'arête b, de centre de gravité O peut se déplacer. Le reste du dispositif, appelé bâti, est fixé au dragster et demeure solidaire de celui-ci.

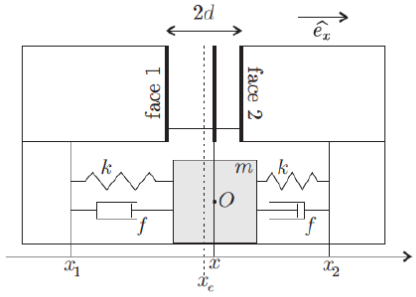


FIGURE 1 – Modélisation mécanique 1D du MEMS

Le mouvement, sans frottements, ne peut se faire que selon l'axe des x. La masse est liée à deux ressorts de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, mais aussi à deux amortisseurs induisant une force proportionnelle à la vitesse relative de la masse par rapport au bâti avec le coefficient de frottement f. On ne se préoccupe pas de la présence éventuelle d'autres forces notament électrostatiques. On note $x_e = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, la position du centre de gravité O de la masse m lorsque celle-ci et le dragster sont immobiles, par ailleurs on note x la position de O à un instant t quelconque dans le référentiel lié au sol. On suppose que les ressorts n'ont pas d'allongement à l'équilibre. On introduira les quantités $L = x - x_e$, $\omega_o = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et $\mu = \sqrt{\frac{f^2}{2km}}$. L'accéléromètre est fixé sur le châssis de la voiture qui se déplace en ligne droite. La direction de déplacement du dragster est la même que celle de la masse et de l'accéléromètre.

❑ **1** — Exprimer la résultante $\vec{F}_r$ des forces de tension des ressorts appliquée à la masse en fonction de k, L et du vecteur $\widehat{e}_x$. Exprimer la résultante $\vec{F}_a$ des forces d'amortissement appliquée à la masse en fonction de f, $\dot{L}$ et du vecteur $\widehat{e}_x$.

❑ **2** — En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié au sol, déterminer l'équation différentielle vérifiée par L et décrivant le mouvement de la masse m lorsque le dragster possède une accélération de module a dans la direction des $x > 0$.

❑ **3** — Afin d'étudier la réponse mécanique globale de ce système, on s'intéresse au cas particulier d'une accélération sinusoïdale de pulsation ω, les représentations complexes des grandeurs physiques L et a sont notées $\underline{a} = A_m \mathrm{e}^{j\omega t}$ et $\underline{L} = \underline{L}_m \mathrm{e}^{j\omega t}$; calculer la transmittance $\underline{L}/\underline{a}$ de ce système en fonction de $\xi = \frac{\omega}{\omega_o}$, μ et $G = \omega_o^{-2}$. En déduire le régime de pulsation dans lequel une mesure de L permet de déterminer l'accélération subie par le système. On justifiera le raisonnement.

Réponse :

1. *Pour le ressort de droite (2), de longueur $\ell_2 = x_2 - x - \frac{b}{2}$ donc d'allongement $\Delta\ell_2 = \ell_2 - \ell_0$, la force exercée sur le mobile est $\overrightarrow{F}_2 = +k\Delta\ell_2 \overrightarrow{e}x$ (force exercée sur l'extrémité gauche du ressort) ou encore $\overrightarrow{F}_2 = -k\left(x - x_2 - \frac{b}{2} + \ell_0\right)\overrightarrow{e}x$.*
   Le même raisonnement conduit à exprimer la force exercée par le ressort de gauche (1)

$$\overrightarrow{F}_1 = -k\Delta\ell_1 \overrightarrow{e}x = -k\left(x - x_1 - \frac{b}{2} + \ell_0\right)\overrightarrow{e}x$$

   donc $\overrightarrow{F}_r = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2$ s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{F}_r = -2kL\overrightarrow{e}x}$$

   De même, la force exercée par l'amortisseur de droite ne dépend que de la vitesse relative de ses extrémités, $\frac{\mathrm{d}\ell_2}{\mathrm{d}t} = -\dot{x} = -\dot{L}$, avec $\overrightarrow{F}'_2 = -f\dot{L}\overrightarrow{e}x$; on a de même $\vec{F}'_1 = +f\frac{\mathrm{d}\ell_1}{\mathrm{d}t} = -f\dot{L}\overrightarrow{e}x$ donc $\vec{F}_a = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2$ s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{F}_a = -2h\dot{L}\overrightarrow{e}x}$$

2. *Le mobile est soumis, en plus des forces $\overrightarrow{F}_r$ et $\overrightarrow{F}_a$, à des forces verticales (le poids du système et les réactions du support, sans frottement) ; enfin, le référentiel d'étude est galiléen et l'accélération du point O y est donnée par la loi de composition,*

$$\overrightarrow{a}(O/\text{sol}) = \overrightarrow{a}(O/\text{bati}) + \overrightarrow{a}(\text{bati/sol}) = (\ddot{x} + a)\overrightarrow{e}x$$

   (mouvement de translation) avec $\ddot{x} = \ddot{L}$.
   Finalement, le théorème de la résultante dynamique appliqué en projection sur l'axe (Ox) fournit $m\left(\ddot{L} + a\right) = -2kL - 2f\dot{L}$.

Après division par m, on remarque que $\frac{2k}{m} = \omega_0^2$ et $f = \mu\sqrt{2km}$ donc $\frac{2f}{m} = 2\mu\omega_0$ donc enfin

$$\boxed{\frac{d^2L}{dt^2} + 2\mu\omega_0\frac{dL}{dt} + \omega_0^2 L(t) = -a(t)}$$

3. *Passant en notations complexes, l'équation précédente se recopie $\left(-\omega^2 + 2\jmath\mu\omega\omega_0 + \omega_0^2\right)\underline{L} = -\underline{a}$ qui prend aussi la forme*

$$\boxed{\frac{\underline{L}}{\underline{a}} = -\frac{G}{1 + 2\jmath\mu\xi - \xi^2}}$$

On reconnaît ici un filtre passe-bas du second-ordre. Un mesure de $\underline{a}$ impose pour la grandeur $\underline{L}$ une expression indépendante de la fréquence (donc de la forme effective de $a(t)$, qui n'est sûrement pas sinusoïdale) et proportionnelle à $\underline{a}$ (mesure linéaire), ce qu'on réalise à très basse fréquence ; il faut réaliser la double condition $1 \gg \xi^2$ et $1 \gg 2\mu\xi$ donc $\boxed{\omega \ll \omega_0 \cdot \min\left(1, \frac{1}{\mu}\right)}$ pour obtenir

$$\boxed{L(t) = -\frac{a(t)}{\omega_0^2}}$$

Pour une mesure performante, on peut de plus imposer la diminution la plus rapide possible des transitoires, ce qui impose de se placer en régime proche du régime critique ; l'équation caractéristique de l'équation différentielle qui régit les oscillations libres est $x^2 + 2\mu\omega_0 x + \omega_0^2$, de discriminant réduit $\Delta' = \left(\mu^2 - 1\right)\omega_0^2$. Un régime quasi-critique impose donc la relation supplémentaire $\boxed{\mu \simeq 1}$ ce qui permet d'ailleurs de simplifier la condition fréquentielle en $\boxed{\omega_0 \gg \omega}$ pour toutes les pulsations des diverses composantes de Fourier de l'accélération $a(t)$ à mesurer.

Extrait de concours - Mines

Attention erreur de signe dans l'introduction ; le TMD est soumis à la force de rappel élastique $f_1 = -k_1 u$.

Attention erreur d'énoncé (question 2) : $\beta = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{k_1}{\alpha k}}$. De plus $\underline{H_1}$ s'exprime en fonction de β, de z, et de η_1.

La minimisation des oscillations provoquées par le vent est une difficulté à laquelle sont confrontés les concepteurs de structures de génie civil (ponts, viaducs, antennes …). L'objet de ce problème est l'étude d'un dispositif efficace pour cette minimisation, le « Tuned Mass Damper » (TMD). C'est un oscillateur accordé et amorti, généralement dissimulé au sommet de la structure, et couplé au mouvement de cette dernière, de telle manière que, idéalement, il oscille en opposition de phase avec elle et « détourne » ainsi de l'énergie. Dans un repère galiléen, le mouvement du sommet S de la tour et celui du TMD s'effectuent selon une direction horizontale fixe. On note $x(t)$ l'élongation linéaire de S et $u(t)$ celle du TMD par rapport à la tour. À l'équilibre mécanique, $x(t) = u(t) = 0$.

Le système {tour, TMD} est ainsi modélisé (Fig. 1) par deux oscillateurs unidimensionnels couplés mis en mouvement par la force extérieure $f_0(t)$. Le premier oscillateur (la tour) est modélisé par une masse m soumise à la force de rappel élastique $\mathrm{f}_{\text{élas.}} = -kx$ et à la force de frottement fluide $\varphi = -h\dot{x}$. Le second oscillateur (le TMD) est modélisé par une masse m_1 soumise à la force de rappel élastique $\mathrm{f}_1 = k_1 u$ et à la force de frottement fluide $\varphi_1 = -h_1\dot{u}$. Les constantes k , h , k_1 et h_1 sont positives.

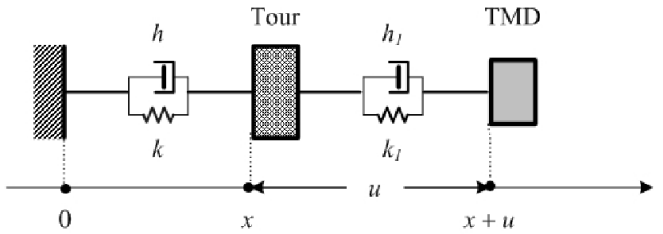


Fig. 1 : Principe simplifié du système TMD

1 – Mise en équation

On suppose que les oscillations de la tour s'effectuent sans frottement $(h = 0)$. L'application de lois fondamentales de la dynamique, d'une part aux systèmes {tour, TMD}, d'autre part au seul système {TMD}, donne les deux équations (système [A])

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + m_1\left(\ddot{x} + \ddot{u}\right) &= -kx + f_0(t) \\ m_1\left(\ddot{x} + \ddot{u}\right) &= -k_1 u - h_1\dot{u}. \end{aligned} \qquad [\mathrm{A}]$$

❑ **1** – Établir le système [A] avec concision. On réécrit [A] sous la forme [B]

$$(1+\alpha)\ddot{x} + \alpha\ddot{u} + \omega_0^2 x = a_0(t) \qquad \text{(B1)}$$

$$\ddot{x} + \ddot{u} + 2\eta_1\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u = 0 \qquad \text{(B2)}$$

Exprimer α, ω_0, ω_1, η_1 et $a_0(t)$ en fonction des grandeurs intervenant dans la modélisation. Préciser la signification physique des grandeurs ω_0 et ω_1.

❑ **2** – On s'intéresse à la réponse du système à l'excitation $a_0(t) = \Re\left(A_0 \exp(i\omega t)\right)$, où le symbole $\Re$ représente la partie réelle et $i^2 = -1$. Les amplitudes complexes de *u(t)*, *a_0(t)* et *x(t)* sont notées respectivement $\underline{U}$, $\underline{A}$ et $\underline{X}$. On pose enfin $\beta = \dfrac{\omega_1}{\omega_0}$ $\left(\beta = \sqrt{\alpha \dfrac{k}{k_1}}\right)$. Exprimer la fonction de transfert $\underline{H_1}(z) = \dfrac{\underline{U}}{\underline{X}}$ en fonction de β et de $z = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. Quelle est la nature de cette fonction ? Est-il avantageux d'avoir $\left|\underline{H_1}\right|$ plutôt grand ou plutôt petit ?

❑ **3** – Les occupants de la tour sont sensibles à l'accélération $b = \ddot{x}$. Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H_2}(z) = \dfrac{\underline{B}}{\underline{A_0}} = \dfrac{z^2}{\left(1+\alpha+\alpha\underline{H_1}\right)z^2 - 1}$, où $\underline{B}$ est l'amplitude complexe de *b(t)*. Est-il avantageux d'avoir $\left|\underline{H_2}\right|$ plutôt grand ou plutôt petit ?

Réponse :

1. *L'application du théorème de la quantité de mouvement, dans la référentiel terrestre (galiléen), au système {tour, TMD} donne la première équation de [A] , et son application au système {TMD} donne la seconde équation (il faut considérer que la force extérieure $f_0(t)$ est appliquée à la tour).*
   Ce système se met bien sous la forme [B] en posant $\alpha = \frac{m_1}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $a_0(t) = \frac{f_0(t)}{m}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, et $\eta_1 = \frac{h_1}{2\sqrt{k_1 m_1}}$.
   ω_0 et ω_1 sont les pulsations propres d'oscillateurs harmoniques formés respectivement d'un ressort de raideur k et d'une masse m, et d'un ressort de raideur k_1 et d'une masse m_1.
2. ***Attention erreur d'énoncé :*** *$\beta = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{k_1}{\alpha k}}$. De plus $\underline{H_1}$ s'exprime en fonction de β, de z, et de η_1.*
   L'écriture de (B2) en notation complexe mène à $\underline{H_1}(z) = \frac{\underline{U}}{\underline{X}} = \frac{z^2}{-z^2 + 2i\eta_1\beta z + \beta^2}$.
   Nature de cette fonction : passe-haut d'ordre 2.
   $|\underline{H_1}|$: plutôt grand car on souhaite des oscillations de la tour d'amplitude faible.
3. *L'écriture de (B1) en notation complexe, dans laquelle on injecte $\underline{U} = \underline{H_1}\underline{X}$ et $\underline{X} = -\frac{1}{\omega^2}\underline{B}$, donne l'expression demandée.*
   $|\underline{H_2}|$: plutôt petit car, pour une excitation $a_0(t)$ donnée, on souhaite que l'accélération de la tour $b(t)$ soit la plus faible possible.

X - MP 2005 - Cristal non linéaire

Un point matériel M de masse m est mobile sur un axe Ox. Il est soumis à des forces conservatives dont l'énergie potentielle $U(x)$ est donnée par : $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}ksx^3$ où k et s sont des constantes positives.

1. On se propose d'étudier le mouvement de M au voisinage de la position d'équilibre stable. Montrer que cela correspond à $|x| \ll 1/s$. Écrire l'équation du mouvement.

2. On cherche une solution de la forme :

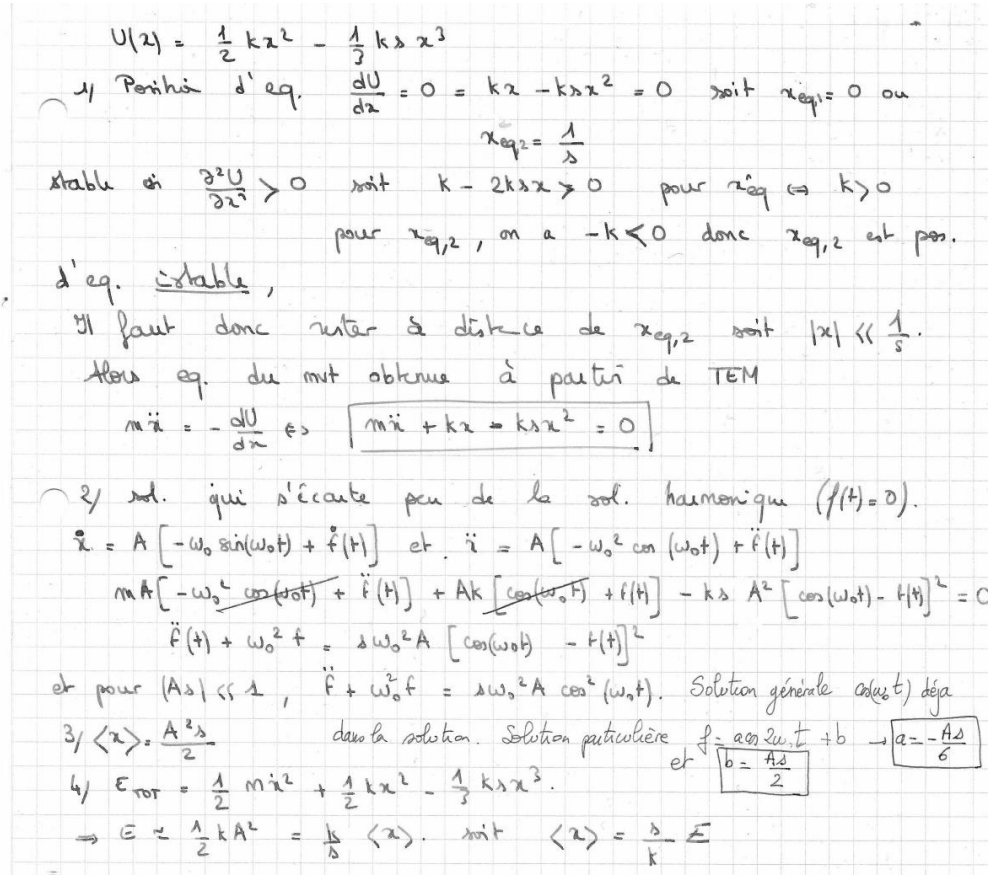
$$x(t) = A[\cos\omega_0 t + f(t)] \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

où $f(t)$ est une fonction inconnue du temps, A une constante, telles que $A \ll 1/s$ et $|f(t)| \ll 1$. Justifier qualitativement la forme choisie pour la solution cherchée. Écrire l'équation différentielle de $f(t)$; la linéariser en ne gardant que les termes du premier ordre en As et f.

3. Montrer que $f(t)$ est de la forme $a\cos 2\omega_0 t + b$ et déterminer les constantes a et b en fonction de s et A. En déduire le déplacement moyen $\langle x\rangle$ en fonction de s et A.

4. Exprimer l'énergie totale E de cet oscillateur en fonction de k et A, en se limitant au terme principal. Montrer que $\langle x\rangle$ est donné par : $\langle x\rangle = \dfrac{s}{k}E$.

Réponse :



$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}ks x^3$

1/ Positions d'eq. $\frac{dU}{dx} = 0 = kx - ksx^2 = 0$ soit $x_{eq1} = 0$ ou $x_{eq2} = \frac{1}{s}$

stable si $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0$ soit $k - 2ksx > 0$ pour x_{eq} $\Leftrightarrow k > 0$

pour $x_{eq,2}$, on a $-k < 0$ donc $x_{eq,2}$ est pos.

d'eq. instable,

Il faut donc rester à distance de $x_{eq,2}$ soit $|x| \ll \frac{1}{s}$.

Alors eq. du mvt obtenue à partir du TEM

$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} \Leftrightarrow \boxed{m\ddot{x} + kx - ksx^2 = 0}$

2/ sol. qui s'écarte peu de la sol. harmonique ($f(t) = 0$).

$\dot{x} = A\left[-\omega_0 \sin(\omega_0 t) + \dot{f}(t)\right]$ et $\ddot{x} = A\left[-\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + \ddot{f}(t)\right]$

$mA\left[-\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + \ddot{f}(t)\right] + Ak\left[\cos(\omega_0 t) + f(t)\right] - ks\,A^2\left[\cos(\omega_0 t) - f(t)\right]^2 = 0$

$\ddot{f}(t) + \omega_0^2 f = s\omega_0^2 A\left[\cos(\omega_0 t) - f(t)\right]^2$

et pour $|As| \ll 1$, $\ddot{f} + \omega_0^2 f = s\omega_0^2 A \cos^2(\omega_0 t)$. Solution générale ($a\cos 2\omega_0 t$) déjà dans la solution. Solution particulière $f = a\cos 2\omega_0 t + b \rightarrow \boxed{a = -\frac{As}{6}}$ et $\boxed{b = \frac{As}{2}}$

3/ $\langle x \rangle = \frac{A^2 s}{2}$

4/ $E_{tot} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}ksx^3$.

$\Rightarrow E \simeq \frac{1}{2}kA^2 = \frac{k}{s}\langle x \rangle$. soit $\langle x \rangle = \frac{s}{k}E$

X - MP 2004 - Etude de l'amortisseur

Dans cette partie, le système est un solide, assimilé à une masse ponctuelle M, simplement posé sur le sol, plan et horizontal. Les mouvements du sol et de la masse sont supposés purement verticaux. L'axe vertical $0\,z$, de vecteur unitaire $\vec{u}_z$, est orienté vers le haut.

À partir de l'instant $t = 0$, le sol est animé de vibrations verticales d'élongation :

$$\vec{z}_s(t) = z_0(1 - \cos\omega t)\,\vec{u}_z$$

1.a) Écrire l'équation du mouvement de la masse M.

b) Montrer qu'il existe deux régimes pour le mouvement de M, en fonction des caractéristiques de la vibration. Donner la valeur a_M de l'accélération $a_s(t)$ du sol qui sépare les deux régimes. Préciser le mouvement de M dans le cas où $|a_s(t)| < |a_M|$ à tout instant.

2) On suppose maintenant que l'accélération du sol peut dépasser a_M en valeur absolue.

a) Montrer que la masse quitte le sol lorsqu'elle atteint une altitude z_D que l'on déterminera.

b) En déduire l'altitude maximale z_M atteinte en fonction de z_0, ω et g.

c) Calculer la durée de la phase de vol libre comprise entre l'instant du décollage de la masse et celui où elle repasse par l'altitude z_D.

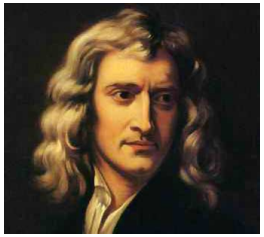
3) Application : on considère une route imparfaitement plane, comportant une succession de bosses que l'on assimilera à une sinusoïde de période spatiale 2 m et de hauteur crête-crête 5 cm.

a) Quelle est la vitesse maximale à laquelle un véhicule totalement rigide peut parcourir cette route sans décoller ?

b) Quelle est la hauteur atteinte par un véhicule roulant à une vitesse de 60 km/h ?

c) Pendant combien de temps perd-on totalement le contrôle de ce véhicule ?

Chapitre C1 : Mouvement dans le champ de gravitation



Planètes du système solaire

PARTIE C : MÉCANIQUE
C-0 : Mécanique du point
C-1 : Gravitation
C-2 : Mouvement dans E et B
C-3 : Chang^{t} de Referentiel
C-4 : Dynamique
C-5 : Vehicule à roues

Terre et lune

I Force centrale conservative

1 Force gravitationnelle

Savoir démontrer №1 :

La force gravitationnelle est

$$\overrightarrow{F} = -G\frac{mM}{r^2}\overrightarrow{u}_r \quad \text{avec} \quad G \simeq 6,67.10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

C'est une force **centrale attractive**.
Elle dérive du potentiel : E_p, avec

$$\boxed{E_p = -G\frac{mM}{r}}$$

On pose $K = -GmM$.

2 Force d'interaction électrostatique

Savoir démontrer №2 : Force de COULOMB

La force de COULOMB est

$$\overrightarrow{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}_r \quad \text{avec} \quad \epsilon_0 \simeq 8,85.10^{-12}\ \text{Fm}^{-1}$$

C'est une **force centrale attractive (charges de signes opposés) ou répulsive (charges de même signe)**.
Elle dérive du potentiel : E_p, avec

$$\boxed{E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

On pose $K = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$.

II Lois de conservation

1 Moment cinétique

Le moment de la force centrale en O est nul donc

$$\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}} = \overrightarrow{\text{Cte}}$$

Savoir démontrer №3 : Propriétés d'une force centrale

- ✗ Le mouvement est **plan**
- ✗ La quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est constante : c'est la **constante des aires**.
- ✗ Soit $\mathcal{A}$, l'aire balayée par le rayon vecteur,

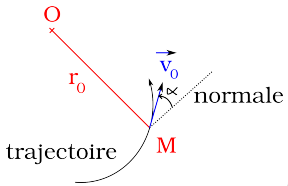
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{2}}$$

C'est la **loi des aires**.

Application 1 : Valeur de la constante des aires

On peut déterminer la constante des aires à l'origine :

$$C = r_0 v_0 \cos\alpha$$



2 Energie mécanique

Savoir démontrer №4 : Energie potentielle effective

L'énergie mécanique peut s'écrire sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad E_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

III Nature des trajectoires

1 Relations de Binet

Savoir démontrer №5 : Equation de la trajectoire

La RFD pour une particule dans le champ de gravitation, permet de trouver l'équation du mouvement :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{K}{mC^2} = \frac{GM}{C^2}}$$

On a posé $u(\theta) = \frac{1}{r}$.
La solution de cette équation est de la forme

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

- ✗ p est le paramètre de la conique : $p = -\frac{mC^2}{K}$
- ✗ e est l'exentricité

Application 2 : Energie mécanique

En remplaçant $u(\theta)$ dans l'expression de l'énergie, on trouve

$$\boxed{E_m = \frac{|K|}{2p}\left(e^2 - 1\right)}$$

2 Trajectoire parabolique : $e = 1$

DÉFINITION :

- ✗ La trajectoire parabolique correspond à un état de **diffusion.**
- ✗ L'énergie **mécanique est nulle** : $E_m = 0$
- ✗ Cela correspond à **l'énergie minimale que doit avoir une particule pour quitter l'attraction de l'astre**. Pour la Terre, cela correspond à la **seconde vitesse cosmique**.

Savoir démontrer №6 : Seconde vitesse cosmique

Pour la Terre, la **seconde vitesse cosmique** (ou vitesse de libération) est

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \simeq 11,2 \text{ km}$$

3 Trajectoire circulaire : $e = 0$

DÉFINITION :

- ✗ La trajectoire circulaire correspond à un état **lié**.
- ✗ L'énergie mécanique est nulle : $E_m = \frac{1}{2}E_p$

Savoir démontrer №7 : Troisième Loi de Kepler

Dans le cas particulier de la trajectoire circulaire, on montre rapidement la **troisième loi de Kepler** :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

Application 3 : Satellite géostationnaire

- ✗ Le satellite géostationnaire a **la même période de rotation que la Terre sur elle-même** : $T = 24 * 3600 = 86400$ s.
- ✗ La trajectoire est nécéssairement **équatoriale**.
- ✗ Le troisième loi de KEPLER permet de trouver le rayon de la trajectoire :

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 42\ 227 \text{ km}$$

- ✗ L'altitude de ce satellite est donc

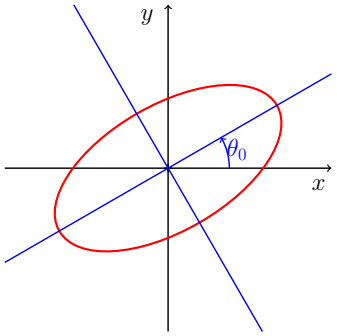
$$h = r_0 - R_T \simeq 36\ 000 \text{ km}$$

- ✗ La vitesse sur cette orbite est $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} \simeq 3 \text{ km.s}^{-1}$

4 Trajectoire elliptique : $0 < e < 1$

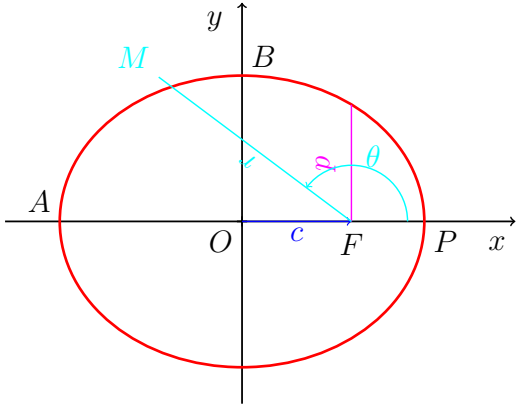
- ✗ La trajectoire parabolique correspond à un état de **lié**
- ✗ L'énergie mécanique est négative : $E_m < 0$
- ✗ Le centre attracteur occupe un des foyers de l'ellipse.
- ✗ Si $\theta_0 \neq 0$ le grand axe de l'ellipse est incliné par rapport à l'horizontale.
- ✗ Le point le plus proche du foyer est le **péricentre (périgée, périhélie)**, il se trouve à

$$r_{min} = \frac{p}{1+e}$$



- ✗ Le point le plus éloigné du foyer est l' **apocentre (apogée, aphélie)**, il se trouve à

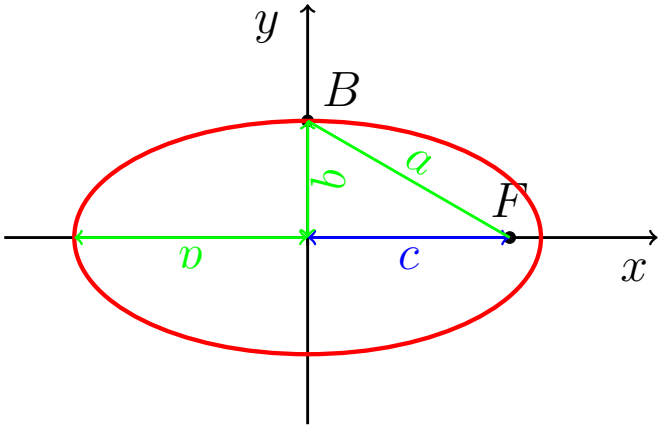
$$r_{max} = \frac{p}{1-e}$$



- ✗ La définition géométrique de l'ellipse est

$$\forall M \in \quad \text{ellipse} \quad MF + MF' = 2a$$

On en déduit que $FB = a$.



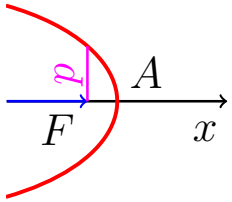
Savoir démontrer №8 :

En constatant que $r_{min} + r_{max} = 2a$, on montre que

$$p = a\left(1 - e^2\right)$$

Pour une trajectoire elliptique, l'énergie mécanique s'écrit :

$$\boxed{E_m = -\frac{GmM}{2a}}$$



A partir de la relation $FB = a$, on a les relations suivantes :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \text{ et } \boxed{e = \frac{c}{a}}$$

En identifiant les relations, on trouve finalement

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a}}$$

Application 4 : Expression de la vitesse

Pour trouver la vitesse en un point M de l'ellipse, on utilise la définition de l'énergie :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{2a}$$

Savoir démontrer №9 :

L'aire de l'ellipse est $\mathcal{A} = \pi ab$, et $\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{2} = \frac{\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t}}{T}$
On en déduit la troisième loi de Kepler :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$$

Application 5 : Cas de la Terre

Pour la trajectoire de la Terre, on a :
- ✗ $M_\odot = 2.10^{30}$ kg masse du soleil.
- ✗ $T = 1$ an
- ✗ $r_{min} = 147,2.10^6$ km.

On trouve a avec la troisième loi de Kepler :

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_\odot}{4\pi^2}} = 1,5.10^{11} \text{ m} = 1 \text{ u.a.}$$

Une u.a. est une unité astronomique.
On trouve ensuite $e = 1 - \frac{r_{min}}{a} = 0.017$.La trajectoire est quasi-circulaire.

IV Théorème de Gauss

On a une analogie entre les lois de force :

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{avec} \quad \vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Les relations sont équivalentes si :

$$m_1, m_2 \leftrightarrow q_1, q_2 \text{ et } \quad G \leftrightarrow -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\text{champ de gravitation } \vec{\mathscr{G}} \leftrightarrow \text{champ électrique } \vec{E}$$

Savoir démontrer №10 :

On va pouvoir donner un équivalent à l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathscr{G}} = -4\pi G\rho$$

- ✗ $\vec{\mathscr{G}} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$ est le champ de gravitation.
- ✗ ρ est la densité volumique de charge.
- ✗ On obtient donc un théorème de Gauss pour le champ de gravitation :

$$\boxed{\oiint \vec{\mathscr{G}}.\vec{\mathrm{d}S} = -4\pi G M_{int}}$$

V Réduction canonique

1 Introduction d'un point fictif

DÉFINITION :

Soit M, un point matériel fictif tel que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{r}$.
On a $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{0}$

Savoir démontrer №11 : Homothétie des trajectoires

$$\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{GM} \qquad \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{GM}$$

Dans le référentiel barycentrique (R^*), les trajectoires de M_1 et M_2 se déduisent de celle de M par une homothétie de centre G.

2 Grandeurs cinétiques du point fictif

Des relations précédentes, on trouve

$$\overrightarrow{v}^*_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{v}^*(M) \text{ et } \overrightarrow{v}^*_2 = +\frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{v}^*(M)$$

On peut alors exprimer $\overrightarrow{L}^*$

Savoir démontrer №12 : Moment cinétique du système

$$\boxed{\overrightarrow{L}^* = \overrightarrow{r} \wedge \mu\overrightarrow{v}^*(M)}$$

Le moment cinétique du système est égal au moment cinétique du point fictif affecté d'une masse $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, appelée masse réduite du système ou masse du point fictif.

De même, on calcule l'énergie cinétique E_c^*

Savoir démontrer №13 : Energie cinétique du système

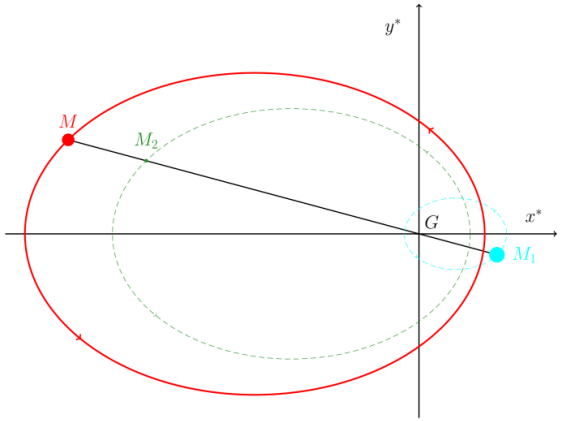
$$\boxed{E_c^* = \frac{1}{2}\mu\left(\overrightarrow{v}^*\right)^2}$$

L'énergie cinétique du système est l'énergie cinétique du point fictif.

3 Réduction canonique

On écrit le PFD pour M_1 et M_2
On en déduit

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{F}_{1\to2}$$



Conclusion : :

Dans le cas d'un système de 2 points matériels *isolés* en interaction, l'étude de leur mouvement se ramène à l'étude du mouvement d'un point fictif M de masse $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ dans le référentiel barycentrique galiléen ; cette particule fictive étant soumise à la force centrale $\overrightarrow{F}_{1\to2}$ de centre de force G.

Mines - MP 2001 - Voyage vers la lune

masse de la Lune $m = 0{,}0735 \times 10^{24}$ kg $\left(\text{on adoptera la valeur : } \frac{m}{M_T} = \varepsilon^2 = \frac{1}{81}\right)$

rayon de la Terre $R_T = 6378$ km

rayon de la Lune $r = 1736{,}6$ km

Dans la suite du problème, on pourra introduire les périodes de révolution $T_T(\ell)$ dans le champ gravitationnel de la Terre, à la distance ℓ du centre de la Terre et $T_L(z)$ période de révolution dans le champ gravitationnel de la Lune, à la distance z du centre de la Lune.

A. Préliminaires

❑ **1** – Exprimer g en fonction de G, M_T et R_T. Exprimer $T_T(d)$, période du mouvement lunaire autour de la Terre en fonction de G, M_T et d, puis en fonction de g, R_T et $\frac{R_T}{d}$. Calculer $T_T(d)$.

B. En négligeant la gravitation lunaire

Dans cette partie, on néglige l'attraction lunaire. Un boulet de masse μ est envoyé de la surface terrestre vers l'espace. On note x sa distance au centre de la Terre et $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ sa vitesse[1]. Le boulet est lancé à la verticale ; on suppose la trajectoire rectiligne et le boulet soumis uniquement à l'attraction terrestre.

❑ **2** – Exprimer l'énergie mécanique totale du boulet en fonction de g, x et R_T.

❑ **3** – Exprimer et calculer en fonction de g et de R_T la *vitesse de libération* V_∞, vitesse initiale minimale nécessaire pour atteindre l'infini.

❑ **4** – Exprimer et calculer en fonction de g, R_T et D la vitesse initiale minimale $V(D)$ nécessaire pour atteindre un point D situé à la distance D du centre de la Terre. Vérifier le résultat pour $D = R_T$ et pour D infini.

❑ **5** – Exprimer la conservation de l'énergie mécanique du boulet avec la condition initiale $v(0) = V(D)$. Le résultat se lit comme une équation différentielle. Poser dans cette équation $x(t) = D\sin^2\left[\psi(t)\right]$ et trouver la solution sous la forme $t = T_T(D)\,f(\psi)$. Exprimer la valeur initiale $\psi_0 = \psi(0)$ en fonction de R_T et de D. Dans la suite, on utilisera la fonction $\chi(\psi) = \psi - \frac{1}{2}\sin(2\psi)$ $\left(\chi(\psi) \approx \frac{2}{3}\psi^3 \text{ pour } |\psi| << \pi\right)$.

❑ **6** – Exprimer, en fonction de ψ_0 et de $T_T(D)$, le temps $\tau(D)$ mis pour atteindre le point D.

❑ **7** – La destination du boulet a beau être la surface lunaire, on lance ce dernier avec la vitesse initiale $V(d)$, comme si l'on voulait lui faire atteindre le centre de la Lune avec une vitesse nulle. Établir alors l'expression approchée suivante de la durée τ_1 du trajet :

$$\tau_1 = \frac{T_T(d)}{4\sqrt{2}}\left[1 - \frac{4}{\pi}\left(\frac{r}{d}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3\pi}\left(\frac{R_T}{d}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Calculer τ_1. Exprimer et calculer la vitesse du boulet au point d'impact sur la Lune.

❑ **8** – Il n'est évidemment pas question de pointer le canon vers la Lune ! En s'appuyant sur la question 7, exprimer et calculer l'angle θ_1 que doit faire, au moment du tir, l'axe Terre-Lune avec la ligne de tir, supposée verticale. Jules VERNE donne $\theta_1 = 64°$.

A - Préliminaires

1. On néglige la rotation propre de la Terre donc le poids μg d'un objet de masse μ à la surface de la Terre est la force gravitationnelle terrestre $\frac{G\mu M_T}{R_T^2}$. Il vient ainsi :

$$\boxed{g = \frac{GM_T}{R_T^2}}$$

On peut vérifier numériquement. Avec les données de l'énoncé, on trouve $\frac{GM_T}{R_T^2} = 9{,}79\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la Lune s'écrit : $m\boldsymbol{a}(L) = -\frac{GM_T m}{d^2}\boldsymbol{e_r}$. L'orbite lunaire est circulaire autour du centre de la Terre donc la force gravitationnelle s'exerçant sur la Lune (et donc l'accélération) est normale à la trajectoire. La norme de l'accélération est alors : $\frac{v^2}{d} = d\left(\frac{2\pi}{T_T(d)}\right)^2$. On en déduit :

$$\boxed{T_T(d) = \frac{2\pi d^{3/2}}{(GM_T)^{1/2}}} \text{ ou } \boxed{T_T(d) = \frac{2\pi R_T^{1/2}}{g^{1/2}}\left(\frac{d}{R_T}\right)^{3/2}}$$

Application numérique : **$T_T(d) = 27{,}39$ jours** à comparer aux 27,42 jours donnés en fin d'énoncé (0,3% d'écart).

B - En négligeant la gravitation lunaire

2. L'énergie mécanique totale $E = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{GM_T\mu}{x} = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{gR_T^2\mu}{x}$ se conserve car le corps n'est soumis qu'à l'attraction terrestre.

3. L'énergie mécanique se conservant : $E = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \frac{gR_T^2\mu}{R_T}$ en notant v_0 la vitesse initiale du boulet. Pour atteindre l'infini, il faut que la vitesse soit non nulle pour $x \to +\infty$ c'est-à-dire que l'énergie mécanique totale du boulet soit positive ce qui impose, : $v_0 \geq V_\infty$ où

$$\boxed{V_\infty = \sqrt{2gR_T}}$$

Application numérique : **$V_\infty = 11{,}2\ \mathrm{km.s^{-1}}$**

4. Exprimons la conservation de l'énergie entre le point de départ $x = R_T$, $v = V(D)$ et le point où la vitesse s'annule $x = D$, $v = 0$:

$$\frac{1}{2}\mu V(D)^2 - \frac{\mu g R_T^2}{R_T} = 0 - \frac{\mu g R_T^2}{D}$$

On trouve :

$$\boxed{V(D) = \sqrt{2gR_T}\left(1 - \frac{R_T}{D}\right)^{1/2}}$$

On retrouve bien $V(D) = 0$ si $D = R_T$ et $V(D) = V_\infty = \sqrt{2gR_T}$ si $D \to +\infty$

5. Récrivons la conservation de l'énergie entre le point de départ $x = R_T$, $v = V(D)$ et le point x , v :

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{gR_T^2\mu}{x} = 0 - \frac{gR_T^2\mu}{D}$$

ce qui donne :

$$\boxed{\dot{x}^2 = 2gR_T^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{D}\right)}$$

Dans cette équation, posons $x(t) = D\sin^2[\psi(t)]$ c'est-à-dire $\dot{x}(t) = 2D\dot{\psi}(t)\sin[\psi(t)]\cos[\psi(t)]$.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{D} = \frac{1}{D}\left(\frac{\cos[\psi(t)]}{\sin[\psi(t)]}\right)^2$$

Après simplifications (avec $\cos[\psi(t)]$ différent de $\pi/2$), on obtient :

$$\dot{\psi}(t)\sin^2[\psi(t)] = \left(\frac{gR_T^2}{2D^3}\right)^{1/2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{T_T(D)}$$

Seule la solution où $\dot{\psi}(t) > 0$ a été conservée puisque $x(t)$ est croissante (donc $\psi(t)$ également et $0 \le \psi(t) \le \pi/2$ puisque $0 \le x(t) \le D$)

En intégrant entre $t = 0$ et t, on a bien $\boxed{t = T_T(D)f(\psi)}$ où , en posant $\chi(\psi) = \psi - \frac{1}{2}\sin(2\psi)$

$$\boxed{f(\psi) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{\psi(0)}^{\psi(t)}\sin^2(u)\,du = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}[\chi(\psi) - \chi(\psi_0)]}$$

A $t = 0$, $x(0) = R_T = D\sin^2[\psi_0]$ donc $\boxed{\sin^2(\psi_0) = \frac{R_T}{D}}$

6. Le temps τ mis pour atteindre le point D est tel que $x(\tau) = D$ soit $\psi(\tau) = \pi/2$.

Il vient donc $\boxed{\tau = \frac{T_T(D)}{2\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \chi(\psi_0)\right) = \frac{T_T(D)}{4\sqrt{2}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\chi(\psi_0)\right)}$

7. On lance le boulet avec la vitesse initiale $V(d)$ comme si on voulait lui faire atteindre le centre de la Lune avec une vitesse nulle. ψ_0 vérifie donc $\sin^2(\psi_0) = \frac{R_T}{d} = 1{,}66.10^{-2} << 1$. On peut donc faire l'approximation $\psi_0 \approx \left(\frac{R_T}{d}\right)^{1/2}$ et $\boxed{\chi(\psi_0) \approx \frac{2}{3}\left(\frac{R_T}{d}\right)^{3/2}}$.

La durée de voyage du boulet jusqu'à la surface lunaire est $\boxed{\tau_1 = T_T(d)f(\psi_1)}$ où $\psi_1 = \psi(\tau_1)$ vérifie $\sin^2(\psi_1) = \frac{x(\tau_1)}{d} = 1 - \frac{r}{d}$.

$\frac{r}{d} << 1 \Rightarrow \sin^2(\psi_1) \approx 1$ donc ψ_1 est proche de $\pi/2$.

Posons $\psi_1 = \pi/2 - u$ où $u << 1$; il vient donc $\sin^2(\psi_1) = 1 - \cos^2(\psi_1) = 1 - \frac{r}{d}$ donc $\cos(\psi_1) = \left(\frac{r}{d}\right)^{1/2}$ et ensuite $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin(u) \approx u \Rightarrow u \approx \left(\frac{r}{d}\right)^{1/2}$.

On en déduit $\chi(\psi_1) = \psi_1 - \frac{1}{2}\sin(\psi_1) \approx \frac{\pi}{2} - u - \frac{1}{2}\sin(2u) \approx \frac{\pi}{2} - 2u \Rightarrow \boxed{\chi(\psi_1) \approx \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{4}{\pi}\left(\frac{r}{d}\right)^{1/2}\right)}$

Conclusion : $\tau_1 = \frac{T_T(d)}{2\pi\sqrt{2}}(\chi(\psi_1) - \chi(\psi_0)) \Rightarrow \boxed{\tau_1 \approx \frac{T_T(d)}{4\sqrt{2}}\left(1 - \frac{4}{\pi}\left(\frac{r}{d}\right)^{1/2} - \frac{4}{3\pi}\left(\frac{R_T}{d}\right)^{3/2}\right)}$

L'application numérique donne **$\tau_1 = 4{,}42$ jours**

Au point d'impact, $x = d - r$. La vitesse du boulet à l'arrivée sur la Lune est donc

$$\dot{x} = \sqrt{2gR_T^2}\left(\frac{1}{d-r} - \frac{1}{d}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{v_{impact} = \sqrt{2gR_T^2}\left(\frac{r}{(d-r)d}\right)^{1/2}}$$

Application numérique: **$v_{impact} = 97{,}2$ m.s^{-1}**

8. Pendant la durée τ_1, la Lune parcourt sur son orbite circulaire autour de la Terre, l'angle θ_1 tel que

$$\boxed{\theta_1 = 2\pi\frac{\tau_1}{T_T(d)}}$$

Application numérique: **$\theta_1 = 58°$** proche des 64° donnés par Jules Verne (10% d'écart relatif)

Mines - PC 2010 - Viriel

I. — Étude physique des étoiles

Dans toute cette partie on considère qu'une étoile est une boule de masse M, de rayon R, de masse volumique ρ supposée constante et entourée de vide.

I.A. — Énergie potentielle d'une étoile sphérique, théorème du viriel

❑ **1 —** On considère deux particules ponctuelles notées Q_1 et Q_2 de masses m_1 et m_2 séparées par une distance r. Donner l'expression la force d'interaction gravitationnelle $\vec{f}_{1\to 2}$ exercée par Q_1 sur Q_2. On utilisera le vecteur unitaire $\vec{u} = \overrightarrow{Q_1Q_2}/r$. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de gravitation E_p associée à cette force en fonction de m_1, m_2, r et de la constante de gravitation G. On fixera l'origine du potentiel de telle manière que $E_p = 0$ lorsque $r \to +\infty$.

On souhaite exprimer l'énergie potentielle de gravitation d'une boule homogène de masse M, de centre O, de rayon R et de masse volumique ρ supposée constante. Cette énergie correspond à l'énergie de constitution de la boule en amenant successivement depuis l'infini des couches sphériques concentriques d'épaisseur dr.

❑ **2 —** On considère un état intermédiaire $\mathscr{B}_r$ de la boule dans lequel elle possède un rayon r tel que $0 < r < R$ et une masse m_r telle que $0 < m_r < M$. Justifier le fait que l'interaction entre $\mathscr{B}_r$ et un corps ponctuel massif $\mathscr{K}$ situé hors de $\mathscr{B}_r$ est équivalente à celle entre une particule ponctuelle située en O de masse m_r et $\mathscr{K}$. On ajoute à $\mathscr{B}_r$ une couche sphérique $\mathscr{C}_r$ de masse dm et d'épaisseur dr. Déterminer l'énergie potentielle de gravitation dE_p entre $\mathscr{B}_r$ et $\mathscr{C}_r$. On exprimera dE_p en fonction de r, dr et de ρ. En déduire que l'énergie potentielle de gravitation de la boule de rayon R s'écrit $E_p = \alpha GM^2/R$ où α est une constante numérique que l'on déterminera.

On considère à présent que l'étoile est constituée d'un gaz parfait , chaque particule de ce gaz étant un atome d'hydrogène d'énergie cinétique $e_c = \frac{3}{2}k_BT$ où $k_B = \mathscr{R}/\mathscr{N}$ est la constante de Boltzmann, $\mathscr{R}$ est la constante des gaz parfaits et $\mathscr{N}$ le nombre d'Avogadro. La pression donnée par la loi des gaz parfaits est ici uniquement d'origine cinétique et on ne tient donc pas compte de la pression de radiation. Dans ce modèle, la pression P et la température T sont des fonctions de la seule coordonnée radiale r, enfin le nombre de particules par unité de volume n est constant à l'intérieur de l'étoile. On suppose de plus que l'étoile est entourée de vide, ainsi $P(R) = 0$.

1.1 Energie potentielle d'une étoile sphérique

1) La force est $\boxed{\overrightarrow{f_{1-2}}\text{=-G}\frac{m_1m_2}{r^2}\hat{u}}$

Cette force dérive de l'énergie potentielle E_p telle que $\overrightarrow{f_{1-2}} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$

On en déduit $\boxed{E_p\text{=-G}\frac{m_1m_2}{r}}$ (à une constante additive près; cette dernière est choisie pour que $E_p \to 0$ si $r \to \infty$.

2) Le champ gravitationnel $\overrightarrow{g}$ tel que $\overrightarrow{f_{1-2}} = m_2\overrightarrow{g}$ possède les mêmes propriétés que le champ électrique, et notamment vérifie le théorème de Gauss gravitationnel: $\iint_{(S)} \overrightarrow{g}.\overrightarrow{N}d^2S = -4\pi GM_{int}$. ($M_{int}$étant la masse intérieure à la surface d'intégration)

En considérant une sphère de masse volumique uniforme à symétrie sphérique, on montre que $\overrightarrow{g}$ est radial et ne dépend que de r. On a alors $\overrightarrow{g} = -G\frac{M_{int}}{r^2}\hat{u}$

Le champ gravitationnel est donc le même que celui d'une masse ponctuelle situé en O.

On peut donc appliquer le résultat précédent et $dE_p = -G\frac{m_r.dm}{r} = -G\frac{16\pi^2\rho^2r^4}{3}dr$

Soit: $E_p = -G\frac{16\pi^2\rho^2R^5}{15}$ ou $\boxed{E_p = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}}$ et donc $\boxed{\alpha\text{=-}\frac{3}{5}}$

3) Si n est le nombre de particules par unité de volume: $E_c = \int \frac{3}{2}k_BT(r)ndV = \frac{3}{2}nk_B\int_0^R 4\pi r^2T(r).dr$ ou, comme $P = nk_BT$, $\boxed{E_c\text{=}6\pi\int_0^R \text{P(r)}.r^2\text{dr}}$

L'équation de l'hydrostatique, $\overrightarrow{grad}P = \rho\overrightarrow{g}$, ramenée à une dimension, s'écrit: $\frac{\partial P}{\partial r} = \rho g$.

En écrivant $E_c = 6\pi\int_0^R P(r)r^2dr = 6\pi([P(r)\frac{r^3}{3}]_0^R - \int_0^R \frac{\partial P}{\partial r}\frac{r^3}{3}dr = -2\pi\int_0^R \rho g(r)r^3dr$, on ne peut aller plus loin sans connaître $g(r)$

La question suivante permet d'établir $g(r) = -4\pi G\rho\frac{r}{3}$

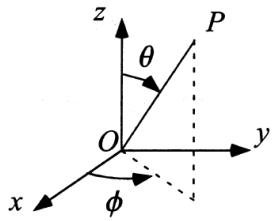
On obtient alors $E_c = \frac{8}{3}\pi^2\rho^2G\int_0^R r^4dr = \frac{8}{15}\pi^2\rho^2GR^5$ avec $\rho^2 = \frac{9M^2}{16\pi^2R^6}$

soit $\boxed{E_c\text{=}\frac{3}{10}\frac{GM^2}{R}\text{=-}\frac{1}{2}E_p}$

On a donc $\boxed{\text{k=-}\frac{1}{2}}$

ENS ULM - PC 2005 - Geodesie

De manière générale, on notera $\overrightarrow{u}_\alpha$ le vecteur unitaire local associé à une coordonnée α.
On rappelle qu'un point P de l'espace peut être repéré par un système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), où $r = OP$ et où les angles polaires θ et ϕ sont représentés sur la figure ci-dessous.



On note d^3r l'élément de volume infinitésimal centré sur le point $\overrightarrow{r}$. En coordonnées sphériques, on rappelle que $d^3r = r^2drd^2\Omega = r^2dr\sin\theta d\theta d\phi$. $d^2\Omega$ est *l'angle solide* infinitésimal sous lequel est vu le volume d^3r depuis l'origine des coordonnées.
On rappelle que l'aire d'une ellipse de demi-axes a et b vaut πab. Le volume d'un ellipsoïde de demi-axes a_x, a_y et a_z vaut $4\pi a_xa_ya_z/3$.
Pour ϵ tendant vers 0, on admet les développements limités suivants :

$$\text{Arctan}(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\epsilon^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} = 1 - \epsilon/2 + 3\epsilon^2/8 + ...$$

Enfin, si $f(t)$ est une grandeur périodique de période T, on note $\langle f\rangle$ la valeur moyenne de f définie par

$$\langle f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

Données numériques :

Constante de gravitation universelle	$\mathcal{G}$	$6{,}67\times10^{-11}$ USI
Rayon équatorial de la Terre	R_e	6378 km
Rayon polaire de la Terre	R_p	6357 km
Période de révolution de la Terre	P_T	365,25 jours
Distance Terre-Soleil	d_{ST}	150×10^6 km
Distance Terre-Lune	d_{LT}	380×10^3 km

Première partie

Dans cette première partie, on néglige la rotation de la Terre et on l'assimile à une sphère de rayon R_T (qu'on prendra égal au rayon équatorial) et de masse volumique ρ homogène. On note M_T la masse de la Terre.

1. Quelle fut la première détermination du rayon de la Terre ?
2. Quel est le lien entre la première définition du mètre et le rayon de la Terre ?
3. À l'aide d'arguments de symétrie donner la direction du champ de pesanteur $\vec{g}_0$ créé en un point P l'espace (on notera O le centre de la Terre).
4. Quelle est l'expression du théorème de Gauss pour le champ de pesanteur ? À l'aide des propriétés de symétrie énoncées à la question précédente, calculer le champ de pesanteur à une distance r du centre de la Terre (on considérera aussi bien le cas $r < R_T$ et $r > R_T$).
5. Calculer en tout point de l'espace l'expression du potentiel gravitationnel $V(P)$ en le supposant nul à l'infini. Tracer son allure.
6. Afin de "peser" la Terre, la méthode la plus précise à ce jour est l'étude de la trajectoire de ses satellites, artificiels ou non. On s'intéresse donc ici à l'étude de la trajectoire d'une satellite de masse m évoluant dans le champ de pesanteur calculé dans les questions précédentes. Dans toutes la suite, on suppose $m \ll M_T$

   (a) Écrire le principe fondamental de la dynamique pour le satellite. On note $\vec{\sigma}$ le moment cinétique du satellite par rapport au centre de la Terre. Montrer que le mouvement est plan et démontrer la loi des aires. Dans la suite, on choisira l'axe z des coordonnées polaires (r, θ, ϕ) de façon à ce que le plan de la trajectoire soit confondu avec le plan $\theta = \pi/2$.

   (b) On note C la constante des aires et $u = 1/r$. Écrire l'accélération du satellite en fonction de C, u et $d^2u/d\phi^2$. Intégrer l'équation du mouvement et déduire que

$$r = \frac{\mathcal{P}}{1 + e\cos(\phi)}.$$

   Quelle type de trajectoire obtient on pour les différentes valeurs de e ?

   (c) On considère le cas $e < 1$. Montrer que $\mathcal{P}$ s'exprime simplement en fonction de a et b, respectivement demi-grand axe et demi-petit axe de la trajectoire.

   (d) En utilisant la Loi des aires, déduire de la question précédente l'expression de la période de révolution du satellite autour de la Terre en fonction de M_T, $\mathcal{G}$ et a. Quel nom cette loi porte-t-elle ?

   (e) Les satellites SPOT (Satellite Pour l'Observation de la Terre) évoluent sur une orbite circulaire d'altitude $h = 820$ km. La période d'une révolution est de 101,4 minutes. En déduire la masse de la Terre. Calculer la densité de la Terre et comparer cette valeur à la densité moyenne 2,7 des roches trouvées en surface. Quelle conclusion peut-on en tirer sur la structure interne de la Terre ?

   (f) Calculer de même la masse du Soleil à partir des données numériques fournies en début d'énoncé.

Deuxième partie

1. *Développement à longue distance.* On considère à présent le cas où la Terre est inhomogène et de forme quelconque et on cherche à calculer le potentiel gravitationnel en un point P à l'extérieur de la Terre. On note O le centre de gravité de la Terre et la masse volumique en un point P' à l'intérieur de la Terre est notée $\rho(\vec{r}')$, avec $\vec{r}' = \overrightarrow{OP}'$. Enfin, on suppose que la distance du point P au centre de la Terre est grande devant le rayon terrestre moyen R_T.

   (a) On pose $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ et $r = \|\vec{r}\|$. Montrer qu'à l'ordre 2 en R_T/r, le potentiel gravitationnel V est donné par :

$$V(\vec{r}) = -\frac{M_T\mathcal{G}}{r} - \frac{\mathcal{G}}{r^2}\int \rho(\vec{r}')\vec{r}'.\vec{u}\, d^3r' - \frac{\mathcal{G}}{2r^3}\int \rho(\vec{r}')[3(\vec{r}'.\vec{u})^2 - r'^2]\, d^3r' + ...$$

   où $\vec{u} = \vec{r}/r$. M_T désigne la masse totale de la Terre et l'intégrale porte sur le volume terrestre. On appelle respectivement terme dipôlaire et quadrupôlaire les deuxième et troisième termes du développement en puissance de $1/r$.

   (b) Montrer que le terme dipôlaire est nul.

   (c) Montrer que si l'on note u_i les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{u}$, alors l'intégrale apparaissant dans le terme quadrupôlaire du développement se met sous la forme

$$\int d^3r'\,\rho(\vec{r}')[3(\vec{r}'.\vec{u})^2 - r'^2] = -K_0 + \sum_{i,j\in\{x,y,z\}} K_{ij}u_iu_j$$

   avec

$$\begin{aligned} K_0 &= \int \rho(\vec{r}')r'^2 d^3r' \\ K_{ij} &= 3\int \rho(\vec{r}')x'_ix'_j d^3r' \end{aligned}$$

   où les x'_i désignent les coordonnées cartésiennes de $\vec{r}'$.

   (d) Montrer que K_0 s'exprime simplement à l'aide de la trace de la matrice K_{ij} .

   (e) On fait à présent l'hypothèse que la Terre possède une symétrie de révolution autour de l'axe (O, z). Montrer que l'on peut écrire la matrice K_{ij} en fonction de K_{xx} et K_0 uniquement.

   (f) En déduire que si le vecteur position $\vec{r}$ est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ, ϕ), le potentiel $V(\vec{r})$ s'écrit

$$V(\vec{r}) = -\frac{M_T \mathcal{G}}{r} + J_2 \frac{M_T \mathcal{G} R_e^2}{2r^3}(3\cos^2(\theta) - 1),$$

où R_e désigne le rayon équatorial de la Terre et J_2 est le *facteur d'ellipticité géopotentielle* dont on donnera la dimension ainsi que l'expression en fonction de $K_{xx} - K_0$, M_T et R_e.

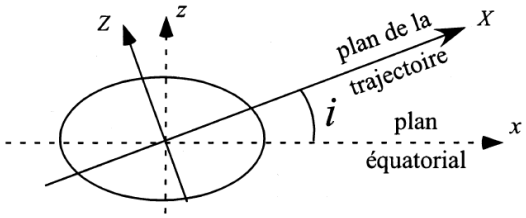


FIG. 1 – Position *instantanée* du plan de la trajectoire du satellite relativement à l'axe de symétrie de la Terre.

(g) On fait l'hypothèse que la Terre est un ellipsoïde homogène de révolution autour de l'axe z et dont on note R_p et R_e les rayons polaire et équatorial.

i. Montrer qu'en effectuant les changements de variable $\tilde{x} = x'/R_e$, $\tilde{y} = y'/R_e$ et $\tilde{z} = z'/R_p$ le calcul de K_0 se ramène à une intégrale sur une sphère de rayon unité. En déduire l'expression de K_0 en fonction de ρ, R_e et R_p.

ii. Calculer de même K_{xx} et en déduire l'expression de J_2 en fonction de R_e et R_p.

Quelques problèmes de géodésie

I – Mouvements satellitaires

1. Eratosthène … cf cours de seconde !

2. Définition de la Convention (1795) : le mètre est la 40 millionième partie du méridien terrestre.

3. Le champ $\mathbf{g_0}$ est un champ newtonien et tout plan passant par la droite OP est un plan de symétrie pour la distribution de masse, le champ en P appartient donc à tous ces plans, il est situé sur la droite OP. Par invariance en θ et φ de la distribution de matière, g_0 ne dépend que de r.

4. le théorème de Gauss s'écrit : $\oiint \mathbf{g_0} \bullet \mathbf{dS} = -4\pi G M_{int}$. On obtient alors :

$r < R_T$: $\mathbf{g_0}(r) = -(4\pi/3)\, G\rho\, r\, \mathbf{u_r}$ et $r > R_T$: $g_0(r) = -(4\pi/3)\, G\rho\, R_T^3\, (1/r^2)\ \mathbf{u_r}$. On vérifie la continuité en R_T.

5. En définissant V(r) par $\mathbf{g_0} = -\,\mathbf{grad}\ V(r)$, il vient : $r > R_T$ avec $V(\infty) = 0$, $V(r) = -(4\pi/3) G\rho R_T^3 / r$ puis $r < R_T$: $V(r) = (4\pi/3)\, G\rho\, (r^2 - R_T^2)/2 - (4\pi/3)\, G\rho R_T^2$ par continuité du potentiel en R_T. Le graphe est classique.

6. a)- $m\,\mathbf{a}(r) = m\,\mathbf{g_0}(r)$; $\boldsymbol{\sigma} = m\,\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}(r)$ et $d\boldsymbol{\sigma} / dt = \mathbf{0}$ car la force est centrale. Le mouvement est donc plan, dans le plan perpendiculaire à $\boldsymbol{\sigma} = \sigma\,\mathbf{u_z}$ et le produit $mr^2 d\varphi/dt = Cte$, la constante des aires $C = \frac{1}{2} r^2 d\varphi/dt = dS/dt$ vitesse aréolaire est constante aussi.

b)- $a_r = d^2r/dt^2 - r\,(d\varphi/dt)^2$ et $a_\varphi = 0$ comme prévu ; soit aussi

$$a_r = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{d\varphi}{dt} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{2C}{r^2}\right)\frac{2C}{r^2} - r\left(\frac{2C}{r^2}\right)^2$$ et avec $1/r = u$

on écrit : $a_r = -4C^2 u^2 [\, d^2u/d\varphi^2 + u] = -k\,u^2$ avec $k = (4\pi/3)\, G\rho\, R_T^3 = GM_T$. En posant $P = 4C^2/k$ on obtient comme solution $u = 1/P + u_0 \cos(\varphi)$ où u_0 serait donné par une condition initiale et le choix de l'origine des φ. Pour l'excentricité $e = u_0 P > 0$ on a les 4 cas : $e = 0$ cercle, $0 < e < 1$ ellipse, $e = 1$ parabole, $e > 1$ hyperbole.

c)- $r_a = P/(1-e)$, $r_p = P/(1+e)$, $r_P + r_a = 2a$, donc $a = P/(1-e^2)$ puis $c = a - r_P = ae$ et enfin $a^2 = b^2 + c^2$ conduisant à $P = b^2/a$.
d) $C = S/T = \pi ab/T \quad \Rightarrow \quad a^3/T^2 = k/(4\pi^2) = GM_T/4\pi^2$, 3ème loi de Kepler.
e)- A.N. : $M_T = 5.95\ 10^{24}$ kg soit une masse volumique $\rho = 5.48\ 10^3 kg.m^{-3}$. L'intérieur de la terre est plus dense que les couches externes.
f)- $M_S = 2.01\ 10^{30}$kg.

II – Potentiel gravitationnel terrestre

1. a)- $V(P) = -\int \frac{G\rho(\mathbf{r}')}{P'P} d^3r'$, on utilise le D.L. habituel partant de **PP'** = **PO** + **OP** , et dans l'approximation $r'/r < R_T/r \ll 1$:

$$\frac{1}{P'P} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{1+\frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}'}{r^2}}\right)^{1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2} + \frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{3}{8}\left(2\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{r}'}{r^2}\right)^2\right)$$

b)- Le terme dipolaire est nul car $\int \rho(\mathbf{r'})\mathbf{r'}d^3r' = \mathbf{0}$ puisque O est le barycentre.
c)- Vérification O.K. en passant aux coordonnées cartésiennes.
d)- Comme $r'^2 = \Sigma\, x'^2_i$, Trace $(K_{ij}) = 3\ K_0$.
e)- Avec la symétrie de révolution d'axe Oz, on peut permuter les indices x et y sans rien changer : $K_{xx} = K_{yy}$ et $K_{zz} = 3K_0 - 2\ K_{xx}$, les termes $K_{xy} = K_{yx} = 0$. Les termes $K_{zx} = K_{xz} = 0$ par symétrie, de même que K_{yz} et K_{zy}. La matrice est diagonale.
f)- En remplaçant dans le terme quadrupolaire : $V_2(r) = -G/(2r^3)\ \{ -K_0 + K_{xx}u_x^2 + K_{yy}u_y^2 + K_{zz}u_z^2 \} = -G/(2r^3)\ \{ -K_0 + K_{xx}(1-u_z^2) + (3K_0 - 2K_{xx})u_z^2 \} = -G/(2r^3)\ (K_{xx} - K_0)(1 - 3u_z^2)$ or $u_z = \cos\theta$. On retrouve alors le développement demandé avec $J_2 = (K_{xx} - K_0)/R_e^2 M_T$, J_2 étant défini sans dimension.
g)- i. Avec ρ = cte, $K_0 = \rho\ R_e^2 R_p\ [R_e^2 \int_{-1}^{1} x^2\ dxdydz + R_e^2 \int_{-1}^{1} y^2\ dxdydz + R_p^2 \int_{-1}^{1} z^2\ dxdydz]$ (*je n'ai pas de police avec tilde !*) et chaque intégrale peut être réécrite sous la forme $\iiint r^2\cos^2\theta\ r^2 dr\ \sin\theta d\theta d\varphi$, l'intégration portant sur une boule de rayon 1 soit un résultat de $4\pi/15$ alors $K_0 = \rho\ 3V_{tot}/4\pi\ [(2R_e^2 + R_p^2)4\pi/15] = M_T(2R_e^2 + R_p^2)/5$.
ii. $K_{xx} = \rho\ R_e^2 R_p\ [\ 3\ R_e^2 \int_{-1}^{1} x^2\ dxdydz] = \rho\ 3V_{tot}/4\pi\ [\ 3\ R_e^2\ 4\pi/15]$ soit $K_{xx} = 3M_T R_e^2/5$ et alors $J_2 = (1 - (R_P/R_e)^2)/5$. (Par curiosité, avec les données de l'énoncé, $J_2 = 1.31\ 10^{-3}$)
2. a)- $\mathbf{g}(r) = -\mathbf{grad}\ V = (\ldots)\ \mathbf{u_r} + 3\ J_2 M_T G R_e^2 (1/r^4)\sin(\theta)\cos(\theta)\ \mathbf{u_\theta}$. Et le théorème du moment cinétique fournit en valeur instantanée l'expression proposée, dans la valeur moyenne sur une durée de l'ordre de quelques périodes de rotation du satellite on peut sortir r de la valeur moyenne par contre il faut y garder $\mathbf{u_\varphi}$.

Mines - PC - Atmosphère

Un satellite (S) de vitesse **V** sur une orbite circulaire basse (c'est-à-dire dont l'altitude z est très inférieure au rayon terrestre R_0) subit des frottements dus à l'atmosphère. Les molécules de l'atmosphère n'étant soumises qu'à l'agitation thermique, on pourra négliger leur vitesse, $v_{Th} \approx 500$ m.s^{-1}, devant V.

22) On suppose que, après une collision entre le satellite de masse M et une molécule de masse m', la vitesse relative des deux objets est nulle (*choc mou*). Montrer alors que la variation $\Delta\mathbf{P}$ de la quantité de mouvement de (S) est $\mathbf{P}_{après} - \mathbf{P}_{avant} \approx -m'\mathbf{V}$.

23) Montrer que l'effet des collisions équivaut à une force **F** s'exerçant sur le satellite. Ce dernier est sphérique, de rayon a. Déterminer **F** en fonction de a, **V**, et μ, masse volumique de l'atmosphère (en considérant le nombre de chocs se produisant à l'intérieur d'un cylindre élémentaire, on trouve une expression du type $F = k(z)V^2$). Est-il indispensable que le satellite soit sphérique ?

On suppose qu'à l'altitude $z << R_0$, $\mu(z) = \mu(0)\exp\left(-\frac{z}{H}\right)$, où $\mu(0)$ et H sont des constantes. On considère alors que, du fait de la force **F**, (S) décrit une orbite circulaire autour de la Terre, le rayon de cette orbite étant lentement variable.

24) Donner sous ces hypothèses une loi approchée de variation de $z(t)$. Il sera avantageux d'introduire la quantité $\tau = \frac{MH}{2\pi a^2 \mu(0) R_0 \sqrt{g_0 R_0}}$, non sans avoir précisé sa dimension.

25) Application numérique : calculer la durée de chute du satellite depuis l'altitude z_i = 180 km jusqu'à $z_f = 0$; on donne : $\mu(0) = 1{,}3$ kg.m^{-3}, $H = 8\ 500$ m, $a = 2$m et $M = 10^3$ kg. Vérifier enfin que la vitesse du satellite est effectivement grande devant la vitesse d'agitation thermique v_{Th} des molécules de l'atmosphère.

$mV + m'V_{th} = (M + m')\ W \approx MV$
$\Delta P = M\ (W - V) \approx M\ (M/(M + m') - 1)\ V$
$\Delta P = -m'V.$

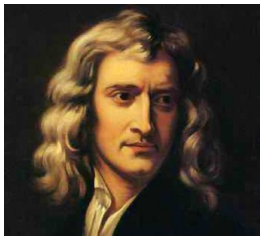
$dp = -\pi a^2 \mu v^2\ dt \qquad F = -\mu v^2 \pi a^2$

. Projeter sur F

$M\ (R_0\ \ g)\ d\ [\ (\ \ r)/r]\ dt = -\mu a^2 \mu_0\ (\exp - 3/2+)\ r_0^2\ g/r$
Avec $r = r_0 + z$.
Autre solution
$M\mathbf{a} = Mg\ R_0^2/r^2\ \mathbf{u_r} - kv^2\ \mathbf{T}$
$-Mv^2/(R_0+z) = m\ g\ R_0^2/(R_0+z)^2 \quad v^2 = g\ R_0^2/(R_0+z) \approx g\ R_0^2$
$m\ dv/dt = m\ dv/dz\ .dz/dt\ .$
$mdv/dt = -\pi a^2 \mu_0 \exp(-z/H)\ .\ v^2$
$dv/dz = -g\ R_0^2/(R_0+z)^2\ .\ 2v$
$m\ (-g\ R_0^2/R_0+z)^2\ .2v)\ \ dz/dt = \pi a^2 \mu\ \exp(-z/H)\ g\ R_0/v^2$
$\Delta z = H\ .\ln \Delta t\ /\tau$

$\tau = 5{,}2\ \mu s \qquad t = 8\ 181\ s \approx 2\ h\ 16' \qquad V\ (180\ km) = 8000$ m.s^{-1} frottement négligeable.

Chapitre C2 : Mouvement dans E et B



Planètes du système solaire

PARTIE C : MÉCANIQUE
C-0 : Mécanique du point
C-1 : Gravitation
C-2 : Mouvement dans E et B
C-3 : Chang^{t} de Référentiel
C-4 : Dynamique
C-5 : Véhicule à roues

Terre et lune

I Force centrale conservative

1 Force gravitationnelle

POSTULAT

Suite à l'observation expérimentale, on postule qu'une particule de charge q interagit avec d'autres particules chargées, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, suivant la **force de LORENTZ**

$$\vec{F}_L = q\left[\vec{E}(M,t) + \vec{v_{q/\mathcal{R}_g}} \wedge \vec{B}(M,t)\right]$$

où le premier terme, indépendant de la vitesse de la charge, fait intervenir le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ (en V.m^{-1}) ;
et le second terme, dépendant de la vitesse et perpendiculaire à celle-ci, dépend du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ (en T).
Ces deux champs forment une **entité** appelée **champ électromagnétique**, créé par les sources constituées des **autres** charges.

II Mouvement et électromagnétisme en limite classique

1 Transformation des champs

Savoir démontrer №1 : Transformation de Galilée (non relativiste)

Par invariance galiléenne des forces, entre deux référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}'_g$, en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_e = \vec{v}_{\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g}$, on a

$$\vec{B}' = \vec{B} \text{ et } \qquad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v_e} \wedge \vec{B} \quad \text{(C.1)}$$

2 Equations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS (magnétique)

LES ÉQUATIONS DE MAXWELL EN ARQS MAGNÉTIQUE

Maxwell-Gauss (MG)

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Flux (MΦ)

$$\text{div}\,\vec{B} = 0$$

Maxwell-Faraday (MF)

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Maxwell-Ampère (MA)

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$$

III Mouvement d'une particule chargée dans les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

« Le champ électrique accélère les particules ; le champ magnétique incurve les trajectoires. »

1 Action du champ électromagnétique sur une particule chargée

Force de Lorentz

Elle résulte de l'action simultanée d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ sur une particule chargée q, de masse m en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un référentiel $(\mathcal{R}_g)$ galiléen

$$\overrightarrow{F}_L = q\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} + \overrightarrow{E}\right)$$

On retiendra que $\dfrac{E}{B}$ a la dimension d'une vitesse.

1.a Analyse dynamique

Savoir démontrer №2 : Caractériser le mouvement

Pour un champ $\left(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}\right)$ donné, c'est le rapport $\boxed{\dfrac{q}{m}}$ qui différencie les particules.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)$$

On essaiera donc toujours de faire apparaître cette caractéristique de la particule lors de la mise en équation du mouvement.

1.b Analyse énergétique : cas des champs statiques

Savoir démontrer №3 : Résultats d'une approche énergétique

Seul le champ électrique peut modifier le module de la vitesse de la particule chargée.
La force magnétique ne travaille pas, donc le champ magnétique n'agit que sur la direction du vecteur vitesse.

2 Action d'un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E_0}$

2.a Etude du mouvement

i Analyse dynamique : application du PFD

ii Aspect énergétique

Savoir démontrer №4 : Energie mécanique d'une particule chargée

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + \mathscr{E}_p$$

avec $\mathscr{E}_p = qV(M)$

Définition :

L'**électron-volt** est l'énergie cinétique gagnée par un électron soumis à une différence de potentiel (ddp) de 1 V.

$$\Delta Ec = |-e\Delta V|$$

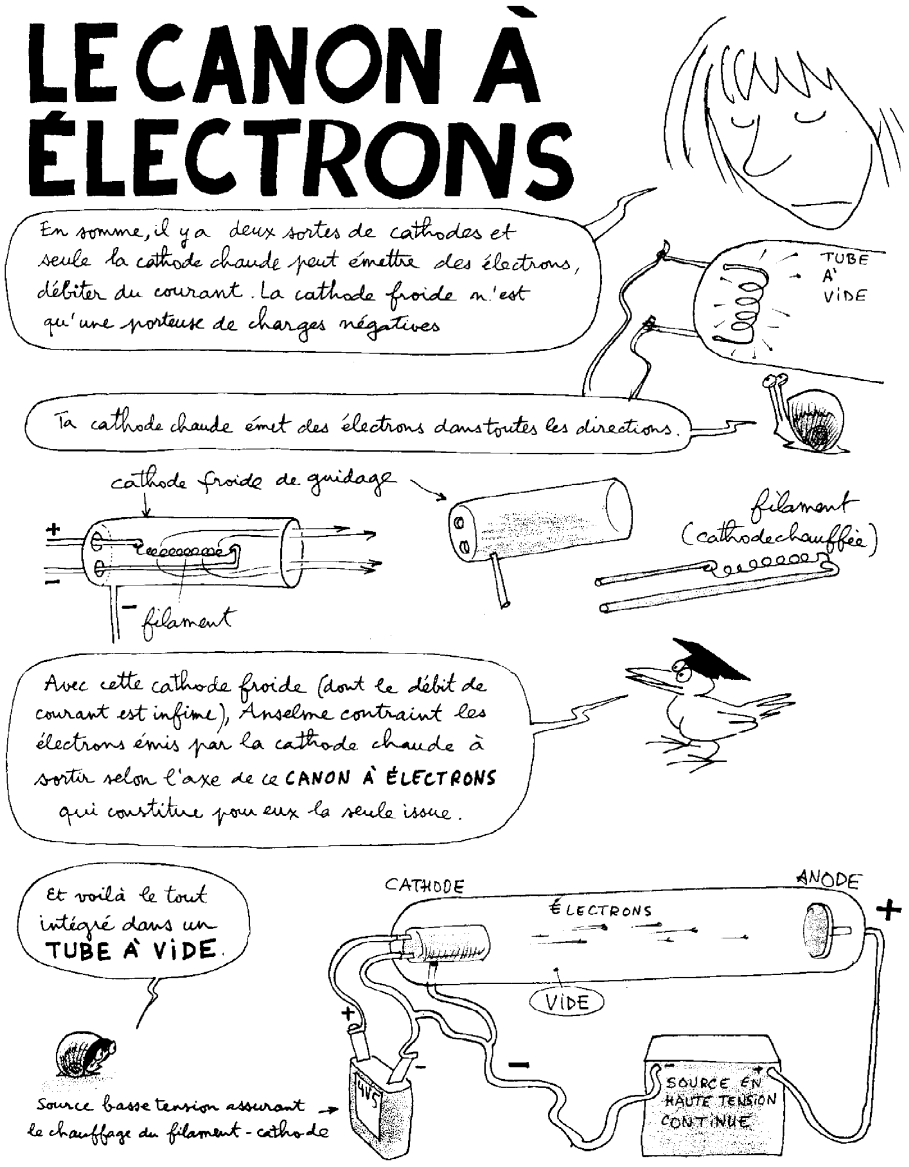
A.N.$\rightarrow \Delta Ec = 1 \text{ eV} = 1,602.10^{-19} \text{ J}$

Remarque : C'est une unité légale d'énergie mais elle n'appartient pas au SI d'unités.

Application 1 : Canon à électrons

On considère un canon à électrons accélérés sous une ddp de 30 kV.
Les électrons sont initialement au repos, estimer la vitesse des électrons en sortie de ce canon.

1. Appliquer le TEM.
2. Exprimer puis calculer v_f.



Limite classique

Pour une particule initialement au repos, la vitesse atteinte sous une tension accélératrice U_a est

$$v = \sqrt{\frac{2qU_a}{m}}$$

Si v approche de la vitesse de la lumière c ($v \simeq 0,1$ ou $0,2c$, cette expression n'est plus valable. Il faut alors adopter un ***traitement relativiste***.

La limite dépend du rapport $\boxed{\frac{q}{m}}$.

Exemples :

- ☞ *électron* : $U_{\max} = 10$ kV
- ☞ *proton* : $U_{\max} = 20$ MV

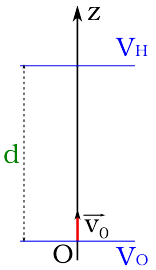
2.b Champ $\overrightarrow{E_0}$ parallèle à la vitesse initiale

Savoir démontrer №5 : Trajectoire et condition d'accélération

$$z(t) = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E_0 t^2 + v_0 t$$

avec $E_0 = \frac{V_H - V_O}{d}$

Accélération si $qE_0 > 0$. Attention au signe de la charge considérée.

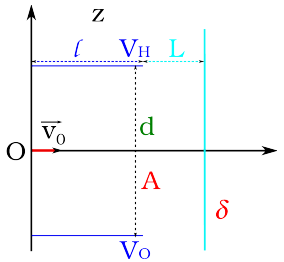


2.c Champ $\overrightarrow{E_0}$ perpendiculaire à la vitesse initiale

Savoir démontrer №6 : Déflexion électrostatique

$$z(y) = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E_0\left(\frac{y}{v_0}\right)^2$$

La trajectoire est parabolique dans la région où règne le champ électrique $\overrightarrow{E_0}$: on parle de *déflexion électrostatique* du faisceau de particules chargées.



Application 2 : Point d'impact sur un écran

En sortie du condensateur (point A), la particule n'est plus soumise au champ électrique.

1. Donner les coordonnées (y_A, z_A) du point A.
2. Quelle est la nature de la trajectoire au delà de ce point ?
3. Donner son équation dans le plan (yOz)
4. En déduire la déflexion δ relevée sur un écran placé à la distance L du condensateur.
   C'est le phénomène qu'on retrouve dans un oscilloscope analogique : la déflexion est proportionnelle à la tension appliquée U.
5. Compte-tenus des ordres de grandeur : $\ell = 1$ cm, $L = 20$ cm, $d = 1$ cm et $\frac{1}{2}mv^2 = 2$ keV, quelle tension U faut-il appliquer pour obtenir $\delta = 1$ cm.
6. Conclure.

Application 3 : Spectromètre de masse

δ étant proportionnelle au rapport $\boxed{\frac{q}{m}}$, caractéristique d'une particule, on peut

- ✗ en analysant des trajectoires, mesurer ce rapport $\frac{q}{m}$;
- ✗ « trier » des particules.

2.d Cas général

3 Action d'un champ magnétostatique $\overrightarrow{B_0}$ uniforme et indépendant du temps

3.a Etude du mouvement

Définition :

On définit le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{\omega}_C = -\frac{q}{m}\overrightarrow{B}}$$

dont le module $\omega_C = |\frac{qB}{m}|$ est appelé **pulsation cyclotron** et s'exprime en **rad.s^{-1}**.
Ce vecteur caractérise l'évolution du vecteur vitesse au cours du temps.

Exemple : *Electron dans le champ magnétique terrestre*
avec $B_T = 2.10^{-5}$ T

$$\omega_C = 3,5.10^6 \text{ rad. s}^{-1}$$

Savoir démontrer №7 : Mouvement de précession dans un champ magnétique

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\omega}_C \wedge \overrightarrow{v}$$

La vitesse d'une particule chargée soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme, effectue une *précession* autour du champ magnétique.
Elle s'accompagne des propriétés suivantes :

- ☞ $\|\overrightarrow{v}\| = \text{cste}$
- ☞ $\alpha = \left(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{v}\right) = \alpha_0$ donc $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{B} = \text{cst.}$
- ☞ $\|\overrightarrow{a}\| = \text{cste} = \|\overrightarrow{\omega}_C \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{\omega}_C\|\|\overrightarrow{v}\| \sin\alpha.$

3.b Champ $\overrightarrow{B_0}$ parallèle à la vitesse initiale

Savoir démontrer №8 : Mouvement rectiligne uniforme

Comme le champ magnétique conserve la norme du vecteur vitesse, le mouvement est **rectiligne uniforme**.

3.c Champ $\overrightarrow{B_0}$ perpendiculaire à la vitesse initiale $v_0\,\overrightarrow{u}_x$

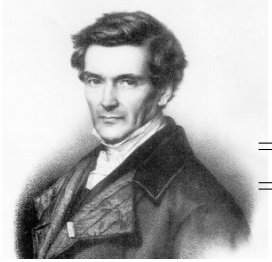
Savoir démontrer №9 : Mouvement circulaire uniforme

La trajectoire est un cercle dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{B}_0$, centré en $0, -\dfrac{v_0}{\omega_C}$, de rayon $\dfrac{v_0}{\omega_C}$.

La période de rotation $T = \dfrac{2\pi}{\omega_C} = \dfrac{2\pi m}{|q|B_0}$ est indépendante de la vitesse de la particule.

3.d Cas général

Chapitre C3 : Changement de référentiel



Gaspard Coriolis(1792-1843)

Partie C : Mécanique
C-0 : Mécanique du point
C-1 : Gravitation
C-2 : Mouvement dans E et B
C-3 : Chang^{t} de Référentiel
C-4 : Dynamique
C-5 : Vehicule à roues

Application 1 :

On considère une pierre qui est lachée en haut du mat d'un bateau qui se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v}$.
En se plaçant dans le référentiel du quai, indiquer où tombe la pierre si

1. la vitesse $\overrightarrow{v}$ est constante.
2. l'accélération du bateau est constante.

Comment interpréter cette expérience dans le référentiel du bateau ?

I Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

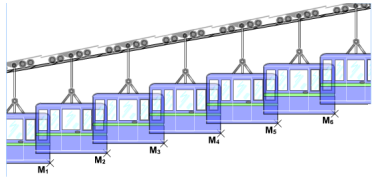
Définition :

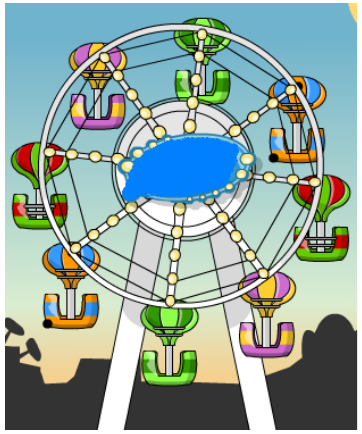
- ✗ Par définition, un référentiel est un **solide de référence**, auquel on associe une horloge.
- ✗ En mécanique galiléenne, les horloges des différents référentiels restent synchrones. La définition de l'horloge n'est donc pas indispensable.
- ✗ On **fixe** sur le solide des axes de manière à constituer un répère orthonormé (O,x,y,z). O est le centre du repère.
- ✗ Lorsque l'on étudie le mouvement d'un référentiel $\mathscr{R}'$ par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$, on étudie le mouvement des axes de $\mathscr{R}'$par rapport $\mathscr{R}$
- ✗ On nomme **vitesse absolue** : $\overrightarrow{v}_{/\mathscr{R}}(M)$ et l'accélération absolue : $\overrightarrow{a}_{/\mathscr{R}}(M)$
- ✗ On nomme **vitesse relative** : $\overrightarrow{v}_{/\mathscr{R}'}(M)$ et l'accélération relative : $\overrightarrow{a}_{/\mathscr{R}}(M)$

1 Référentiels en translation

Définition :

- ✗ On dit que deux référentiels sont en translation si les directions des axes de $\mathscr{R}'$ restent fixes par rapport à $\mathscr{R}$.
- ✗ On parle de translation rectiligne si en plus O' a une trajectoire rectiligne dans $\mathscr{R}$
- ✗ On parle de translation circulaire si O' a une trajectoire circulaire dans $\mathscr{R}$





2 Référentiel en rotation

- ✗ On dit que deux référentiels sont en rotation si les directions des axes de $\mathscr{R}'$ sont en rotation autour d'un axe particulier de $\mathscr{R}$.
- ✗ Si l'axe de rotation est fixe dans $\mathscr{R}$, on parle de rotation autour d'un axe fixe.
- ✗ On note $\overrightarrow{\Omega}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}}$ le vecteur rotation de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$.

Définition :

- ✗ Rotation autour de l'axe fixe $Oz = Oz'$. Soit φ l'angle entre (Ox, Ox')
- ✗ Le vecteur rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est

$$\overrightarrow{\Omega}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_z$$

- ✗ Pour une rotation uniforme, $\overrightarrow{\Omega} = \mathrm{Cte}\,\overrightarrow{u}_z$

II Loi de composition des vitesses

1 Dérivation d'un vecteur unitaire

Savoir démontrer №1 : Dérivation dans deux référentiels

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire du référentiel $\mathcal{R}'$ indépendant du temps.

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}} \wedge \overrightarrow{u}$$

2 Loi de composition des vitesses

Savoir démontrer №2 : vitesse d'entraînement et vitesse relative

Dans le cas général, on repère M dans deux référentiels :

$$\mathscr{R} : (O, x, y, z) \quad \text{et} \quad \mathscr{R}', (O', x', y', z')$$

La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\overrightarrow{v}_{/\mathscr{R}}(M) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{v}_{/\mathscr{R}'}(M) + \overrightarrow{v}(O')_{/\mathscr{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}} \wedge \left(\overrightarrow{O'M}\right)$$

Définition :

- ✗ On nomme **vitesse absolue** : $\overrightarrow{v}_{/\mathscr{R}}(M)$
- ✗ On nomme **vitesse relative** : $\overrightarrow{v}_{/\mathscr{R}'}(M)$
- ✗ On nomme **vitesse d'entraînement** = vitesse du point coïncident : $\overrightarrow{v}_{/\mathscr{R}'}(M)$

Application 2 : Référentiel barycentrique

Montrer que la vitesse de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ peut s'exprimer simplement en fonction de la vitesse dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$

$$\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}^*}(M) + \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(G)$$

3 Cas de la rotation autour d'un axe fixe

Savoir démontrer №3 : Loi de composition des vitesses

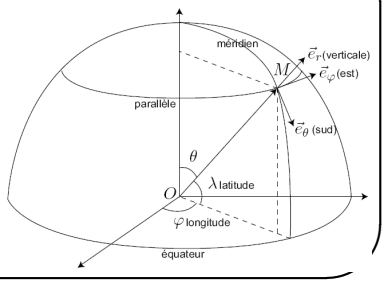
Dans le cas d'une rotation autour d'un axe fixe, on trouve la relation

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

Application 3 : Vitesse pour une fusée

Soit $\mathcal{R}_G$ le référentiel géocentrique.
Soit $\mathcal{R}_T$ le référentiel terrestre.
$\mathcal{R}_T$ est en rotation autour de $\mathcal{R}_G$.

Donner la vitesse dans $\mathcal{R}_G$, d'un satellite lancé avec une vitesse verticale depuis un point M de la surface de le Terre.



III Loi de composition des accélérations

1 Enoncé

Savoir démontrer №4 : Loi de composition des accélérations

$$\boxed{\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_{\mathcal{C}}}$$

On pose

$$\boxed{\overrightarrow{a}_e = \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(O') + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a}_{\mathcal{C}} = 2\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M)}$$

Définition :

- ✗ On nomme **accélération absolue** : $\overrightarrow{a}_{/\mathscr{R}}(M)$
- ✗ On nomme **accélération relative** : $\overrightarrow{a}_{/\mathscr{R}}(M)$
- ✗ On nomme **vitesse d'entraînement** = vitesse du point coïncident : $\overrightarrow{v}_{/\mathscr{R}'}(M)$
- ✗ Le terme complémentaire se nomme **accélération de Coriolis ou accélération complémentaire**.

2 Cas de la translation

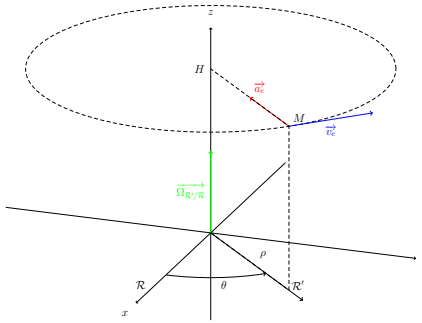
3 Rotation autour d'un axe fixe

Savoir démontrer №5 : Rotation uniforme autour d'un axe fixe

Dans le cas d'une **rotation uniforme** autour d'un axe fixe, on trouve la relation

$$\overrightarrow{a}_{/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{a}_{/\mathcal{R}'}(M) + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c$$
$$\overrightarrow{a}_e(M) = -\Omega^2\overrightarrow{HM}$$
$$\overrightarrow{a}_c = 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}'}(M)$$

$\overrightarrow{a}_c$ est l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire.
H est la projection de M sur l'axe de rotation.



4 Cas particulier de l'accélération de Coriolis

Savoir démontrer №6 : Accélération de Coriolis

- Elle est nulle en cas d'équilibre relatif , en cas de translation des référentiels.
- $\overrightarrow{a}_c.\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}'} = 0$
- Direction sur une sphère avec un déplacement Nord-Sud.

5 Loi de composition des vecteurs rotations - HP

Soit un solide $(\mathcal{S})$ en rotation dans $(\mathcal{R})$, caractérisée par le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}}$, défini par rapport à des axes fixes de $\mathcal{R}$;

Soit $(\mathcal{R}')$ un second référentiel dans lequel $(\mathcal{S})$ est en mouvement de rotation caractérisé par le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'}$,

Si le référentiel $\mathcal{R}'$ est en rotation par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, alors la loi de composition des vecteurs rotation s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$$

Chapitre C4 : Dynamique en référentiel non galiléen

Galileo Galilei dit Galilée (1564 - 1642)

PARTIE C : MÉCANIQUE
C-0 : Mécanique du point
C-1 : Gravitation
C-2 : Mouvement dans E et B
C-3 : Changt de Référentiel
C-4 : Dynamique
C-5 : Vehicule à roues

Léon Foucault (1819-1868)

I Relation fondamentale de la dynamique

1 Enoncé

Savoir démontrer №1 : RFD en référentiel non galiléen

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen, dans un référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen, on a la relation suivante :

$$\boxed{m\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'} = \sum \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{iC}}}$$

Savoir démontrer №2 : Forces d'inertie

✗ $\overrightarrow{F_{ie}}$ est la force d'inertie d'entrainement, on note $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ la vitesse angulaire de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

$$\boxed{\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e} = -m\left(\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(O') + \Omega^2\overrightarrow{HM}\right)}$$

H est la projection orthogonale de M sur l'axe de rotation.
Pour une rotation , la force est **axifuge**.

✗ $\overrightarrow{F_{iC}}$ est la force d'inertie de Coriolis,

$$\boxed{\overrightarrow{F_{iC}} = -m\overrightarrow{a_C} = -m\left(2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}}(M)\right)}$$

Cette force fait intervenir la vitesse relative $\overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}}(M)$

On obtient les équations du mouvement en projetant la relation fondamentale de la dynamique sur les axes de projection.

2 Dynamique en référentiel non galiléen

Savoir démontrer №3 : Principe d'inertie

Tous les référentiels en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen sont galiléens.

Application 1 : Chute depuis un mat de bateau

Etude du mouvement d'une masse m dans un navire accéléré uniformémément avec $\overrightarrow{a} = a\overrightarrow{u}_x$. Etude dans le référentiel $\mathscr{R}$ galiléen du quai et $\mathscr{R}'$ non galiléen du bateau.

3 Effet d'impesanteur

Savoir démontrer №4 : Impesanteur

Un système est dit en **impesanteur** lorsque son poids apparent est nul.

- ✗ Grandeur indiquée sur une balance placée dans un ascenseur : impesanteur en chute libre.
- ✗ Impesanteur dans un satellite en rotation autour de la Terre.
- ✗ Vol parabolique dans un avion.

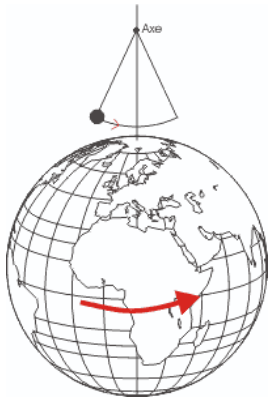
4 Effets de la force d'inertie de Coriolis

Pour comprendre l'effet de la force d'inertie de Coriolis, le plus simple est de se placer autour du pôle.

Pendule de Foucault

Sous la coupole du Panthéon (latitude λ), L. Foucault a mis en évidence en 1852 que le plan d'oscillation d'un pendule simple tourne avec une période

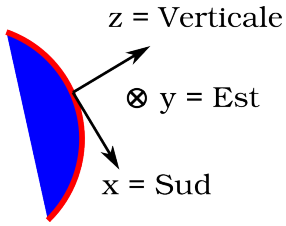
$$T_{\text{Plan}} = \frac{T}{\sin\lambda} = 31 \text{ h } 52 \text{ min}$$



Savoir démontrer №5 : Coriolis sur la Terre

L'ordre de grandeur, sur Terre, de la force de Coriolis est pour $v \simeq 700$ m.s^{-1} :

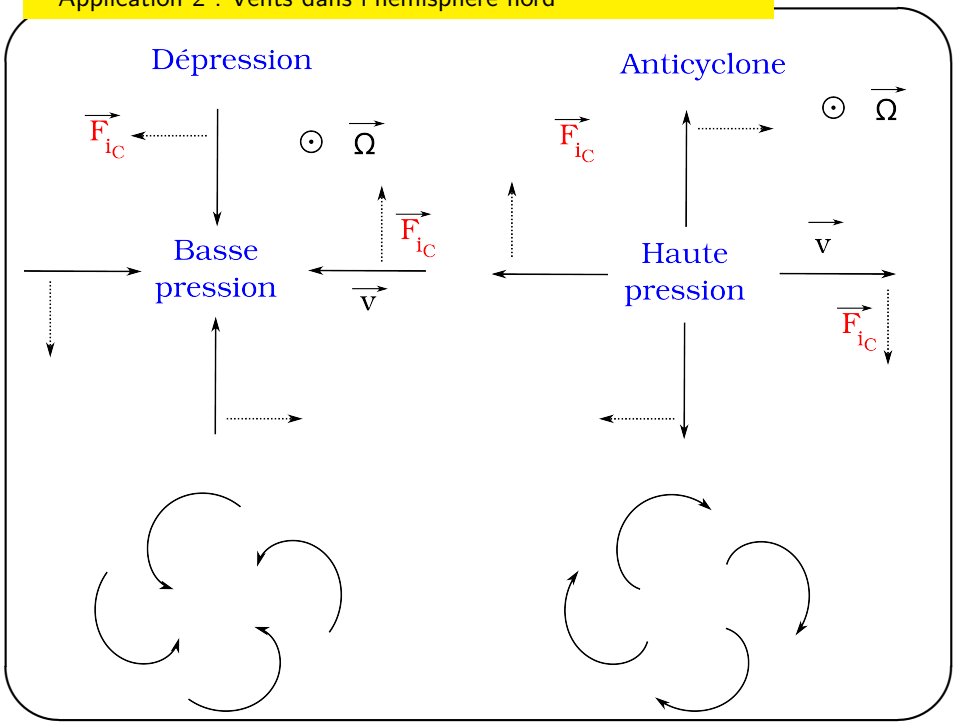
$$\boxed{\frac{F_{iC}}{mg} = \frac{2\omega v(M)}{g} \simeq 1\ \%}$$



Dans un référentiel galiléen, on trouve

$$\overrightarrow{F}_{iC} = \left| \begin{array}{c} 2m\Omega\sin\lambda\dot{y} \\ -2m\Omega\left(\sin\lambda\dot{x} + \cos\lambda\dot{z}\right) \\ 2m\Omega\cos\lambda\dot{y} \end{array} \right.$$

Application 2 : Vents dans l'hémisphère nord



II Théorème du moment cinétique

1 Rappels

✗ Le **moment cinétique** par rapport à O, dans $\mathcal{R}$, d'un point matériel est

$$\boxed{\overrightarrow{L_{O,\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M)}$$

✗ Le **moment en O d'une force** est $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$

✗ Si O est un point fixe, on a le TMC

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_{o,\mathcal{R}}}(M)}{dt} = \sum_{forces} \overrightarrow{\mathcal{M}}}$$

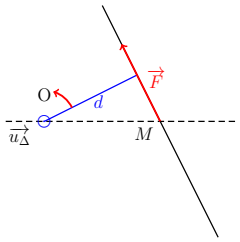
2 Forme scalaire

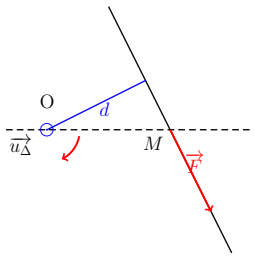
1. Pour une rotation autour d'un axe fixe passant par (Oz). L'orientation de $\overrightarrow{u_z}$ donne l'orientation du plan (Oxy)
2. Le moment cinétique sur l'axe : $L_z = \overrightarrow{L_{O,\mathcal{R}}}(M).\overrightarrow{u_z}$
3. $\mathcal{M}_z = \overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{u_z}$. $\mathcal{M}_z$ peut se calculer facilement avec la méthode suivante :

$$|\mathcal{M}_z| = F \times d$$

d est le bras de levier et F l'intensité de la force.

4. Signe positif "si la force fait tourner dans le sens positif", négatif sinon.





3 Forces d'inertie

Si le référentiel n'est pas galiléen , il faut ajouter les moments de forces d'inertie :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_{o,\mathcal{R}}}(M)}{dt} = \sum_{forces} \overrightarrow{\mathcal{M}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{Fie} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{FiC}}$$

4 Exemples

Application 3 : Pendule dont l'extémité oscille

On considère un pendule simple dont l'extrémité A est contrainte à se déplacer à partir de $t = 0$ en suivant la loi :

$$x_A = x_0 \sin(\omega t)$$

Montrer que θ vérifie l'équation

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{x_0}{L}\omega^2 \sin(\omega t)$$

On a donc

$$\theta(t) = \frac{x_0\omega^2}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)$$

III Théorème de l'énergie cinétique

1 Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen

Savoir démontrer №6 : TEC

La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas dans dans $\mathscr{R}$.
La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail des forces d'inertie d'entrainement.

$$\mathrm{d}E_c = \sum_{\vec{F}} \delta W\left(\vec{F}\right) + \delta W\left(\vec{f}_{ie}\right)$$

$$\Delta E_c = \sum_{\vec{F}} W\left(\vec{F}\right) + W\left(\vec{f}_{ie}\right)$$

2 Energie potentielle associée à la force d'inertie d'entrainement

Savoir démontrer №7 : Energie potentielle associée à Fie

Pour une rotation uniforme qutour d'un axe fixe, la force d'inertie d'entrainement dérive de l'énergie potentielle :

$$E_{\text{ie}} = -\frac{1}{2} m\Omega^2 HM^2 + \text{Cte}$$

3 Exemples

IV Dynamique terrestre

1 Poids d'un corps

Définition :

Le **poids** est défini par la relation $\vec{T} + m\vec{g} = \vec{0}$: il est égal à la force subie par le fil à plomb ; **sa direction définit la verticale du lieu**.
Soit :

$$m\vec{g} = m\left(-\frac{GM_T}{R_T^2}\vec{u}_r + \Omega^2\overrightarrow{HM}\right)$$

Remarque : **Le poids n'est donc pas entièrement d'origine gravitationnelle, mais comporte une composante inertielle**. La force d'inertie d'entrainement est incluse dans le poids.

Définition :

On définit le **champ de pesanteur**

$$\vec{g}(M) = -\frac{GM_T}{R_T^2}\vec{u}_r + \Omega^2\overrightarrow{HM}$$

norme du champ de pesanteur :

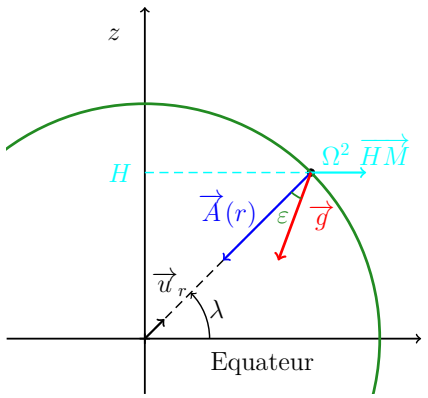
- Aux pôles, $\vec{g}(M)$ se réduit à l'interaction gravitationnelle : $g_0 = 9,8$ m.s^{-2}
- A l'équateur, il faut retrancher le terme inertiel $\Omega^2 R_T = 0,034$ m.s^{-2}, soit $3.10^{-3} g_0$

direction du champ de pesanteur :

La direction de $\overrightarrow{g}$ n'est pas la direction du champ de gravitation de la Terre.

ε est maximum au voisinage de $\lambda = 45°$ et vaut alors $\varepsilon \simeq 11'$.

Sauf mention contraire, on négligera cet angle et on représentera $\overrightarrow{g}$ dans la direction $\overrightarrow{u}_r$.



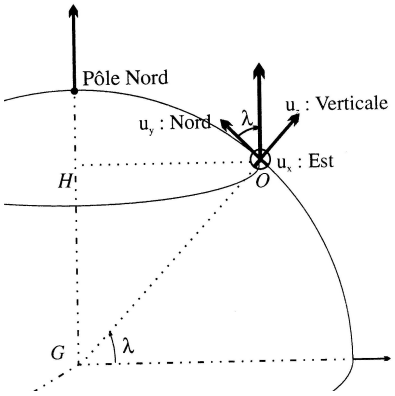
2 Déviation vers l'est

Point méthode - Méthode des perturbations

Le problème comporte un effet principal (noté ordre 0) et un petit effet perturbatif complémentaire (ordre 1, 2 ...)

1. On traite le problème en négligeant le "petit effet". On obtient l'ordre 0 (non perturbé).
2. A l'aide de ce résultat, on exprime le "petit effet" (négligé précédemment).
3. On reprend le calcul initial en tenant compte maintenant de cet effet : cela apporte une correction au résultat obtenu c'est ce que l'on appelle l'ordre 1 de la perturbation.
4. On peut recommencer ainsi les points 2 et 3, pour obtenir l'ordre 2 de la perturbation. Et ainsi de suite...

Savoir démontrer №8 : Théorie des perturbations



On lache une masse m de la hauteur h à la surface de la Terre. On choisit le référentiel terrestre avec $\overrightarrow{u}_z$ la verticale du lieu ($z = 0$ sur Terre), $\overrightarrow{u}_x$ vers l'Est, $\overrightarrow{u}_y$ vers le nord.

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -2\Omega\dot{z}\sin\theta + 2\Omega\dot{y}\cos\theta \\ \ddot{y} &= -2\Omega\dot{x}\cos\theta \\ \ddot{z} &= g + 2\Omega\dot{x}\sin\theta \end{cases} \quad \text{(C.2)}$$

Ordre 0 en Ωt , on constate :

$$z \simeq \frac{1}{2}gt^2 + h, x = y = 0$$

Ordre 1 en Ωt et $\dot{y} \ll \dot{z}$:

$$\boxed{x \simeq \frac{g\Omega\cos\lambda}{3}t^3}$$

A l'ordre 2 déviation vers le sud.

3 Terme de marées

3.a Définition des référentiels

- ✗ Soit O le centre de la Terre.
- ✗ Soit $\mathcal{R}_C$ **le référentiel de Copernic** : centre de masse du système solaire, 3 directions fixes.
- ✗ Soit $\mathcal{R}_K$ **le référentiel de Kepler** : centre de masse du soleil, 3 directions fixes (= héliocentrique).
- ✗ Soit $\mathcal{R}_G$ **le référentiel géocentrique** : centre de la Terre et les 3 mêmes directions. $\mathcal{R}_G$ est en transaltion par rapport à $\mathcal{R}_C$
- ✗ Soit $\mathcal{R}_T$ **le référentiel térrestre** en rotation par rapport à $\mathcal{R}_G$: centre de la Terre O, trois directions liées à la Terre.

3.b Terme de marées

Savoir démontrer №9 : RFD de la Terre dans $\mathcal{R}_K$

$$M_T \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}_K}(O) = M_T \overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Astres}}(O)$$

On en déduit

$$\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}_K}(O) = \overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Astres}}$$

Savoir démontrer №10 : Terme de marées

Soit M un point à la surface de la Terre. La RFD pour M s'écrit dans le référentiel de COPERNIC

$$m\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}_K}(M) = m\overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Terre}}(M) + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Astres}}(M)$$

La loi de composition des accélérations permet d'écrire :

$$\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}_K}(M) = \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}_T}(M) + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_{\mathcal{C}}$$

L'accélération d'entrainement fait apparaitre le terme $\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}_K}(O)$. On peut exprimer ce terme en utilisant une RFD à la Terre (Savoir démontrer précédent). On peut alors écrire la RFD sous la forme :

$$\boxed{m\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}_K}(M) = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F}_{i,\mathcal{C}} + m\left(\overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Astres}}(M) - \overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Astres}}(O)\right)}$$

On note

$$\overrightarrow{\mathscr{C}}(M) = \left(\overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Astres}}(M) - \overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Astres}}(O)\right)$$

le terme de marée.
On note

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Terre}}(M) + \Omega^2\overrightarrow{HM}$$

le champ de gravité à la surface de la Terre.

Application 4 : Marées sur la Terre

Le terme de marée est très petit devant le terme de gravitation :

$$\frac{\overrightarrow{\mathscr{C}}_{\odot}(M)}{\overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Terre}}(M)} \simeq 5,2.10^{-8}$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathscr{C}}_{\text{Lune}}}{\overrightarrow{\mathscr{C}}_{\odot}(M)} \simeq 2,2$$

PROBLÈME B : PENDULES DE FOUCAULT

Les questions de ce problème constituent une suite logique et sont de fait à traiter dans l'ordre indiqué. La plupart des questions peuvent donner lieu à une application numérique ; même si ces dernières ne sont pas explicitement demandées, une attention toute particulière sera donnée aux applications numériques lors de la correction de ce problème.

On prendra pour l'accélération de la pesanteur au pôle nord, à Paris et à l'équateur : g=9,82345, 9,8094 et 9,7805 m.s^{-2} respectivement ; R = 6400 km pour le rayon de la terre (supposée sphérique).

PENDULE DU PÔLE ...

On cherche à étudier le pendule de Foucault dans différentes situations. Pour cela on se placera dans un premier temps au pôle Nord avec un pendule constitué d'un fil (de masse négligeable) de 70 m de longueur au bout duquel une masse de 28 kg est fixée. L'attache du fil est fabriquée de manière à assurer au pendule la possibilité de se balancer avec la même liberté quelle que soit la direction. On suppose que le système est tel que les frottements et dissipations puissent être négligés en première approximation et que le fil est parfaitement rigide.

Exprimer la période P_0 de ce pendule dans l'hypothèse des faibles amplitudes.

B.1.b Si on fournit à t=0 une énergie totale à ce système de 100 J comment va varier au cours du temps l'énergie cinétique et l'énergie potentielle (répondre sans calcul avec éventuellement un graphique pour illustrer votre propos) ?

Quelle est l'amplitude maximale θ_M des oscillations correspondantes ?

B.1.d Donner l'expression de la tension T exercée sur le fil en fonction de l'angle θ (On supposera également pour cette question que le fil est parfaitement rigide).

Au bout d'un balancement complet (aller-retour) du pendule, de combien se sera déplacé la projection verticale au sol du point correspondant au passage par une vitesse nulle du pendule ?

Si maintenant, on trace au sol l'ensemble des projections des points pour lesquels l'énergie cinétique du pendule est nulle quelle figure génère-t-on ?

Sachant que la terre fait une rotation complète autour de son axe en T_o =24 heures, combien de temps faut-il au pendule pour parcourir intégralement cette figure ?

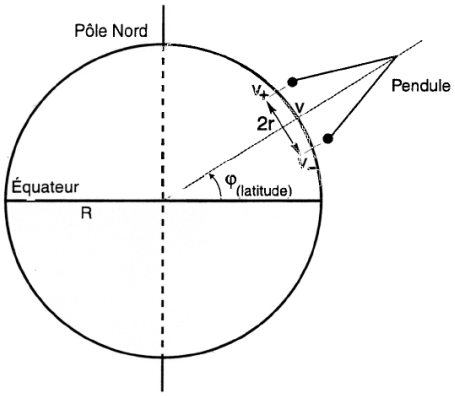
B.2 PENDULE DU PANTHÉON

On place maintenant au sein du Panthéon à Paris un pendule en tout point identique au précédent : constitué d'un fil (de masse négligeable) de 70 m de longueur au bout duquel une masse de 28 kg est fixée. L'attache du fil est également fabriquée de manière à assurer au pendule la possibilité de se balancer avec la même liberté quelle que soit la direction. On suppose que le système est tel que les frottements et dissipations puissent être négligés en première approximation et que le fil est parfaitement rigide.

Quelle est la période P_2 de ce pendule ?

Sachant que la latitude de cette ville est $\varphi = 48° 51'$ Nord, quelle est, au repos, la vitesse de rotation v_o (en m/s et en km/h) de notre pendule autour de l'axe de la terre suite au mouvement de cette dernière (on se place ici dans un référentiel géocentrique et on notera R le rayon de la terre supposée sphérique pour simplifier ; on rappelle que tous les points de même latitude φ sont situés sur des « parallèles » à l'équateur et que les points de même longitude (méridiens) sont situés sur des cercles passant par les pôles et coupant les parallèles à angle droit ; par définition l'équateur est à latitude nulle) ?

B.2.c Si on lançait le pendule sur une oscillation Nord-Sud, sans rotation de la terre, le pendule oscillerait entre deux points de latitude $\varphi + \Delta\varphi$ et $\varphi - \Delta\varphi$ distants de 2r. Déterminer r dans les conditions de la question **B.1.b**.



B.2.d Considérant maintenant la rotation de la terre, déterminer dans le référentiel géocentrique les vitesses v_+ et v_- de ces deux points autour de l'axe de la terre suite au mouvement de cette dernière ainsi que l'écart en vitesse Δv de ces points par rapport à v_o.

On lance le pendule suivant un méridien (axe nord-sud) en le poussant à partir de son point au repos O. On a vu qu'en O la composante « est-ouest » de la vitesse sera v_o et que, la terre tournant sur elle-même, les points d'amplitude maximale du pendule se déplacent avec une vitesse légèrement différente.

B.2.e En déduire, le temps T que mettra le pendule, pour un observateur immobile dans le Panthéon, pour faire un tour complet, sachant que la terre tourne autour d'elle-même en T_o=24 heures. Justifier votre réponse.

Quel est le sens de rotation du plan d'oscillation du pendule pour un observateur dans le Panthéon (justifier votre réponse) ?

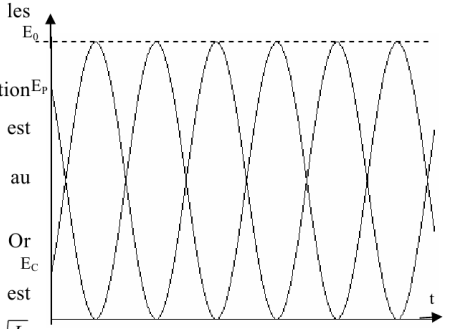
Que se passe-t-il si on réalise cette expérience en un point de latitude 48° 51' Sud ?

B.2.h Que se passe-t-il si on réalise cette expérience sur l'équateur ?

Problème B

B.1.a) Dans l'hypothèses des très faibles amplitudes, la période d'un pendule simple est $\boxed{P_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$. A.N. $P_0 = 2\pi\sqrt{\frac{70}{9{,}82345}} = \underline{16{,}77\ \text{s}}$

b) En l'absence de frottement et dissipation, l'énergie totale garde toujours la valeurs initiale E_0. Énergie cinétique et potentielle oscillent en opposition de phase à la pulsation $2\omega_0$. L'énergie cinétique est nulle (et l'énergie potentielle maximale) lorsque l'élongation est maximale en valeur absolue). En supposant $E_0 < E_{REVOLUTION}$ le mouvement est sinusoïdal est les courbes sont alors les suivantes :



c) On peut écrire l'élongation $\theta(t) = \theta_M\cos(\omega_0 t)$ donc l'énergie cinétique est $E_C = \frac{1}{2}m.L^2.[\omega_0.\theta_M\sin(\omega_0 t)]^2$ et vaut au maximum $E_{CMAX} = \frac{1}{2}\ m.L^2.[\omega_0.\theta_M]^2$. Or $E_{CMAX} = E_0$ (lorsque l'énergie potentielle est nulle) donc $\theta_M = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}\frac{1}{L\omega_0} = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}\frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{g}}$

d'où $\boxed{\theta_M = \sqrt{\frac{2E_0}{mgL}}}$. A.N. $\theta_M = \sqrt{\frac{2.100}{28.9{,}82345.70}} = 0{,}102$ rad soit 5,8°.

d) Dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, la masse *m* est soumise à la tension du fil de module T et à son poids. La projection de la relation fondamentale sur la direction du fil s'écrit : $m\frac{v^2}{L} = T - mg\cos(\theta)$. Or $E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgL[1 - \cos(\theta)]$ en prenant l'altitude à l'équilibre comme origine de l'énergie potentielle. On en déduit $T = m\frac{1}{L}\frac{2}{m}\left(E_0 - mgL(1-\cos(\theta))\right) + mg\cos(\theta)$ soit $T = 2\left(\frac{1}{2}mg\theta_M^2 - mg\right) + 3mg\cos(\theta)$. d'où $\boxed{T = mg\left(\theta_M^2 + 3\cos(\theta) - 2\right)}$.

e) Dans le référentiel géocentrique qui est galiléen, le plan d'oscillation du pendule reste fixe donc le sol de le Terre tourne par rapport à ce plan avec une période T_0. La projection verticale du point du pendule de vitesse nulle (correspondant donc à une vitesse nulle) est à la distance $L\theta_M$ du point de projection de la position d'équilibre et possède donc dans le référentiel lié à la Terre une vitesse linéaire $v_L = \frac{2\pi}{T_0} L\theta_M$. Après une durée P_0, ce point a donc parcouru la distance $\boxed{d = \frac{2\pi}{T_0}P_0 L\theta_M}$ par rapport au sol. A.N <u>d = 8,7 mm</u>.

f) Ce point parcourt sur le sol un cercle de rayon $\rho = L\theta_M$. A.N. <u>ρ = 7,14 m.</u>

g) Le pendule étant au pôle, le nombre d'oscillations aller-retour pour faire un tour est $\frac{2\pi L\theta_M}{d}$ et la durée nécessaire $\frac{2\pi L\theta_M}{d}.P_0 = T_0$. Le plan de rotation du pendule situé au pôle étant fixe par rapport au référentiel géocentrique, sa durée de par rapport au sol est bien T_0.

2.a) $P_2 = 2\pi\sqrt{\frac{70}{9{,}8094}}$ = <u>16,78 s.</u>

b) Dans le référentiel géocentrique, la vitesse de l'objet à l'équilibre par rapport au sol est $v_0 = R\cos(\varphi).\frac{2\pi}{T_0}$. A.N. $v_0 = 6400\times10^3.\cos(48°51).\ \frac{2\pi}{86400}$ = <u>308 m.s^{-1}</u> soit <u>1,1×10^3 km.h^{-1}</u>.

c) L'angle $\Delta\varphi$ étant petit, on a $r = R.\Delta\varphi$.

d) Les points extrêmes sont à des distances différentes de l'axe de rotation de la Terre. Ils possèdent donc des vitesses différentes $v_+ = R\cos(\varphi + \Delta\varphi).\frac{2\pi}{T_0}$ et $v_- = R\cos(\varphi - \Delta\varphi).\frac{2\pi}{T_0}$. Lorsque la latitude varie de $d\varphi$, la vitesse varie de $dv = R(-\sin(\varphi))d\varphi$. En supposant les variations de vitesse petites, on a en valeur absolue, $\boxed{\Delta v = R\frac{2\pi}{T_0}\sin(\varphi)\Delta\varphi}$.

e) Dans l'expression précédente, on reconnaît $r = R.\Delta\varphi$ donc $\Delta v = \frac{2\pi}{T_0}$ r.sin(φ). C'est la vitesse linéaire, *par rapport au sol*, de la projection des points de vitesse nulle sur le méridien du point d'équilibre. En faisant l'approximation que cette vitesse est la même pour toutes les positions de cette projection, la période nécessaire pour faire un tour est $T = \frac{2\pi}{\Delta v / r}$ soit $\boxed{T = \frac{T_0}{\sin(\varphi)}}$.

f) Dans le référentiel géocentrique, le plan d'oscillation du pendule est fixe. Or le point de la Terre coïncidant avec la projection du point de vitesse nulle située au nord du point d'équilibre a une vitesse plus petite, dans ce géocentrique, que le point situé au sud. Pendant une durée τ, la distance parcourue au Nord est donc plus petite qu'au Sud. Par conséquent, dans le référentiel lié au sol, le plan d'oscillation tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

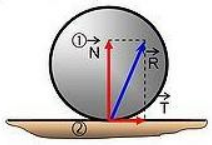
g) Dans un point de latitude Sud, la vitesse angulaire de rotation des points de vitesse nulle change de signe comme sin(φ) donc le plan d'oscillation du pendule tourne par rapport au sol dans le sens anti-horaire.

h) A l'équateur, sin(φ) = 0 donc le plan d'oscillation ne tourne pas. (Les points de vitesse nulle situés de part et d'autre de l'équateur ont la même vitesse dans le référentiel géocentrique).

Chapitre C5 : Véhicule à roues

Roue

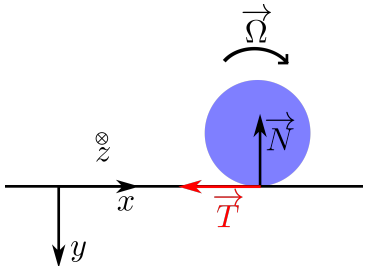
PARTIE C : MÉCANIQUE
C-0 : Mécanique du point
C-1 : Gravitation
C-2 : Mouvement dans E et B
C-3 : Changement de Ref.
C-4 : Dynamique
C-5 : Véhicule à roues



Frottement

I Roulement sans glissement

✗ Soit une roue de rayon r qui roule sur un plan horizontal.
✗ On note $\overrightarrow{v}$ la vitesse du centre de la roue.
✗ Soit Ω la vitesse angulaire de la roue.



Savoir démontrer №1 : Condition de roulement sans glissement

La condition de **roulement sans glissement est**

$$v = r\Omega$$

DÉFINITION :

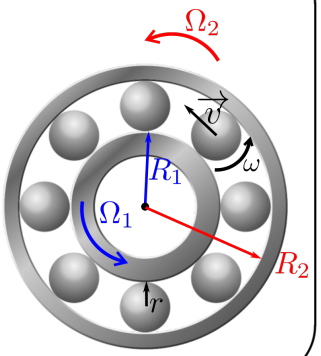
Soit $\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{v}\,(I \in \text{bille}) - \overrightarrow{v}\,(I \in \text{sol})$ la vitesse de glissement.

ATTENTION... $\overrightarrow{v}_g = (v - r\Omega)\,\overrightarrow{u}_x$

Application 1 : Roulement à bille

Dans un roulement à bille, le cylindre intérieur tourne à la vitesse angulaire Ω_1, le cylindre extérieur tourne à la vitesse angulaire Ω_2. Un ensemble de bille de rayon r permettent d'assurer le roulement sans glissement aux points de contact. On montre que

$$v = \frac{R_1\Omega_1 + R_1\Omega_1}{2}$$
$$\omega = \frac{R_1\Omega_1 - R_1\Omega_1}{2r}$$



II Actions sur une roue

DÉFINITION :

On peut appliquer sur une roue 2 types d'actions :
1. Les forces
2. Les couples

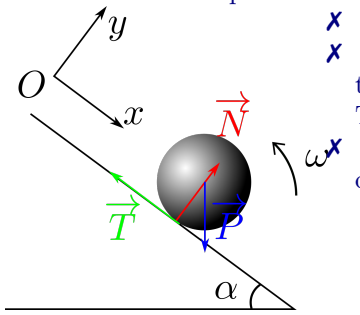
1 Forces appliquées à une roue

DÉFINITION :

✗ Ces forces vont intervenir dans **le théorème de la quantité de mouvement**, sous forme du moment de ces forces dans le **théorème du moment cinétique** et sous forme d'un travail dans le **théorème de l'énergie cinétique** (ou sous forme d'énergie potentielle dans le théorème de l'énergie mécanique).
✗ Exemples : poids, force de réaction normale et tangentielle, forces d'inertie ...

Application 2 : Boule sur un plan incliné

On considère une boule qui roule sur un plan incliné.



- ✗ 4 Inconnues : $x, \omega, \vec{T}$ et $\vec{N}$
- ✗ TQM va donner 2 équations, TMC (1 équation) , TEC (1 equation) mais la même que TMC = soit 3 équations.
- ✗ Il va falloir faire une hypothèse : glissement ou roulement sans glissement pour résoudre.

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - T \quad \text{(C.3)}$$
$$0 = -mg\sin\alpha + N \quad \text{(C.4)}$$
$$J\dot{\omega} = -rT \quad \text{(C.5)}$$
$$\frac{1}{2}J\omega^2 - mgx\sin\alpha = \text{Cte} \quad \text{(C.6)}$$

Réponse :

— *Les équations* (C.3) *et* (C.5) *permettent de trouver l'équation* (C.6).
— *Si on suppose le glissement, alors* $T = fN = fmg\cos\alpha$ *et* $\ddot{x} = g\sin\alpha\,(1 - f\text{cotan}\alpha)$
Le glissement est réalisé lorsque

$$\tan\alpha > f$$

Application 3 : Véhicule à roues

- ✗ On étudie un véhicule comprenant 4 roues.
- ✗ Soit $\vec{F} = F\vec{u}_x$ la force de traction.
- ✗ Poids $\vec{P} = M\vec{g} = Mg\vec{u}_y$, résistance de l'air : $\vec{f} = -\alpha v^2\vec{u}_x$.
- ✗ Réaction du sol chaque roue : $\vec{R} = T\vec{u}_x + N\vec{u}_y$

Exprimer le TQM.

Réponse :

Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, le TQM sur l'ensemble de la voiture, en projection devient

$$4N = -Mg$$
$$F + 4T - \alpha v^2 = M\ddot{x}$$

2 Couple moteur ou couple de frottement

Définitions :

- ✗ Le système peut recevoir un ensemble de force de résultante nulle, on nomme ce système un couple noté $\vec{\Gamma}$.
- ✗ Le couple va apparaître dans le **TMC et le TEC**, mais pas dans le TQM.
- ✗ Il est appliqué au centre de la roue, on applique donc le TMC au centre de la roue dans le référentiel barycentrique.

Savoir démontrer №2 : Roue motrice

On note $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u}_z$ le couple exercé par l'arbre moteur sur une roue motrice (rayon a) qui tourne à la vitesse Ω et $\vec{\Gamma}_f = -\Gamma_f\vec{u}_z$ un couple de frottement de roulement.
Le TMC s'écrit :

$$J\dot{\omega} = aT + \Gamma - \Gamma_f$$

Le TQM est inchangé.

III Quelle action fait avancer une voiture ?

Définition :

La puissance d'un couple est

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{\Gamma}.\vec{\Omega}}$$

1 Phase d'accélération

Savoir démontrer №3 : Cas de la roue motrice

Le TEC pour la roue donne

$$\frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}J\Omega^2}{\mathrm{d}t} = (\Gamma - \Gamma_f)\,\Omega + \overrightarrow{R}.\overrightarrow{v}_g$$

La force de réaction ne travaille pas en cas de non glissement ($v_g = 0$).
En cas de glissement, $\overrightarrow{R}.\overrightarrow{v}_g < 0$ le frottement est dissipatif.

Savoir démontrer №4 : Cas de la roue libre

Le TEC pour la roue donne

$$\frac{1}{2}J\frac{\mathrm{d}\Omega^2}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{v}_g + \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v} - \alpha v^3$$

La force $\overrightarrow{F}$ fait avancer la roue et lutte contre les frottements.

2 Vitesse constante

Savoir démontrer №5 : Cas de la roue motrice

Le couple moteur compense les frottements :

$$\Gamma\Omega = \Gamma_f\Omega - \overrightarrow{R}.\overrightarrow{v}_g$$

Savoir démontrer №6 : Cas de la roue libre

la force de traction compense les frottement et la réaction tangentielle :

$$\overrightarrow{F} = T + \alpha v^2$$

Chapitre C6 : Mécanique du solide

I Définitions

1 Barycentre

DÉFINITION :

✗ Pour une **distribution discrète des masses**, m_i en des points M_i, on trouve le barycentre G par les relations :

$$\sum_i m_i\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\overrightarrow{OM_i} \quad \text{et} \quad \sum_i m_i\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$$

✗ On peut généraliser cette relation pour une **distribution continue des masses :**

$$\left(\iiint \mu(M)\mathrm{d}\tau\right)\overrightarrow{OG} = \iiint \mu(M)\overrightarrow{OM}\mathrm{d}\tau \qquad \iiint \mu(M)\overrightarrow{GM}\mathrm{d}\tau = \overrightarrow{0}$$

2 Eléments cinétiques

2.a Quantité de mouvement

✗ Pour une **distribution discrète des masses**, la quantité de mouvement $\overrightarrow{P}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{P} = \sum_i m_i\overrightarrow{v}_i$$

✗ On peut généraliser cette relation pour une **distribution continue des masses :**

$$\overrightarrow{P} = \iiint_M \mu(M)\overrightarrow{v}(M)\mathrm{d}\tau$$

Savoir démontrer №1 : Centre de gravité

Pour un solide, la quantité de mouvement est la même que celle d'un point matériel placé en G et de masse M :

$$\overrightarrow{P} = M\overrightarrow{v}_G$$

2.b Moment cinétique

✗ Pour une **distribution discrète des masses**, le moment cinetique $\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(\text{Système})$ s'écrit :

$$\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(\text{Système}) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M_i)$$

✗ On peut généraliser cette relation pour un solide :

$$\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(\text{Solide}) = \iiint_M \overrightarrow{OM} \wedge \mu(M)\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M)\mathrm{d}\tau$$

✗ On peut définir le moment cinétique par rapport à un autre point O', alors

$$\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(\text{Solide}) = \overrightarrow{L}_{O',\mathcal{R}}(\text{Solide}) + \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{P}$$

2.c Energie cinétique

✗ Pour une **distribution discrète des masses**, l'énergie cinétique E_c s'écrit dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$E_c(\text{Système}) = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

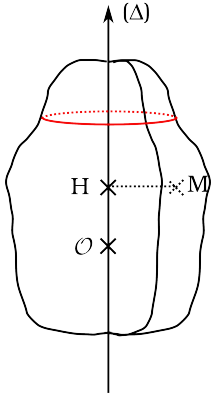
✗ On peut généraliser cette relation pour un solide :

$$E_c(\text{Solide}) = \iiint \frac{1}{2}\mu(M)v^2\,(M)\,\mathrm{d}\tau$$

II Rotation autour d'un axe fixe

Soit (Δ), l'axe de rotation et $\overrightarrow{u}_\Delta$ un vecteur unitaire sur Δ.
On suppose que l'axe (Δ) est fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$.
On note $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur rotation dans $\mathcal{R}$.

1 Expression du moment cinétique par rapport à l'axe



Savoir démontrer №2 : Moment cinétique par rapport à un axe

Le moment cinétique par rapport à l'axe peut s'écrire :

$$L_\Delta = \overrightarrow{L}_{\mathcal{R}}.\overrightarrow{u}_\Delta = \Omega \iiint \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)^2 \mathrm{d}m$$

On pose J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Δ) :

$$\boxed{J_\Delta = \iiint \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)^2 \mathrm{d}m = \iiint HM^2 \mathrm{d}m}$$

On retient que

$$\boxed{L_\Delta = J_\Delta \Omega}$$

Ce moment d'inertie est homogène au produit d'une masse par le carré de la distance à l'axe (Δ) : cela caractérise la répartition de la masse autour de l'axe (Δ).
Plus la masse est éloignée de l'axe, plus J_Δ est important.

Propriété à connaître

2 Energie cinétique

Savoir démontrer №3 : Energie cinétique

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ), l'énergie cinétique s'écrit :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2}$$

Application 1 : Second théorème de Koenig

On considère un cylindre plein de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mR^2$, d'axe (Oz) en roulement sans glissement sur un plan. Son énergie cinétique est :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}J\Omega^2}$$

Après simplifications, on trouve

$$E_c = \frac{3}{4}mR^2\Omega^2$$

3 Remarques

- ✗ Le moment d'inertie est différent suivant les axes d'un solide.
- ✗ Dans la cas général, $\overrightarrow{L}$ n'est pas colinéiare à $\overrightarrow{u}_\Delta$ sauf si $\overrightarrow{u}_\Delta$ est un axe propre du solide = axe de symétrie.
- ✗ Pour des axes parallèles, J_Δ est minimum pour l'axe passant par G.

III Actions mécaniques sur un solide

1 Système de forces et éléments de réduction

DÉFINITION :

✗ Une action d'un solide sur un autre est très complexe, mais elle peut être modélisée par :
la résultante des forces $\overrightarrow{R}$:

$$\boxed{\overrightarrow{R} = \sum_i \overrightarrow{F}_i = \int_P \mathrm{d}\overrightarrow{F}\,(P)}$$

le moment résultant des forces en O :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \int_P \overrightarrow{OP} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F}(P)}$$

Ces deux vecteurs sont les **éléments de réduction** en O du système de forces.
✗ Par la suite, on ne fait plus intervenir les forces $\overrightarrow{F}_i$, mais la résultante $\overrightarrow{R}$ et le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O$.

On peut choisir un autre point particulier : par exemple le point O' :
On a

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{R}$$

Propriété à connaître

Les éléments de réduction sont alors $\overrightarrow{R}$ et le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}$

2 Exemples d'éléments de réduction

2.a Forces intérieures à un solide

Savoir démontrer №4 : Eléments de réduction des forces intérieures

Pour les forces intérieures, on a : $\forall\, O$

$$\overrightarrow{R}_{\text{int}} = \overrightarrow{0} \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O,\text{int}} = \overrightarrow{0}$$

2.b Force ponctuelle

Si l'action est une force ponctuelle appliquée en H, alors les éléments de réduction sont $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_H = \overrightarrow{0}$
La réciproque est vraie : si un système de forces de résultante $\overrightarrow{R} \neq 0$, et s'il existe un point H tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_H = \overrightarrow{0}$ alors on dit que H est le point d'application du système de forces.

✗ Dans le TMC en H , on a $\overrightarrow{\mathcal{M}}_H = \overrightarrow{0}$
✗ Dans le TMC en A , on a $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{R}$

Propriété à connaître

2.c Champ de force uniforme

Les cas les plus fréquents sont la pesanteur et la force d'inertie d'entrainement pour un référentiel en translation.

Savoir démontrer №5 : Eléments de réduction du champ de pesanteur

$$\overrightarrow{R} = m\overrightarrow{g} \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{g}$$

Tout se passe comme si les forces de gravité étaient réductibles à une force ponctuelle appliquée en G et de résultante $\overrightarrow{R} = m\overrightarrow{g}$.

Savoir démontrer №6 : Eléments de réduction de la force d'inertie d'entrainement

On se place dans un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On note $\overrightarrow{a}_e = a\,(O')_{\mathcal{R}}$ l'accélération d'entrainement (vecteur uniforme). Le solide subit le champ de force $\overrightarrow{F}\,(M) = -m\overrightarrow{a}_e$, les éléments de réduction sont :

$$\overrightarrow{R} = -m\overrightarrow{a}_e \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}_O = -\overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{a}_e$$

Tout se passe comme si les forces d'inertie d'entrainement étaient réductibles à une force ponctuelle appliquée en G et de résultante $\overrightarrow{R} = -m\overrightarrow{a}_e$.

On retient dans $\mathcal{R}^*$ les forces d'inertie vérifient :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{ie} = -m\overrightarrow{a}\,(G)_{\mathcal{R}}} \text{ et } \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_G = \overrightarrow{0}}$$

Propriété à connaître

2.d Couple de force

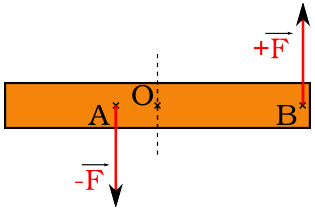
DÉFINITION :

✗ Un système de forces de résultante nulle $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$ est appelé **couple de forces**.
✗ On a

$$\forall O, O' \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'} = \overrightarrow{\Gamma}$$

✗ Le moment étant indépendant du point on le note $\overrightarrow{\Gamma}$ ou $\overrightarrow{C}$ et on l'appelle **couple**.

1. Un couple peut être réalisé par un ensemble de forces réparties sur la périphérie du solide (par exemeple sur un cylindre).
2. On peut réaliser un couple à l'aide de deux forces :
   Soient 2 forces opposées appliquées en 2 points distincts A et B d'un même système, leur résultante $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.
   Pour $\overrightarrow{F}$ fixée, ce couple est maximal lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{F}$ sont perpendiculaires et lorsque la distance entre les points A et B est maximale



3. On peut également définir un **couple de frottement fluide** pour une rotation autour de Oz,

$$\overrightarrow{\Gamma} = -\alpha\omega\overrightarrow{u}_z$$

IV Théorèmes de la mécanique du solide

1 Théorème de la résultante cinétique TRC

Savoir démontrer №7 : Théorème de la résultante cinétique (ou dynamique) : TRC ou TRD

Pour un solide $(\mathcal{S})$ de masse m en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$, soumis à des actions extérieurs dont la résultante vaut $\overrightarrow{R}_{\text{ext}}$ et des actions intérieures nulles $\overrightarrow{R}_{int} = \overrightarrow{0}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{a}(G)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{R}_{\text{ext}}}$$

où $\overrightarrow{R}_{\text{ext}}$ inclut les forces d'inertie si le référentiel est non galiléen.

Dans le cas général cette relation donne 3 équations (trois projections)
On a 2 équations pour un mouvement plan
On a 1 équation pour un problème unidimensionnel.

Propriété à connaître

2 Théorème du moment cinétique TMC

2.a Cas particulier O fixe

Savoir démontrer №8 : Théorème du moment cinétique pour O fixe

La dérivée du moment cinétique d'un solide de masse m, **en un point O fixe ou $\overrightarrow{v}(O) \wedge \overrightarrow{v}(G) = 0$** d'un référentiel galiléen $(\mathcal{R}_g)$ est égale au moment en O des actions extérieures au système.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O,\text{ext}}}$$

Si le référentiel est non galiléen, il faut ajouter le moment en O des forces d'inertie

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O,\text{ext}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}\left(\overrightarrow{F}_{ie}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}\left(\overrightarrow{F}_{iC}\right)$$

On choisit en général le point d'application du TMC en un point où les actions sont inconnues : ainsi elles n'apparaissent pas dans le TMC.

Propriété à connaître

2.b Cas particulier de la rotation autour d'un axe fixe

Savoir démontrer №9 : TMC scalaire autour d'un axe Δ de rotation fixe

Soient (Δ) un axe fixe de rotation de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_\Delta$ et O un point de l'axe (Δ), alors

$$\boxed{J_\Delta \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}}}$$

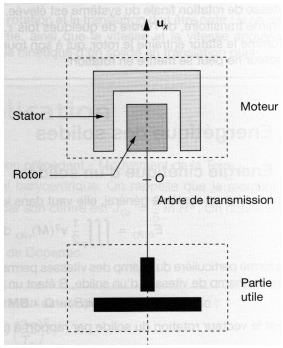
2.c Important : TMC en G dans $\mathcal{R}^*$

Savoir démontrer №10 : TMC* en G

On peut appliquer le TMC en G dans $\mathcal{R}^*$ **sans que l'on ait à tenir compte des forces d'inertie.**

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L^*}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G,\text{ext}}}$$

Application 2 : Étude dynamique d'un moteur



On s'intéresse au fonctionnement d'une machine comportant une pièce tournante (perceuse, machine à laver le linge...). Le rotor, partie tournante du moteur, entraîne la partie tournante utile de la machine (par exemple le tambour dans le cas d'une machine à laver le linge) grâce à un arbre de transmission.
L'axe de rotation est orienté par le vecteur $\overrightarrow{u}_x$. La vitesse angulaire de rotation du rotor autour de $\overrightarrow{u}_x$ est notée ω.
La partie fixe du moteur (stator) entraîne le rotor en exerçant sur lui un couple dont la valeur en projection sur $\overrightarrow{u}_x$ est $\mathcal{M}_s > 0$.

1. En déduire le signe du couple $\mathcal{M}_u$ exercé par la partie utile tournante sur le rotor.
2. Souvent, l'ensemble est plongé dans un fluide visqueux (huile) dont l'action sur le rotor se ramène à un couple $\mathcal{M}_f = -\alpha\omega$. On suppose que les actions de contact des différentes pièces entre elles sont parfaites, de telle sorte que leur moment projeté sur $\overrightarrow{u}_x$: $\mathcal{M}_c$ est nul (cas d'une *liaison pivot parfaite*).
   On note J_x le moment d'inertie du rotor autour de l'axe de rotation. En déduire l'équation différentielle satisfaite par $\omega(t)$.
3. En supposant que les couples $\mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}_u$ sont à peu près constants dès la mise en rotation du rotor, trouver l'évolution de $\omega(t)$ sachant qu'on met le moteur en marche à $t = 0$.
4. En déduire la vitesse angulaire de fonctionnement en régime permanent. Dépend-elle des frottements du fluide ? Ces derniers ont-ils une autre influence ? Que dire des couples $\mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}_u$?

Réponse :

1. *Le stator entraîne le rotor, et le rotor entraîne la partie utile tournante. Ainsi, les couples exercés par le stator sur le rotor et par le rotor sur la partie utile sont de même signes (donc positifs). Par principe de l'action-réaction, le couple exercé par la partie utile sur le rotor est de signe opposé : $\mathcal{M}_u < 0$. La partie utile tend à freiner le rotor, alors que le stator tend à l'accélérer.*
2. *Rotation autour d'un axe fixe, on applique le TMC scalaire*

$$\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t} = J_x\dot{\omega} = \mathcal{M}_{x,ext} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u + \mathcal{M}_f + \mathcal{M}_x(\overrightarrow{p})$$

Or $\mathcal{M}_x(\overrightarrow{p}) = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{p}.\overrightarrow{u}_x = 0$ *car* $m\overrightarrow{g} \parallel \overrightarrow{u}_x$, *soit finalement*

$$J_x\dot{\omega} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u - \alpha\omega$$

3. *On résout cette équa diff*

$$\omega(t) = \frac{\mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u}{\alpha} + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

où $\tau = \dfrac{J_x}{\alpha}$ *est le temps caractéristique de l'évolution du système. La CI* $\omega(0) = 0$ *permet de déterminer* A

$$\boxed{\omega(t) = \frac{\mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u}{\alpha}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

4. *Une fois le régime permanent atteint* ($t \gg \tau$), *la vitesse angulaire vaut*

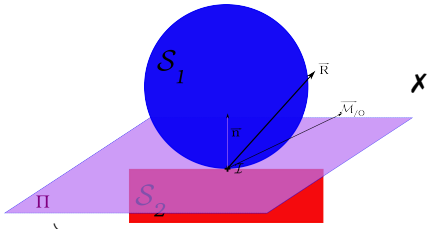
$$\omega_\infty = \frac{\mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u}{\alpha}$$

Cette vitesse dépend notamment des frottements du fluide : plus les frottements sont importants, moins la vitesse de rotation finale est élevée. Ils ont en outre un effet sur la durée du régime transitoire par l'intermédiaire de τ.

Comme le stator entraîne le rotor, qui à son tour entraîne la partie utile, il faut espérer que $\mathcal{M}_s > |\mathcal{M}_u|$ *sinon, le moteur ne peut se mettre en rotation !*

V Force et moment des actions de contact entre solides

1 Définitions



Les éléments de réduction des actions de contact, au point de contact I

✗ *une force de frottement*

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_T + \overrightarrow{R}_N$$

où $\overrightarrow{R}_N$ *est la réaction normale,*

et $\overrightarrow{R}_T \in (\Pi)$ *plan tangent est la* ***force de frottement solide***

✗ *Un moment de frottement*

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_T + \overrightarrow{\mathcal{M}}_N$$

où $\overrightarrow{\mathcal{M}}_T$ *est le* ***moment de roulement*** *et* $\overrightarrow{\mathcal{M}}_N$ *est le* ***moment de pivotement.***

Remarque : *Si le contact entre deux solides est sans frottement alors* $\overrightarrow{R}_T = \overrightarrow{0}$ *... mais il reste* $\overrightarrow{R}_N$ *!*

Le moment en I *des actions de contact est nul*

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/I} = \overrightarrow{0}$$

Propriété à connaître

2 Etude du frottement de glissement

2.a Lois phénoménologiques de Coulomb pour un contact ponctuel

Lois de Coulomb

1. *La force de réaction normale* $\overrightarrow{R}_N$ *(de 2 sur 1) est toujours dirigée du support* $(\mathcal{S}_2)$ *vers le mobile* $(\mathcal{S}_1)$. *La composante tangentielle de* $\overrightarrow{R}_T$ *dépend de la nature du mouvement.*
2. *En cas de* ***glissement****, la force de réaction tangentielle* $\overrightarrow{R}_T$ *ou force de frottement, est toujours colinéaire et opposée à la vitesse de glissement* $\overrightarrow{v}_g$ *:*

$$\overrightarrow{R}_T.\overrightarrow{v}_g < 0$$

Elle est alors proportionnelle à la force d'appui normale :

$$\|\overrightarrow{R}_T\| = f\|\overrightarrow{R}_N\| \qquad \text{avec } f > 0$$

où le coefficient sans dimension f *est le coefficient de frottement dynamique.*

3. *En l'absence de glissement* ($\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{0}$), *la force de réaction tangentielle* $\overrightarrow{R}_T$ *ne peut dépasser une certaine limite :*

$$\|\overrightarrow{R}_T\| < f_0\|\overrightarrow{R}_N\|$$

et sa direction est a priori ***indéterminée*** *: elle est opposée à la vitesse de glissement qu'il y aurait en cas de glissement.*

On note $f_0 > 0$, *le coefficient de frottement statique ou coefficient de frottement d'adhérence.*

Remarque : *Le coefficient de frottement d'adhérence est en général très légèrement supérieur à f pour une même nature de contact (mêmes matériaux et mêmes états de surface). Cependant, sauf indication contraire, on prendra* $\boxed{f = f_0}$.

Contact	f
acier-acier	$0,2$
bois-bois	$0,3$
garniture frein-acier	$0,45$
caoutchouc-bitume	$0,6$

	$\overrightarrow{v}_g$	$\overrightarrow{R}_T$
Statique ou Roul. ss Gliss.	$\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{0}$	$\|\overrightarrow{R}_T\| < f_0 \|\overrightarrow{R}_N\|$
Glissement	$\overrightarrow{v}_g \neq \overrightarrow{0}$	$\|\overrightarrow{R}_T\| = f \|\overrightarrow{R}_N\|$

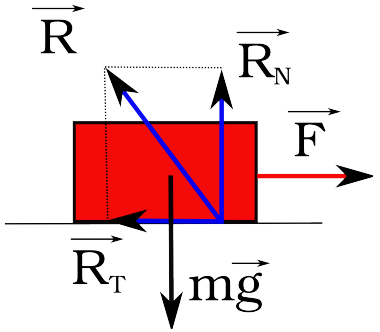
2.b Cône de frottement

Savoir démontrer №11 : Etude statique : cône de frottement

On considère un solide en équilibre :

$$\overrightarrow{R} + m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

En écrivant la condition de non glissement, on montre que cela impose que $\overrightarrow{R}$ reste dans le cône d'axe $\overrightarrow{u}_N$ et de demi-angle au sommet (point de contact) $\varphi_0 = \arctan f_0$.



Remarque : *La relation est valable en **statique** et en cas de **roulement sans glissement**.*

Si $\overrightarrow{R}$ sort du cône, il y a rupture :
- ☞ *de l'équilibre : $\Rightarrow$ glissement ;*
- ☞ *de l'état de surface : $\Rightarrow$ arrachement.*

2.c Utilisation dans le TMC

✗ *Pour un contact ponctuel entre deux solides, on doit tenir compte dans le TMC des moments des forces $\overrightarrow{R}_T$ et $\overrightarrow{R}_N$ sauf si $O = I$.*

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O,ext} + \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{R}_T + \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{R}_N}$$

✗ *Pour un contact non ponctuel, on peut ajouter en plus des forces $\overrightarrow{R}_T$ et $\overrightarrow{R}_N$ un moment de frottement $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, le TMC en O fixe devient alors :*

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O,ext} + \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{R}_T + \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{\mathcal{M}}}$$

Propriété à connaître

3 Théorème des actions réciproques

Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux solides en interaction, $(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ est un système isolé. On a alors

$$\overrightarrow{R}_{1\to 2} = -\overrightarrow{R}_{2\to 1} \text{ et } \overrightarrow{\mathcal{M}}_{1\to 2} = -\overrightarrow{\mathcal{M}}_{2\to 1}$$

Une autre manière d'écrire ce résultat consiste à utiliser le système des deux solides et remarquer que

$$\overrightarrow{R}_{int} = \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O,int} = \overrightarrow{0}$$

VI Méthode de résolution

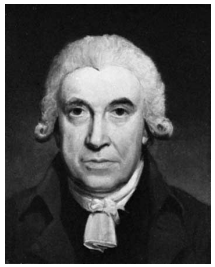
Point méthode - *Problème de Mécanique*

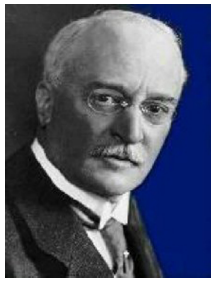
1. *Comprendre le mécanisme et faire un schéma clair. Identifier le système.*
2. *Compter les degrés de liberté. Paramétrer ces degrés de liberté :*
   - ✗ *Choisir un paramètre bijectif*
   - ✗ *Qui s'annule (si possible) sur la position d'équilibre.*
   - ✗ *Choisir un angle plutot qu'une distance.*
3. *Identifier les actions : intérieures ou extérieures ? Conservatives ?*
4. *Nombre d'inconnues = Nb de deg liberté + Nb actions inconnues.*
5. *Formuler une hypothèse sur le mouvement : glissement ou non. En déduire l'égalité correspondante.*
6. *Choisir alors le théorème le mieux adapté :*
   - ✗ *Le TEC (énergie cinétique) est à priviligier pour des problèmes à 1 degré de liberté.*
   - ✗ *Utiliser le TMC autour d'un axe fixe, ou dans $\mathcal{R}^*$ (en G sans les forces d'inertie)*
   - ✗ *Utiliser le TRC pour avoir les équations du mouvement de G.*
   - ✗ ***On doit avoir : Nb équations + Nb hypothèses = Nb d'inconnues***
7. *On vérifie l'hypothèse et on commente le résultat.*

Partie D : Thermodynamique

Avoir compris :

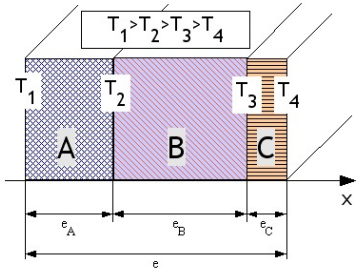
- ✗ Comprendre la notion de flux
- ✗ Comprendre le mécanisme de la diffusion - loi de Fick
- ✗ Système ouvert - système fermé
- ✗ Diagrammes de changement d'état
- ✗ Transformation réversible
- ✗ Rôle d'un potentiel thermodynamique
- ✗ Faire le lien avec la thermochimie : réaction quantitative ...

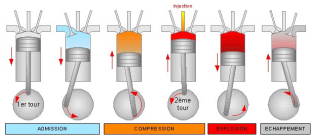




Savoir appliquer :

- ✗ Faire un bilan sur un système infinitésimal à une dimension
- ✗ Savoir expliciter et utiliser les conditions aux limites
- ✗ Connaitre l'équation de diffusion et l'équation de la chaleur, exprimer le temps caractéristique de diffusion
- ✗ Formules générales de thermodynamique
- ✗ Bilan d'énergie totale.
- ✗ Savoir prouver qu'une transformation est réversible
- ✗ Exprimer la résistance thermique, savoir calculer des résistances équivalentes (en série, en parallèle)
- ✗ Savoir définir un potentiel thermodynamique et trouver son expression





Chapitre D1 : Diffusion de particules

Diffusion de thé dans l'eau

PARTIE D : THERMODYNAMIQUE

D-1 : Diffusion de particules
D-2 : Premier et second principe
D-3 : Machines thermiques
D-4 : Diffusion thermique
D-5 : Rayonnement
D-6 : Thermo microscopique

Adolf Eugene FICK (1829-1901))

I Etude de la diffusion

Gradient de concentration, Agitation thermique, diffusion et auto-diffusion.

1 Courant de particules

1.a Densité de particules

DÉFINITION :

Soit $n(M,t)$ la **densité de particules** au point M : c'est le nombre de particules par unité de volume qui s'exprime en m^{-3}.
Dans un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$, le nombre de particule à la date t est donc

$$\mathrm{d}N(t) = n(M,t)\mathrm{d}\tau$$

Dans un volume $\mathcal{V}$, le nombre de particules à la date t est

$$N(t) = \iiint_{\mathcal{V}} n(M,t)\mathrm{d}\tau$$

DÉFINITION :

On note $C(M,t)$ la **concentration** de particules, c'est à dire le nombre de moles par unité de volume :

$$C(M,t) = \frac{n(M,t)}{\mathcal{N}_A} \quad \text{en mol.m}^{-3}$$

1.b Vecteur densité de flux

Soit une **surface élémentaire** $\mathrm{d}S$ placée en un point M et délimitée par une ligne orientée,

On définit le vecteur unitaire $\vec{u}_N$, normal à la surface $\mathrm{d}S$ et dont le sens est déterminé par la règle d'Ampère par rapport à l'orientation de la ligne.

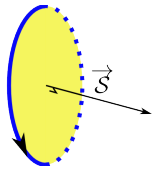
On peut alors définir le vecteur $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{u}_N$.

On cherche à exprimer le nombre $\mathrm{d}^{II}N$ de particules qui traversent la surface $\mathrm{d}S$ pendant la durée $\mathrm{d}t$ (c'est à dire entre t et $t+\mathrm{d}t$). Ce nombre est *deux fois infinitésimal* : en temps et en surface, d'où la notation $\mathrm{d}^{II}N$.

DÉFINITION :

Par définition le **vecteur densité volumique de flux** de particules $\vec{j}$ est

$$\mathrm{d}^{II}N = \vec{j}(M,t).\mathrm{d}\vec{S}\ \mathrm{d}t$$



Le nombre de particules qui traversent une surface S entre t et $t+\mathrm{d}t$ est donc

$$\mathrm{d}N = \iint_S \vec{j}(M,t).\mathrm{d}\vec{S}\ \mathrm{d}t$$

Remarque : $\mathrm{d}^{II}N$, comme $\mathrm{d}N$, sont des quantités **algébriques** dont le signe dépend du produit scalaire $\left(\vec{j}.\vec{u}_N\right)$.

1.c Flux de particules

i Flux de particules à travers une section S

DÉFINITION :

Le **flux élémentaire de particules** $\mathrm{d}\phi$ à travers une surface $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ en M est tel que :

$$\mathrm{d}^{II}N_\phi = \mathrm{d}\phi\mathrm{d}t \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}\phi = \overrightarrow{j}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

DÉFINITION :

Le flux à travers une surface S est la somme des flux élémentaires à travers les surfaces élémentaires $\mathrm{d}S$ qui composent S :

$$\boxed{\phi = \iint_{(S)} \mathrm{d}\phi = \iint_{(S)} \overrightarrow{j}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}} \qquad \text{(D.1)}$$

Ce flux s'exprime en s^{-1}.

ii Flux entrant et flux sortant à travers une surface fermée

DÉFINITIONS :

- ✗ On dit qu'une surface est **ouverte**, si il est possible de passer d'une face à l'autre sans traverser la surface.
- ✗ Si la surface est **fermée**, elle sépare l'espace en deux zones correspondant aux deux faces, l'intérieur et l'extérieur, et il faut traverser la surface pour passer d'une zone à l'autre.
- ✗ Pour une surface fermée, on peut choisir deux types d'orientation : **normales sortantes** et **normales entrantes**.
- ✗ Soit une surface S_s surface fermée orientée en normale sortante, le flux $\phi_s = \iint_{(S_s)} \overrightarrow{j}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ est le **flux sortant**.
- ✗ Soit une surface S_s surface fermée orientée en normale entrante, le flux $\phi_e = \iint_{(S_e)} \overrightarrow{j}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ est le **flux entrant**.
- ✗ On a naturellement :

$$\boxed{\phi_s = -\phi_e}$$

Propriétés à connaître

1.d Bilan sur les notions définies

Grandeur	Notation	Unité	Signification
Densité particulaire	n	m^{-3}	Nb de part. par unité de volume
Vecteur densité de flux	$\overrightarrow{j}$	$\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$	Nb part. trav. $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ par unité temps et surf.
Flux élémentaire	$\mathrm{d}\phi$	s^{-1}	Nb part. traversant $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ par unité temps
Flux	ϕ	s^{-1}	Nb part traversant S par unité temps

2 Loi de Fick

LOI DE FICK

Dans un milieu homogène et isotrope, soumis à une répartition de particules **inhomogène**, apparait spontanément un vecteur densité volumique de flux $\overrightarrow{j}(M,t)$ proportionnel au gradient de particules $n(M,t)$

$$\overrightarrow{j}(M,t) = -D\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n(M,t)$$

où D est le **coefficient de diffusion**, caractéristique de l'espèce diffusée et du milieu support du phénomène de diffusion, et s'exprime en $\mathrm{m}^2.\ \mathrm{s}^{-1}$.

Diffusion de	dans	Coeff. de Diffusion $\mathrm{m}^2.\ \mathrm{s}^{-1}$
CO_2	Air	$1.4.10^{-5}$
H_2	Air	$7.1.10^{-5}$
O_2	eau	$1.8.10^{-9}$
H_2	eau	5.10^{-9}
Sucre	eau	5.10^{-10}
Bore	Silicium	5.10^{-17}
Aluminium	Cuivre	$1.3.10^{-30}$

Limites de cette loi phénoménologique.

3 Taux de création (ou disparition) de particules

Définition :

On appelle **source de particules** tout dispositif capable d'injecter ou de soustraire des particules à un système.
Associée à cette création (algébrique) de particules dans le système, on définit le **taux volumique de création de particules**, σ_c ; c'est le nombre de particules créées par unité de temps et de volume dans le système.
Dans le volume $\mathrm{d}\tau$, il y a création de

$$\mathrm{d}^{II}N_c = \sigma_c \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t$$

σ_c s'exprime en $\mathrm{m}^{-3}.\,\mathrm{s}^{-1}$.

Propriété à connaître

- ☞ Si $\sigma_c > 0$, il y a création effective de particules.
- ☞ Si $\sigma_c < 0$, il y a disparition effective de particules.

II Bilan local de particules

1 Bilan dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle

Savoir démontrer №1 : Equation de conservation de la matière 1D

Soit un milieu comportant des particules diffusantes de densité volumique $n(M,t) = n(x,t)$, ne dépendant que des variables x et t et une distribution volumique de sources de particules $\sigma_c(M,t) = \sigma_c(x,t)$ alors :

1. Il existe un vecteur densité volumique de flux de particules diffusées $\overrightarrow{j}(M,t) = j(x,t)\overrightarrow{u}_x$ ne dépendant que de x.
2. L'équation de conservation de la matière s'écrit

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial j}{\partial x}(x,t) + \sigma_c(x,t) \qquad \text{(D.2)}$$

   — En l'absence de source, cette équation s'écrit simplement

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial j}{\partial x}(x,t)$$

   — En régime **stationnaire**, l'équation (D.2) devient

$$\frac{\partial j}{\partial x}(x,t) = \sigma_c(x,t)$$

2 Problème à symétrie sphérique

Savoir démontrer №2 : Equation de conservation de la masse pour un problème à symétrie sphérique

Dans le cas où le système possède une symétrie sphérique autour d'un point O, la densité particulaire vérifie

$$n(M,t) = n(r,t)$$

on montre, par un bilan de particules en **coordonnées sphériques**, que l'équation de conservation prend la forme

$$\frac{\partial n}{\partial t}(r,t) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\ j(r,t)\right)}{\partial r}$$

Remarque :

Suivant le même raisonnement, en symétrie cylindrique (de la variable ρ), on démontre selon le même raisonnement entre deux cylindres de rayon ρ et $\rho + \mathrm{d}\rho$ (de hauteur h arbitraire)

$$\frac{\partial n}{\partial t}(\rho, t) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho\, j(\rho, t)\right)}{\partial \rho}$$

3 Equation de conservation à 3D

Théorème d'Ostrogradski : pour une surface fermée $\mathscr{S}_s$, orientée en normale sortante, le flux peut s'écrire :

$$\oiint_{\text{nor. sortante}} \overrightarrow{j}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\overrightarrow{j}\ \mathrm{d}\tau$$

Propriété à connaître

Savoir démontrer №3 : Equation de conservation de la matière 3D

Soient un milieu comportant des particules diffusantes et une distribution volumique de sources de particules $\sigma_c(M,t) = \sigma_c(\overrightarrow{r}, t)$.
Soient $n(M,t) = n(\overrightarrow{r}, t)$, la densité volumique de ces particules et $\overrightarrow{j}(M,t) = \overrightarrow{j}(\overrightarrow{r}, t)$, le vecteur densité volumique de flux qui leur correspond.
En tout temps, et en tout point $M(\overrightarrow{r})$ du milieu, on a

$$\frac{\partial n}{\partial t}(\overrightarrow{r}, t) = -\operatorname{div}\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r}, t) + \sigma_c(\overrightarrow{r}, t)$$

III Equation de la diffusion

1 Equation de la diffusion à une dimension

Savoir démontrer №4 : Equation de la diffusion à 1D

Si la diffusion a lieu suivant une seule direction (notée x), conformément à la loi de Fick, la densité volumique de particules $n(\overrightarrow{r}, t)$ satisfait alors à l'équation de diffusion

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \sigma_c}$$

On a également :

$$\frac{\partial æ}{\partial t} = D\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} - D\frac{\partial \sigma_c}{\partial x}$$

2 Equation de la diffusion à trois dimensions

Savoir démontrer №5 : Equation de la diffusion à 3D

Si la diffusion a lieu conformément à la loi de Fick, la densité volumique de particules $n(\overrightarrow{r}, t)$ satisfait alors à l'équation de diffusion

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\triangle n + \sigma_c}$$

3 Longueur et temps caractéristiques associés

- ☞ Equation linéaire du second ordre à coefficients constants
- ☞ Traduit l'irréversibilité du phénomène
- ☞ échelle caractéristique $\delta = \sqrt{Dt}$

Propriétés à connaître

Application 1 : Temps de diffusion

Donner le temps caractéristique de diffusion du sucre dans une tasse de café.
On donne $D = 5.10^{-10}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$.

4 Problème à symétrie sphérique

Savoir démontrer №6 : Equation de diffusion pour un problème à symétrie sphérique

En utilisant la loi de FICK,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{D}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial n(r,t)}{\partial r}\right)$$

Remarque :

Suivant le même raisonnement, en symétrie cylindrique (de la variable ρ), on démontre selon le même raisonnement

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{D}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial n(r,t)}{\partial \rho}\right)$$

IV Résolution de l'équation de diffusion à 1D

DÉFINITION :

On définit le
- ✗ **régime permananent** : régime commandé régulier ou établi qui succède à un régime transitoire
- ✗ **régime stationnaire** : régime indépendant du temps.

Un régime stationnaire est permananent (mais le contraire est faux).

1 Conditions aux limites, condition initiale - Continuité

DÉFINITION :

Soit $\mathscr{S}$ la surface qui délimite le système de volume $\mathcal{V}$
- ✗ une **condition aux limites** est la donnée de $n(M_0,t) = n(x_0,y_0,z_0,t)$ (ou de $\vec{j}(M_0,t)$) en certains points particuliers M_0 de la surface $\mathscr{S}$ pour toutes les dates t ;
- ✗ une **condition initiale** est la donnée de $n(M,t=0)$ (ou de $\vec{j}(M,t=0)$), en tous points du volume $\mathcal{V}$ à la date $t=0$.

Propriétés à connaître

☞ A la séparation entre deux milieux, en $z=0$, le vecteur densité de courant est **toujours continu** :

$$\vec{j}(0^-) = \vec{j}(0^+)$$

☞ Si le milieu s'arrête en $x=\ell$, alors

$$\vec{j}(\ell) = 0$$

☞ Sauf cas particulier la densité de particules est également continue.

2 Cas du régime stationnaire

Savoir démontrer №7 : Régime stationnaire

En régime stationnaire, sans création, la densité particulaire vérifie l'équation de LAPLACE

$$\triangle n = 0$$

Et, avec les conditions aux limites $n(0) = n_0$ et $n(\ell) = n_\ell$, on trouve :

$$n = n_0 + \frac{n_\ell - n_0}{\ell}x \qquad \text{et } \vec{j} = -D\frac{n_\ell - n_0}{\ell}\vec{u}_x$$

Savoir démontrer №8 : Conservation du flux

En **régime stationnaire**, $\vec{j}$ est à flux conservatif :
- ✗ le flux de $\vec{j}$ sur une surface fermée est nul.
- ✗ Le flux de $\vec{j}$ à travers des sections droites d'un tube de courant est toujours le même.

3 Exemples en régime non stationnaire

3.a Solution type

Savoir démontrer №9 : Solution de l'equation de diffusion libre unidimensionnelle

On montre que

$$n(x,t) = \frac{N_0}{S\sqrt{4\pi Dt}} \exp(-\frac{x^2}{4Dt})$$

est solution de l'équation de diffusion sans création.
On peut également montrer que

$$f(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-y^2} \mathrm{d}y$$

avec $u = \frac{z}{2\sqrt{Dt}}$ est aussi solution.

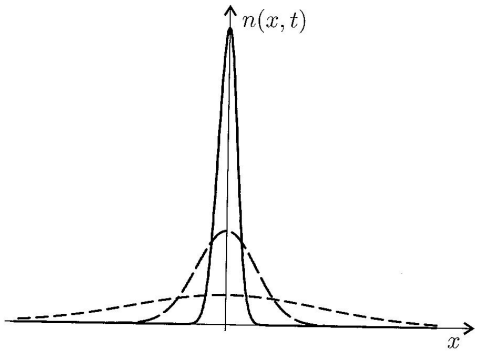


FIGURE D.1 – Evolution de $n(x)$ à différentes dates t. La largeur à mi-hauteur est $\delta = \sqrt{4 \ln 2 Dt}$.

3.b Méthode de résolution type : séparation des variables

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

On recherche une solution de la forme $n(x,t) = f(x)\, g(t)$. On remplace dans l'équation de diffusion :

$$f\dot{g} = Dgf'' \Rightarrow \frac{1}{D}\frac{\dot{g}}{g} = \frac{f''}{f}$$

Une fonction de x qui est égale à une fonction de t est une constante K. Cette constante est positive ou négative. On obtient donc un système d'équations couplées :

$$\dot{g} - KDg = 0 \quad \Rightarrow \quad g(t) = \alpha \mathrm{e}^{KDt}$$

où α est une constante d'intégration.

On veut éviter que la fonction diverge donc $KD < 0$, donc $K < 0$. On note $K = -\frac{1}{\delta^2}$, d'où

$$g = \alpha \mathrm{e}^{-\frac{Dt}{\delta^2}}$$

On peut alors intégrer la deuxième équation

$$f'' + \frac{f}{\delta^2} = 0$$

On trouve des solutions sinusoïdales :

$$f(x) = A\cos\frac{x}{\delta} + B\sin\frac{x}{\delta}$$

Finalement la solution totale est de la forme

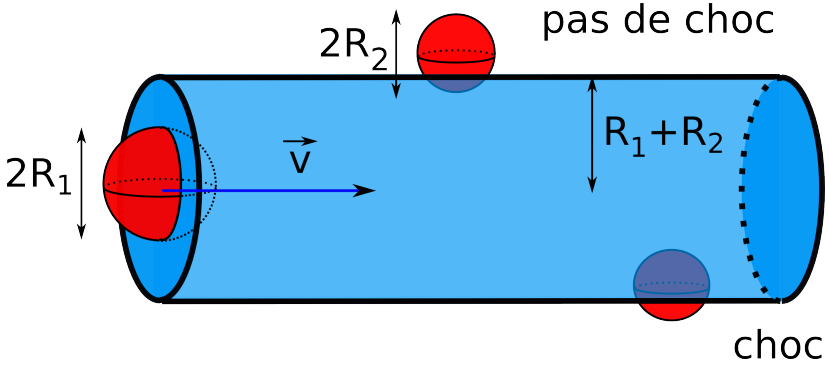
$$n(x,t) = \left(A'\cos\frac{x}{\delta} + B'\sin\frac{x}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-\frac{Dt}{\delta^2}}$$

V Modèle microscopique *

1 Libre parcours moyen

DÉFINITION :

- ✗ On assimile les molécules diffusantes à des sphères dures de rayon R_1 qui se déplace dans un milieu peuplé de sphères de rayons R_2.
- ✗ On suppose que la répartition des sphères est uniforme (**milieu homogène**).
- ✗ On note ℓ le **libre parcours moyen**, c'est la distance moyenne parcourue entre deux chocs.
- ✗ Pour simplifier, on suppose que $\frac{1}{6}$ des molécules se déplacent suivant les x croissants, $\frac{1}{6}$, suivant les x décroissants ...
- ✗ On suppose que toutes les molécules se déplacent à la vitesse quadratique moyenne u.
- ✗ On suppose qu'une molécules de rayon R_1 va faire un choc sur une molécule de rayon R_2.



Savoir démontrer №10 : Relation avec la densité

On note $\sigma = \pi (R_1 + R_2)^2$ la section efficace de collision. On trouve donc

$$n\ell\sigma = 1$$

2 Modèle micoscopique de la diffusion

Savoir démontrer №11 : Vecteur densité de courant

On note j_+ le vecteur densité de courant orienté dans le sens des x croissants. On trouve

$$j_+ = \frac{1}{6} n(x - \ell)u$$

Savoir démontrer №12 : Loi de Fick

On en déduit la loi de Fick, avec

$$\boxed{D = \frac{1}{3}\ell u}$$

Application 2 : Application numérique pour l'hélium gazeux

La constante de Boltzmann est $k_B = 1,38.10^{-23}$J/K
La masse molaire de l'helium est $M = 4.10^{-3}$ mol.L^{-1}, la vitesse quadratique moyenne est donnée par

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

$\sigma = 1.5.10^{-19}$m^2, donc $\ell = 1,8.10^{-7}$ m et

$$D = 8.10^{-5} m^2/s$$

Savoir démontrer №13 : Expression en fonction de la Température

En utilisant la relation $p = nk_B T$, on trouve

$$\boxed{D = \frac{k^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}}}{p\pi\sqrt{3m}\,(R_1 + R_2)^2}}$$

VI Diffusion et convection

1 Convection

Définition :

- ✗ On parle de **convection**, lorsqu'il y a un mouvement **macroscopique** de matière dans le système.
- ✗ En général toutes les particules sont impliquées dans ce mouvement.
- ✗ On peut définir le vecteur $\overrightarrow{j}_{\text{conv}}$ vecteur densité volumique de flux de particules par convection.

Savoir démontrer №14 : Relation avec la vitesse

Si toutes les particules du système ont la vitesse moyenne $\overrightarrow{v}$, et que leur densité est n alors

$$\boxed{\overrightarrow{j}_{\text{conv}} = n\overrightarrow{v}}$$

Application 3 : Cas de la gravitation : sédimentation

On adopte le modèle suivant : les particules subissent
- ✗ une force frottement $-\alpha\,\overrightarrow{v}$
- ✗ la force de pesanteur $m\overrightarrow{g} = mg\overrightarrow{u}_z$
- ✗ on se place en régime permanent.

On trouve alors $\overrightarrow{j}_{\text{conv}} = \frac{nmg}{\alpha}\overrightarrow{u}_z$

Application 4 : Cas de la force centrifuge : centrifugation

On adopte le modèle suivant : les particules subissent
- ✗ une force frottement $-\alpha\,\overrightarrow{v}$
- ✗ la force d'inertie d'entrainement $m\omega^2\overrightarrow{HM}$
- ✗ on se place en régime permanent.

On trouve alors $\overrightarrow{j}_{\text{conv}} = \frac{n\omega^2}{\alpha}\overrightarrow{HM}$

2 Diffusion

Savoir démontrer №15 : Relation avec la vitesse

Statistiquement, tout se passe comme si une partie seulement des molécules diffusent à un instant donné. Soit ν la densité volumique des particules qui diffusent.

$$\boxed{\overrightarrow{j} = \nu\overrightarrow{v}}$$

où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse d'ensemble des particules diffusantes.

3 Diffusion et convection

Savoir démontrer №16 : Equilibre en régime stationnaire

Le bilan de particules donne :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div}\left(\overrightarrow{j}_{\text{conv}} + \overrightarrow{j}_{\text{diff}}\right)$$

En régime stationnaire on trouve donc :

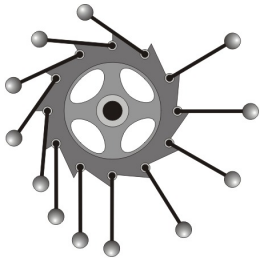
$$0 = \text{div}\left(\overrightarrow{j}_{\text{conv}} + \overrightarrow{j}_{\text{diff}}\right)$$

A 1D ,

$$j_{\text{conv}} + j_{\text{diff}} = \text{Cte}$$

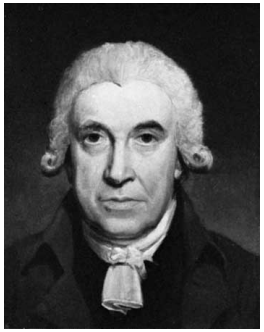
Si cette constante est nulle sur les bords, on a $j_{\text{conv}} + j_{\text{diff}} = 0$

Chapitre D2 : Premier et second principe



Mouvement pepétuel ?

PARTIE D : THERMODYNAMIQUE
D-1 : Diffusion de particules
D-2 : Premier et second principe
D-3 : Machines thermiques
D-4 : Diffusion thermique
D-5 : Rayonnement
D-6 : Thermo microscopique



James Watt 1736 - 1819

I Energie interne et premier principe

1 Les transformations en thermodynamique

- **Système fermé** : qui n'échange pas de matière avec l'extérieur, contrairement au système ouvert.
- **Système isolé** : n'échange ni matière ni énergie avec l'extérieur : lors de cette transformation $W = 0$ et $Q = 0$.
- **Transformation Quasi-Statique (QS) :** tout état intermédiaire est infiniment proche d'un état d'équilibre.
- **Transformation Mécaniquement Réversible (MR) :** à chaque instant $P_{ext} = P$.
- **Transformation adiabatique** : pas de transfert thermique avec l'extérieur (les parois du récipient sont **calorifugées** ou **athermanes**) $\Rightarrow Q = 0$.
- **Transformation réversible :** évolution constituée d'une succession d'états d'équilibre, renversable par modification infinitésimale des contraintes extérieures. On peut définir toutes les fonctions d'état à chaque instant et $P_{ext} = P$.
  Réversible $\Rightarrow$QS, de même Réversible $\Rightarrow$MR, mais la réciproque n'est pas vraie.
- **Transformation isotherme** : QS et MR et $T = cte$ tout au long de l'évolution.
- **Transformation isobare** : QS et MR et $P = cte = P_{ext}$ tout au long de l'évolution.
- **Transformation isochore** : $V = cte$ tout au long de l'évolution.
- **Transformation polytropique** : QS et MR et $\exists k$ tq $PV^k = cte$ tout au long de l'évolution.
  - ☞ $k = 0$ on trouve une isobare
  - ☞ $k = 1$ on trouve une isotherme pour un Gaz Parfait
  - ☞ $k = \gamma$ on trouve une isentropique pour un Gaz Parfait
  - ☞ $k \to \infty$ on trouve une isochore

Piston mobile sans frottement $\Rightarrow$ $P = P_{ext}$ à l'équilibre mécanique
Paroi diathermane $\Rightarrow$ $T = T_{ext}$ à l'équilibre thermique

Lorsqu'une masse M est placée sur un piston de surface S, on définit la pression extérieure par :

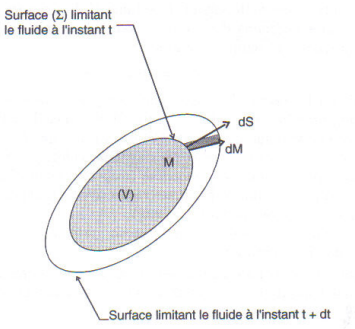
$$p_{ext} = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

2 Travail des forces de pression

Le travail infinitésimal des forces de pression est

$$\delta W = \iiint -P_e d^{II}V \text{ avec } d^{II}V = \overrightarrow{dM}.\overrightarrow{dS}$$

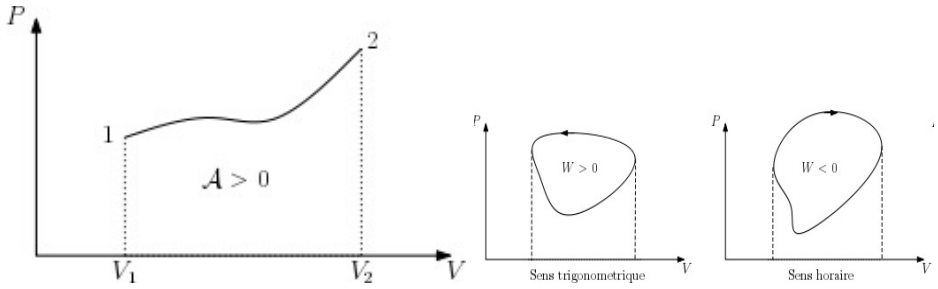
$d^{II}V$ est le volume élémentaire hachuré sur la figure ci-dessous.



Lorsque P_e est uniforme, si le volume passe de V à $V + dV$ alors le travail des forces de pression est

$$\boxed{\delta W = -P_e dV}$$

dV est le volume compris entre la surface $\Sigma(t)$ et la surface $\Sigma(t + dt)$
Pour une transformation QS et MR alors $\delta W = -PdV$
Dans ce cas, le travail est l'aire sous la courbe du diagramme de Watt



3 Les fonctions d'état

3.a Différentielle exacte

Lors d'une transformation infinitésimale, un ou plusieurs paramètres évoluent de manière infinitésimale :

ex : $dP, dT, dV...$

Pour un système monophasé , deux variables D_a et D_b suffisent pour décrire l'évolution d'un système. Ainsi n'importe quelle grandeur G a une variation δG avec

$$\delta G = f(D_a, D_b)\, dD_a + g(D_a, D_b)\, dD_b$$

Si on vérifie les deux équations suivantes :

$$\left.\frac{\partial G}{\partial D_a}\right|_{D_b} = f(D_a, D_b)$$
$$\left.\frac{\partial G}{\partial D_b}\right|_{D_a} = g(D_a, D_b)$$

alors δG est une différentielle exacte notée dG alors G est une fonction de D_a, D_b , c'est une **fonction d'état** et

$$\int_1^2 \delta G = \int_1^2 dG = G_2 - G_1 = \Delta G$$

est indépendant du chemin suivi.

3.b L'énergie interne est une fonction d'état : premier principe

L'énergie totale d'un système est

$$E = E_{c.micro} + E_{c.macro} + E_{p\ int} + E_{p\ ext}$$

— — $E_{c.micro}$ représente l'énergie cinétique microscopique : agitation thermique
— $E_{c.macro}$ représente l'énergie cinétique macroscopique : mouvement d'ensemble
— $E_{p\ int}$ représente l'énergie potentielle des forces intérieures au système (viscosité ...)
— $E_{p\ ext}$ représente l'énergie potentielle des forces extérieures au système (pesenteur ...)

On note $E_m = E_{c.macro} + E_{p\ ext}$, l'énergie mécanique et $U = E_{c.micro} + E_{p\ int}$ l'énergie interne.

Le premier principe postule
— la conservation de l'énergie totale $E_{tot} = E_m + U$ pour un système **fermé et isolé**
— U est une **fonction d'état**
— Pour un système **fermé** :

$$\text{Cas général infinitésimal :} \quad d(U + E_m) = \delta W + \delta Q$$
$$\text{Cas général forme intégrale :} \quad \Delta(U + E_m) = W + Q$$

W est le travail reçu par le système et Q le transfert thermique reçu par le système.

3.c Enthalpie

L'enthalpie $H = U + PV$ est une fonction d'état extensive.

Application 1 : Transformation isobare

Montrer que lors d'une transformation isobare, $dH = \delta Q_p$

Solution :

Le Premier Principe $\Rightarrow dU = \delta W + \delta Q = -PdV + \delta Q$

Définition de l'enthalpie $\Rightarrow dH = dU + PdV + VdP \Rightarrow$ $\boxed{dH = \delta Q_p} \Rightarrow \boxed{\Delta H = Q_p}$

Application 2 : Transformation monobare

Montrer que lors d'une transformation monobare, $dH_{\text{pext}} = \delta Q_{\text{pext}}$

Solution :

Pour une transformation monobare : $\delta W = -P_{ext}dV$ *Soit* $H_{p_{ext}} = U + P_{ext}V$

$\Rightarrow dH_{p_{ext}} = dU + P_{ext}dV = \delta W + \delta Q + P_{ext}dV \Rightarrow \boxed{dH_{p_{ext}} = \delta Q_{p_{ext}}} \Rightarrow$ $\boxed{\Delta H_{p_{ext}} = Q_{P_{ext}}}$

ATTENTION : Pour une transformation monobare , c'est $\Delta H_{p_{ext}}$ qui vaut Q.

Par exemple : compression adiabatique et monobare d'un GP entre P_0 et P_1. On a une transformation monobare donc $\Delta H_{p_{ext}} = Q = 0$, mais la température du système change
donc $c_p\,(\Delta T) = \Delta H \neq 0$.

3.d Cas du gaz parfait

Le modèle du gaz parfait est applicable pour des gaz peu denses, il est construit sur le modèle suivant :

- ✗ Les atomes (ou molécules) qui constituent le gaz sont considérées comme ponctuelles
- ✗ pas d'interaction entre les particules en dehors des chocs
- ✗ le gaz est à l'équilibre thermodynamique

Pour un gaz parfait monoatomique de N atomes ($n = \frac{N}{\mathcal{N}_a}$) , l'énergie interne est $U = \frac{3}{2}Nk_bT = \frac{3}{2}nRT$, soit $C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{2}Nk_b = \frac{3}{2}nR$, $C_p = \frac{5}{2}nR$ donc $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$

Pour un gaz parfait diatomique $C_v = \frac{5}{2}nR$, $C_p = \frac{7}{2}nR$ donc $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$.

II Second principe

1 Enoncé

S est une fonction d'état extensive, qui augmente pour un système fermé calorifugé (S n'est donc pas une grandeur conservative), S reste constante pour une évolution réversible du système fermé calorifugé.

On a

$$\boxed{dS = \delta S_e + \delta S_c}$$

δS_e est l'entropie échangée avec l'extérieur, δS_c est l'entropie créée.

$\delta S_c = 0$ pour une transformation réversible

$\delta S_c > 0$ pour une transformation irréversible.

Application 3 : Contact avec un thermostat

✗ l'entropie échangée est

$$\delta S_e = \frac{\delta Q}{T_{Th}}$$

✗ L'entropie reçue par le thermostat est

$$dS_{Th} = -\frac{\delta Q}{T_{Th}}$$

✗ L'entropie créée lors du contact est égale à la variation d'entropie totale du système ∪ thermostat

$$\delta S_c = dS_{\{\text{sys}\cup\text{Thermostat}\}} = dS - \frac{\delta Q}{T_{Th}}$$

2 Identités thermodynamiques

2.a Définitions

$$\boxed{dU = TdS - pdV}$$

$$\boxed{dH = TdS + Vdp}$$

$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T}dp$ d'où $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$ et $C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$

2.b Cas de la transformation réversible :

Pour une transformation réversible, on peut identifier l'identité thermodynamique et le premier principe :

$$\begin{aligned} dU &= TdS - pdV \\ dU &= \delta Q + \delta W \end{aligned}$$

Pour la transformation réversible, $\delta W = -pdV$ donc $TdS = \delta Q_{rev}$. On peut donc conclure

$$\boxed{dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T}}$$

Application 4 : transformation monotherme réversible

Soit un système en contact avec un thermostat à la température T_{Th}, démontrer que si la transformation est réversible, alors elle est isotherme et donner la température du système.

Solution

Contact avec un thermostat $\Rightarrow \delta S_e = \frac{\delta Q}{T_{Th}}$

Transformation réversible $\Rightarrow \delta S_e = \frac{\delta Q_{rev}}{T} = dS$ car $\delta S_c = 0$ d'où $\boxed{T_{Th} = T}$

3 Expression de l'entropie pour le gaz parfait

On utilise les identités thermodynamiques pour trouver :

— Grandeur extensive :

$$\Delta S = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ et } \Delta sS = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{P_2}{P_1}$$

— Grandeur intensive : Soit s l'entropie massique, on a

$$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ et } \Delta s = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1}$$

M est la masse molaire, c_v la capacité thermique massique

III Bilan

1 Notation des grandeurs thermodynamiques

	fonction d'état	autres grandeurs
exemples	U, H, S	W, Q, S_e, S_c
évolution infinitésimale notation	**d** différentielle	δ infiniment petit
évolution non infinitésimale EI⟶EF	**Δ**	

2 Les fonction d'états

Fonctions d'états extensives				Remarques
	Energie interne	Enthalpie	Entropie	
G.P.	ΔU	$\Delta H = \Delta U + \Delta(PV)$	ΔS	
	$C_V \Delta T$	$C_p \Delta T$	$C_v \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i}$	$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$
Solide /Liquide	$C\Delta T$		$C \ln \frac{T_f}{T_i}$	incompressible
Gaz réel	$C_V \Delta T$ si isochore	$C_p \Delta T$ si isobare		
Cas général	$dU = C_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$		$dS = \frac{dU}{T} + P\frac{dV}{T}$	$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ GP
infinitésimal		$dH = C_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp$	$dS = \frac{dH}{T} - V\frac{dp}{T}$	$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = 0$ GP

Evolution	définition	Grandeurs			
		W	Q	S_e	$S_c \geqslant 0$
Cas général P_e unif.		$\int -P_{ext} dV$	$Q = \Delta U - W$	$\sum \frac{Q_i}{T_i}$ (si polyth.)	$\Delta S - S_e$
Isotherme **GP**	QS et MR et $\boxed{T}$	$-nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$	$Q = -W$	$\frac{Q}{T}$	$\Delta S - S_e$
Isochore	$\boxed{V}$	0	$Q_v = \Delta U$	-	-
Monobare	$P_{ext} = cte$	$-P_{ext}(V_f - V_i)$	$Q_p = \Delta H$	-	-
Isobare	QS et MR et $\boxed{P}$	$-P(V_f - V_i)$	$Q_p = \Delta H$	-	-
Adiabatique	$Q = 0$	$\int -P_{ext} dV$	0	0	ΔS
Réversible	suite états equ.	$\int -PdV$	$Q = \int TdS$	$\sum \frac{Q_i}{T_i}$	0
Adia Rev **GP**	$\Rightarrow$ isentropique	$\frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1}$	0	0	0

3 Expressions du transfert thermique

On peut dans les différents cas suivants exprimer les transferts thermiques :

✗ Transformation isochore : $\delta W = 0$
Soit $dU = \delta W + \delta Q \Rightarrow \boxed{dU = \delta Q_V} \Rightarrow \boxed{\Delta U = Q_V}$

✗ Transformation QS et MR : $\delta W = -PdV$ et le premier Principe : $dU = -PdV + \delta Q$
L'identité thermodynamique donne : $dU = TdS - PdV = -PdV + \delta Q$
$\Rightarrow \boxed{TdS = \delta Q_{QS\ MR}} \Rightarrow \boxed{Q_{QS\ MR} = \int TdS}$

✗ Transformation réversible :$\delta S_c = 0 \Rightarrow dS = \delta S_e = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$
$\Rightarrow \boxed{TdS = \delta Q_{rev}} \Rightarrow \boxed{Q_{rev} = \int TdS}$

✗ Transformation isotherme : Une transformation isotherme est QS et MR $\Rightarrow \boxed{TdS = \delta Q_T}$
Et $Q_T = \int TdS$ mais T étant constante, on a $\boxed{Q_T = T\Delta S}$

— Transformation monotherme : Pour une transformation monotherme, $\delta S_{T_{ext}} = \frac{Q_{T_{ext}}}{T_{Th}}$ où T_{Th} est la température du thermostat
donc $\boxed{T_{Th} dS_{T_{ext}} = \delta Q_{T_{ext}}} \Rightarrow \boxed{Q_{T_{ext}} = T_{Th}\Delta S_{T_{ext}}}$

Type de transformation	δQ	Q
isobare	dH	ΔH
monobare	$dH_{p_{ext}} = d(U + P_{ext}V)$	$\Delta H_{p_{ext}}$
isochore	dU	ΔU
QS et MR	TdS	$\int TdS$
réversible	TdS	$\int TdS$
isotherme	TdS	$T\Delta S$
monotherme	$T_{Th} dS_{T_{ext}}$	$T_{Th}\Delta S_{T_{ext}}$

4 Quelques relations utiles

Attention, certains résultats ne sont applicables qu'au GP.

$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ (définition) $\qquad C_p - C_V = nR$ (relation de Meyer) valable GP

$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$ (GP) $\qquad C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$ (GP)

$c_V = \frac{R}{\gamma - 1}$ (GP) $\qquad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ (GP)

GPM : $C_V = \frac{3}{2}nR$ $\quad C_p = \frac{5}{2}nR$ $\quad$ et $\gamma = \frac{5}{3} = 1,67$

GPdiatomique : $C_V = \frac{5}{2}nR$ $\quad C_p = \frac{7}{2}nR$ $\quad$ et $\gamma = \frac{7}{5} = 1,40$

4.a 1ère Loi de Joule pour le GP

$\boxed{U \text{ ne dépend que de la température}} \Rightarrow C_V$ ne dépend que de la température.

4.b 2ème Loi de Joule pour le GP

$\boxed{H \text{ ne dépend que de la température}} \Rightarrow C_p$ ne dépend que de la température.

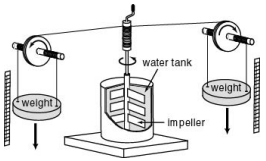
4.c Formules de Laplace pour le GP

Pour une transformation **adiabatique réversible (⇒ isentropique) d'un GP**, on peut montrer :

$$pV^\gamma = cte \qquad TV^{\gamma-1} = cte \qquad T^\gamma p^{1-\gamma} = cte$$

à appliquer entre 2 états d'équilibre A et B d'une même adiabatique (ex : $p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma$)

Chapitre D3 : Machines thermiques



Machine de joule

PARTIE D : THERMODYNAMIQUE
PARTIE D : THERMODYNAMIQUE
D-1 : Diffusion de particules
D-2 : Premier et second principe
D-3 : Machines thermiques
D-4 : Diffusion thermique
D-5 : Rayonnement
D-6 : Thermo microscopique

J.P. Joule 1818 - 1889

I Systèmes ouverts en régime stationnaire

On considère un fluide qui se déplace dans une canalisation de section variable en régime **stationnaire** et qui reçoit un travail massique indiqué w_u (ou utile = autre que le travail des forces de pression) et un transfert thermique massique q. On se place en régime stationnaire : les grandeurs physique du système ne dépendent pas explicitement du temps.

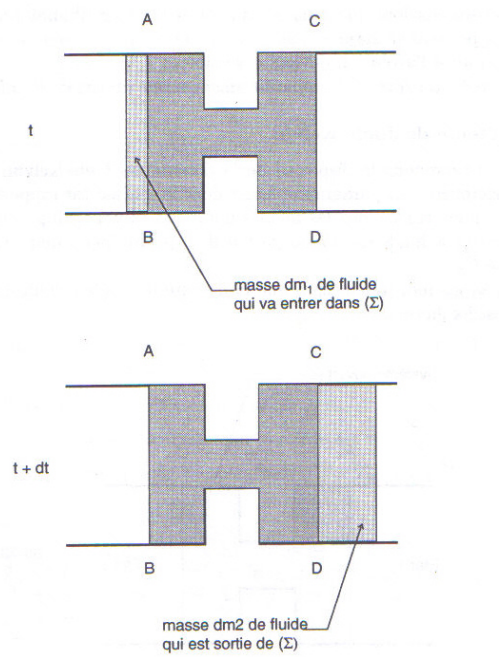
On cherche à écrire le premier principe pour le système ouvert (Σ) placé entre les plans AB et CD. Pour cela on va être amené à définir le système fermé Σ^*.

Cette résolution va nous permettre de trouver une relation entre l'enthalpie massique dans la zone 1 et l'enthalpie massique dans la zone 2.

1 Système ouvert Σ, système fermé Σ^*

— On considère le système compris entre les sections (AB) et les sections (CD). Entre t et $t+dt$, il y a des particules qui entrent en traversant (AB) : on repère ces particules par (1) et des particules qui sortent en traversant (CD) ;on repère ces particules par (2). Il y a entrée (et sortie) de matière dans le système (Σ) ; c'est donc un système ouvert.

— La figure ci-dessous décrit le système (Σ), on voit la masse dm_1 qui entre entre t et $t+dt$. A la date t, elle se trouve avant la surface (AB) : figure du haut.
La masse dm_2 traverse (CD) entre t et $t+dt$, elle se trouve après (CD) à la date $t+dt$.



— On peut définir un système **fermé**, noté (Σ^*) tel que

$$\begin{aligned} \text{à la date } t, \quad \Sigma^*(t) &= \Sigma(t) \cup dm_1 \\ \text{à la date } t+dt, \quad \Sigma^* &= \Sigma(t+dt) \cup dm_2 \end{aligned}$$

2 Bilan de matière pour le système fermé Σ^*

En régime stationnaire, $m_\Sigma(t) = m_\Sigma(t+dt) \Longleftrightarrow \frac{\partial m}{\partial t} = 0$
La conservation de la masse dans le système fermé : $m_{\Sigma^*}(t) = m_{\Sigma^*}(t+dt)$ donne

$$dm_1 = dm_2 = dm$$

Les volumes peuvent être différents (pour un gaz par exemple, voir schéma).

3 Bilan d'énergie pour le système fermé Σ^*

— On peut écrire le premier principe pour Σ^* entre t et $t+dt$,

$$d(U+E_m)_{\Sigma^*} = \delta W + \delta Q$$

— On peut décomposer l'énergie interne et l'énergie mécanique de Σ^*
— On peut écrire le travail et le transfert thermique sous forme massique $\delta W = (dm)\, w$ et $\delta Q = (dm)\, w$
On obtient alors :

$$(dm_2 u_2 + U_\Sigma(t+dt) + dm_2 e_{m2}) - (dm_1 u_1 + U_\Sigma(t) + dm_1 e_{m1}) = dm\,(w+q)$$

$e_{m2} = e_{c2} + e_{p2}$ est l'énergie mécanique massique.
— Travail des forces extérieures
Le travail des forces de pression, entre t et $t+dt$, peut s'exprimer en fonction des volumes massiques :

$$\delta W_{pression} = P_1 dV_1 - P_2 dV_2 = dm\,(P_1 v_1 - P_2 v_2)$$

Le travail total est la somme du travail utile et du travail des forces de pression :

$$\delta W = dm\,(w_u) + dm\,(P_1 v_1 - P_2 v_2)$$

4 Premier principe industriel en régime stationnaire

Le premier principe pour le système fermé Σ^*, donne une relation entre les grandeurs entrantes $(1 = e)$ et les grandeurs sortantes $(2 = s)$:
On trouve

$$\boxed{\Delta\left(h + \tfrac{1}{2}c^2 + gz\right) = w_u + q}$$

h représente l'enthalpie massique
$e_c = \frac{1}{2}c^2$ est l'énegie cinétique massique.
$e_p = gz$ est l'énegie potentielle massique.
w_u représente le travail indiqué massique.
q est le transfert thermique massique.
Δh représente la différence d'enthalpie massique entre l'entrée et la sortie de la canalisation.

5 Etude de l'entropie

Le système fermé Σ^* est en contact avec le thermostat de température T_{Th}, le second principe permet d'écrire la variation d'entropie de Σ^* entre t et $t+dt$:

$$dS_{\Sigma^*} = \frac{\delta Q}{T_{Th}} + \delta S_c$$

On note $\delta Q = (dm)\, q$ et $\delta S_c = (dm)\, s_c$ où s_c est l'entropie massique créée dans Σ^* entre t et $t+dt$.

On peut décomposer l'entropie dans le système Σ^* :

$$dS_{\Sigma^*} = S_{\Sigma^*}(t+dt) - S_{\Sigma^*}(t+dt) = S_\Sigma(t+dt) + dms_2 - (S_\Sigma(t) + dms_1)$$

Cela fait donc intervenir $dm\Delta s$ où on note s l'entropie massique.
En régime stationnaire $dS_\Sigma = S_\Sigma(t+dt) - S_\Sigma(t) = 0$
Le bilan sur le système fermé Σ^* permet d'écrire une relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie :

$$dm\Delta s = dm\left(\frac{q}{T_{Th}} + s_c\right)$$

$$\boxed{\Delta s = \frac{q}{T_{Th}} + s_c}$$

6 Premier Principe industiel, relation avec les débits

6.a Définition des débits massique et volumique

— Soit dV le volume qui traverse une surface (S) entre t et $t+dt$. Par définition le débit volumique est D_v

$$\boxed{D_v = \frac{dV}{dt}}$$

On retient plutôt cette relation sous la forme $dV = D_v dt$
Le volume qui entre entre t et $t+dt$ est contenu dans un cylindre de hauteur vdt, on en déduit donc que

$$\boxed{D_v = \iint \vec{v}.\vec{dS}}$$

Si la vitesse est uniforme sur la surface S , et v et dS colinéaires, alors

$$\boxed{D_v = vS}$$

— Débit massique
Soit dm la masse qui traverse une surface (S) entre t et $t+dt$. Par définition le débit volumique est D_v

$$\boxed{D_m = \frac{dm}{dt}}$$

On retient plutôt cette relation sous la forme $dm = D_m dt$
Le volume qui entre entre t et $t+dt$ est contenu dans un cylindre de hauteur vdt, on en déduit donc que

$$\boxed{D_m = \iint \mu \vec{v}.\vec{dS}}$$

Si la vitesse est uniforme et le milieu homogène sur la surface S , et v et dS colinéaires, alors

$$\boxed{D_m = \mu v S = \mu D_v}$$

En régime stationnaire le débit massique est constant.

6.b Relations avec les débits

En régime stationnaire le débit massique D_m (en kg.s^{-1}) est constant, ainsi le débit de sortie $D_{m2} = D_{m1}$, débit d'entrée.

On peut alors multiplier la relation précédente par D_m, elle devient

$$\boxed{D_m \Delta \left(h + \tfrac{1}{2}c^2 + gz\right) = P + \dot{Q}}$$

P est la puissance des forces extérieures, autres que les forces de pression.

$$P = \frac{dm}{dt} w_u = D_m w_u$$

$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{dt} = \quad = P_{Th}$ est la puissance thermique reçue par le système.

De même la relation sur l'entropie peut s'écrire en fonction du débit :

$$\boxed{D_m \left[s\right]_1^2 = \frac{P_{Th}}{T_{Th}} + \dot{S}_c}$$

$\dot{S}_c$ est le taux de création d'entropie (en J.K$^{-1}s^{-1}$), $\dot{S}_c = \frac{\delta S_c}{dt} = dm \frac{\delta s_c}{dt}$

Application 1 : Détente de Joule Kelvin

Dans une détente de Joule Kelvin, un fluide passe de la pression P_1 à la pression P_2 dans un tuyau dont la section augmente. Le système ne reçoit aucun travail utile w_u et aucun transfert thermique q. *Solution : Dans ces conditions, à altitude constante,*

$$\Delta\left(h + \frac{1}{2}c^2\right) = 0$$

On néglige en général la variation d'énergie cinétique, donc $\Delta h = 0$. Pour un gaz parfait , d'après la seconde loi de Joule $\Delta T = 0$. Pour un gaz réel, on observe en général $\Delta T < 0$.

Application 2 : Détente dans une tuyère

On considère la détente adiabatique d'un gaz parfait dans une tuyère divergente rigide, d'axe de révolution (Oz) On néglige les variations d'énergie potentielle. Comment varie la température du système entre l'entrée et la sortie ?

Le premier principe industriel permet d'écrire :

$$D_m \left[h + \frac{1}{2}c^2 + gz\right]_e^s = P + \dot{Q} = 0$$

Soit $\frac{c_s^2}{2} - \frac{c_e^2}{2} = -\left(h_s - h_e\right) = -c_p\left(T_s - T_e\right) = -\frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}\left(T_s - T_e\right)$.

On en déduit la variation de température :

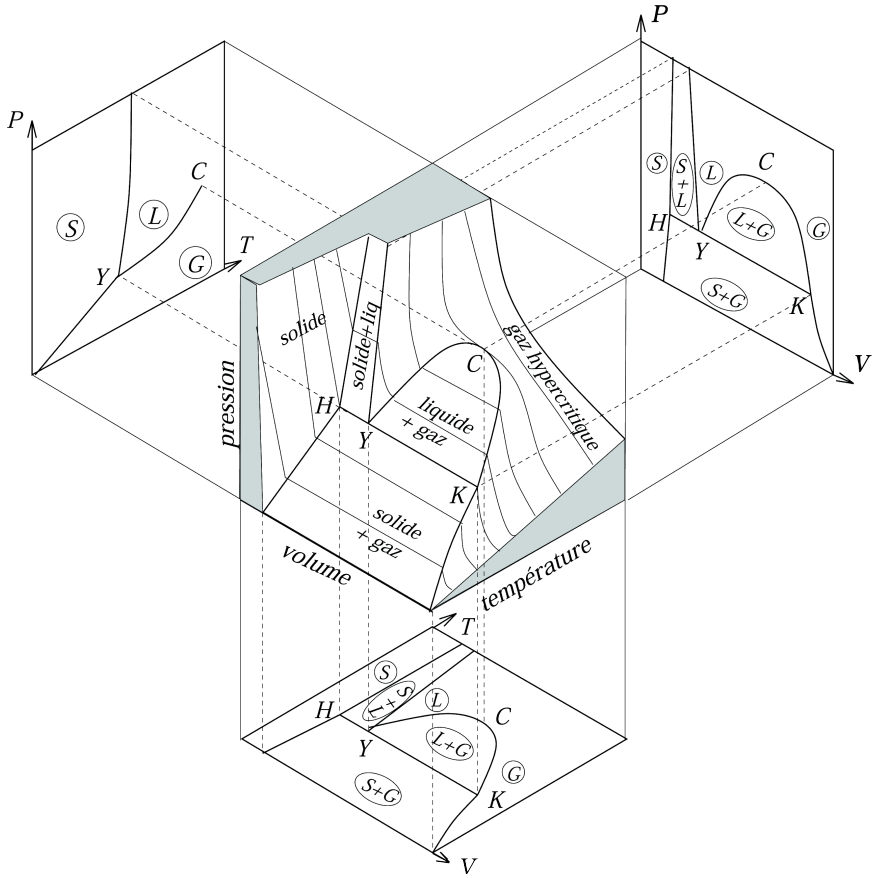
$$T_s - T_e = -\frac{M\left(\gamma - 1\right)}{2\gamma R}\left(c_s^2 - c_e^2\right)$$

Le bilan d'entropie permet de calculer le taux d'entropie créée :

$$\dot{S}_s - \dot{S}_e = D_m \left(\frac{\gamma R}{\left(\gamma - 1\right) M} \ln \frac{T_s}{T_e} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_s}{P_e}\right) = \dot{S}_c$$

II Transitions de phase

1 Diagrammes de phase



2 Diagramme P,T

Définition :

Il est obtenu en projetant le diagramme à 3D dans le plan (pOT).

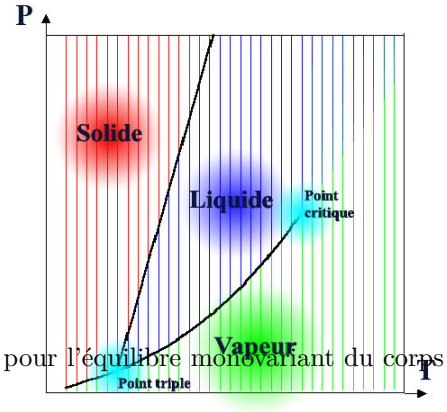
✗ Il est constitué de 3 courbes issues d'un même point, noté T, séparant 3 domaines :

solide

liquide

vapeur

pour lesquels l'équilibre est **divariant**.



✗ Ces courbes donnent les relations $p = \Pi(T)$ pour l'équilibre monovariant du corps pur sous 2 phases

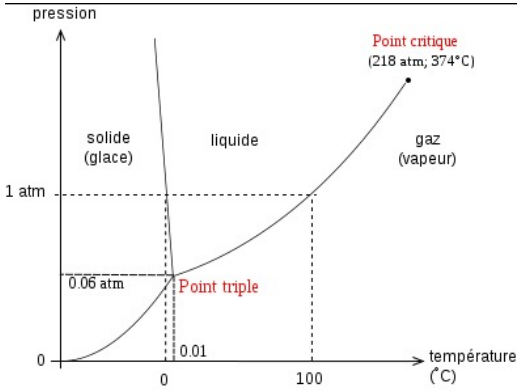
équilibre solide-vapeur : 1

équilibre solide-liquide : 2

équilibre liquide-vapeur : 3

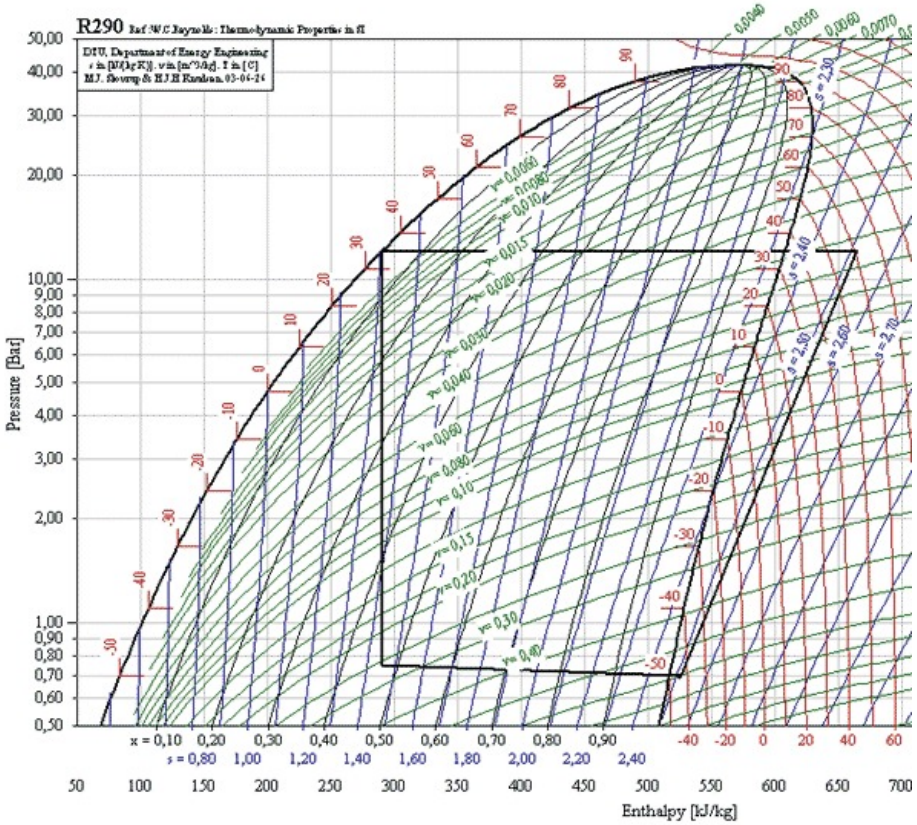
3 Cas de l'eau

L'eau présente une courbe légèrement différente au niveau des transitions solide-liquide. La pente de la courbe d'équilibre solide - liquide est négative.



4 Diagramme entropique

5 Diagramme de Mollier



6 Enthalpie de changement d'état

6.a Fraction massique

On considère un système diphasé : soit m_1 la masse du système dans la phase 1, soit m_2 la masse du système dans la phase 2. Soit $m = m_1 + m_2$.

On note $x_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}$ la fraction massique dans la phase 1.

On a $x_2 = 1 - x_1$

Savoir démontrer №1 : Règle des Moments

Soit x la fraction massique en vapeur, on a

$$x = \frac{h - h_L}{h_V - h_L} \quad \text{et de même} \quad x = \frac{s - s_L}{s_V - s_L}$$

6.b Fonctions d'état

Lors d'une transition de phase à température et volume constants, pour la masse m qui change d'état, le système (masse m) subit une variation d'enthalpie ΔH et une variation d'entropie ΔS :

	Fonctions d'états extensives		Remarques
	ΔH	ΔS	
mélange diphasé	$m\ \ell_{1\to 2}$	$\frac{m\ell_{1\to 2}}{T}$ *	m de $1 \to 2$ à T et P *cte*

Si une fraction seulement de la masse subit un changement d'état : si le système passe de (x_1, x_2) à(x'_1, x'_2) alors

$$\begin{aligned} \Delta H &= m\,(x'_2 - x_2)\,\ell_{1\to 2} \\ \Delta S &= m\,(x'_2 - x_2)\,\frac{\ell_{1\to 2}}{T} \end{aligned}$$

Ordres de grandeur : pour la glace $\ell_{fusion} = 330$ kJ.kg^{-1}, pour l'eau $l_{vap} = 2256$ kJ.kg^{-1}

7 Relation de Clapeyron

$$\boxed{\ell_{1\to 2} = T\,(v_2 - v_1)\left(\frac{dP}{dT}\right)_{équilibre}}$$

La valeur négative de la pente $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{solide/liquide}$ explique que le volume massique du solide soit supérieur à celui du liquide **pour l'eau**

$$v_{glace} > v_{eau\ liquide}$$

8 Exemples

Réversibilité

Application 3 : Une transition de phase isotherme est réversible

On étudie la vaporisation partielle d'un mélange liquide / vapeur. Dans l'état initial le titre en vapeur est x_v^1, dans l'état final il est x_v^2. $\Delta s = \left(x_v^2 - x_v^1\right)\frac{\ell_{vap}}{T}$
La transformation est isotherme, donc isobare donc $q_p = \frac{Q_p}{m} = \Delta h = \left(x_v^2 - x_v^1\right)\ell_{vap}$
On en déduit $s_e = \frac{q_p}{T} = \left(x_v^2 - x_v^1\right)\frac{\ell_{vap}}{T} = \Delta s$
$\boxed{s_e = \Delta s}$ La transformation est donc réversible.

Application 4 : Cas d'une transformation isochore

On considère un système dans l'état initial suivant : $\left(T_1, x_v^1\right)$, mis en contact avec un thermostat à la température $T_2 > T_1$. L'état final du système est alors $\left(T_2, x_v^2\right)$. On suppose de plus que la transformation est isochore. On utilisera les grandeurs massiques, le système est fermé.

- ✗ En imaginant une autre transformation entre le même état initial et final, calculer Δs ,Δh et Δu. En déduire le transfert thermique massique $q_{1\to 2}$.
- ✗ Calculer l'entropie échangée au cours de la transformation.
- ✗ En déduire l'entropie créée.

Solution :
Soit v le volume massique du système dans les états initial et final.
Le trajet est la liquéfaction complète à T_1, chauffage du liquide le long de la courbe d'ébullition et vaporisation jusqu'à l'état final à T_2
$\Delta h = \left[-x_v^1\ell_{vap}\right] + \left[c\left(T_2 - T_1\right)\right] + \left[x_v^2\ell_{vap}\right]$
$\Delta s = \left[-x_v^1\frac{\ell_{vap}}{T_1}\right] + \left[c\ln\frac{T_2}{T_1}\right] + \left[x_v^2\frac{\ell_{vap}}{T_2}\right]$
Pour le calcul de Δu, on utilise la relation $\Delta u = \Delta h - \Delta\left(Pv\right)$ d'où
$\Delta u = \left[-x_v^1\ell_{vap} - P_1\left(v_L^1 - v\right)\right] + \left[c\left(T_2 - T_1\right) - P_2 v_L^2 + P_1 v_L^1\right] + \left[x_v^2\ell_{vap} - P_2\left(v - v_L^1\right)\right]$
$\Delta u = \left[-x_v^1\ell_{vap}\right] + \left[c\left(T_2 - T_1\right)\right] + \left[x_v^2\ell_{vap}\right] - \left(P_2 - P_1\right)v$. *(On retrouve $\Delta u = \Delta h - v\Delta P$).*
La transformation est isochore donc $q_{1\to 2} = \Delta u$
L'entropie massique échangée avec le thermostat à T_2 est $s_e = \frac{q_{1\to 2}}{T_2}$
L'entropie massique créée est donc : $s_c = \Delta s - s_e$
$s_c = \left[-x_v^1\ell_{vap}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] + \left[C\ln\frac{T_2}{T_1} - \frac{C\left(T_2 - T_1\right)}{T_2}\right] - \frac{P_2 - P_1}{T_2}v > 0$. *Irreversible.*

III Machines thermiques

1 Inégalité de Carnot Clausius

On considère le système (Tot) composé d'un fluide qui subit une série de transformations (machine) et des différents thermostats (température T_i, transfert reçu par le système Q_i). Ce système est considéré comme isolé, donc $\Delta S_{Tot} \geqslant 0$.

On calcule la variation d'entropie du système Tot pendant un cycle, S étant extensive,

$$\Delta S_{Tot} = \Delta S_{machine} + \sum \frac{-Q_i}{T_i}$$

car chaque thermostat a une variation d'entropie $\Delta S_i = \frac{-Q_i}{T_i}$.

Le second principe impose $\Delta S_{Tot} \geqslant 0 \to \Delta S_{machine} \geqslant \sum \frac{Q_i}{T_i}$.

Pendant un cycle $\Delta S_{machine} = 0$, donc

$$\boxed{\sum \frac{Q_i}{T_i} \leqslant 0}$$

C'est l'inégalité de Carnot Clausius.

2 Moteur cyclique monotherme ?

Pour une machine constituée d'une seule source, $\frac{Q_1}{T_1} \leqslant 0 \to Q_1 \leqslant 0$

Le premier principe sur un cycle s'écrit $W + Q_1 = \Delta U = 0$.

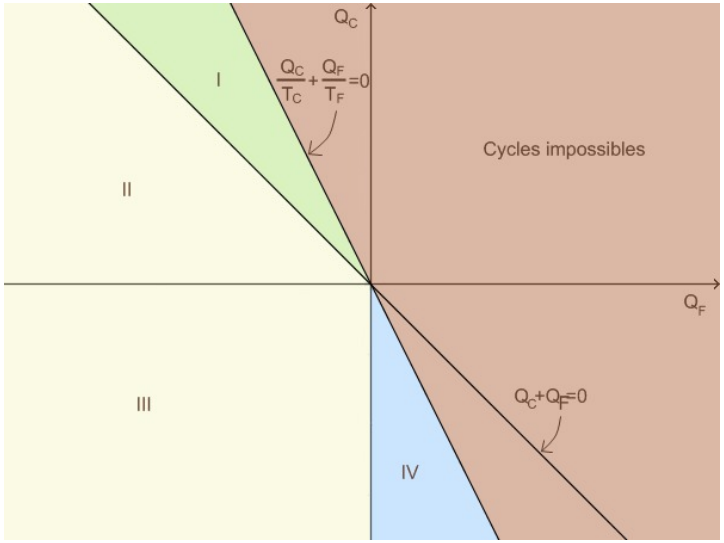
Si la machine est motrice alors $W \leqslant 0 \to Q_1 \geqslant 0$.

Il ya une contradiction entre les résultats obtenus par les deux principes, une machine monotherme cyclique est impossible à réaliser.

3 Différentes machines cycliques dithermes

Lors de transformations cycliques les variations des fonctions d'état entre le début et la fin du cycle sont nulles. On a donc

$$\begin{aligned} \Delta U &= W + \sum_i Q_i = 0 \\ \sum_i \frac{Q_i}{T_i} &\leqslant 0 = \Delta S \end{aligned}$$



— I : Zone des moteurs
— II et III pas d'application
— IV : Récepteurs

4 Rendement ou efficacité d'une machine

On définit l'efficacité comme le rapport de la grandeur valorisable par la grandeur couteuse du point de vue de l'utilisateur :
On définit l'efficacité d'une machine thermique comme

$$e = \frac{\text{grandeur valorisable}}{\text{grandeur coûteuse}} < e_c = \text{ efficacité cycle réversible (Carnot)}$$

On a alors le tableau récapitulatif suivant :

	Moteur ditherme	Réfrigérateur	Pompe à chaleur
W	<0	>0	>0
Q_c	>0	<0	<0
Q_f	<0	>0	>0
Grandeur valorisable	$\|W\|$	Q_f	$\|Q_c\|$
Grandeur coûteuse	Q_c	W	W
e	$-\frac{W}{Q_c}$	$\frac{Q_f}{W}$	$-\frac{Q_c}{W}$
e_c	$1-\frac{T_f}{T_c}$	$\frac{T_f}{T_c-T_f}$	$\frac{T_c}{T_c-T_f}$
e	$\in[0,1]$	$\in]0,+\infty[$	$]1,+\infty[$

5 Coefficients thermoélastiques

Coefficiient	Symbole	Définition	Unité	Gaz Parfait
Dilatation isobare	α	$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T}_p$	K^{-1}	$\frac{1}{T}$
Augm. de pression	β	$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial T}\|_\rho$	K^{-1}	$\frac{1}{T}$
Compressibilité isotherme	χ_T	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\|_T$	Pa^{-1}	$\frac{1}{P}$
Compressibilité isentropique	χ_S	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\|_S$	Pa^{-1}	$\frac{1}{\gamma P}$

On donne la relation de Reech :

$$\chi_T = \gamma\chi_S$$

Chapitre D4 : Diffusion thermique

Plumes des oiseaux

PARTIE D : THERMODYNAMIQUE
D-1 : Diffusion de particules
D-2 : Premier et second principe
D-3 : Machines thermiques
D-4 : Diffusion thermique
D-5 : Rayonnement
D-6 : Thermo microscopique

Isolation d'une maison

DÉFINITIONS :

Convection thermique : [a] mode de transfert thermique associé aux mouvements **macroscopiques** dans un fluide

Rayonnement thermique : mode de transfert thermique associé au transport d'énergie par les ondes électromagnétiques.
Il s'agit du seul mode de transfert thermique existant dans le vide. C'est aussi le plus rapide, mais il est inefficace dans les milieux opaques (c'est-à-dire totalement non transparents aux ondes).

Diffusion (ou conduction) thermique : mode de transfert thermique dans un support matériel **sans mouvement macroscopique** associé à l'inhomogénéité du champ de température.

a. Ce mode de transfert ne peut donc se produire dans un solide ou dans le vide.

I Diffusion thermique

1 Vecteur densité de courant thermique - flux thermique

DÉFINITION :

On note Φ le **flux (ou la puissance) d'énergie** (en W) qui traverse une surface $\mathcal{S}$ orientée sur une durée $\mathrm{d}t$, défini comme le flux du vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q(M,t)$

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\delta^I Q}{\mathrm{d}t}$$

où $\delta^I Q$ est l'énergie qui traverse toute la surface $\mathcal{S}$ orientée pendant la durée $\mathrm{d}t$

$$\delta^I Q = \iint_{(\mathcal{S})} \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t$$

On peut noter $\delta^{II}Q$ [5] , l'énergie transférée à travers une surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ orientée pendant un intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$

$$\delta^{II} Q = \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t$$

Remarques :

Cette énergie est positive si $\vec{j}_Q$ et $\mathrm{d}\vec{S}$ sont orientés dans le même sens (produit scalaire positif), négative sinon.
On notera que

$$\delta^I Q = \iint_{(\mathcal{S})} \delta^{II} Q$$

Application 1 : Expression et unités

Il est essentiel d'avoir en tête les relations suivantes

	unité	dimension	définition
$\delta^{II}Q$	J	$\mathrm{M.L^2.t^{-2}}$	énergie à travers $\mathrm{d}\vec{S}$, pendant $\mathrm{d}t$
$\delta^I Q$	J	$\mathrm{M.L^2.t^{-2}}$	énergie à travers $(\mathcal{S})$, pendant $\mathrm{d}t$
$\vec{j}_Q$	$\mathrm{W.m^{-2}}$	$\mathrm{M.t^{-3}}$	traduit un déplacement d'énergie
$\mathrm{d}\Phi$	$\mathrm{W = J.\,s^{-1}}$	$\mathrm{ML^2t^{-3}}$	puissance à travers $\mathrm{d}\vec{S}$
Φ	$\mathrm{W = J.\,s^{-1}}$	$\mathrm{ML^2t^{-3}}$	puissance à travers $(\mathcal{S})$

5. On note $\delta^{II}Q$ l'énergie à travers une surface **élémentaire** et pendant une durée **infinitésimale** (deux fois petits !).
$\delta^I Q = \delta Q$ est l'énergie à travers une surface non élémentaire mais pendant une durée **élémentaire** (une fois petit).

2 Loi de Fourier

Loi phénoménologique de Fourier (1815)

L'origine du transfert thermique est lié à l'existence d'une inhomogénéité de la température dans le milieu. En accord avec le second principe, il y a alors un flux d'énergie de la source chaude vers la source froide, dont le vecteur densité de courant thermique associé s'écrit

$$\vec{j}_Q(M,t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$$

où λ est la conductivité thermique du milieu.
Cette loi est valable pour des inhomogénéités de température pas trop importantes dans un milieu L.I.

A une dimension, $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}X} \vec{u}_X$

Propriété à connaître

Application 2 : Discussion qualitative

1. Interprétation du signe $-$. En déduire le signe de λ.
2. Unité de λ (à partir de celle de j_Q).
3. Analogies.

Réponse :

1. *Le signe $-$ indique bien que le transfert a lieu de la source chaude vers la source froide en accord avec le second principe de la thermodynamique. Cela impose donc $\lambda > 0$.*
2. *λ s'exprime en $W.m^{-1}.K^{-1}$.*
3. *Forme analogue de la loi d'Ohm en **statique** $\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, V$ et de la loi de Fick $\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}}\, n$ où n est la densité volumique de particules.*

Milieu	λ ($\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$)	Propriété
métaux	10 à 500	Excellents conducteurs
Ag	430	
Cu	401	
Or	317	
Solides non métalliques	0,004 à 4	Conducteurs moyens
Verre	1,2	
Béton	0,92	
Bois	0,25	
Laine de Verre	0,04	Mauvais conducteurs
Mousse polyuréthane	0,027	
Polystyrène expansé	0,004	
Liquides (non métal.)	0,1 à 1	Conducteurs moyens
Eau	0,6	
Gaz	0,006 à 0,18	Mauvais conducteurs
Air	0,026	

II Equation de la diffusion

1 Equation de la chaleur à 1D

Définitions :

- ✗ Soit c la capacité thermique massique : en $\mathrm{J.K^{-1}.kg^{-1}}$
- ✗ Soit μ la masse volumique : en $\mathrm{kg.m^{-3}}$
- ✗ λ est la conductivité thermique :en $\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$
- ✗ On note $\mathcal{P}_v$ la puissance volumique créée en $\mathrm{Wm^{-3}}$.

Exemple : *"Création" d'énergie : expression de $\mathscr{P}_{\text{vol}}$*

effet Joule : lié au passage d'un courant dans le solide

$$\mathscr{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

réaction nucléaire ,

absorption d'une onde électromagnétique : rayonnement.

Savoir démontrer №1 : 1D

A une dimension, on peut faire un bilan d'énergie pour une tranche du milieu de longueur dx, et de surface S

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\mathcal{P}_v}{\mu c}}$$

Avec $D = \frac{\lambda}{\mu c}$ le coefficient de diffusion (ou diffusivité thermique).

2 Coordonnées cylindriques

On étudie la diffusion thermique dans un système à symétrie cylindrique : on pose donc $\overrightarrow{j_Q(r)} = j_Q(r)\vec{u_r}$

Application 3 : Equation de la chaleur

Montrer qu'un bilan d'énergie permet d'écrire

$$\mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r j_Q(r))}{\partial r} = \mathcal{P}_v$$

3 Cas général :

Savoir démontrer №2 : Equation de la chaleur 3D

Montrer qu'un bilan d'énergie à trois dimensions permet de trouver **l'équation de la chaleur** :

$$\boxed{\mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \mathcal{P}_v}$$

- ☞ La diffusion thermique est un phénomène irréversible.
- ☞ Les phénomènes diffusifs ne sont efficaces qu'à de petites distances.
  La distance caractéristique est
  $$\boxed{\delta = \sqrt{D\tau}}$$
- ☞ Les phénomènes diffusifs non entretenus "s'étouffent dans le temps".

Propriétés à connaître

Application 4 : Ordre de grandeur de D

On va retrouver l'expression de δ

1. Ecrire l'équation de diffusion en l'absence de source (i.e. de termes de création)
2. Analyser cette équation en ordre de grandeur afin d'établir
   $$\delta = \sqrt{D\tau}$$

Milieu	D $(10^{-6}\text{m}^2.\text{s}^{-1})$
Cuivre	117
Verre	0,75
Béton	0,45
Eau	0,143
Laine de Verre	1,42
Polystyrène expansé	0,41

III Résolution de l'équation de la diffusion

1 Continuités

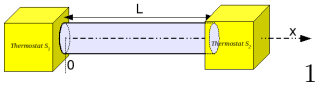
- ✗ A la séparation entre 2 milieux, on a **continuité du flux thermique** Φ.
  $$\boxed{\forall x \to \Phi\left(x^-\right) = \Phi\left(x^+\right)}$$
- ✗ Cela entraine à une dimension :
  $$\boxed{\forall x \to j_Q\left(x^-\right) = j_Q\left(x^+\right)}$$
- ✗ Pour un **contact parfait**, on a la continuité de la température :
  $$T\left(x^-\right) = T\left(x^+\right)$$

Propriété à connaître

2 Conditions aux limites

✗ le champ de température en 2 points, $\forall t$
✗ le champ de température en 1 point et le flux (ou flux surfacique) en un point.

Voici quelques exemples de conditions aux limites :



1. Température fixée par des thermostats.
2. A l'extrémité d'une barre calorifugée $\overrightarrow{j}_Q(\ell) = 0$
3. Contact solide-fluide :

Loi phénoménologique de conducto-convection de Newton

Aux interfaces $(\mathscr{S})$ entre un solide ① et un fluide ②, les transferts **conducto-convectifs** sont modélisables par un vecteur surfacique de flux thermique

$$\overrightarrow{j}_Q(M \in (\mathscr{S}), t) = h(T_1 - T_2)\overrightarrow{n}_{1\to 2}$$

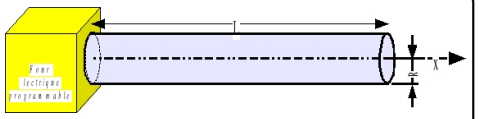
où

✗ T_1 est la température (pariétale) de la paroi du solide ① (au contact avec le fluide)
✗ T_2 est la température du fluide supposée uniforme (température extérieure)
✗ h est le coefficient **conducto-convectif** constant, en $\mathrm{W.m^{-2}K^{-1}}$
✗ et $\overrightarrow{n}_{1\to 2}$ est le vecteur unitaire normale à l'interface dirigé de ①→②

⚠ Attention...

Ne pas se tromper en appliquant la loi de Newton : le transfert se fait toujours du chaud vers le froid...
Vérifier les signes !

Application 5 : Ailette de refroidissement courte



Une barre métallique homogène cylindrique nue de rayon R, de longueur L et d'axe Ox est fixée horizontalement par une de ses extrémités, qui sera prise comme origine des abscisses x, à un four thermique supposé sans inertie dont la température $T_f(t)$ est réglable. Elle peut dissiper sa chaleur par toute sa surface libre dans l'air (voir figure ci-dessus).
Toutes les propriétés physiques intensives du métal sont supposées homogènes dans toute la barre, en particulier sa masse volumique μ, sa capacité thermique massique c et sa conductivité thermique λ.

1. A l'aide d'un bilan d'énergie, établir l'équation aux dérivées partielles régissant la différence de température $\theta(x,t) = T(x,t) - T_a$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + b\theta = 0 \qquad \text{(D.3)}$$

où l'on exprimera les constantes a et b en fonction de μ, k, h, c_p et R.
2. Préciser les conditions aux limites de cette étude.

3 Résolution de l'équation à 1D, sans création en régime stationnaire

Savoir démontrer №3 : Stationnaire , 1D

En régime stationnaire, l'équation de la diffusion a pour solution :

$$T = ax + b$$

où (a, b) sont des constantes.
Avec les conditions aux limites $T(0) = T_0$ et $T(\ell) = T_1$, on trouve

$$\boxed{T = T_0 + (T_1 - T_0)\frac{x}{\ell}}$$

4 Conservation du flux thermique

Savoir démontrer №4 : Régime stationnaire

L'équation de la chaleur s'écrit en régime stationnaire, sans création : $\text{div}\,(\overrightarrow{j_Q}) = 0$.
$\overrightarrow{j_Q}$ est un vecteur à flux conservatif.
Sur un tube de courant :

$$\boxed{\Phi_1 = \Phi_2}$$

5 Equation vérifiée par le vecteur densité de courant

Savoir démontrer №5 : Equation vérifiée par j_Q

Pour un problème à une dimension , avec une puissance créée indépendante de x, on trouve

$$\mu c \frac{\partial j_Q}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 j_Q}{\partial x^2}$$

6 Résistance thermique et conductance

6.a Définitions

Définition :

Pour un matériau, la **résistance thermique** est le rapport entre l'écart de températures (qui est la cause du flux) et le flux thermique :

$$\boxed{R_{\text{Th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1\to 2}}}$$

Remarque : Attention à la convention d'orientation : $1 \to 2$ (analogue d'une convention ***récepteur*** en électrocinétique)

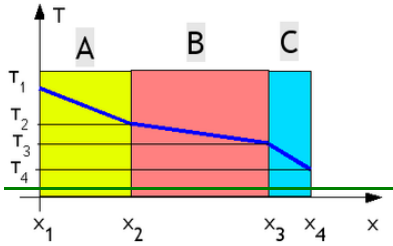
Définition :

Pour un même matériau, on définit sa **conductance thermique** comme l'inverse de sa résistance

$$\boxed{G_{\text{Th}} = \frac{1}{R_{\text{Th}}} = \frac{\Phi_{1\to 2}}{T_1 - T_2}}$$

6.b Association de résistances

Définition :



On dit que deux milieux sont placés en **série** s'ils sont traversés par le même flux.
Alors les différences de température « s'ajoutent ».

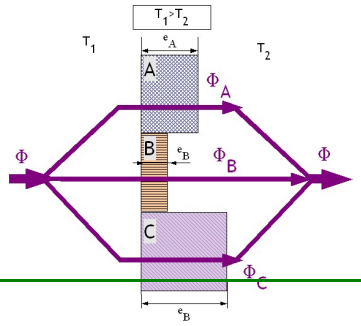
$$R_{eq} = R_A + R_B + R_C$$

Définition :

On dit que deux milieux sont placés en **parallèle** si les températures T_1 et T_2 sur leurs faces sont identiques.
On a alors

$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B + \Phi_C$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}$$



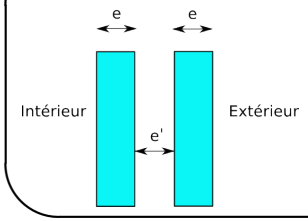
6.c Entre deux plans parallèles

Savoir démontrer №6 : Résistance thermique d'un conducteur compris entre deux plans //

Pour un système unidimensionnel, en régime stationnaire, on trouve une résistance thermique

$$R_{\text{Th}} = \frac{\ell}{\lambda S}$$

Application 6 : Double vitrage



On considère une vitre, constituée de deux lames de verre d'épaisseur e et de conductivité λ entourant une lame d'air d'épaisseur e' et de conductivité λ'.
Trouver la résistance thermique de la vitre.

Application 7 : Résistance thermique en cylindriques

Pour une distribution cylindrique, en régime stationnaire, on trouve une résistance thermique :

$$R_{\text{Th}} = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi\lambda\ell}$$

Application 8 : Résistance thermique en sphériques

Pour une distribution sphérique, en régime stationnaire, on trouve une résistance thermique :

$$R_{\text{Th}} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

6.d Cas général*

✗ De manière générale, la résistance thermique élémentaire d'un morceau de longueur $\mathrm{d}\ell$ et de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est :

$$\delta^2 R_{\text{Th}} = \frac{-\mathrm{d}T}{\overrightarrow{j}_Q.\overrightarrow{\mathrm{d}S}}$$

✗ Pour avoir la résistance d'un morceau de longueur ℓ, on additionne (intègre) les $\delta^2 R_{\text{Th}}$ [6].

✗ Pour avoir la résistance totale, on additionne (intègre sur S) l'inverse de $\delta^1 R_{\text{Th}}$.

Propriété à connaître

6.e Analogie électrique

On peut faire l'analogie avec la résistance électrique ; on a alors les correspondances suivantes :

✗ On peut définir la grandeur intensive qui est la cause de la diffusion :

Diffusion	**Thermique**	**de particules**	**Electrique**
Grandeur intensive	T	Densité de part. n	Potentiel électrique
Cause de la diffusion	$\overrightarrow{\text{grad}}\,T$	$\overrightarrow{\text{grad}}\,n$	$\overrightarrow{\text{grad}}\,V$

✗ L'effet est le transport d'une grandeur G extensive ; et une **loi phénoménologique** relie l'effet à la cause.

Diffusion	**Thermique**	**de particules**	**Electrique**
Grandeur extensive	U Energie interne	N : Nb de particules	q charge
Effet	$\delta^{II}Q = \overrightarrow{j}_Q.\overrightarrow{\mathrm{d}S}dt$	$\delta^{II}N = \overrightarrow{j}_n.\overrightarrow{dS}dt$	$\delta^{II}q = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS}dt$
Loi phéno.	$\overrightarrow{j}_Q = -\lambda\overrightarrow{\text{grad}}\,T$	$\overrightarrow{j}_n = -D\overrightarrow{\text{grad}}\,n$	$\overrightarrow{j} = -\gamma\overrightarrow{\text{grad}}\,V$
Nom de la loi	Fourier	Fick	Ohm

✗ En régime stationnaire, le flux est conservatif, soit :

$$\text{div}\,\overrightarrow{j} = 0$$

et on obtient les équations de Laplace correspondantes

$$\triangle T = 0 \qquad \triangle n = 0 \qquad \triangle V = 0$$

7 Taux de création d'entropie : retour sur l'irréversibilité

7.a Etude à une dimension

Savoir démontrer №7 :

Montrer qu'en régime stationnaire le taux de création d'entropie, c'est à dire l'entropie créée par unité de temps et de volume est

$$\sigma_c = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{j_Q}{T}\right)$$

σ_c est l'entropie créée par unité de temps et de volume.

7.b Cas général

Application 9 : Taux de création d'entropie à 3D

Montrer qu'en régime stationnaire le taux de création d'entropie, c'est à dire l'entropie créée par unité de temps et de volume est

$$\sigma_c = \text{div}\left(\frac{\vec{j}_Q}{T}\right) = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}}(T)}{T}\right)^2$$

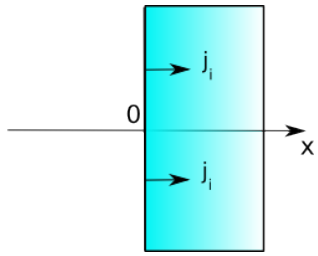
Indication : $\text{div}\,\frac{\vec{j}_Q}{T} = \frac{1}{T}\text{div}\,\vec{j}_Q + \vec{j}_Q.\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{T}$

IV Etude du régime forcé : ondes thermiques

L'équation de la chaleur étant linéaire, on va se placer en régime forcé sans création. On met ainsi en évidence des « ondes thermiques ».

1 Description

On considère un milieu de conductivité thermique λ, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. On étudie la diffusion thermique dans la zone $x > 0$ soumise à un vecteur densité de courant thermique sinusoïdal, qui s'exprime en $\mathbf{x = 0}$



$$\vec{j}_{\text{inc.}} = [j_0 + j_m \cos(\omega t)]\,\vec{u}_x$$

La figure D.2 donne les variations temporelles de ce flux surfacique.

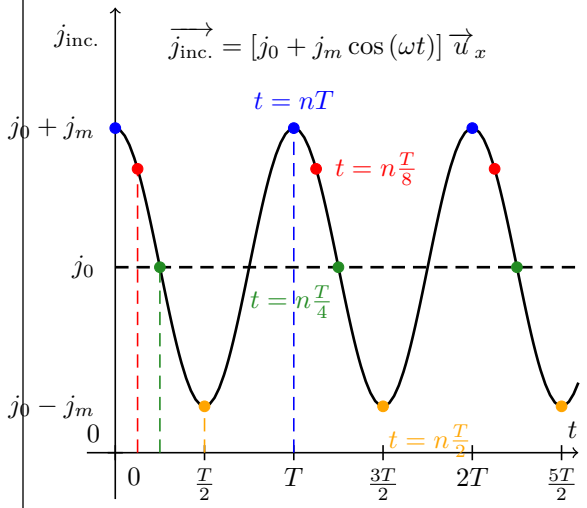


FIGURE D.2 – Evolution au cours du **temps** du vecteur densité de courant thermique en $\mathbf{x = 0}$

En $+\infty$, la perturbation (temporelle) n'arrive jamais... On a donc la condition aux limites

$$\lim_{x\to\infty} j_Q(x,t) = j_0$$

Et la température ne peut pas diverger (de même que le vecteur densité de courant thermique.

En $x = 0$, on a continuité du flux surfacique j_Q, mais on ne peut rien dire du champ de température... Ainsi,

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}_{|x=0^+} = j_Q(x=0^+) = j_0 + j_m\cos(\omega t)$$

2 Théorème de superposition : résolution en régime forcé

Etant données les conditions aux limites, on cherche une solution en $\vec{j}_Q$.
L'équation de la chaleur étant linéaire, on cherche cette solution sous la forme

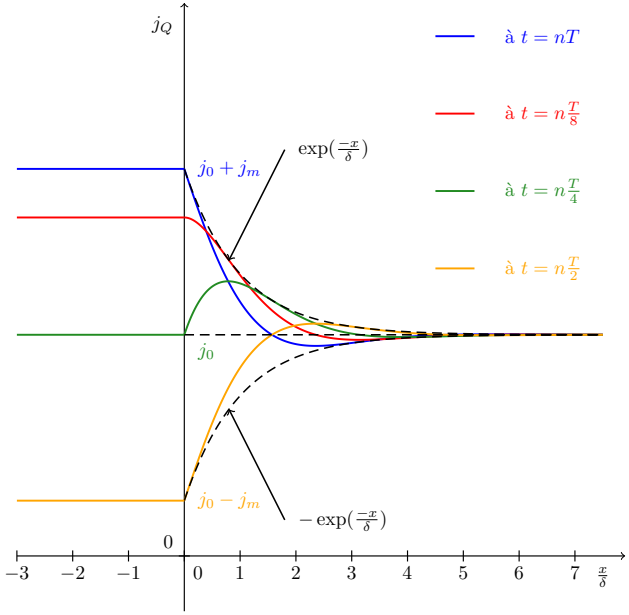
$$\vec{j}_Q = [j_0 + j_m \cos(\omega t + \varphi)]\,\vec{u}_x$$

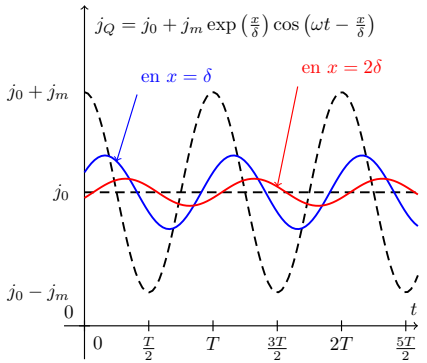
Application 10 : Effet de peau thermique

En utilisant la notation complexe, montrer que

1. $$j_Q = j_0 + j_m \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$
2. interpréter les courbes des figures ci-après.
3. Montrer que le champ de température $\theta(x,t)$ associé à la composante sinusoïdale du vecteur densité de courant thermique s'écrit

$$\theta(x,t) = \frac{j_m}{\lambda}\sqrt{\frac{D}{\omega}} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})$$





Application 11 : Epaisseur des murs et météo...

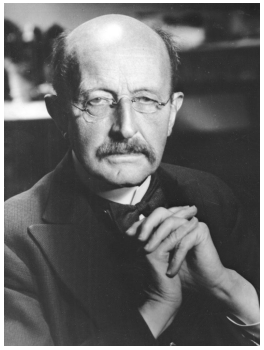
Sol terrestre	T	δ	retard à 2 m	atténuation à 2 m
variations diurnes	24 h	20 cm	2 à 3 j	$4,5.10^{-3}$
variations saisonnières	365 j	3,8 m	1 mois	0.6

Commentaire :

La couche des petites plumes qui recouvrent le corps d'un oiseau le protège contre les chocs mécaniques , l'humidité et les radiations solaires. La température normale du corps d'un oiseau voisine 40°C. Le plumage par son étonnante capacité d'isolation thermique assure la thermorégulation du corps.

L'oiseau peut ajuster le degré d'isolation par le changement de position des plumes. Lorsqu'il ébouriffe ses plumes, l'oiseau emprisonne de l'air dans le plumage et en augmente le pouvoir isolant . La survie de l'oiseau dépend donc de l'état de son plumage, celui-ci se régénère une à deux fois par an (mue).

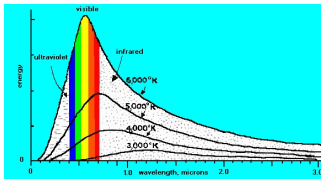
Chapitre D5 : Rayonnement thermique



Max Planck (1858-1947)

Partie D : Thermodynamique

D-1 : Diffusion de particules
D-2 : Premier et second principe
D-3 : Machines thermiques
D-4 : Diffusion thermique
D-5 : Rayonnement
D-6 : Thermo microscopique



Densité spectrale de flux surfacique

I Corps noir

1 Ondes électromagnétiques

Le rayonnement thermique est associé au transfert énergétique ***via*** des **ondes électromagnétique**. Ces ondes sont décrites par un champ électromagnétique $\left(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right)$ que l'on peut décomposer en harmoniques de Fourier relativement à la variable temps.

La fréquence ν de la composante spectrale (ou la longueur d'onde $\lambda_0 = \dfrac{c}{\nu}$, dans le vide ou encore l'énergie $\mathcal{E} = h\nu$ avec $h \simeq 6,62.10^{-34}$ J s, la constante de Planck) permet de la positionner dans le **spectre électromagnétique** (**à connaître !**) donné sur le figure D.3.

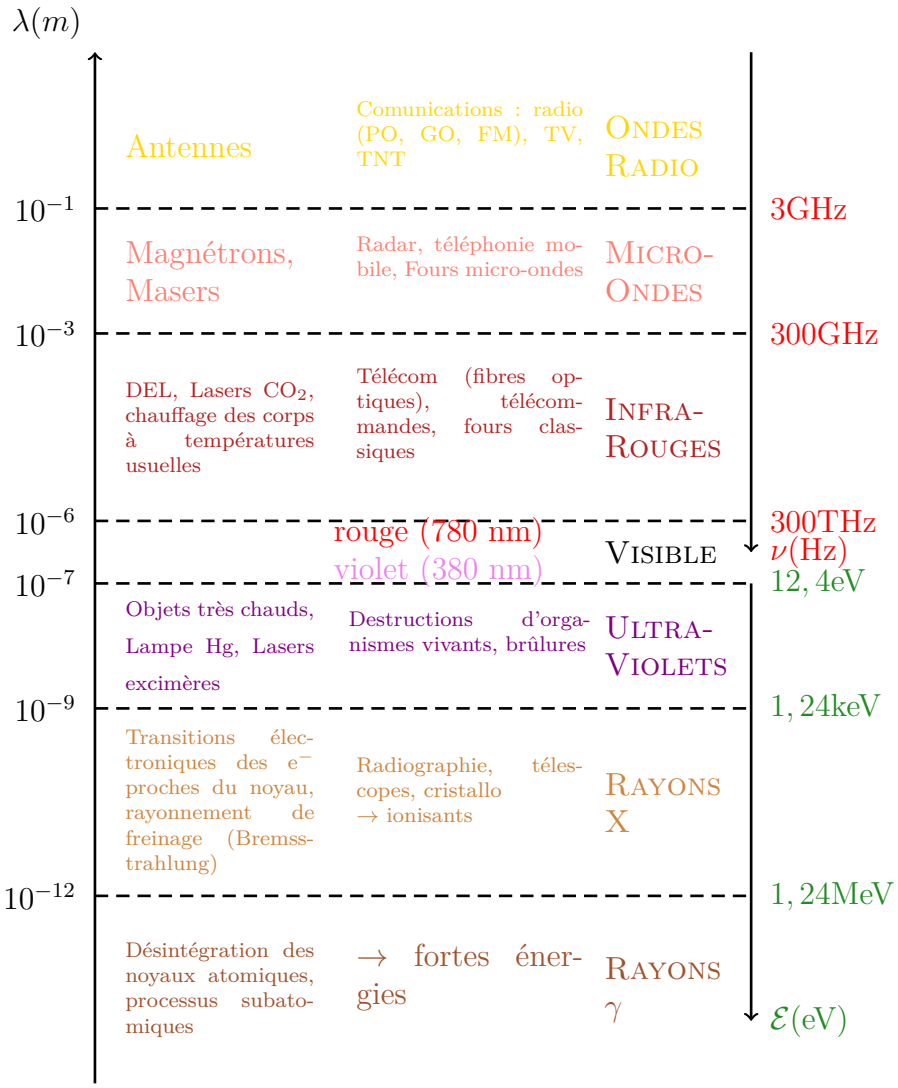
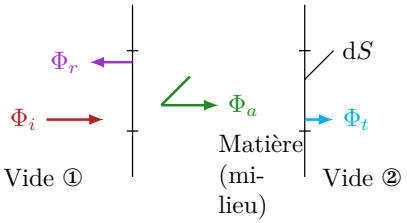


Figure D.3 – Spectre électromagnétique : domaines usuels à connaître.

2 Réflexion , transmission, absorption

Bilan d'énergie

Soit un rayonnement incident sur un corps avec une puissance Φ_i, alors ce rayonnement est



- ✗ **réfléchi en partie** avec une puissance Φ_r,
- ✗ **absorbé en partie** avec une puissance Φ_a,
- ✗ **transmis en partie** avec une puissance Φ_t (sans interaction avec le corps pour cette contribution).

Par conservation de l'énergie, on a

$$\Phi_i = \Phi_r + \Phi_t + \Phi_a$$

soit

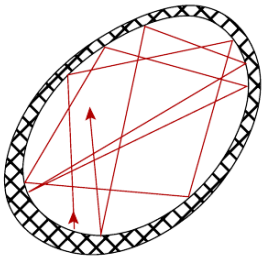
3 Corps noir

Définition :

On appelle **corps noir**, un objet capable d'absorber intégralement tout rayonnement incident, quelle que soit sa fréquence
Pas de transmission, pas de réflexion.

La réalisation pratique d'un corps noir de surface extérieure S se fait de la manière suivante :

- ✗ Choix du matériau : plaque recouverte de noir de fumée (absorbe le visible) , oxydes réfractaires (absorbe l'IR), brique pour IR.
- ✗ Réalisation d'une cavité thermostatée (= four) pour éviter que le rayonnement ne s'échappe. Ouverture de surface S dans la cavité.
- ✗ Tout rayonnement arrivant de l'extérieur sur S ne va pas ressortir.



II Rayonnement thermique

1 Relation flux surfacique - densité d'énergie

Définition :

On appelle rayonnement thermique le rayonnement émis par le "gaz de photons" en équilibre thermodynamique à la température T.
On note $u_{\text{em}}(T)$ la densité volumique d'énergie des photons dans la cavité. Ces photons se déplacent à la vitesse c.
On note dϕ le flux émis par l'élément de surface dS , φ est le flux surfacique :

$$\mathrm{d}\Phi = \varphi \mathrm{d}S$$

Savoir démontrer №1 : Modèle isotrope

En reprenant le modèle de déplacement isotrope du gaz parfait, on suppose que les photons sont émis dans 3 directions privilégiées, on montre que

$$\varphi = \frac{c}{6} u_{\text{em}}(T)$$

Un calcul exact donne

$$\boxed{\varphi = \frac{c}{4} u_{\text{em}}(T)}$$

2 Densité spectrale d'énergie volumique

Définitions :

✗ Les photons ont à priori toutes les fréquences possibles.

✗ On appelle **densité spectrale en longueur d'onde d'énergie volumique** la grandeur $u_\lambda(\lambda, T)$ telle que :

$$\mathrm{d}u_{\mathrm{em}} = u_\lambda(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda$$

La densité volumique totale est :

$$u_{em} = \int_0^\infty u_\lambda(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda$$

✗ On appelle **densité spectrale en fréquence d'énergie volumique** la grandeur $u_\nu(\nu, T)$ telle que :

$$\mathrm{d}u_{\mathrm{em}} = u_\nu(\nu, T)\,\mathrm{d}\nu$$

La densité volumique totale est :

$$u_{em} = \int_0^\infty u_\nu(\nu, T)\,\mathrm{d}\nu$$

⚠ Attention…

On a la relation $\lambda = \frac{c}{\nu}$, si on prend le ln, on trouve

$$\ln\lambda = \ln c - \ln\nu$$

On prend la différentielle, cela donne

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = -\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}$$

Savoir démontrer №2 : Changement de variable $\nu \leftrightarrow \lambda$

La relation liant ces deux expressions de la densité spectrale de flux surfacique est

$$\boxed{u_\lambda = \frac{c}{\lambda^2}u_\nu} \text{ et } \boxed{u_\nu = \frac{c}{\nu^2}u_\lambda}$$

3 Loi de Planck

Loi de Planck (1900) HP

La densité spectrale d'énergie volumique du rayonnement d'équilibre thermique est

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \qquad \text{où}$$

c est la célérité des ondes électromagnétique dans le vide ;
k_B la constante de Boltzmann ;
h la constante de Planck.

✗ La connaissance de cette loi n'est pas au programme.

✗ C'est une loi **universelle** : elle ne dépend que de la température des corps (peu importe leur nature (métaux, isolants...), leur état physique (solide, liquide ou gaz)...)

✗ k_B est la constante de la physique statistique (ie thermodynamique microscopique).

✗ c est associée à l'électromagnétisme et plus généralement à la relativité.

✗ h est associée à la physique quantique : le rayonnement électromagnétique est quantifié. Une composante de fréquence ν contient l'énergie $h\nu$ (ou $nh\nu$ avec $n \in \mathbb{N}$) appelé ***quantum d'énergie***, transporté par un **photon**.

Propriétés à connaître

Loi de Planck en longueur d'onde

La densité spectrale d'énergie volumique du rayonnement d'équilibre thermique est

$$u_\lambda(\lambda,T)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)-1}$$

Application 1 : Formes approchées de la loi de Planck : lois de Wien (1896) et de Rayleigh-Jeans

1. Etudier le comportement basses fréquences de cette loi en donnant une expression approchée de la fonction $u_\nu(\nu,T)$, c'est la loi de Rayleigh-Jeans.
$$u_\nu^{\text{RJ}}(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_BT$$
2. En 1896, Wilhelm Wien propose une loi empirique (dite « de Wien »)
$$u_\nu(\nu,T)=\frac{8\pi h}{c^3}\nu^3\exp\left(-\frac{h\nu}{k_BT}\right)$$
Cette loi est correcte pour les hautes fréquences.

$$\varphi_\nu(\nu,T)=\frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1}$$

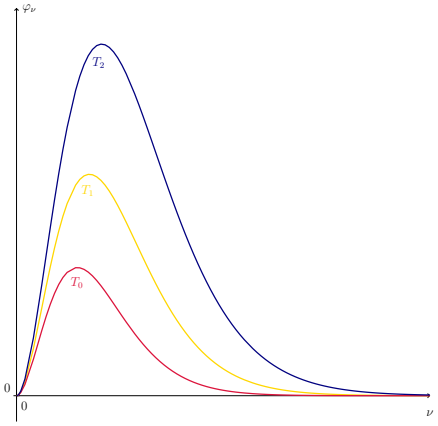


Figure D.4 – Densité spectrale de flux surfacique en fréquence.

$$\varphi_\lambda(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_BT}\right)-1}$$

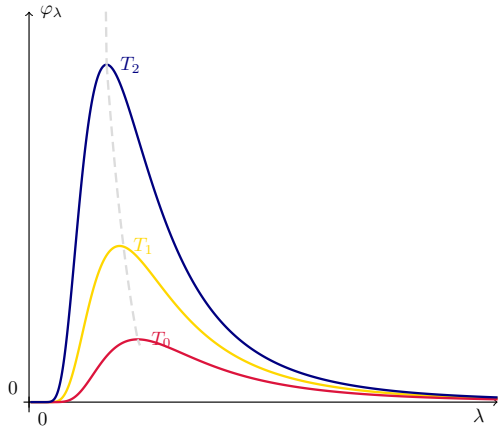


Figure D.5 – Densité spectrale de flux surfacique en longueur d'onde.

Si l'on note λ_m (resp. ν_m) la position du maximum des fonctions $\varphi_\lambda(\lambda,T)$ (resp. $\varphi_\nu(\nu,T)$) à T fixée, on a

⚠ Attention…

$$\boxed{\lambda_m\neq\frac{c}{\nu_m}}$$

Beau piège, n'est-ce pas ?

4 Loi du déplacement de Wien (1896)

Savoir démontrer №3 : Loi du déplacement de Wien en longueur d'onde

Le rayonnement d'équilibre thermique vérifie la loi du déplacement de Wien

$$\boxed{\lambda_m T=2898\ \mu\text{m. K}}$$

où T est la température en K et λ_m, exprimée en μm, est la longueur d'onde donnant le maximum de $\varphi_\lambda(\lambda,T)$.

Démonstration :

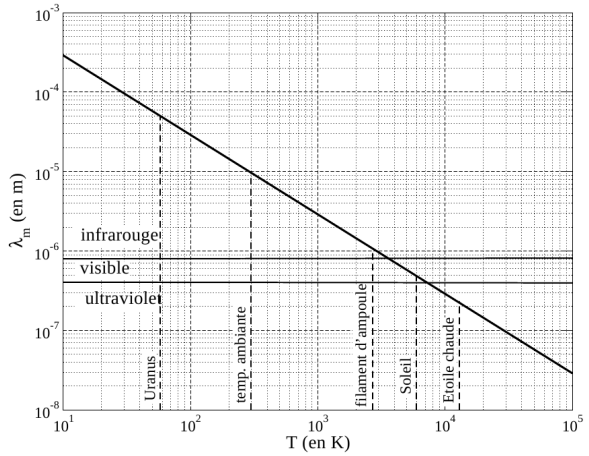
On donne la racine x^* de l'équation $5-5\text{e}^{-x^*}-x^*=0$: $x^*\simeq 4,964$.

On retiendra cette loi sous la forme

$$\boxed{\lambda_m T = 3000\ \mu\text{m. K}}$$

Propriété à connaître

On donne sur la figure suivante une représentation graphique de cette loi qui, sur une échelle log-log, donne une droite de pente $-1 \to \ln \lambda_m = -\ln T \to \lambda_m T = \text{Cte}$.



Représentation de la loi de Wien

λ_m T = 2898 μm.K

Par application de cette loi

- ☞ le spectre visible correspond à des températures de l'ordre de 6000 K : c'est approximativement la température moyenne de la surface du soleil, ce qui (n')explique (pas) sa couleur apparente car $\lambda_m \simeq 0,5\ \mu$m ($\sim$ vert).
- ☞ le spectre d'un corps à 300 K est à $\lambda_m \simeq 10\ \mu$m (infra-rouge), il faut donc des caméras thermiques pour « voir » la nuit.

Remarque :

On peut remarquer (cf. figure D.5, pour différentes températures) que la DSP surfacique devient négligeable dès que l'on s'éloigne sensiblement de la valeur de λ_m.
En corrollaire, on peut montrer que 98% de l'énergie du rayonnement équilibre thermique se trouve dans l'intervalle $[0,5\lambda_m; 8\lambda_m]$ qui constitue **l'étendue spectrale** de ce rayonnement.

Application 2 : Loi du déplacement de Wien en fréquence

Etablir l'expression de la loi du déplacement de Wien en fréquence

$$\frac{\nu_m}{T} = 58,79.10^9\ \text{Hz. K}^{-1}$$

On donne la racine y^* de l'équation $3 - 3\text{e}^{-y^*} - y^* = 0$: $y^* \simeq 2,82$.

5 Loi de Stefan-Boltzmann

Savoir démontrer №4 : Lois de Stefan-Boltzmann

Le rayonnement d'équilibre thermique à la température T présente une densité volumique d'énergie $u(T)$ et un flux surfacique $\varphi(T)$ (ou puissance surfacique) vérifiant les lois de Stefan-Boltzmann

$$u(T) = \sigma_0 T^4 \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(T) = \sigma T^4}$$

avec $\sigma_0 = \frac{4}{c}\sigma$ et $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3} \simeq 5,67.10^{-8}\ \text{W.m}^{-2}\text{. K}^{-4}$

Démonstration :

On donne $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{\text{e}^x - 1}\text{d}x = \frac{\pi^4}{15}$.

Savoir démontrer №5 : Puissance rayonnée

La puissance rayonnée par un corps noir de surface $\mathcal{S}$ et de température T est

$$\boxed{\Phi_e = \mathscr{P}_e = \mathcal{S}\sigma T^4}$$

Définition :

Un **corps gris** absorbe et réemet une fraction $\alpha \leq 1$ du rayonnement qu'il reçoit

$$\varphi_e = \alpha\varphi$$

La loi de Stephan devient :

$$\boxed{\Phi_e = \mathscr{P}_e = \alpha\mathcal{S}\sigma T^4}$$

III Exemples

— **En régime stationnaire, la puissance reçue égale la puissance émise par un corps noir.**
— Toujours faire un bilan de puissance sur une surface S à bien préciser !!! (Ne pas faire de bilans de puissance surfacique)
— Le flux surfacique moyen du soleil sur Terre est $\varphi \simeq 1kW/m^2$.

Propriété à connaître

1 Terme de Newton

Savoir démontrer №6 : Echange entre deux CN proches de température voisines

Lorsque deux corps noirs $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en regard ont des températures T_1 et T_2 **voisines**, les échanges thermique par rayonnement se mettent localement sous une forme analogue à celle de la loi de conducto-convection de Newton

$$\Phi_{\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2} \simeq h_R S\,(T_1 - T_2)$$

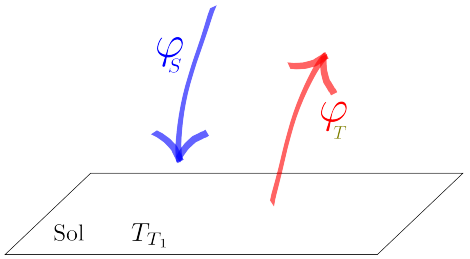
avec $h_R = 4\sigma T^3$ où $T \simeq T_1 \simeq T_2$.

Remarque :

Si $T_1 > T_2$, $\frac{dU_2}{dt} > 0$ et le corps noir $\mathcal{C}_2$ s'échauffe localement.
Si $T_1 < T_2$, $\frac{dU_2}{dt} < 0$ et le corps noir $\mathcal{C}_2$ se refroidit localement.

2 Température d'une planète

Savoir démontrer №7 : Sans vitre



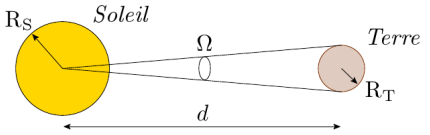
Le sol est considéré comme un corps noir émettant le flux surfacique $\varphi_{T_1} = \sigma T_{T_1}^4$
Il reçoit le flux surfacique φ_S du soleil.
A l'équilibre, on en déduit la température du sol :

$$T_{T_1} = \left(\frac{\varphi_S}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \simeq 90\ °C$$

Résultat surévalué , il faut considérer des pertes.

Savoir démontrer №8 : Expression en fonction de la température du soleil

Le soleil a globalement un spectre de corps noir. Son pic d'émission se situe à $\lambda = 520$ nm. Son rayon est $R_S = 7.10^5$ km.
La distance Terre-Soleil est $d \simeq 1,5.10^7$ km et le rayon de la Terre vaut $R_T = 6,4.10^3$ km.



1. Montrer que la puissance totale émise par le Soleil est

$$\Phi_S = \sigma T_S^4 4\pi R_S^2$$

2. On a donc $\varphi_S = \sigma T_S^4 R_S^2 \frac{\pi R_T^2}{d^2}$

3. La Terre étant assimilée à un corps noir, sa température d'équilibre sous l'influence du rayonnement solaire (on négligera tout effet de l'atmosphère) est donc :

$$T_{T_1} = T_S\sqrt{\frac{\pi R_S R_T}{d}}$$

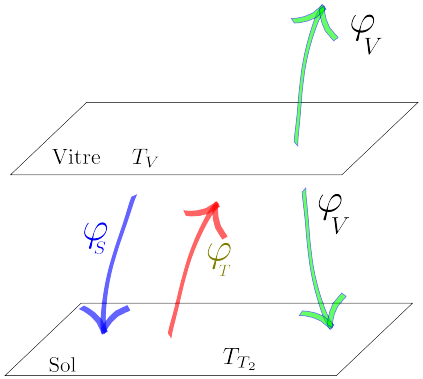
Définition :

Une partie de la lumière d'une planète est réfléchie, on note $\mathcal{A}$ l'albédo ou coefficient de réflexion la quantité :

$$\Phi_{\text{Réfléchi}} = \mathcal{A}\Phi_{\text{Incident}}$$

3 Effet de serre

Savoir démontrer №9 : Avec Vitre



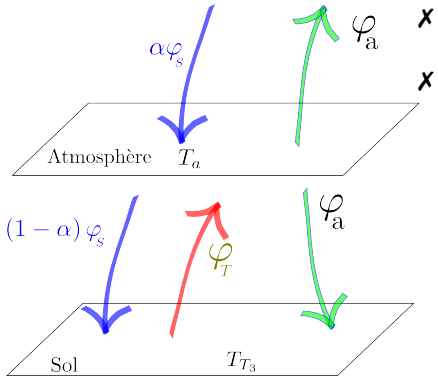
La vitre laisse passer le rayonnement solaire et absorbe le rayonnement de la Terre (infra-rouge lointain). On note T_V la température de la vitre.
En écrivant l'équilibre de la vitre et de la Terre , on trouve :

$$T_{T_2} = \left(\frac{2\Phi_S}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \simeq 160 \text{ °C}$$

Effet $2^{1/4} \simeq 1,2$ fois plus important, c'est **l'effet de serre**.

4 Effet de serre atmosphérique

Savoir démontrer №10 : Effet de serre atmosphérique



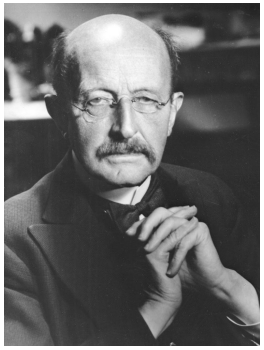
✗ La Terre reçoit le flux surfacique φ_S du soleil qui traverse l'atmosphère.
✗ L'atmosphère est un corps noir de température T_a, qui absorbe le rayonnement émis par la Terre, absorbe une fraction $\alpha\varphi_S$ du rayonnement solaire et réémet vers le sol et vers la Terre φ_a.
Le bilan sur l'atmosphère + Terre donne :

$$\varphi_S = \varphi_a \rightarrow T_a = \left(\frac{\varphi_S}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Le bilan sur la Terre donne :

$$(1-\alpha)\,\varphi_S + \varphi_a = \sigma T_{T_3}^4 \rightarrow T_{T_3} = \left(\frac{\varphi_S\,(2-\alpha)}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$$

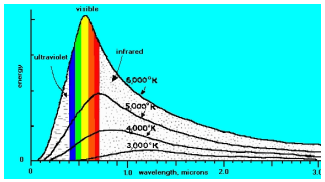
Chapitre D5 : Rayonnement thermique



Max Planck (1858-1947)

Partie D : Thermodynamique

D-1 : Diffusion de particules
D-2 : Premier et second principe
D-3 : Machines thermiques
D-4 : Diffusion thermique
D-5 : Rayonnement
D-6 : Thermo microscopique



Densité spectrale de flux surfacique

I Corps noir

1 Ondes électromagnétiques

Le rayonnement thermique est associé au transfert énergétique ***via*** des **ondes électromagnétique**. Ces ondes sont décrites par un champ électromagnétique $\left(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right)$ que l'on peut décomposer en harmoniques de Fourier relativement à la variable temps.

La fréquence ν de la composante spectrale (ou la longueur d'onde $\lambda_0 = \dfrac{c}{\nu}$, dans le vide ou encore l'énergie $\mathcal{E} = h\nu$ avec $h \simeq 6,62.10^{-34}$ J s, la constante de Planck) permet de la positionner dans le **spectre électromagnétique** (**à connaître !**) donné sur le figure D.3.

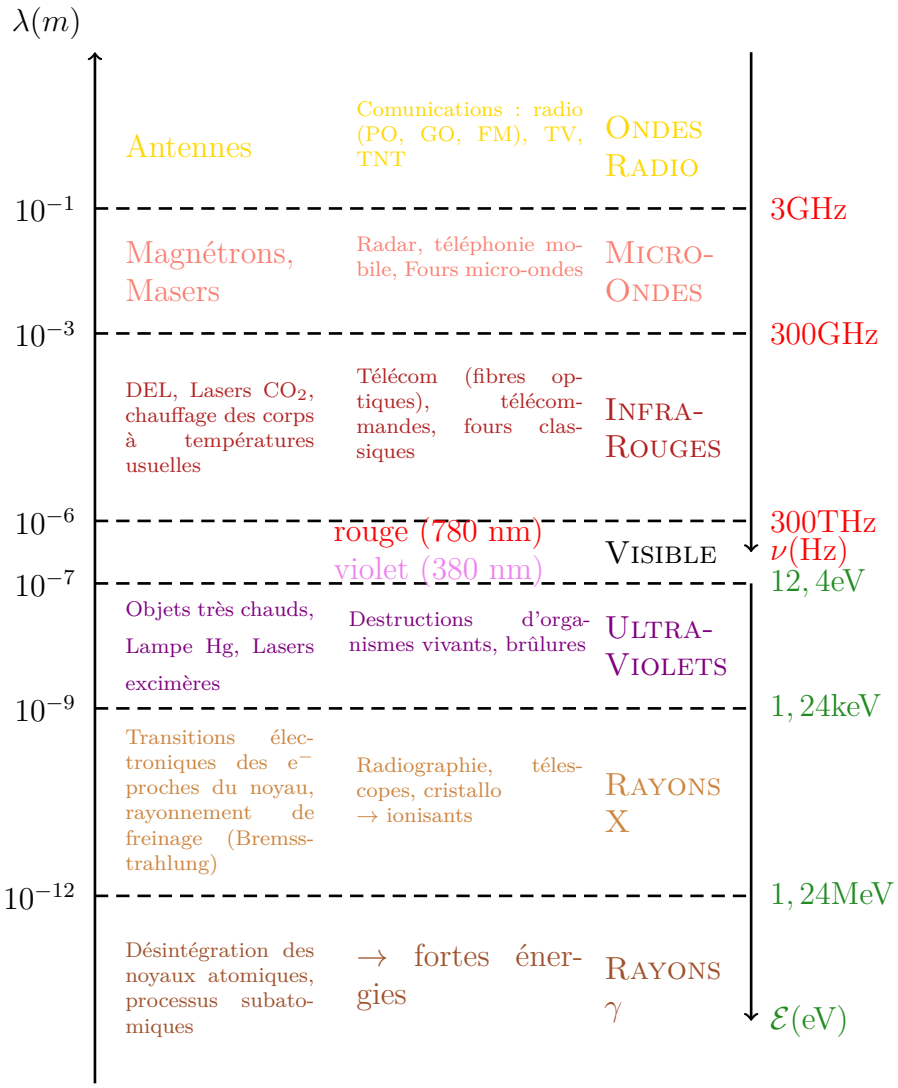
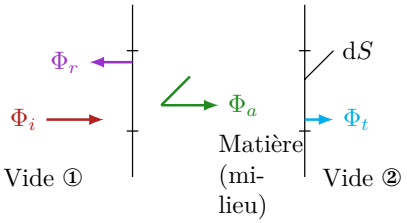


Figure D.3 – Spectre électromagnétique : domaines usuels à connaître.

2 Réflexion , transmission, absorption

Bilan d'énergie

Soit un rayonnement incident sur un corps avec une puissance Φ_i, alors ce rayonnement est



- ✗ **réfléchi en partie** avec une puissance Φ_r,
- ✗ **absorbé en partie** avec une puissance Φ_a,
- ✗ **transmis en partie** avec une puissance Φ_t (sans interaction avec le corps pour cette contribution).

Par conservation de l'énergie, on a

$$\Phi_i = \Phi_r + \Phi_t + \Phi_a$$

soit

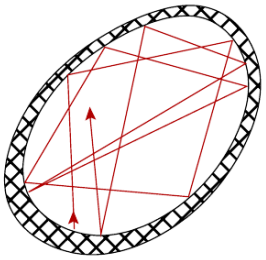
3 Corps noir

Définition :

On appelle **corps noir**, un objet capable d'absorber intégralement tout rayonnement incident, quelle que soit sa fréquence
Pas de transmission, pas de réflexion.

La réalisation pratique d'un corps noir de surface extérieure S se fait de la manière suivante :

- ✗ Choix du matériau : plaque recouverte de noir de fumée (absorbe le visible) , oxydes réfractaires (absorbe l'IR), brique pour IR.
- ✗ Réalisation d'une cavité thermostatée (= four) pour éviter que le rayonnement ne s'échappe. Ouverture de surface S dans la cavité.
- ✗ Tout rayonnement arrivant de l'extérieur sur S ne va pas ressortir.



II Rayonnement thermique

1 Relation flux surfacique - densité d'énergie

Définition :

On appelle rayonnement thermique le rayonnement émis par le "gaz de photons" en équilibre thermodynamique à la température T.
On note $u_{\text{em}}(T)$ la densité volumique d'énergie des photons dans la cavité. Ces photons se déplacent à la vitesse c.
On note dϕ le flux émis par l'élément de surface dS , φ est le flux surfacique :

$$\mathrm{d}\Phi = \varphi \mathrm{d}S$$

Savoir démontrer №1 : Modèle isotrope

En reprenant le modèle de déplacement isotrope du gaz parfait, on suppose que les photons sont émis dans 3 directions privilégiées, on montre que

$$\varphi = \frac{c}{6} u_{\text{em}}(T)$$

Un calcul exact donne

$$\boxed{\varphi = \frac{c}{4} u_{\text{em}}(T)}$$

2 Densité spectrale d'énergie volumique

Définitions :

✗ Les photons ont à priori toutes les fréquences possibles.

✗ On appelle **densité spectrale en longueur d'onde d'énergie volumique** la grandeur $u_\lambda(\lambda, T)$ telle que :

$$\mathrm{d}u_{\mathrm{em}} = u_\lambda(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda$$

La densité volumique totale est :

$$u_{em} = \int_0^\infty u_\lambda(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda$$

✗ On appelle **densité spectrale en fréquence d'énergie volumique** la grandeur $u_\nu(\nu, T)$ telle que :

$$\mathrm{d}u_{\mathrm{em}} = u_\nu(\nu, T)\,\mathrm{d}\nu$$

La densité volumique totale est :

$$u_{em} = \int_0^\infty u_\nu(\nu, T)\,\mathrm{d}\nu$$

⚠ Attention…

On a la relation $\lambda = \frac{c}{\nu}$, si on prend le ln, on trouve

$$\ln\lambda = \ln c - \ln\nu$$

On prend la différentielle, cela donne

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = -\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}$$

Savoir démontrer №2 : Changement de variable $\nu \leftrightarrow \lambda$

La relation liant ces deux expressions de la densité spectrale de flux surfacique est

$$\boxed{u_\lambda = \frac{c}{\lambda^2}u_\nu} \text{ et } \boxed{u_\nu = \frac{c}{\nu^2}u_\lambda}$$

3 Loi de Planck

Loi de Planck (1900) HP

La densité spectrale d'énergie volumique du rayonnement d'équilibre thermique est

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \qquad \text{où}$$

c est la célérité des ondes électromagnétique dans le vide ;
k_B la constante de Boltzmann ;
h la constante de Planck.

✗ La connaissance de cette loi n'est pas au programme.

✗ C'est une loi **universelle** : elle ne dépend que de la température des corps (peu importe leur nature (métaux, isolants...), leur état physique (solide, liquide ou gaz)...)

✗ k_B est la constante de la physique statistique (ie thermodynamique microscopique).

✗ c est associée à l'électromagnétisme et plus généralement à la relativité.

✗ h est associée à la physique quantique : le rayonnement électromagnétique est quantifié. Une composante de fréquence ν contient l'énergie $h\nu$ (ou $nh\nu$ avec $n \in \mathbb{N}$) appelé ***quantum d'énergie***, transporté par un **photon**.

Propriétés à connaître

Loi de Planck en longueur d'onde

La densité spectrale d'énergie volumique du rayonnement d'équilibre thermique est

$$u_\lambda(\lambda,T)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)-1}$$

Application 1 : Formes approchées de la loi de Planck : lois de Wien (1896) et de Rayleigh-Jeans

1. Etudier le comportement basses fréquences de cette loi en donnant une expression approchée de la fonction $u_\nu(\nu,T)$, c'est la loi de Rayleigh-Jeans.
$$u_\nu^{\text{RJ}}(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_BT$$
2. En 1896, Wilhelm Wien propose une loi empirique (dite « de Wien »)
$$u_\nu(\nu,T)=\frac{8\pi h}{c^3}\nu^3\exp\left(-\frac{h\nu}{k_BT}\right)$$
Cette loi est correcte pour les hautes fréquences.

$$\varphi_\nu(\nu,T)=\frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1}$$

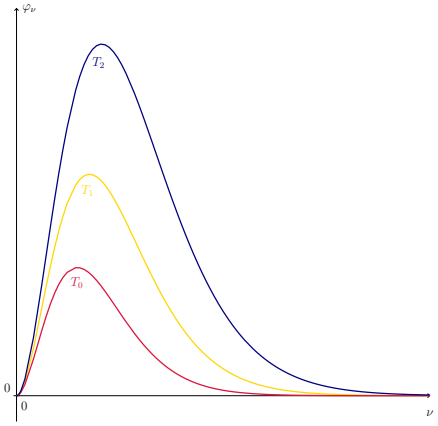


Figure D.4 – Densité spectrale de flux surfacique en fréquence.

$$\varphi_\lambda(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_BT}\right)-1}$$

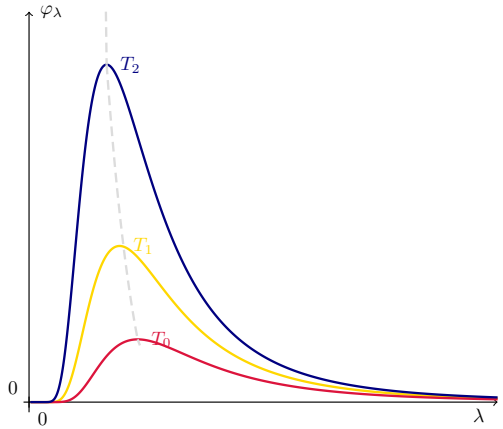


Figure D.5 – Densité spectrale de flux surfacique en longueur d'onde.

Si l'on note λ_m (resp. ν_m) la position du maximum des fonctions $\varphi_\lambda(\lambda,T)$ (resp. $\varphi_\nu(\nu,T)$) à T fixée, on a

⚠ Attention…

$$\boxed{\lambda_m\neq\frac{c}{\nu_m}}$$

Beau piège, n'est-ce pas ?

4 Loi du déplacement de Wien (1896)

Savoir démontrer №3 : Loi du déplacement de Wien en longueur d'onde

Le rayonnement d'équilibre thermique vérifie la loi du déplacement de Wien

$$\boxed{\lambda_m T=2898\ \mu\text{m. K}}$$

où T est la température en K et λ_m, exprimée en μm, est la longueur d'onde donnant le maximum de $\varphi_\lambda(\lambda,T)$.

Démonstration :

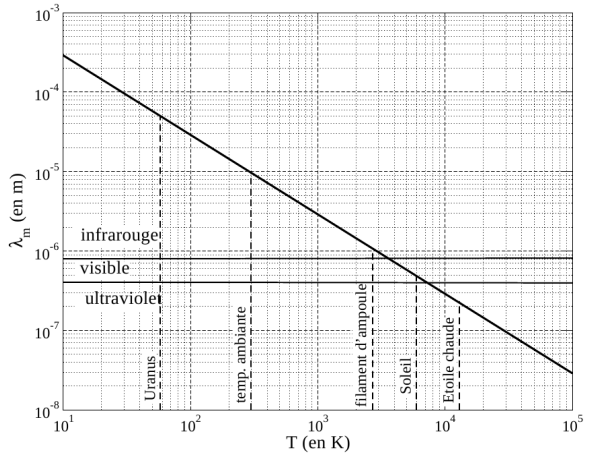
On donne la racine x^* de l'équation $5-5\text{e}^{-x^*}-x^*=0$: $x^*\simeq 4,964$.

On retiendra cette loi sous la forme

$$\boxed{\lambda_m T = 3000\ \mu\text{m. K}}$$

Propriété à connaître

On donne sur la figure suivante une représentation graphique de cette loi qui, sur une échelle log-log, donne une droite de pente $-1 \to \ln \lambda_m = -\ln T \to \lambda_m T = \text{Cte}$.



Représentation de la loi de Wien

λ_m T = 2898 μm.K

Par application de cette loi

- ☞ le spectre visible correspond à des températures de l'ordre de 6000 K : c'est approximativement la température moyenne de la surface du soleil, ce qui (n')explique (pas) sa couleur apparente car $\lambda_m \simeq 0,5\ \mu$m ($\sim$ vert).
- ☞ le spectre d'un corps à 300 K est à $\lambda_m \simeq 10\ \mu$m (infra-rouge), il faut donc des caméras thermiques pour « voir » la nuit.

Remarque :

On peut remarquer (cf. figure D.5, pour différentes températures) que la DSP surfacique devient négligeable dès que l'on s'éloigne sensiblement de la valeur de λ_m.
En corrollaire, on peut montrer que 98% de l'énergie du rayonnement équilibre thermique se trouve dans l'intervalle $[0,5\lambda_m; 8\lambda_m]$ qui constitue **l'étendue spectrale** de ce rayonnement.

Application 2 : Loi du déplacement de Wien en fréquence

Etablir l'expression de la loi du déplacement de Wien en fréquence

$$\frac{\nu_m}{T} = 58,79.10^9\ \text{Hz. K}^{-1}$$

On donne la racine y^* de l'équation $3 - 3\text{e}^{-y^*} - y^* = 0$: $y^* \simeq 2,82$.

5 Loi de Stefan-Boltzmann

Savoir démontrer №4 : Lois de Stefan-Boltzmann

Le rayonnement d'équilibre thermique à la température T présente une densité volumique d'énergie $u(T)$ et un flux surfacique $\varphi(T)$ (ou puissance surfacique) vérifiant les lois de Stefan-Boltzmann

$$u(T) = \sigma_0 T^4 \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(T) = \sigma T^4}$$

avec $\sigma_0 = \frac{4}{c}\sigma$ et $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3} \simeq 5,67.10^{-8}\ \text{W.m}^{-2}\text{. K}^{-4}$

Démonstration :

On donne $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{\text{e}^x - 1}\text{d}x = \frac{\pi^4}{15}$.

Savoir démontrer №5 : Puissance rayonnée

La puissance rayonnée par un corps noir de surface $\mathcal{S}$ et de température T est

$$\boxed{\Phi_e = \mathscr{P}_e = \mathcal{S}\sigma T^4}$$

Définition :

Un **corps gris** absorbe et réemet une fraction $\alpha \leq 1$ du rayonnement qu'il reçoit

$$\varphi_e = \alpha\varphi$$

La loi de Stephan devient :

$$\boxed{\Phi_e = \mathscr{P}_e = \alpha\mathcal{S}\sigma T^4}$$

III Exemples

— **En régime stationnaire, la puissance reçue égale la puissance émise par un corps noir.**
— Toujours faire un bilan de puissance sur une surface S à bien préciser !!! (Ne pas faire de bilans de puissance surfacique)
— Le flux surfacique moyen du soleil sur Terre est $\varphi \simeq 1kW/m^2$.

Propriété à connaître

1 Terme de Newton

Savoir démontrer №6 : Echange entre deux CN proches de température voisines

Lorsque deux corps noirs $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en regard ont des températures T_1 et T_2 **voisines**, les échanges thermique par rayonnement se mettent localement sous une forme analogue à celle de la loi de conducto-convection de Newton

$$\Phi_{\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2} \simeq h_R S\,(T_1 - T_2)$$

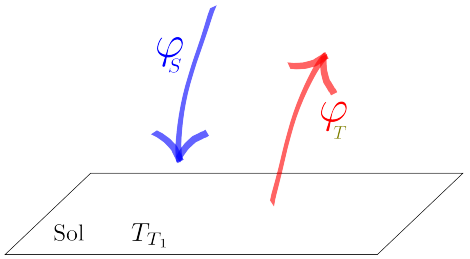
avec $h_R = 4\sigma T^3$ où $T \simeq T_1 \simeq T_2$.

Remarque :

Si $T_1 > T_2$, $\frac{dU_2}{dt} > 0$ et le corps noir $\mathcal{C}_2$ s'échauffe localement.
Si $T_1 < T_2$, $\frac{dU_2}{dt} < 0$ et le corps noir $\mathcal{C}_2$ se refroidit localement.

2 Température d'une planète

Savoir démontrer №7 : Sans vitre



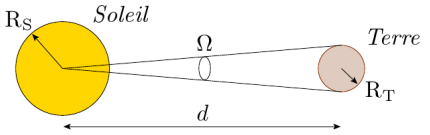
Le sol est considéré comme un corps noir émettant le flux surfacique $\varphi_{T_1} = \sigma T_{T_1}^4$
Il reçoit le flux surfacique φ_S du soleil.
A l'équilibre, on en déduit la température du sol :

$$T_{T_1} = \left(\frac{\varphi_S}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \simeq 90\ °C$$

Résultat surévalué , il faut considérer des pertes.

Savoir démontrer №8 : Expression en fonction de la température du soleil

Le soleil a globalement un spectre de corps noir. Son pic d'émission se situe à $\lambda = 520$ nm. Son rayon est $R_S = 7.10^5$ km.
La distance Terre-Soleil est $d \simeq 1,5.10^7$ km et le rayon de la Terre vaut $R_T = 6,4.10^3$ km.



1. Montrer que la puissance totale émise par le Soleil est

$$\Phi_S = \sigma T_S^4 4\pi R_S^2$$

2. On a donc $\varphi_S = \sigma T_S^4 R_S^2 \frac{\pi R_T^2}{d^2}$

3. La Terre étant assimilée à un corps noir, sa température d'équilibre sous l'influence du rayonnement solaire (on négligera tout effet de l'atmosphère) est donc :

$$T_{T_1} = T_S\sqrt{\frac{\pi R_S R_T}{d}}$$

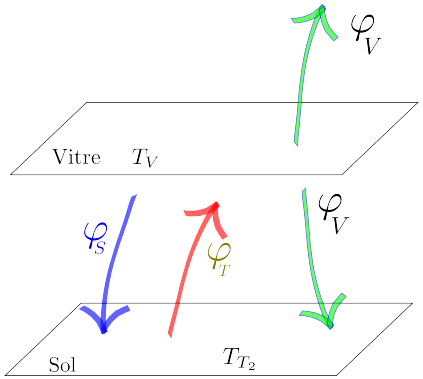
Définition :

Une partie de la lumière d'une planète est réfléchie, on note $\mathcal{A}$ l'albédo ou coefficient de réflexion la quantité :

$$\Phi_{\text{Réfléchi}} = \mathcal{A}\Phi_{\text{Incident}}$$

3 Effet de serre

Savoir démontrer №9 : Avec Vitre



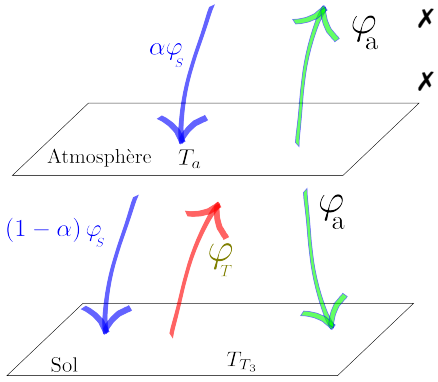
La vitre laisse passer le rayonnement solaire et absorbe le rayonnement de la Terre (infra-rouge lointain). On note T_V la température de la vitre.
En écrivant l'équilibre de la vitre et de la Terre , on trouve :

$$T_{T_2} = \left(\frac{2\Phi_S}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \simeq 160 \text{ °C}$$

Effet $2^{1/4} \simeq 1,2$ fois plus important, c'est **l'effet de serre**.

4 Effet de serre atmosphérique

Savoir démontrer №10 : Effet de serre atmosphérique



✗ La Terre reçoit le flux surfacique φ_S du soleil qui traverse l'atmosphère.
✗ L'atmosphère est un corps noir de température T_a, qui absorbe le rayonnement émis par la Terre, absorbe une fraction $\alpha\varphi_S$ du rayonnement solaire et réémet vers le sol et vers la Terre φ_a.
Le bilan sur l'atmosphère + Terre donne :

$$\varphi_S = \varphi_a \rightarrow T_a = \left(\frac{\varphi_S}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Le bilan sur la Terre donne :

$$(1-\alpha)\,\varphi_S + \varphi_a = \sigma T_{T_3}^4 \rightarrow T_{T_3} = \left(\frac{\varphi_S\,(2-\alpha)}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Partie E : Mécanique des Fluides

Chapitre E1 : Statique des Fluides

Poussée d'Archimède dans l'eau

Partie E : Mécanique des fluides

E-1 : Statique des fluides
E-2 : Cinématique des fluides
E-3 : Viscosité
E-4 : Dyn. F. visqueux
E-5 : Dyn. F. parfaits
E-6 : Bilans macroscopiques
E-7 : Tension Superficielle

Poussée d'Archimède dans l'air

I Définitions et grandeurs caractéristiques

1 Définition d'un fluide

Définition :

Fluide : Un fluide est un ensemble d'entitées microscopiques (atomes ou molécules) qui occupent un volume dont la forme géométrique s'adapte aux contraintes extérieures (parois du récipient).
En pratique : liquide ou gaz.
élément de masse : On note dm la masse élémentaire et $d\tau$ le volume.
masse volumique : $\mu = \frac{dm}{d\tau}$
Voici la liste des masses volumiques à connaitre :

Corps	Masse volumique en $kg.m^{-3}$
Eau	10^3
Eau de mer	$1,03\ 10^3$
Air	1.204
Fer	$7.8\ 10^3$
Mercure	$13.6\ 10^3$
Hêtre	800

densité : pour un liquide $d = \frac{\mu_{liquide}}{\mu_{eau}}$
pour un gaz $d = \frac{\mu_{gaz}}{\mu_{air}}$

1.a Milieu continu

Définition :

L'échelle de la particule de fluide $d\ell$, est très supérieure à l'échelle microscopique a_{atome} et très inférieure à la taille caractéristique de l'écoulement L.

$$L \gg d\ell \gg a_{\text{atome}}$$

On dit alors qu'un milieu est continu si le nombre de particules dans le volume $d\tau$ est suffisant pour que l'on puisse négliger ses fluctuations.

1.b Ecoulement

Définition :

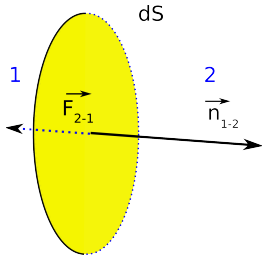
Un fluide n'a pas de forme propre mais un volume propre.
On peut définir le coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}|_T$

$$\chi_T(\text{eau}) = 5.10^{-5}\ \text{Pa}^{-1}$$

$$\chi_T(\text{GP}) = \frac{1}{P} \simeq 3,6.10^{-2}\ \text{Pa}^{-1}$$

2 Pression dans un fluide au repos

2.a Forces surfaciques de pression



On considère une surface élémentaire dS qui sépare un milieu 1 d'un milieu 2.
Soit $\overrightarrow{n}_{1\to2}$ le vecteur unitaire normal à la surface dS et orienté de 1 vers 2, c'est une orientation normale sortante, pour le système 1. On recherche la force de pression exercée par 2 sur 1.

✗ La force de pression exercée par 2 sur 1 est

$$\overrightarrow{dF}_{2\to1} = -P_2\overrightarrow{n}_{1\to2}\mathrm{d}S$$

✗ Sur une surface S, on additionne les forces pressantes :

$$\overrightarrow{F}_{2\to1} = -\iint_S P_2\overrightarrow{n}_{1\to2}\mathrm{d}S$$

✗ Si la pression est uniforme sur la surface S plane, alors $\overrightarrow{F}_{2\to1} = -P_2S\overrightarrow{n}_{1\to2}$
✗ Si la surface est fermée, alors on choisit $\overrightarrow{n}$ orienté de l'intérieur vers l'extérieur (convention normale sortante). On peut alors exprimer la force reçue par

$$\overrightarrow{F}_{2\to1} = -\oiint P_2\overrightarrow{n}_{1\to2}\mathrm{d}S$$

2.b Equivalent volumique aux forces surfaciques de pression

Savoir démontrer №1 : Equivalent volumique aux forces de pression

Les forces surfaciques de pression sont équivalentes à la force volumique :

$$\boxed{\overrightarrow{f}_{v\ \text{pression}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P}$$

La force sur un élement de volume

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P\ \mathrm{d}\tau$$

— Forme locale
— Forme intégrale

$$\overrightarrow{F} = \oiint -P\overrightarrow{n}\ \mathrm{d}S = \iiint -\overrightarrow{\text{grad}}\,P\ \mathrm{d}\tau$$

II Lois de la statique des fluides

1 Principe fondamental de la statique des fluides

Savoir démontrer №2 : P.F. Statique des Fluides

Pour une particule de fluide à l'équilibre, dans $\mathscr{R}$ galiléen, subissant les forces volumiques $\overrightarrow{f_v}$, on a le théorème fondamental de la statique des fluides

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \Sigma\overrightarrow{f_v}}$$

2 Statique des fluides incompressibles

2.a Définition

DÉFINITION :

fluide incompressible [a] : (V n'est pas modifié lorsque l'on "pousse" !)

$$\text{fluide incompressible} \Leftrightarrow \chi_T = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T = 0$$

fluide indilatable : (V n'est pas modifié lorsque l'on "chauffe" !)

$$\text{fluide indilatable} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p = 0$$

a. A ne pas confondre avec un écoulement incompressible, qui correspond à $\operatorname{div} v = 0$

2.b Loi du nivellement barométrique

Savoir démontrer №3 :

Pour une particule de fluide à l'équilibre, dans $\mathscr{R}$ galiléen, subissant les forces de pression et de pesanteur, on a la loi du nivellement barométrique :

$$\boxed{p = p_0 + \mu g z}$$

(Oz) est suivant la verticale **descendante**.
On retient également la formule sous la forme

$$p_a - \mu g z_a = p_b - \mu g z_b$$

Définition :

$$\boxed{1 \text{ atm} = 1,013\text{bar} = 1,013\ 10^5\ (=)\ 760 \text{ mmhg}}$$

2.c Surface libre

DÉFINITION :

✗ On appelle **surface libre**, la surface de contact entre le fluide et l'atmosphère.
✗ La pression est une fonction **continue**, en tout point de la surface libre, la pression dans le fluide doit être égale à la pression dans l'air (si on néglige la tension superficielle).

Savoir démontrer №4 : Surface libre

Soient M et $M + \overrightarrow{\mathrm{d}M}$ deux points infiniments proches de la surface libre alors

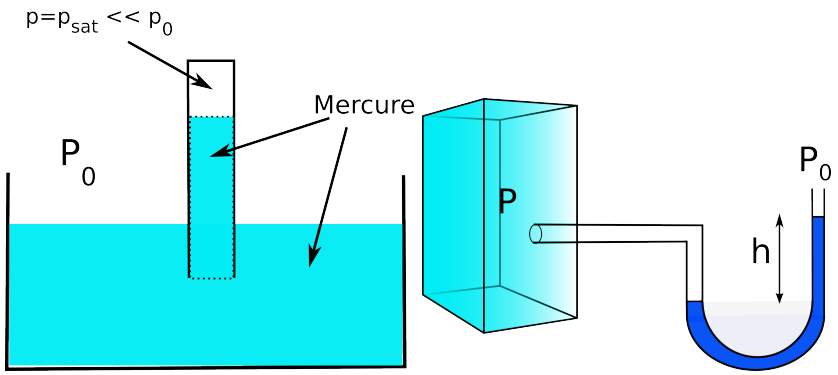
$$\overrightarrow{\mathrm{d}M}.\overrightarrow{f_v} = 0$$

La **surface libre** est perpendiculaire à la somme des forces volumiques. Dans le champ de pesanteur seul, on trouve

$$z = cte$$

2.d Principe des vases communiquants

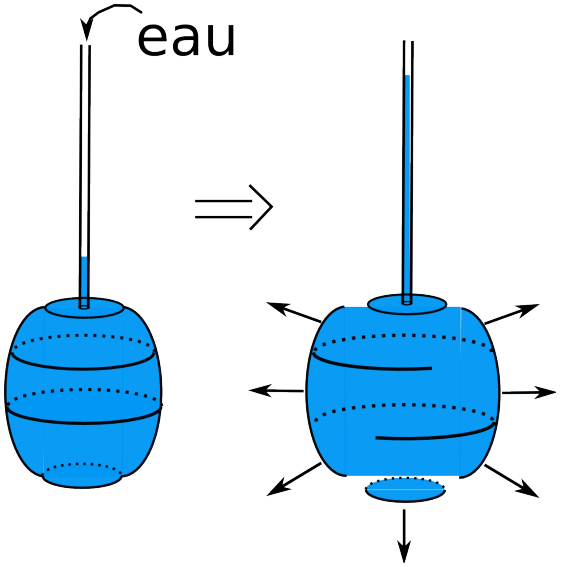
2.e Baromètre à mercure et Manomètre à eau



2.f Théorème de Pascal

Toute variation de pression en un point du fluide incompressible est intégralement transmise en tout point du fluide.

Application 1 : Tonneau de Pascal



3 Fluide dans le champ de gravitation non uniforme

Application 2 : Extrait de Mines-Ponts 2010

On considère qu'une étoile est constituée d'un gaz parfait , chaque particule de ce gaz étant un atome d'hydrogène. R_g est la constante des gaz parfaits. Dans ce modèle, la pression P et la température T sont des fonctions de la seule coordonnée radiale r, enfin le nombre de particules par unité de volume n est constant à l'intérieur de l'étoile. On suppose de plus que l'étoile (de rayon R) est entourée de vide, ainsi $P(R) = 0$.

1. On donne le théorème de Gauss pour le champ de gravitation

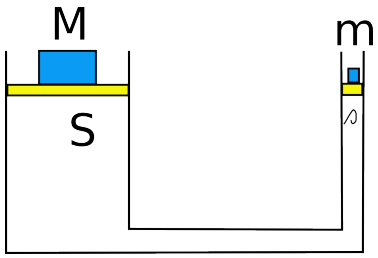
$$\oiint \overrightarrow{g}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -4\pi G M_{int}$$

En déduire que $g(r) = -\frac{4\pi}{3} G\rho r$

2. En intégrant l'équation d'équilibre hydrostatique, déterminer la pression $P(r)$ au sein d'une étoile en fonction de M, G, R et r.

$$P(r) = -\frac{2\Pi}{3} G\rho^2 \left(r^2 - R^2\right)$$

Application 3 : Presse hydrolique



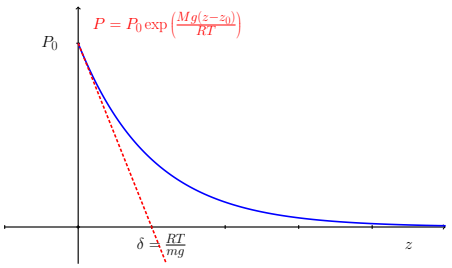
III Fluide compressible : modèle de l'atmosphère isotherme

1 Hypothèses

- ✗ Température uniforme, T est indépendant de z.
- ✗ fluide = air compressible, donc $\mu(p)$ dépend de la pression.
- ✗ Gaz parfait $\mu = \frac{PM}{RT}$
- ✗ le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ est uniforme.

2 Calcul du champ de pression

Savoir démontrer №5 : Atmosphère isotherme



Le champ de pesanteur s'écrit

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mg(z-z_0)}{RT}\right)$$

Application 4 : Gradient de température

Si $T = T_0 - \alpha z$ alors le champ de pression s'écrit :

$$p = p_0 \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0 - \alpha z_0} \right)^{\left(\frac{Mg}{R\alpha}\right)}$$

3 Conséquences

On trouve $\delta = \frac{RT}{Mg} \simeq 8,6$ km

Altitude en m	Pression atmosphérique
Niveau de la mer $z = 0$ m	$1.013\ 10^5$ Pa
Mont Blanc $z = 4810$ m	0.5810^5 Pa
Everest $z = 8848$ m	0.3910^5 Pa

3.a Facteur de Boltzmann

Savoir démontrer №6 : Distribution statistique de Boltzmann

Lorsque des particules de masse m, ont une énergie potentielle ϵ et sont soumises à l'agitation thermique, caractérisée par la température T, la probabilité de trouver une particule à l'énergie potentielle ϵ est proportionnelle à

$$p(\epsilon) \sim \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_b T}\right)$$

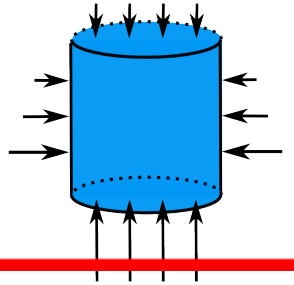
k_B est la constante de Boltzmann : $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A} = 1,38\ 10^{-23}\text{J.K}^{-1}$

IV Poussée d'Archimède

1 Calcul de la résultante des forces de pression sur un cylindre au repos

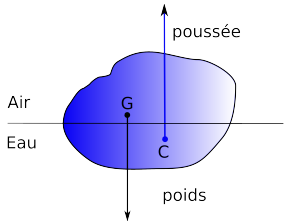
Savoir démontrer №7 : théorème d'Archimède

Les forces horizontales se compensent, mais pas les forces verticales.
La résultante des forces de pression exercées par un fluide au repos sur un corps immergé est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.



2 Enoncé de la poussée d'Archimède

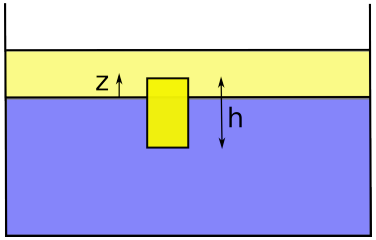
Savoir démontrer №8 : théorème d'Archimède



La résultante des forces de pression exercées par un fluide au repos sur un corps immergé est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.
Pour un solide cette force équivalente est appliquée au **centre de poussée** (C).

3 Applications

Application 5 : Equilibre entre deux fluides



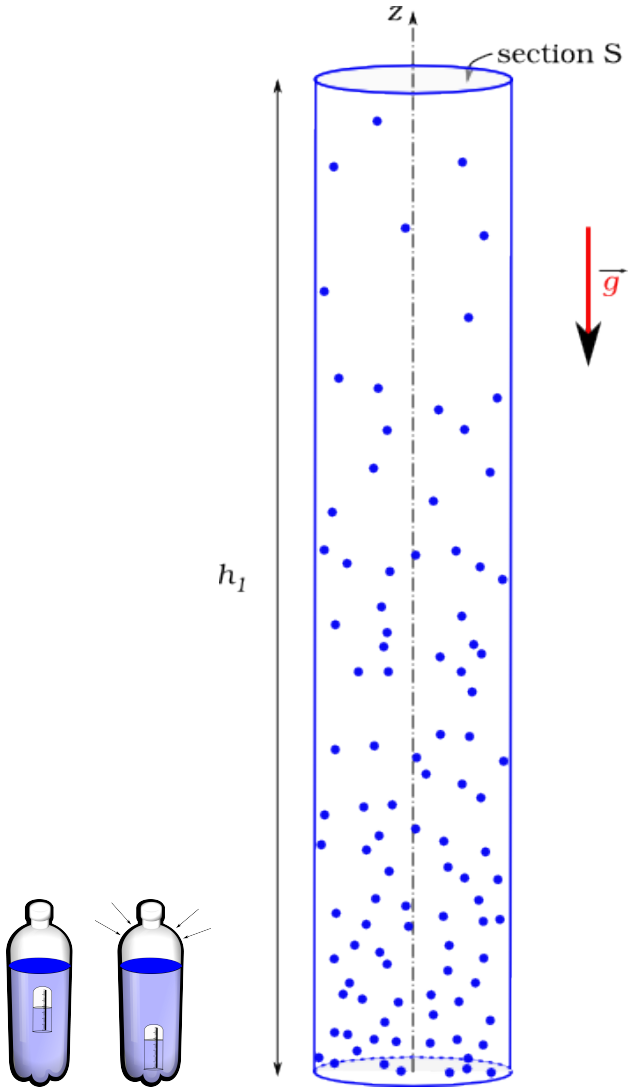
Le liquide supérieur a une masse volumique μ_1, le liquide inférieur une masse volumique μ_2 et le solide une masse volumique μ.
La position d'équilibre correspond à

$$z = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} h$$

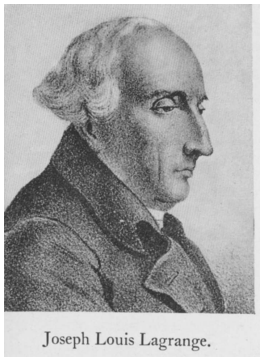
Application 6 : Force ascensionnelle d'un ballon

Le gaz parfait dans la ballon a la masse volumique μ, l'air (GP) qui l'entoure a la masse volumique μ_{air} On admet que les gaz ont la même température et la même pression. Soit $V(z)$ le volume du ballon.
La force exercée sur le ballon est

$$f = \mu_{\text{air}} g V \left(1 - \frac{\mu}{\mu_{\text{air}}}\right)$$



Chapitre E2 : Cinématique des fluides



LAGRANGE

PARTIE E : MÉCANIQUE DES FLUIDES

E-1 : Statique des fluides

E-2 : Cinématique des fluides

E-3 : Viscosité
E-4 : Dyn. F. visqueux
E-5 : Dyn. F. parfaits
E-6 : Bilans macroscopiques
E-7 : Tension Superficielle

EULER

I Champ des vitesses dans un fluide

1 Description Lagrangienne - Description Eulérienne

1.a Vitesse d'une particule de fluide

DÉFINITION :

Une particule de fluide est un système fermé.

$$\overrightarrow{v}(M,t) = \frac{1}{N}\sum_{i\in d\tau} \overrightarrow{v}(M_i,t)$$

1.b Méthode Lagrangienne

DÉFINITIONS :

- ✗ A chaque instant, on découpe le fluide en **particules élémentaires** centrées sur des points M_0
- ✗ On **suit le mouvement de ces particules** au cours du temps dans le référentiel $\mathscr{R}$.
- ✗ A la date t, soit $\overrightarrow{v}^*(M,t)$ la vitesse de la particule qui était en M_0 à la date t_0.
- ✗ La **trajectoire** de la particule de fluide est l'ensemble des positions successives de cette particule au cours du temps.

POINT MÉTHODE - **Equation de trajectoire**

On applique la RFD au centre de gravité de la particule comme si c'était un solide.
L'intégration donne **l'équation de la trajectoire** : sous la forme

$$x(t) =, y(t) = \text{ et } z(t) =$$

Le point de vue de LAGRANGE est

- ✗ utile pour exprimer la Relation Fondamentale de la Dynamique sur une particule de fluide (comme en mécanique, on suit le mouvement)
- ✗ peu partique pour décrire l'écoulement dans son ensemble.

Propriété à connaître

1.c Méthode Eulérienne

DÉFINITIONS :

- ✗ A chaque instant, on découpe le fluide en **particules élémentaires** centrées sur des points M.
- ✗ On définit le champ des vitesses $\overrightarrow{v}(M,t)$ comme le vecteur vitesse de la particule de fluide qui passe en M à la date t.
- ✗ Les **lignes de courant** sont les **courbes orientées tangentes en chaque point M à la date t, au vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(M,t)$ et orientées dans le sens de $\overrightarrow{v}$.**
- ✗ Les lignes de courant correspondent à une **photo de particules de courant** identifiées par un colorant.
- ✗ Un **tube de courant** est une surface engendrée par un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.

Le point de vue de Euler
- ✗ donne une bonne description des **écoulements**.
- ✗ utilise à chaque instant un **système ouvert**.

Propriétés à connaître

Point méthode - **Equation d'une ligne de courant**

Soit $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$, un vecteur colinéaire à la ligne de courant.
$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ doit être colinéaire à la vitesse en M.
Soit

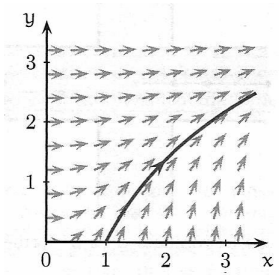
$$\boxed{\overrightarrow{v}(M) \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \overrightarrow{0}}$$

En projection sur les axes, on trouve, en coordonnées cartésiennes par exemple :

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z}$$

Par intégration, on trouve l'**équation de la ligne de courant**.

Application 1 : Ligne de courant



Soit un écoulement, tel que la vitesse s'écrive

$$v_x = v_0 \exp y \qquad v_y = 2x \qquad v_z = 0$$

v_0 est une constante positive. x et y sont sans dimension.
On montre que div $\overrightarrow{v} = 0$ et l'équation des lignes de courant est

$$y = 2 \ln x$$

2 Ecoulement stationnaire

Définition :

Un écoulement est **stationnaire** (ou permanent) si l'ensemble des champs eulériens $\overrightarrow{v}(M,t)$, $\mu(M,t)$ et $p(M,t)$ ne dépendent pas explicitement du temps.

$$\text{Ecoulement stationnaire} \Leftrightarrow \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0} \ , \ \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \ , \ \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

- ✗ le caractère stationnaire dépend du choix du **référentiel**
- ✗ la vitesse au sens de Lagrange peut varier.
- ✗ pour un écoulement stationnaire, les **lignes de champ et les trajectoires sont confondues**.

3 Fluide incompressible et écoulement incompressible

Définition :

- ✗ **Fluide incompressible** $\Leftrightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = 0$
- ✗ **Ecoulement incompressible** si le volume de toutes les particules de fluide est conservé au cours du mouvement.

$$\text{Ecoulement incompressible} \Leftrightarrow \mu(M,t) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = \text{cte}$$

Savoir démontrer №1 : Fluide incompressible

Fluide incomp. et $T = \text{cte} \Rightarrow$ tous les écoulements sont incomp.

Fluide incomp. et indilatable $\Rightarrow$ tous les écoulements sont incomp.

4 Dérivée particulaire

4.a Dérivée particulaire de la masse volumique

$$\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\mu\right)$$

Ecoulement incompressible : $\frac{D\mu}{Dt} = 0$

4.b Dérivée particulaire du champ de vitesse

$$\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v}$$

Savoir démontrer №2 : Accélération

- ✗ $\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}$ est l'accélération particulaire.
- ✗ $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}$ est l'accélération locale.
- ✗ $\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v}$ est l'accélération convective.
- ✗

$$\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{v}$$

5 Vecteurs divergence et rotationnel

Application 2 : Divergence

Soit le vecteur $\overrightarrow{v}_1 = a_1 x \overrightarrow{u}_x + b_1 y \overrightarrow{u}_y$.

1. Montrer que $\text{div}\,\overrightarrow{v}_1 = a_1 + b_1$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{0}$
2. Soit $O(0,0), A(a,0), B(a,b)$ et $C(0,b)$ quatre points du fluide à la date t. Trouver les positions O', A', B' et C' à la date $t+dt$
3. Trouver les volumes $V(t)$ et $V(t+dt)$ des parallélépipèdes (prendre L sur la direction (Oz)).
4. Montrer que $\text{div}\,\overrightarrow{v} = \frac{V(t+dt)-V(t)}{V(t)\text{d}t}$
   $\text{div}\,\overrightarrow{v}$ est le **taux de dilatation de la particule de fluide**.

Application 3 : div et rot nuls

Soit le vecteur $\overrightarrow{v}_2 = a_2 y \overrightarrow{u}_x + a_2 x \overrightarrow{u}_y$.

1. Montrer que $\text{div}\,\overrightarrow{v}_2 = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{0}$
2. De même, trouver les positions O', A', B' et C' à la date $t+dt$
3. Justifier que les volumes restent identiques et que la particule n'a pas tourné.

Application 4 : Rotationnel

Soit le vecteur $\overrightarrow{v}_3 = -a_3 y \overrightarrow{u}_x + a_3 x \overrightarrow{u}_y$.

1. Montrer que $\text{div}\,\overrightarrow{v}_3 = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}_3 = 2a_3\overrightarrow{u}_z$
2. de même, trouver les positions O', A', B' et C' à la date $t+dt$
3. Justifier que les volumes restent identiques et que la particule a tourné.
4. Montrer que l'angle de rotation est $\text{d}\theta = a_3 dt$.
   La vitesse angulaire est donc $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}$

La divergence du champ des vitesses est égale au taux de variation relative du volume :

$$\boxed{\text{div}\,\overrightarrow{v} = \frac{1}{V}\frac{\text{d}V}{\text{d}t}}$$

6 Vecteur tourbillon

6.a Definitions

- ✗ Le vecteur tourbillon $\boxed{\overrightarrow{\Omega}(M,t) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}}$ décrit la rotation **locale** des particules de fluide.
- ✗ $\overrightarrow{\omega} = 2\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}$ est la **vorticité** de l'écoulement.
- ✗ Si $\overrightarrow{\Omega}(M,t)$ est nul pour tout point M à toute date t, l'écoulement est **irrotationnel**.
- ✗ Si $\exists M$ tq $\overrightarrow{\Omega}(M,t) \neq 0$ l'écoulement est dit **tourbillonnaire**.

Savoir démontrer №3 : Ecoulement potentiel

Pour un **écoulement irrotationnel**, il existe un potentiel des vitesses ϕ tel que

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$$

Savoir démontrer №4 : Equation de Laplace

Pour un écoulement **incompressible et irrotationnel**, le potentiel des vitesses vérifie l'équation de Laplace :

$$\boxed{\triangle\phi = 0}$$

6.b Théorème de Stockes

Savoir démontrer №5 : Equation de Laplace

La circulation du champ des vitesses d'un écoulement sur un contout fermé (Γ) est égal au flux de vorticité traversant la surface limitée et orientée par (Γ).

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{v}.\mathrm{d}\vec{\ell} = 2 \iint \vec{\Omega}.\mathrm{d}\vec{S}$$

II Equation locale de conservation de la masse

1 Débit volumique et débit massique

$$\boxed{D_V = \iint_S \vec{v}.\mathrm{d}\vec{S}}$$

$$\boxed{D_m = \iint_S \mu\vec{v}.\mathrm{d}\vec{S}}$$

2 Conditions aux limites

Savoir démontrer №6 : Composante normale de la vitesse

- ✗ Sur un obstacle fixe de normale $\vec{n}$, la composante normale de la vitesse de fluide s'annule
$$\boxed{\vec{v}.\vec{n} = 0}$$
- ✗ Pour un obstacle déformable de vitesse $\vec{v_\Sigma}$, on a $\vec{v}.\vec{n} = \vec{v_\Sigma}.\vec{n}$
- ✗ Interface entre deux fluides
$$\boxed{\vec{v_1}.\vec{n} = \vec{v_2}.\vec{n}}$$

3 Equation locale de conservation de la masse

3.a Enoncé

Savoir démontrer №7 : Equation de continuité (ou conservation de la masse)

Soit $\vec{j}$ le vecteur **densité de courant** (ou vecteur densité de flux de masse) :

$$\boxed{\vec{j} = \mu\vec{v}}$$

L'équation locale de conservation de la masse ou équation de continuité s'écrit :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0}$$

3.b Cas des écoulements stationnaires

Savoir démontrer №8 : Conservation du flux

- ✗ En **régime stationnaire**, $\vec{j}$ est à flux conservatif, c'est-à-dire :
$$\text{Régime stationnaire} \Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$$
- ✗ En **régime stationnaire**, sur un tube de courant :
$$\mu_1 v_1 S_1 = \mu_2 v_2 S_2$$

3.c Cas des écoulements incompressibles

Savoir démontrer №9 : Propriété d'un écoulement incompressible

✗ Pour un écoulement quelconque, on trouve :

$$\boxed{\text{div}\,\vec{v} = -\frac{1}{\mu}\frac{D\mu}{Dt}}$$

✗ Pour un écoulement **incompressible**, on trouve :

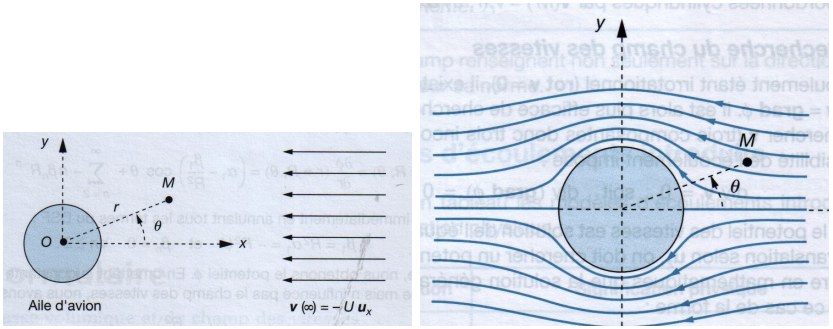
$$\text{div}\,\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{D\mu}{Dt} = 0$$

4 Bilan

Ecoulement	Propriété	Signification physique
Stationnaire	$\frac{\partial}{\partial t} = 0$	En vision de EULER pas de modification du champ. Conservation du **débit massique** : $D_{m1} = D_{m2}$
Incompressible	$\text{div}\,\vec{v} = 0$ et $\frac{D\mu}{Dt} = 0$	Les particules de fluide gardent leur volume $D_{v1} = D_{v2}$
Irrotationnel	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$	les particules de fluide ne tournent pas $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$

III Exemples

1 Ecoulement autour d'un cylindre



On suppose l'écoulement **stationnaire, incompressible, irrotationnel et plan**.

Application 5 : Champ des vitesses

✗ Montrer que le potentiel des vitesse vérifie l'équation de Laplace

$$\triangle\Phi = 0$$

✗ Soit $\Phi = -U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta$ montrer que

$$v_r = -U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

et

$$v_\theta = U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

✗ Montrer que pour $r = R$ et $r \to \infty$, les conditions aux limites sont bien vérifiées.

✗ Calculer $\text{div}\,\vec{v}$.

2 Puits, sources et vortex

Le puits, la source et le vortex étudiés ici sont des objets théoriques mais sont des outils importants en modélisation.

3 Champ des vitesses

Application 6 : Vidange d'un lavabo

1. Un « puits » ou une « source » est un axe par lequel du fluide peut s'écouler (il faut imaginer que de l'eau peut entrer ou sortir de l'axe z par les côtés de l'axe). Lorsqu'un lavabo se vide, l'axe vertical passant par la bonde du lavabo est un puits de fluide, car le fluide se dirige vers cet axe pour y être emporté. En coordonnées cylindriques, le champ de vitesse d'un puits est modélisé par :
   $\overrightarrow{v}_1 = \dfrac{D}{2\pi r}\overrightarrow{u}_r$, où D est constante.
   (a) Déterminer l'équation des lignes de champ de $\overrightarrow{v}_1$ et les représenter.
   (b) L'écoulement est-il compressible ?
   (c) Calculer le débit volumique associé à ce champ de vitesse à travers la face latérale (orientée vers l'extérieur) d'un cylindre d'axe z, de rayon R et de hauteur h. Comment interpréter D ? Selon le signe de D, on parle de puits ou bien de source. A quel signe est associé chaque nom ?
   (d) L'écoulement est-il potentiel ? Si oui, trouver le potentiel associé.
2. Un vortex sert à modéliser un tourbillon de manière simple (modèle bidimensionnel d'un lavabo qui se vide par exemple). Son champ de vitesse $\overrightarrow{v}_2$ est : $\overrightarrow{v}_2 = \dfrac{C}{2\pi r}\overrightarrow{u}_\theta$, où C est constante.
   (a) Déterminer l'équation des lignes de courant associées et les représenter.
   (b) L'écoulement est-il compressible ?
   (c) Calculer la circulation de $\overrightarrow{v}_2$ le long d'un cercle d'axe z et de rayon R, orienté dans le sens trigonométrique. Interpréter C. Pouvait-on trouver ce résultat par le théorème de Stokes-Ampère ?
3. Pour modéliser ce qui se passe dans un lavabo qui se vide (en vue de dessus), on superpose un champ de vortex (avec $C > 0$ par exemple) à un puits : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$. On ne se préoccupe pas d'une composante selon z de la vitesse car le modèle du puits assure que le fluide « disparaît » quand il touche l'axe z.
   (a) Dans ce modèle, l'écoulement est-il compressible ?
   (b) Établir l'équation des lignes de courant en coordonnées cylindriques et les tracer.
   (c) La formation des tourbillons lors de la vidange des lavabos est-elle due à la force de Coriolis induite par la rotation propre de la Terre ?

Chapitre E3 : Ecoulements visqueux

Reynolds (1842 - 1912)

Partie E : Mécanique des fluides
E-1 : Statique des fluides
E-2 : Cinématique des fluides
E-3 : Viscosité
E-4 : Dyn. F. visqueux
E-5 : Dyn. F. parfaits
E-6 : Bilans macroscopiques
E-7 : Tension Superficielle

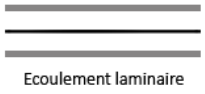
Poiseuille (1799 - 1869)

I Effets liés à la viscosité

1 Ecoulement laminaire - Ecoulement turbulent

Définitions :

Les écoulements **laminaires** possèdent une distribution des vitesses macroscopiquement bien ordonnée, avec une structure à grande échelle uniquement et des variations temporelles lentes.
Les écoulements **turbulents** sont caractérisés par des variations rapides dans l'espace du champ des vitesses et une fluctuation aléatoire dans le temps.
Dans un écoulement laminaire, une petite perturbation locale des vitesses doit rapidement se diluer aux éléments voisins, ce transfert est assuré par la **viscosité**.



Ecoulement laminaire

Ecoulement turbulent

2 Forces de viscosité

Définitions :

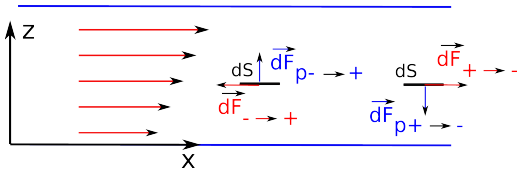
✗ La **viscosité dynamique** η s'exprime en pa.s ou Pl (Poiseuille), sa dimension est $ML^{-1}t^{-1}$

✗ La **viscosité cinématique** $\nu = \frac{\eta}{\mu}$ s'exprime en $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$, sa dimension est L^2t^{-1}

2.a Cas d'un écoulement parallèle

Définition :

Un écoulement est **parallèle** lorsque la direction de propagation est la même en tout point.



✗ Pour une surface élémentaire $\mathrm{d}S$, la force tangentielle exercée par la couche située en z^+ sur la couche située en z^- est

$$\mathrm{d}\vec{F}_{x_{(z^+\to z^-)}} = \eta \frac{\partial v}{\partial z}(z)\,\mathrm{d}S\,\vec{u_x}$$

✗ $\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}S}$ est la **force surfacique de viscosité** ou **contrainte tangentielle**.

2.b Ordre de grandeur de la viscosité

Corps	Air (1atm, 300K)	Métaux fondus
η (kg. m^{-1}. s^{-1})	$1.85.10^{-5}$	10^{-4}
ν (m^2. s^{-1})	$1.43.10^{-5}$	10^{-7}

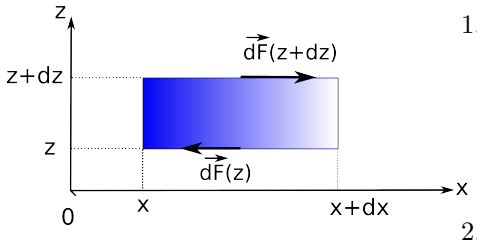
Corps	Liquides Organiques	Eau	Sels fondus
η (kg. m^{-1}. s^{-1})	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
ν (m^2. s^{-1})	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}

Corps	Huiles	Verre fondu
$\eta\ (kg.m^{-1}.s^{-1})$	$10^{-2} - 10^{3}$	10
$\nu\ (m^{2}.s^{-1})$	$10^{-5} - 10^{-1}$	10^{-2}

La viscosité **dépend de la température**.

2.c Force volumique de viscosité

Savoir démontrer №1 : Equivalent volumique des forces de viscosité



1. Sur une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$, la force de viscosité suivant la direction $\overrightarrow{u}_x$ est

$$\mathrm{d}F_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \mathrm{d}\tau$$

2. Si la vitesse dépend également de y et z, cette force peut s'écrire :

$$\mathrm{d}F_x = \eta \triangle v_x \mathrm{d}\tau$$

3. La force de viscosité s'écrit donc :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \eta \triangle \overrightarrow{v} \mathrm{d}\tau$$

La force volumique équivalente aux forces de viscosité est

$$\boxed{\overrightarrow{f_v} = \eta \triangle \overrightarrow{v}}$$

Un fluide qui subit cette force est dit **Newtonien** [a].

a. Un fluide est dit non-newtonien lorsque sa déformation n'est pas directement proportionnelle à la force qui lui est appliquée.

3 Equation de Navier Stokes

3.a Cas général

Savoir démontrer №2 : Navier Stokes

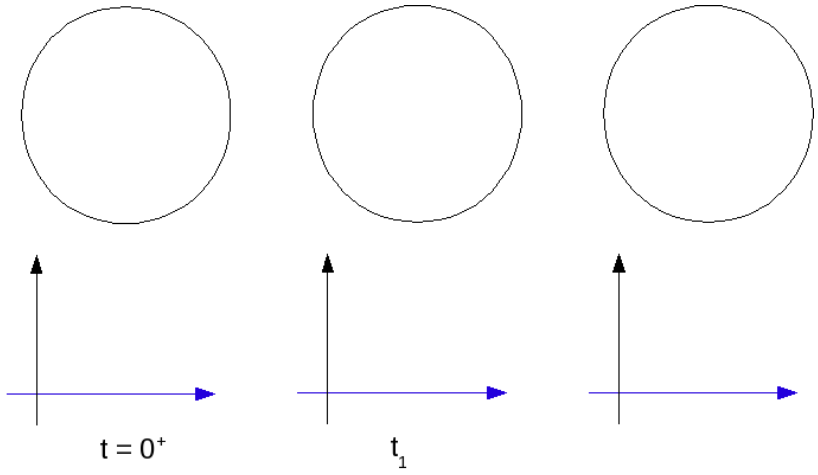
Dans un référentiel galiléen, le théorème de la résultante dynamique à une particule de fluide donne

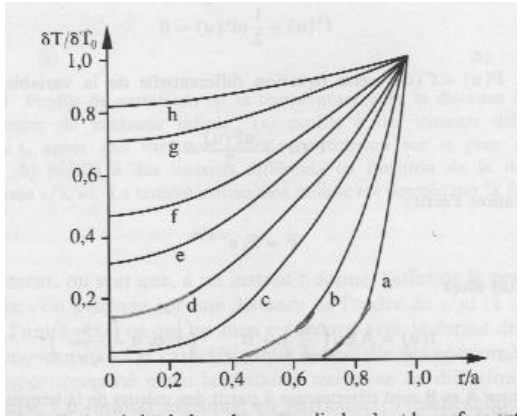
$$\mu \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}} \frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{v} \right) \wedge \overrightarrow{v} \right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p + \eta \triangle \overrightarrow{v} + \overrightarrow{f}_v$$

- ✗ C'est une équation différentielle **non linéaire** du **second ordre**.
- ✗ Cette équation est linéarisable pour $v \ll \frac{L}{\tau}$
- ✗ Dans un référentiel non galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie.

Propriétés à connaître

3.b Equation de la diffusion





Diffusion de la chaleur dans un cyclindre dont les bords sont soumis à une brusque modification de la température.

Savoir démontrer №3 : Equation de diffusion

Si la seule force est la force de viscosité, et si on peut négliger le terme convectif, on trouve :

$$\boxed{\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \nu \triangle \overrightarrow{v}} \text{ avec } \boxed{\nu = \frac{\eta}{\mu}} \text{ le } \textbf{coefficient de diffusion}$$

C'est une **équation de diffusion**.
Le terme $\eta \triangle \overrightarrow{v}$ décrit le **transport diffusif de quantité de mouvement**.

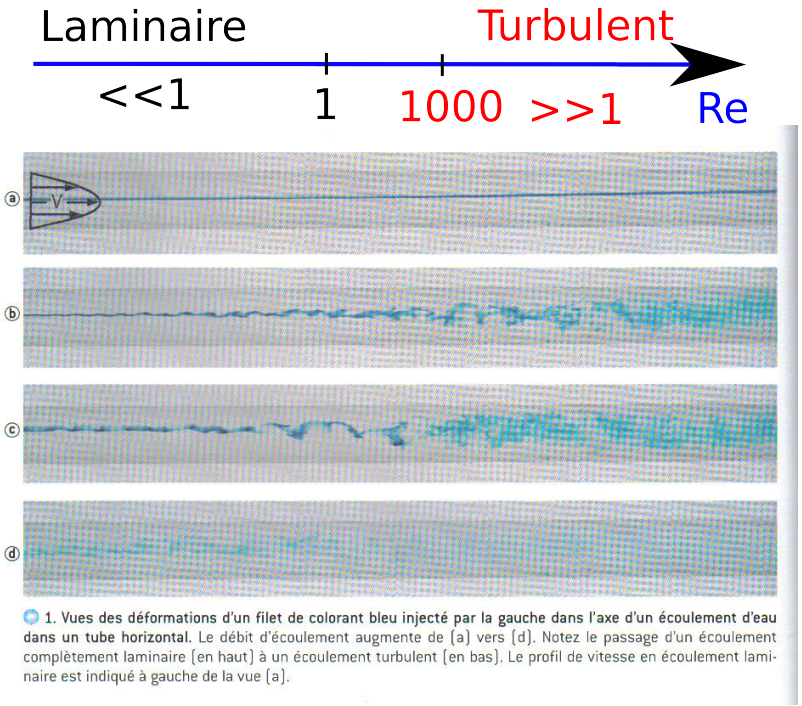
☞ ν est un **coefficient de diffusion** il s'exprime en $m^2 s^{-1}$.
☞Cette équation traduit un phénomène **irréversible** : $\overrightarrow{v}(-t)$ vérifie une équation différente que $\overrightarrow{v}(t)$.
☞La longueur caractéristique de diffusion (ou **épaisseur de couche limite**) est

$$\boxed{\delta = \sqrt{\nu \tau}}$$

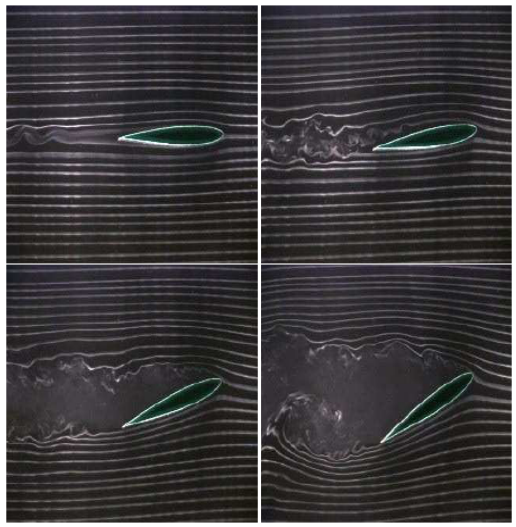
Propriétés à connaître

4 Nombre de Reynolds

4.a Définition



1. Vues des déformations d'un filet de colorant bleu injecté par la gauche dans l'axe d'un écoulement d'eau dans un tube horizontal. Le débit d'écoulement augmente de (a) vers (d). Notez le passage d'un écoulement complètement laminaire (en haut) à un écoulement turbulent (en bas). Le profil de vitesse en écoulement laminaire est indiqué à gauche de la vue (a).



Sillage instationnaire avec émission périodique de tourbillons qui peuvent entrer en résonance avec les modes de vibration du solide. Un exemple est le sifflement de fils téléphoniques dans le vent.

$$\mathcal{R}e = \frac{\mu U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu}$$

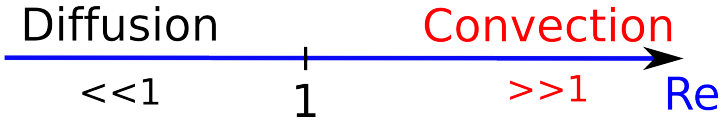
	Milieu	Nb de Reynolds
Paramécie	eau	$\mathcal{R}e \simeq 10^{-2}$
Goutte de pluie	air	$\mathcal{R}e \simeq 10000$
Sillage d'un humain	air	$\mathcal{R}e \simeq 30000$
Sillage d'une voiture	air	$\mathcal{R}e \simeq 4.10^{6}$
Sillage d'un avion	air	$\mathcal{R}e \simeq 3.10^{8}$

4.b Convection et diffusion

Savoir démontrer №4 : Interprétation du nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds mesure le rapport entre **le transport convectif de quantité de mouvement et le transport diffusif**

$$\mathcal{R}e = \frac{\| \mu(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\, v) \|}{\| \eta \vec{\Delta}(\vec{v}) \|}$$



Le nombre de Reynolds est également le rapport des temps de diffusion et de convection :

$$\mathcal{R}e = \frac{\text{temps caractéristique de diffusion}}{\text{temps caractéristique de convection}} = \frac{UL}{\nu}$$

5 Coefficient de traînée et nombre de Reynolds

Définitions :

✗ La force de frottement exercée par un fluide sur une sphère immergée en mouvement est opposée à la direction de la **vitesse du fluide par rapport à la sphère** et s'appelle la force de **traînée**.

$$\vec{F}_T = -\frac{1}{2} C_T \mu \left(\pi r^2\right) v \vec{v}$$

✗ C_T est le **coefficient de traînée** (sans dimension), il dépend de la texture et de la géométrie de la surface.

✗ C_T change cependant avec la vitesse, comme on le voit sur la figure E.1.

Définitions :

✗ La force verticale $\overrightarrow{F}_P$ est nommée **portance**.

$$\boxed{\overrightarrow{F}_P = \frac{1}{2}\mu C_P \left(\pi r^2\right) v^2 \overrightarrow{u}_z}$$

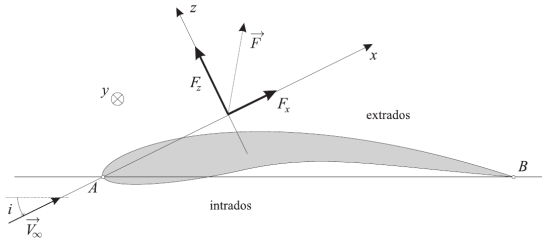
✗ C_P est le **coefficient de portance** (sans dimension). $\overrightarrow{u}_z$ est perpendiculaire à la vitesse relative $\overrightarrow{v}$.

DÉFINITION :

On appelle **finesse** le rapport

$$f = \frac{F_P}{F_T}$$

	Finesse
Moineau	4
parapente	8
deltaplane et aigle	12
Boeing 747	14
Albatros	20
Planeur	< 60



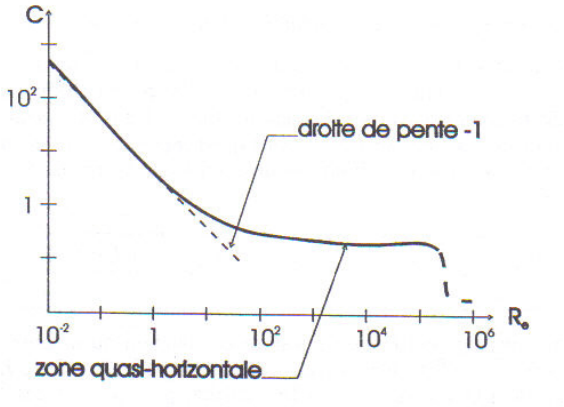
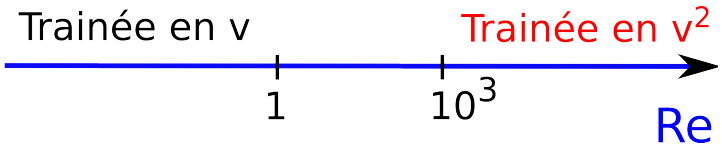


FIGURE E.1 – Dépendance du coefficient de traînée avec $\mathcal{R}_e$

Allure de la courbe expérimentale du coefficient de traînée en fonction du nombre de REYNOLDS.

Le diagramme est représenté sur un papier logarithmique (log -log).



✗ Pour $\mathcal{R}e < 1$, la traînée est linéaire en v, on trouve la formule de STOKES

$$\overrightarrow{F} = -6\pi\eta r \overrightarrow{v}$$

✗ Pour $\mathcal{R}e \gg 10^3$, la traînée est quadratique en v

$$\overrightarrow{F} = -\frac{1}{2} C\mu \left(\pi r^2\right) v \overrightarrow{v}$$

Propriétés à connaître

Loi d'échelle

Les oiseaux ont un poids qui varie comme leur volume donc

$$P \simeq \ell^3$$

La surface des ailes varie comme la longuer au carré

$$S \simeq \ell^2$$

La portance $\overrightarrow{F}_p = -\frac{1}{2} C \mu S v^2$, donc

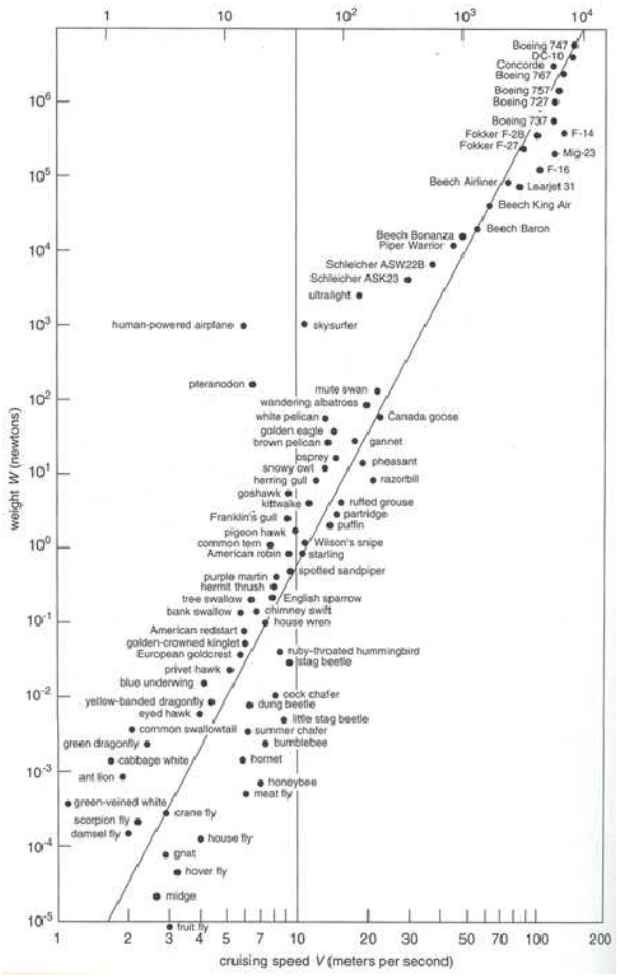
$$F_p \simeq v^2 \ell^2$$

En vol, la portance équilibre le poids, donc

$$v^2 \simeq \ell$$

Finalement

$$\boxed{P \simeq v^6}$$

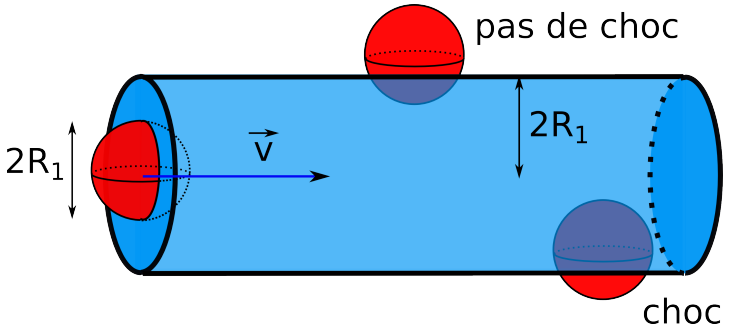


II Interprétation microscopique de la viscosité

1 Libre parcours moyen et libre temps de vol

Définition :

Le **libre parcours moyen** ℓ est la distance moyenne parcourue par une particule entre deux chocs. Le **libre temps de vol** τ^* est le temps moyen entre deux chocs.



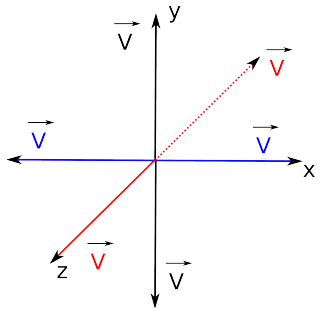
Les molécules ont une répartition **isotrope** des vitesses, si la probalité d'avoir une vitesse dans une direction donnée est constante pour toute direction (aucune direction n'est privilégiée). On adoptera le modèle suivant :

$\frac{1}{6}$ des particules ont une vitesse dirigée suivant $\overrightarrow{u}_x$.

$\frac{1}{6}$ des particules ont une vitesse dirigée suivant $-\overrightarrow{u}_x$.

De même sur $\overrightarrow{u}_y$ et $\overrightarrow{u}_z$

Le module des vitesses sont tous égaux à V



Savoir démontrer №5 : Coefficient de diffusion

✗ Dans un fluide où les molécules ont un rayon R, le libre parcours moyen peut s'exprimer en fonction de la densité de particules (HP)

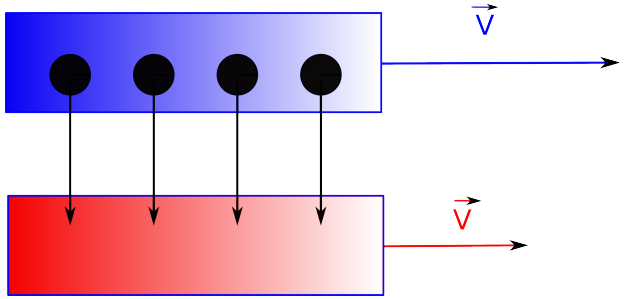
$$\ell = \frac{1}{n\pi(2R)^2}$$

✗ Le coefficient de diffusion, peut s'écrire

$$D = \frac{1}{3}\ell v^* = \frac{\ell^2}{2\tau^*}$$

2 Relation avec la viscosité

2.a Viscosité et diffusion transverse de quantité de mouvement



2.b Expression de la viscosité cinématique

Savoir démontrer №6 :

En utilisant l'expression de la force surfacique de viscosité, on trouve

$$\boxed{\nu = \frac{1}{3}\overline{u}\ell}$$

III Etude des écoulements

1 Ecoulement parfait

DÉFINITION :

Un écoulement est **parfait** si tous les phénomènes de **transport diffusif** sont négligeables : la viscosité , diffusion thermique, diffusion de particules ...

Parfait → isentropique et non visqueux $\mathcal{R}e \to \infty$

2 Conditions aux limites pour un écoulement visqueux

Pour un fluide **visqueux**, la vitesse du fluide est **nulle sur un obstacle fixe**.

Propriété à connaître

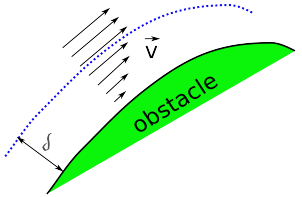
3 Couche limite

DÉFINITION :

✗ L'écoulement d'un fluide visqueux autour d'un obstacle, présente une zone dans laquelle les **phénomènes de viscosité sont importants**, on y observe un **gradient de vitesse** important. Cette zone s'appelle la **couche limite**.

✗ On note δ **l'épaisseur de la couche limite.**

✗ Un écoulement réel sera souvent décrit comme un écoulement parfait sauf dans une zone de taille δ autour d'un obstacle.



Savoir démontrer №7 : Epaisseur de couche limite

L'épaisseur de la couche limite adimensionnée est

$$\frac{\delta}{L} \simeq \sqrt{\frac{\nu}{vL}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e}}$$

Application 1 : Epaisseur de la couche limite autour d'une voiture

On considère une voiture de longueur $L = 4$ m se déplaçant à la vitesse $v = 100$ km.h^{-1} ; la viscosité de l'air est $\nu = 1,2.10^{-5}$ m^2.s^{-1}.
Donner la valeur δ de l'épaisseur de la couche limite. Commenter.

Réponse :

$\mathcal{R}e = 9,3.10^6$ *et* $\delta = 1,3$ mm.

4 Ecoulements visqueux $\mathcal{R}e \ll 1$

DÉFINITION :

Pour ces écoulements ; le nombre de REYNOLDS est très petit.

$$\boxed{\mathcal{R}e \ll 1}$$

- ✗ Ecoulement d'un glacier
- ✗ Ecoulements dans les milieux poreux : loi de DARCY
- ✗ Micro-systèmes mécaniques
- ✗ Propulsion de micro-organisme

Savoir démontrer №8 : Equation de STOKES

Pour un fluide newtonien, en régime stationnaire, l'équation de NAVIER STOKES devient

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, p = \eta \triangle \vec{v} + \vec{f}_v$$

- ✗ Equation linéaire
- ✗ Traduit des phémomènes **réversibles**

5 Ecoulements inertiels

DÉFINITION :

Pour ces écoulements ; le nombre de REYNOLDS est très grand.

$$\boxed{\mathcal{R}e \gg 10^3}$$

- ✗ Ecoulements d'air autour d'un véhicule
- ✗ Voilier

⚠ ATTENTION…

Un grand nombre de REYNOLDS permet de négliger la viscosité **dans l'écoulement, à une échelle L choisie pour calculer $\mathcal{R}e$**. En revanche, la viscosité n'est jamais négligeable dans la couche limite, qui est la zone responsable des frottements ressentis par les solides en mouvement dans les fluides.

Application 2 : Décrire un écoulement

On s'intéresse à un écoulement bidimensionnel décrit dans la région de l'espace $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ par le champ de vitesse $\vec{v} = K\left(x\vec{u}_x - y\vec{u}_y\right)$, où K est une constante.
Deux parois $x = 0$ et $y = 0$ délimitent l'espace diponible pour le fluide.

1. Caractériser l'écoulement : est-il stationnaire, irrotationnel, laminaire ou turbulent, compressible ou incompressible, parfait ou visqueux ?
2. Etablir la forme des lignes de champ.
3. Montrer que le champ des vitesses dérive d'un potentiel φ, qu'on déterminera.
4. Calculer l'accélération $\vec{a}$ en description eulerienne.

IV Application : Evaluer le nombre de Reynolds

1 Evaluation simple

Application 3 : Ecoulement autour d'une sphère

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'une sphère de rayon R. A grande distance de la sphère, l'écoulement du fluide est uniforme $\overrightarrow{v} = v_0 \overrightarrow{u}_z$ et la pression dans le fluide est P_0.

1. Bâtir, à partir des grandeurs caractéristiques du fluide μ (masse volumique), η (viscosité dynamique)et v_0, une grandeur D_0 homogène à une distance.
2. Exprimer le nombre de Reynolds relatif à l'écoulement étudié à partir de $D = 2R$ (prise comme distance caractéristique de l'écoulement) et D_0.
3. Le fluide considéré est de l'air de viscosité dynamique $\eta = 1,8.10^5$ Pl, masse volumique $\mu = 1,3$ kg.m^{-3} et vitesse $v_0 = 10$ m.s^{-1}. Calculer le nombre de Reynolds pour une sphère de rayon $0,5$ cm et une sphère de rayon $0,5$ μm. Comment qualifier l'écoulement dans les deux cas ?
   Dessiner sommairement l'allure des lignes de courant dans les deux cas.

Application 4 : Chute d'une bille dans la glycérine

Evaluons le nombre de Reynolds, pour une bille dans la glycérine : $U \simeq 1$mm.s^{-1}, $L \simeq r = 1$ mm (rayon de bille).

$$R_e = \frac{UL}{\nu} \simeq \frac{10^{-3} \times 10^{-3}}{10^{-3}} \simeq 10^{-3} \ll 1$$

Dans ces conditions ($R_e \ll 1$), l'intensité de la force de frottement pour une sphère est

$$F = 6\pi\eta r v$$

On peut en déduire la vitesse limite : on égale le poids diminué de la poussée d'Archimède et la force de frottement :

$$v_{\lim} = \frac{(m - m_{gly})\, g}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9} \frac{(\mu_{bille} - \mu_{gly})\, g r^2}{\eta} = 1 \text{ mm.s}^{-1}$$

En accord avec l'hypothèse initiale.

Application 5 : Chute d'une balle de golf dans l'eau

Evaluons le nombre de Reynolds : $U \simeq 0.1$m.s^{-1}, $L \simeq r = 2$ cm (rayon de balle).

$$R_e = \frac{UL}{\nu} \simeq \frac{0.1 \times 2.10^{-2}}{10^{-6}} \simeq 2.10^3 \gg 1$$

Avec $R_e \gg 1$, la formule précédente n'est plus applicable, la force de trainée est proportionnelle à la vitesse au carré :

$$F = \frac{1}{2} C_x S \mu_{eau} v^2$$

En égalant le poids diminué de la poussée d'Archimède et la trainée, on trouve une vitesse limite :

$$v = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{r}{C_x} \left(\frac{\mu_{balle}}{\mu_{eau}} - 1 \right) g} = 0.12 \text{ m.s}^{-1}$$

En accord avec l'hypothèse initiale. On a les constantes suivantes : $C_x = 0.5$, $\mu_{balle} = 1.14$ g.cm^{-3}.

2 Ecoulement avec deux longueurs caractéristiques

On considère un écoulement $\overrightarrow{v} = v(y)\, \overrightarrow{u}_x$. Quelle distance prendre pour le nombre de Reynolds ? Faut-il prendre L_x (long caract suivant $\overrightarrow{u}_x$) ou L_y ?

$$Re = \frac{\text{transport convectif de quantité de mouvement}}{\text{transport diffusif de quantité de mouvement}} = \frac{\| \mu(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\, v) \|}{\| \eta \overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{v}) \|}$$

On peut également interpréter le nombre de Reynolds comme le rapport de deux flux surfaciques de quantité de mouvement (quantité de mouvement divisée par la surface et par le temps cela correspond aussi à une force par unité de surface).
Ainsi :

$$Re = \frac{\text{flux surfa. convectif de quantité de mouvement}}{\text{flux surf. diffusif de quantité de mouvement}}$$

Pour un fluide qui s'écoule suivant $\overrightarrow{u}_x$ et tel que $\overrightarrow{v} = v(y,t)\, \overrightarrow{u}_x$,

— Le débit de quantité de mouvement est $D_m \overrightarrow{v}$, le flux surf. de quantité de mouvement est donc $D_m \overrightarrow{v}/S = \mu v^2 \overrightarrow{u}_x$
Le flux surf. convectif est donc proportionnel à

$$\mu U^2$$

— le transport diffusif est lié à la force surfacique $\overrightarrow{F}/S = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$ donc égal à

$$\frac{\eta U}{L_y}$$

Finalement

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{U L_y}{\nu}}$$

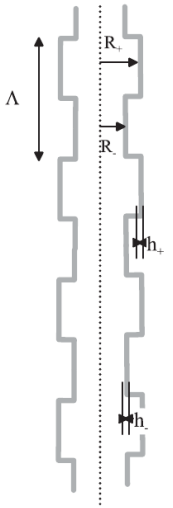


Figure 12

Un autre exemple se trouve dans Central PC2009 P-II sur les stalactites. On s'intéresse aux ondulations sur la surface des stalactites.

On demande d'évaluer la période de l'ondulation sur la verticale Λ en fonction de l'épaisseur de l'ondulation suivant $\overrightarrow{u}_r$ notée h.

Il y a diffusion et convection, la vitesse de déplacement du fluide est verticale suivant $\overrightarrow{u}_z$.

On donne l'équation de diffusion

$$D\triangle T = \frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T$$

Le terme diffusif est $D\triangle T \simeq D\left(\frac{T}{h^2} + \frac{T}{\Lambda^2}\right) \simeq D\frac{T}{h^2}$ car $h \ll \Lambda$.

Le terme convectif est $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T \simeq v_z \frac{\partial T}{\partial z} \simeq \frac{vT}{\Lambda}$ car la vitesse est suivant $\overrightarrow{u}_z$

On égalant ces deux termes, on trouve donc

$$\Lambda \simeq \frac{vh^2}{D}$$

Chapitre E4 : Dynamique des fluides

Navier

Partie E : Mécanique des fluides
E-1 : Statique des fluides
E-2 : Cinématique des fluides
E-3 : Viscosité
E-4 : Dyn. F. visqueux
E-5 : Dyn. F. parfaits
E-6 : Bilans macroscopiques
E-7 : Tension Superficielle

Stokes

I Equation de Navier et Stokes

1 Loi de similitude

Savoir démontrer №1★ : Eq Navier Stokes adimensionnée ★

On pose les grandeurs sans dimension suivantes :

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad v^* = \frac{v}{v_0} \qquad t^* = \frac{t}{\tau} \qquad p^* = \frac{p}{\mu v_0^2} \qquad L = v_0\tau$$

Ainsi les opérateurs deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = \tau\frac{\partial}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}^* = L\overrightarrow{\text{grad}} \qquad \overrightarrow{\triangle}^* = L^2\overrightarrow{\triangle}$$

L'équation de Navier-Stokes peut alors s'écrire :

$$\boxed{\frac{\partial \overrightarrow{v}^*}{\partial t^*} + \left(\overrightarrow{v}^*.\overrightarrow{\text{grad}}^*\right)\overrightarrow{v}^* = -\overrightarrow{\text{grad}}^* p^* + \frac{1}{\text{Re}}\overrightarrow{\triangle}^*\overrightarrow{v}^*}$$

2 Fluide visqueux incompressible

En général l'équation non linéaire de Navier Stokes ne peut être résolue analytiquement. Cela vient de la présence du terme non linéaire $\mu\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v}$.

Il reste quelques cas particulier où on peut résoudre :

- ✗ Lorsque $\mathcal{R}e \ll 1$, le terme convectif est très petit devant $\eta\triangle\overrightarrow{v}$
- ✗ Lorsque le terme convectif s'annule, c'est le cas des écoulements **unidirectionnels incompressibles**.

Savoir démontrer №2 : Ecoulement unidirectionnel

Pour un écoulement incompressible unidirectionnel avec $\overrightarrow{v} = v_x(x,y,z)\overrightarrow{u}_x$ par exemple, alors $\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v} = 0$.

On peut mettre un fluide visqueux en mouvement de deux manières :

- ✗ En déplaçant le conduit : écoulement de Couette.
- ✗ En appliquant un gradient extérieur de pression : écoulement de Poiseuille

II Ecoulement de Couette

Définitions :

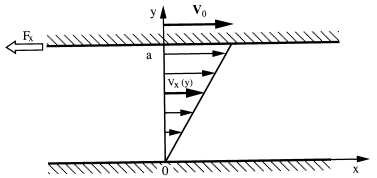
Un écoulement de Couette est un écoulement **provoqué par le déplacement d'une des parois**. Le fluide doit être **visqueux**. En général le gradient extérieur de pression est nul.

- ✗ Un écoulement de Couette **plan** est un écoulement entre **deux plans parallèles en mouvement relatif**.
- ✗ Un écoulement de Couette **cylindrique** est un écoulement entre **deux cylindres coaxiaux animés de vitesses de rotation** constantes dans le temps.

1 Ecoulement de Couette plan

Application 1 : Ecoulement de Couette plan

On étudie l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux, incompressible entre deux plans horizontaux infinis. Le plan inférieur $y = 0$ est fixe, tandis que le plan supérieur $y = a$ se déplace parallèlement à lui-même à vitesse constante $\overrightarrow{V}_0$.



On suppose qu'aucun gradient de pression extérieur n'est appliqué parallèlement aux plaques.

1. Déterminer le profil des vitesses $\overrightarrow{v}(y)\overrightarrow{u}_x$.
2. En déduire la contrainte tangentielle sur les plans $y = 0$ et $y = a$.

Réponse :

Dans le référentiel d'étude galiléen, l'équation de Navier Stokes *permet de trouver le système d'équations :*

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \qquad -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu g = 0$$

D'après l'énoncé, il n'y a pas de gradient de pression, donc $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$*, cela donne* $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \rightarrow v_x = Ay + B$

La vitesse est nulle en $y = 0$ *et vaut* V_0 *en* $y = a$*, on en déduit*

$$\boxed{v_x = V_0\frac{y}{a}}$$

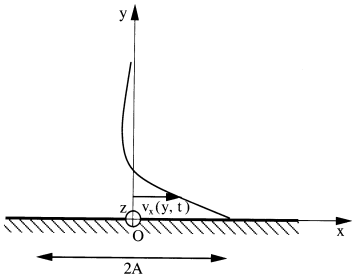
La force exercée par le fluide sur un plan est

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{F}}{\mathrm{d}S} = -\eta\frac{\partial v}{\partial y}\overrightarrow{u}_x = -\eta\frac{V_0}{a}\overrightarrow{u}_x}$$

Cette force est identique sur chacun des deux plans.

2 Ecoulement de cisaillement près d'un plan oscillant

Application 2 : Ecoulement de cisaillement



On étudie l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible au-dessus d'un plan horizontal infini animé d'un mouvement d'oscillation sinusoïdale parallèlement à lui même. On suppose qu'il n'y a pas de gradient extérieur de pression.

Soit $U_x = A\cos(\omega t)$ la vitesse du plan.

1. Proposer une forme du champ des vitesses dans le fluide cohérente avec les symétries du problème.
2. On définit la **profondeur de pénétration** δ de la vitesse par

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

Monter que le champ des vitesses s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{v}(y,t) = A\omega\exp-\frac{y}{\delta}\cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)\overrightarrow{u}_x}$$

Réponse :

1. *Invariance par translation suivant* Ox *et* Oz*, donc* $\overrightarrow{v} = v_x(y,t)\overrightarrow{u}_x + v_y(y,t)\overrightarrow{u}_y$
   L'écoulement incompressible implique $\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \rightarrow v_y = Cte$*, comme* $v_y(0) = 0$*, on a* $v_y(y,t) = 0$*.*
2. *Les projections des équations de* Navier-Sokes *donnent :*

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$
$$0 = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} - g$$
$$0 = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}$$

On se place en régime sinusoïdal forcé, on cherche donc une équation de la forme $v(y,t) = f(y)\cos(\omega t + \varphi)$

On choisit la notation complexe : $\underline{v}(y,t) = \underline{f}e^{i\omega t}$

On a

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial y^2} = \frac{i\omega}{\nu}\underline{f}(y) \rightarrow \underline{f} = C_1 e^{-(1+i)ky} + C_2 e^{-(1+i)ky}$$

Rque : on aurait pu chercher une solution en $\exp i(\omega t + \underline{k}x)$*, on aurait trouvé une équation en* $\underline{k}$*.*

✗ *Pour trouver* C_1 *et* C_2*, on repasse en notation réelle, commme* $v(y,t)$ *ne peut pas diverger pour* $y \rightarrow \infty$*,* $C_2 = 0$*. La condition aux limites en* $y = 0$*, impose* $v(0,t) = A\cos(\omega t)$ *Soit :*

$$v(y,t) = A\exp -\left(\frac{y}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)$$

On a posé $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$.

c'est un problème analogue à l'effet de peau en électromagnétisme ou de pénétration des ondes thermiques dans le sol, on a toujours

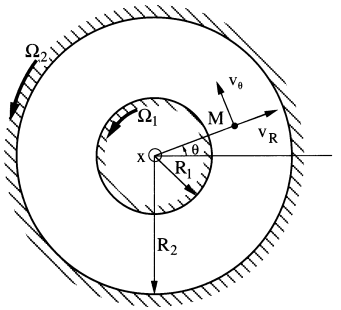
$$\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

.

3 Ecoulement de Couette cylindrique

Application 3 : Ecoulement de Couette cylindrique

On étudie l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible compris entre deux cylindres de rayons R_1 et R_2, tournant à des vitesses Ω_1 et Ω_2.



On suppose qu'aucun gradient de pression orthoradial (sur $\overrightarrow{u}_\theta$) extérieur n'est appliqué.

1. Justifier la forme du champ des vitesses

$$\overrightarrow{v} = v_r(r)\overrightarrow{u}_r + v_\theta(r)\overrightarrow{u}_\theta$$

2. Montrer que $v_r = 0$
3. Montrer que $-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}$
4. Montrer que v_θ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0$$

5. En déduire

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1}{r}$$

Données :

Pour une fonction ne dépendant que de r, $\text{div}\,\overrightarrow{v}(r) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r}$

$\overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{v}(r).\overrightarrow{u}_\theta = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2}$

Réponse :

1. *Invariance par rotation et le long de l'axe, donc dépendance uniquement de* r*. Tout plan perpendiculaire à l'axe est plan de symétrie donc pas de composant de vitesse selon cet axe.*
2. *A l'aide de l'incompressibilité de l'écoulement, on a*

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0$$

Donc $v_r = \frac{C}{r}$.
Les conditions aux limites impliquent que $C = 0$.

3. *L'accélération convective est :*

$$\vec{a}_c = \left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = v_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial\left(v_\theta \vec{u}_\theta\right)}{\partial\theta} = -\frac{v_\theta^2}{r}\vec{u}_r$$

car $\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial\theta} = -\vec{u}_r$.
Pour éviter que ce terme soit égal à 0 dans l'équation de NS, il faut tenir compte d'un gradient radial de pression.
Ainsi l'équation de NS donne deux projections :
Sur $\vec{u}_r$ *:*

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}$$

4. *On a, par hypothèse,* $\frac{\partial p}{\partial\theta} = 0$. *La projection de* Navier-Stokes *sur* $\vec{u}_\theta$ *donne donc :*

$$\boxed{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0}$$

5. *On remarque que cette équation peut s'écrire :*

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right) = 0$$

dont la solution est de la forme $v_\theta = \frac{A}{r} + Br$.
On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes $v_\theta(R_1) = R_1\Omega_1$ *et* $v_\theta(R_2) = R_2\Omega_2$.
On trouve finalement :

$$\boxed{v_\theta = \left(\frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\right) r + \left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\right)\frac{1}{r}}$$

III Ecoulement de Poiseuille

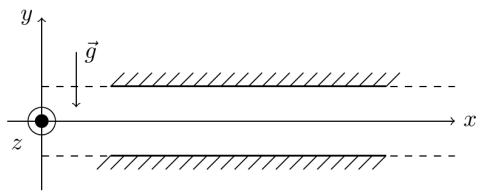
Définitions :

Un écoulement de Poiseuille est un écoulement incompressible d'un fluide visqueux, induit par une différence de pression appliquée entre les deux extrémités de l'écoulement.

✗ L'écoulement peut être plan (les deux plans sont alors fixes).
✗ L'écoulement peut avoir lieu dans un cylindre.

1 Ecoulement de Poiseuille plan

Application 4 : Ecoulement de Poiseuille plan, d'après Centrale PC 2011



On considère l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux plans horizontaux d'abscisses $y = -d/2$ et $y = +d/2$. L'axe horizontal Ox définit la direction et le sens de l'écoulement tandis que l'axe Oy est vertical ascendant : $\vec{g} = -g\vec{u}_y$.
On considère une zone suffisamment éloignée de l'extrémité par laquelle le fluide aborde le dispositif pour ignorer tout phénomène d'entrée et faire comme si les parois étaient illimitées.
On étudie alors un écoulement stationnaire caractérisé par le champ des vitesses $\vec{v} = v_x(y)\vec{u}_x$ et un champ de pression $p(x, y)$.

1. Écrire l'équation locale du mouvement. La projeter sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$.
2. En déduire que $\frac{\partial p}{\partial x} = K$ (constante).
3. Donner la loi $v_x(y)$ en fonction de K, η, y et d. Montrer que le profil des vitesses est parabolique.
4. On note $\Delta p = p(x, y) - p(x + L, y)$ la différence de pression qui doit exister entre deux points de même altitude et distants de L selon Ox pour maintenir cet écoulement.
   Établir l'expression du débit volumique D_V à travers une section de largeur h selon Oz en fonction de $\Delta p, L, h, d$ et η.
   Avec quelle loi électrique la relation entre Δp et D_V suggère-t-elle une analogie ? Introduire une résistance hydraulique.
5. Si, en maintenant Δp, on divise d par 2, que devient le débit ?
   Quel débit total circule alors à travers deux dispositifs identiques d'épaisseur $d/2$, chacun étant soumis à la différence de pression Δp sur une longueur L ?
   En déduire une différence importante avec la notion de résistance électrique.

Réponse :

1. *On étudie les projections de l'équation de* Navier-Stokes *sur les deux axes en*

régime stationnaire :

$$\mu\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - g$$

2. *On dérive la première équation par rapport à x,à l'aide du théorème de* Schwartz *en remarquant que $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ et donc $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$, on trouve donc*

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

Donc $\frac{\partial p}{\partial x}$ est indépendant de x.
En dérivant la seconde équation par rapport à x, on trouve $\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$
Donc $\frac{\partial p}{\partial x}$ est indépendant de y.
En conclusion

$$\frac{\partial p}{\partial x} = K$$

3. *La première équation s'écrit donc $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{K}{\eta}$, donc $v_x = \frac{K}{2\eta}y^2 + \alpha y + \beta$*
L'écoulement est visqueux, la vitesse du fluide s'annule sur l'obstacle, donc $v_x\left((\frac{d}{2}\right) = v_x\left((-\frac{d}{2}\right) = 0$
Par différence des deux équations, on trouve $\alpha = 0$, puis

$$\boxed{v_x = \frac{Kd^2}{8\eta}\left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right)}$$

4. *Comme $\frac{\partial p}{\partial x} = K$, on en déduit que $p = Kx + \gamma$.*
$\Delta p = -KL$, d'ou finalement

$$K = -\frac{\Delta p}{L}$$

Le débit volumique est par définition

$$D_v = \iint \overrightarrow{v}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$
$$= \iint v_y \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

On trouve donc

$$\boxed{D_v = -\frac{\Delta p d^3 h}{12L\eta}}$$

*Cette formule est à rapprocher du la loi d'*Ohm *pour un conducteur : le débit de charge I est proportionnel à la différence de potentiel U divisé par la résistance électrique.*

$$I = \frac{U}{R}$$

On peut donc définir une résistance hydraulique

$$\boxed{R_h = \frac{12L\eta}{d^3 h}}$$

5. *Si d est divisée par 2, alors le débit est divisé par 8.*
Si on place 2 tubes à débit divisé par 8, on obtient un débit divisé par 4.
Dans le cas d'une résistance électrique $R_e = \rho\frac{\ell}{dh}$, une division de d par 2, divise le courant par 2 ! Pour un écoulement les diminutions de section de l'écoulement réduisent considérablement le débit (voir les problèmes de circulation sanguine).

2 Perte de charge

Définition :

✗ La **décroissance de la pression** lors d'un écoulement d'un fluide visqueux s'appelle **la perte de charge**.
✗ **La charge** est définie en tout point d'un écoulement comme la quantité

$$p + \mu g z + \mu\frac{v^2}{2}$$

la charge est homogène à une énergie volumique.

Savoir démontrer №3 : Perte de charge

En raison du phénomène de viscosité, la charge diminue le long d'une ligne de l'écoulement ; on a pour un écoulement stationnaire d'un fluide homogène :

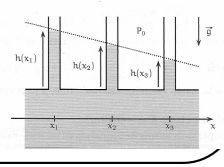
$$\mathrm{d}\left(p + \mu g z + \mu\frac{v^2}{2}\right) = \eta\overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{v}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} < 0$$

Application 5 : Perte de charge pour un écoulement plan

1. Montrer que

$$p - p_0 = K\left(x - x_1\right) - \mu g\left(y - h\left(x_1\right)\right)$$

2. Interpréter l'expérience de la figure ci-contre.



Réponse :

1. *En utilisant le résultat de la question précédente, les projections de l'équation de NS donnent :*

$$\frac{\partial p}{\partial x} = K < 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -g$$

Par intégration, on trouve que

$$\boxed{p = Kx - \mu g y + \gamma}$$

.

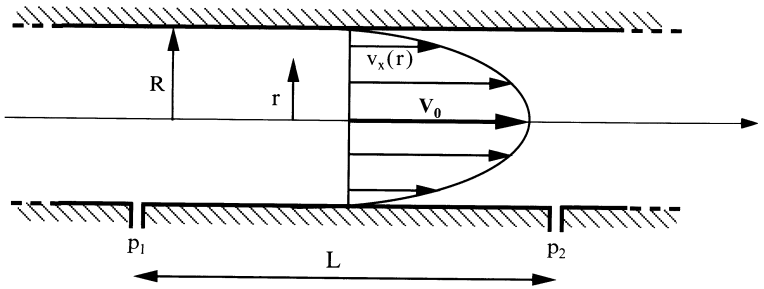
On trouve la constante γ en x_1 car $p\left(x_1, h_1\right)) = p_0$ (on a posé $h_1 = h\left(x_1\right)$) , soit $\gamma = p_0 - Kx_1 + \mu g h_1$. On en déduit

$$\boxed{p - p_0 = K\left(x - x_1\right) - \mu g\left(y - h\left(x_1\right)\right)}$$

2. *L'équation de la surface libre s'obtient en écrivant que $p = p_0$. La surface libre est une droite d'équation :*

$$\boxed{y = h_1 + \frac{K\left(x - x_1\right)}{\mu g}}$$

3 Ecoulement de Poiseuille cylindrique



Application 6 : Ecoulement de Poiseuille cylindrique

Un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique μ s'écoule en régime stationnaire et incompressible dans une conduite cylindrique d'axe Oz, de longueur L et de rayon R. Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses de la forme $\overrightarrow{v}\left(M\right) = v_z\left(r,z\right)\ \overrightarrow{u}_z$ et un champ de pression de la forme $P\left(M\right) = P\left(z\right)$.

1. En exploitant l'incompressibilité de l'écoulement, montrer que $v_z\left(r,z\right)$ ne dépend pas de z.
2. Montrer que le champ des accélérations $\overrightarrow{a}\left(M\right)$ est nul. En appliquant le théorème de la résultante cinétique à une particule de fluide, établir l'équation différentielle dont est solution $v_z\left(r\right)$ et l'intégrer en tenant compte des conditions aux limites sur la paroi de la conduite.
3. En déduire l'expression du débit volumique D_v en fonction des pressions $P\left(z=0\right) = P_1$ à l'entrée et $P\left(z=L\right) = P_2$ à la sortie de la conduite. Comparer le résultat à la loi d'Ohm pour un conducteur filiforme en électrocinétique.

On rappelle aussi que pour un champ scalaire $f\left(r\right)$ ne dépendant ni de z, ni de θ, on a :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)$$

Réponse :

1. *L'écoulement est incompressible donc* $\operatorname{div}\overrightarrow{v} = 0$, *dans notre cas* $\overrightarrow{v}\left(M\right) = v_z\left(r,z\right)\overrightarrow{u}_z$ *donc* $\operatorname{div}\overrightarrow{v} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$ *on peut donc conclure :*

$$\boxed{\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0}$$

2. *Par définition l'accélération Lagrangienne est*

$$\overrightarrow{a}\left(M,t\right) = \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v}$$

En régime stationnaire $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$ *et* $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad} = v_z\frac{\partial}{\partial z}$ *car* $\overrightarrow{v}$ *est colinéaire à* $(\overrightarrow{u_z})$, *donc* $\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v} = v_z\frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *d'après la question précédente. Finalement*

$$\boxed{\overrightarrow{a}\left(M,t\right) = 0}$$

On peut écrire l'équation de Navier Stokes :

$$\mu \overrightarrow{a}\,(M,t) = \mu \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \mu \overrightarrow{g} + \eta \overrightarrow{\Delta \overrightarrow{v}} - \overrightarrow{grad}\,(P) = 0$$

Par projection sur l'axe (Oz) *on trouve*

$$\boxed{\frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = \frac{\partial P}{\partial z}}$$

On peut intégrer cette équation : $\frac{\partial P}{\partial z}$ *est indépendant de* r *car on indique que* P *ne dépend que de* z*.Pour résoudre, on multiplie par* r *et on intègre. La vitesse normale à la surface doit être nulle, soit :* $v\,(R) = 0$ *et la vitesse ne doit pas diverger en* 0*, donc*

$$\boxed{v_z\,(r) = -\frac{1}{4\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\left(R^2 - r^2\right)}$$

3. *Par définition, de débit volumique*

$$D_v = \iint \overrightarrow{v}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

L'intégrale porte sur une section du tube donc $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = 2\pi r \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u}_z$.
L'intégration donne

$$D_v = -\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} > 0 \text{ si } \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} < 0$$

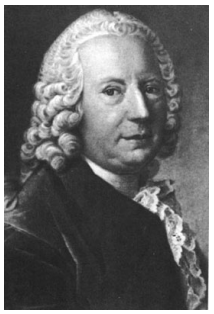
D'autre part $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = cte = \frac{P_2 - P_1}{L}$ *soit finalement :*

$$\boxed{D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta}\left(\frac{P_1 - P_2}{L}\right)}$$

Chapitre E5 : Dynamique des fluides parfaits

Venturi (1746-1822)

Partie E : Mécanique des fluides
E-1 : Statique des fluides
E-2 : Cinématique des fluides
E-3 : Viscosité
E-4 : Dyn. F. visqueux
E-5 : Dyn. F. parfaits
E-6 : Bilans macroscopiques
E-7 : Tension Superficielle



Bernoulli (1700 - 1742)

I Equation d'Euler : fluide non visqueux

1 Obtention de l'équation d'Euler

Savoir démontrer №1 : Equation d'Euler

Dans un référentiel **galiléen**, le théorème de la résultante dynamique à une particule de fluide non visqueux donne

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\overrightarrow{\text{grad}}\frac{v^2}{2}+\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\text{grad}}\,p+\vec{f}_v$$

Le système est décrit par 6 inconnues, cela nécessite en plus de l'équation d'Euler, la conservation de la masse, une équation d'état et une hypothèse sur le comportement du fluide (parfait ...)

Application 1 : Equation d'Euler en réferentiel non galiléen

Modifier l'équation précédente pour qu'elle s'applique dans un référentiel non galiléen.

Remarques :

Pour une particule au repos, on retrouve la loi de la statique des fluides.
Lorsque $v \ll \frac{L}{\tau}$, l'équation devient linéaire.

2 Théorème de Lagrange

Hyp. de **Mécanique**		Hyp. **Lagrangiennes**		Hyp. **Eulériennes**	
M_1	$\mathcal{R}$ est galiléen forces vol conservatives	L_1	Ecoul^t incompressible	E_1 E_3	Ecoul^t parfait Fluide homogène

Savoir démontrer №2 : Théorème de Lagrange

$$\frac{\partial\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}}{\partial t}+\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}\right)=\vec{0}$$

Dans un champ de force volumique conservatif, un écoulement parfait incompressible et homogène, qui est irrotationnel à $t=0$ reste irrotationnel ultérieurement.

3 Théorèmes de Bernoulli

3.a Hypothèses

Hyp. de **Mécanique**		Hyp. **Lagrangiennes**		Hyp. **Eulériennes**	
M_1	$\mathcal{R}$ est galiléen	L_1	Ecoul^t incompressible	E_1	Ecoul^t parfait
M_2	chp pesanteur uniforme : $\vec{g}=-g\vec{u}_z$			E_2	Régime stationnaire
M_3	forces vol conservatives			E_3	Fluide homogène
				E_4	Ecoul^t irrotationnel
				E_5	Sur une ligne de courant

Le Théorème de Bernoulli n'est **pas applicable** si le système contient une pièce mobile (hélice ...).

Propriété à connaître

3.b Cas d'un écoulement parfait, stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène

Savoir démontrer №3 : Théorème de Bernoulli

- ✗ M_1, M_2 $\mathcal{R}$ galiléen et champ de pesanteur uniforme,
- ✗ E_1, E_3 Fluide **parfait et homogène**,
- ✗ L_1 Ecoulement **incompressible**,
- ✗ E_2,E_4 Ecoulement **stationnaire et irrotationnel**.

$$\boxed{\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\mu}+gz=\text{cte}}$$

3.c Cas d'un écoulement parfait, stationnaire, tourbillonnaire, incompressible et homogène

Savoir démontrer №4 : Théorème de Bernoulli

- ✗ M_1, M_2 $\mathcal{R}$ galiléen et champ de pesanteur uniforme,
- ✗ E_1, E_3 Fluide **parfait et homogène**
- ✗ L_1 Ecoulement **incompressible**
- ✗ E_2 Ecoulement **stationnaire**
- ✗ E_5 A et B sur une même ligne de courant

$$\boxed{\frac{v_A^2}{2}+\frac{p_A}{\mu}+gz_A=\frac{v_B^2}{2}+\frac{p_B}{\mu}+gz_B}$$

3.d Cas d'un écoulement parfait, stationnaire et compressible : cas d'un gaz

Savoir démontrer №5 : Théorème de Bernoulli

- ✗ E_1, E_3 Fluide **parfait et homogène**
- ✗ E_4 Ecoulement **stationnaire**
- ✗ E_5 A et B sur une même ligne de courant

$$\int_A^B \frac{dp}{\mu}+\left[\frac{v^2}{2}+gz\right]_A^B=0$$

3.e Cas d'un écoulement parfait, non stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène

Savoir démontrer №6 : Théorème de Bernoulli

- ✗ M_1, M_2 $\mathcal{R}$ galiléen et champ de pesanteur uniforme,
- ✗ E_1, E_3 Fluide **parfait et homogène**
- ✗ L_1 Ecoulement **incompressible**
- ✗ E_4 Ecoulement **irrotationnel**

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{p}{\mu}+\frac{v^2}{2}+gz=\text{cte}(t)$$

3.f Bilan

Hypothèses				
parfait, homo-gène	incomp.	stationnaire	irrotationnel	
✓	✓	✓	✓	$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\mu}+gz=\text{cte}_{fluide}$
✓	✓	✓		$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\mu}+gz=\text{cte}_{\text{ligne de courant}}$
✓	✓		✓	$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\mu}+gz=\text{Cte}(t)$

II Applications du théorème de Bernoulli

1 Variation de la pression

Définition :

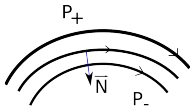
Dans un **jet à l'air libre**, la pression en tout point du fluide est la pression atmosphérique

$$p(M)=p_0$$

Savoir démontrer №7 : Ecoulement parallèle

Dans un écoulement parallèle, les zones de rétrécissement correspondent aux zones de pression minimale.

Savoir démontrer №8 : Ecoulement incurvé autour d'un objet



Dans cette situation si on note $\vec{N}$ le vecteur de la base de Frenet (chap 6 du complément mathématiques), on a

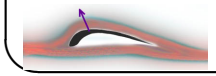
$$\frac{D\vec{v}}{Dt}=\frac{Dv}{Dt}\vec{T}+\frac{v^2}{R}\vec{N}$$

Si on neglige le poids, pour un écoulement stationnaire homogène :

$$\frac{v^2}{R}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,p.\vec{N}$$

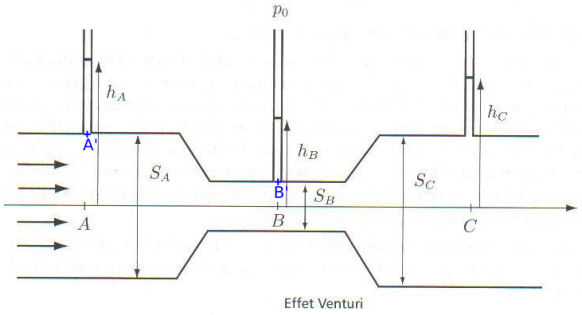
La pression est **plus faible au centre de la courbure**.

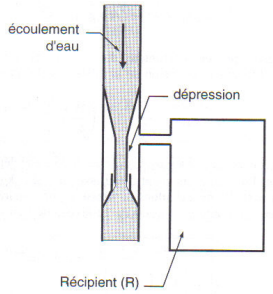
Application 2 : Aile d'avion



Montrer que la forme de l'aile d'avion laisse penser à une force de portance vers le haut.

2 Phénomène de Venturi





Application 3 : Tube de Venturi

Un tube de Venturi est constitué d'un rétrécissement qui sépare deux régions, de sections différentes S_A et $S_B < S_A$, d'une canalisation horizontale. Des tubes verticaux émergent de ces régions et sont ouverts sur l'air ambiant. De l'eau, assimilée à un fluide parfait de masse volumique μ, s'écoule de façon permanente dans la canalisation.
On constate que les altitudes respectives h_A et h_B des surfaces libres d'eau ne sont pas les mêmes dans les deux premiers tubes verticaux.

1. Établir une relation entre $(h_A - h_B)$ et la vitesse du fluide dans la canalisation au niveau de la section S_A. Les hauteurs relatives des niveaux dans les tubes du schéma du cours sont-elles qualitativement correctes ?
2. La section de la canalisation au niveau du troisième tube vertical est $S_C = S_A$. On note h_C l'altitude de la surface libre dans ce troisième tube. Comment doit se situer l'altitude h_C théorique par rapport à h_A ?

Réponse :

1. *Relation sur les vitesses :*

   (a) *Soit le point A' qui est situé à la verticale de A mais dans la partie inférieure du tube vertical et B' en bas du second tube (voir schéma).*
   On suppose que A' et B' sont sur une même ligne de courant, l'écoulement est parfait et stationnaire pour un fluide homogène, on peut donc utiliser le théorème de Bernoulli *sur la ligne de courant entre A' et B'.*

$$p_{A'} + \frac{V_A^2}{2} + \mu g z_{A'} = p_{B'} + \frac{V_B^2}{2} + \mu g z_{B'}$$

   On a supposé que la vitesse est uniforme sur une section de la conduite (indépendante de z) : donc $V_{A'} = V_A$.

   (b) *La conservation du débit volumique (écoulement incompressible) permet d'écrire :*

$$V_A S_A = V_B S_B$$

   (c) *Entre A et A', le fluide est au repos, on peut donc écrire un principe de la statique (PFS) :*

$$p_{A'} = p_0 + \mu g\,(h_A - z_{A'}) \quad p_{B'} = p_0 + \mu g\,(h_B - z_{B'})$$

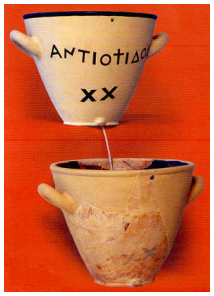
   (d) *On rassemble toutes ces relations, on trouve donc*

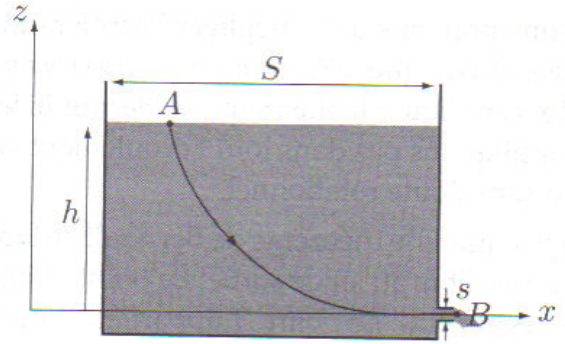
$$\boxed{V_A^2 = g\frac{h_B - h_A}{1 - \frac{S_A}{S_B}}}$$

   Comme $V_A^2 > 0$,
   - ✗ *si $S_B < S_A$ alors $h_B < h_A$ (comme sur le schéma).*
   - ✗ *si $S_B > S_A$ alors $h_B > h_A$*

2. *Si $S_C = S_A$, alors les hauteurs dans les tubes doivent être rigoureusement les même : $h_C = h_A$.*
   Ici il y a une perte de charge (fluide visqueux) qui explique que $h_C < h_A$.

3 Théorème de Torricelli





Savoir démontrer №9 : Théorème de Torricelli

Soit un récipient percé d'un trou à la distance h sous la surface libre du liquide incompressible. La vitesse du liquide sortant par le trou est

$$v = \sqrt{2gh}$$

Réponse :

A $t = 0$, on ouvre le robinet du réservoir (situé en B). Initialement la hauteur d'eau dans le réservoir est h_0 et on la note $h(t)$ à l'instant t.

1. *Une fois le robinet ouvert, on suppose l'écoulement unidimensionnel à l'interface air-eau dans le réservoir avec* $\overrightarrow{v}(M,t) = -V(t)\overrightarrow{u}_z = -\dot{h}\overrightarrow{u}_z$ *et dans le tube horizontal où* $\overrightarrow{v}(M,t) = v(x,t)\overrightarrow{u}_x$.
   On a donc par conservation du débit volumique
   $$v(x,t) = \frac{S}{s}V(t) = -\frac{S}{s}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$
   ce qui permet avec $s \ll S$ *de négliger* $V(t)$ *devant* $v(t)$ *dans toute la suite.*
2. *On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires : on va pouvoir appliquer le théorème de Bernoulli stationnaire (même si* $h(t)$*).*
   Cela revient à négliger l'accélération locale devant $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{1}{2}v^2$.
   On trouve donc
   $$\mu g z_A = \mu\frac{1}{2}v^2 + \mu g z_B$$
3. *Finalement*
   $$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

4 Ecoulement non stationnaire

Application 4 : Ecoulement dans un tube long

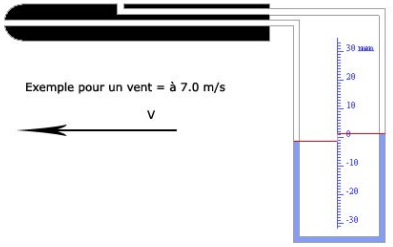
On considère que la vidange du récipient se fait à travers un tube de longueur L.

1. Montrer que le champ des vitesses est uniforme dans la partie horizontale.
2. Montrer que v va vérifier l'équation suivante (dans la partie horizontale) :
   $$L\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - gh + \frac{1}{2}v^2 = 0$$
3. En déduire $v(t)$

Réponse :

1. *Ecoulement incompressible, donc* $\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} \to v = Cte$
2. *On utilise le théorème de* Bernoulli *entre* A *et* C *:*
   $$\int_A^C \mu\frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}\ell + \left[p + \mu g z + \frac{1}{2}\mu v^2\right]_A^C = 0$$
   On remarque que $v_A \ll v_B = v_C \to \frac{\partial v_A}{\partial t} \ll \frac{\partial v_C}{\partial t}$
   en remplaçant, on trouve
   $$L\frac{\partial v_C}{\partial t} - gh + \frac{1}{2}v_C^2 = 0$$
3. *Par intégration, on trouve* $v(t) = v_1 \mathrm{th}\frac{v_1 t}{2L}$ *avec* $v_1 = \sqrt{2gh_0}$

5 Tube de Pitot



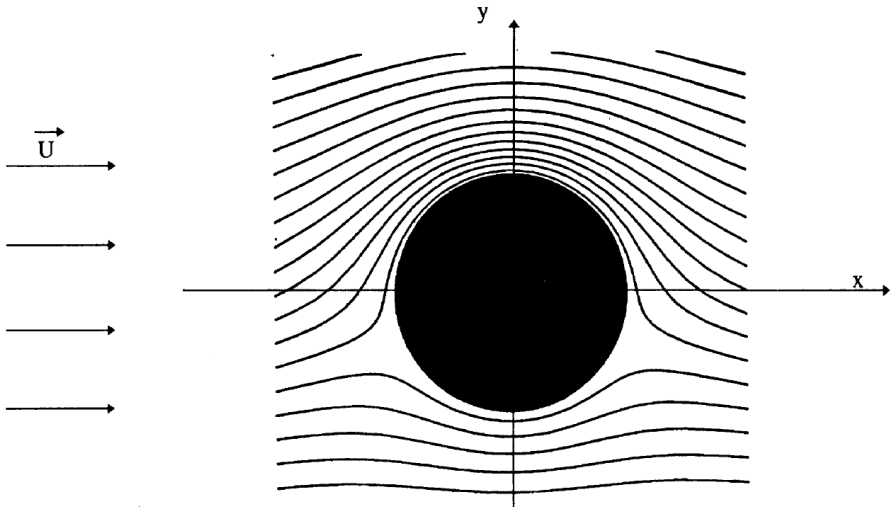
Application 5 : Tube de Pitot

On considère un tube de Pitot, placé dans un écoulement uniforme à la vitesse constante $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u}_x$, loin en amont du tube. Deux trous sont percés dans le tube : A qui fait face à l'écoulement et B sur le côté du tube.
Chaque trou mène sur une cavité bouchée, au fond de laquelle se trouve un capteur de pression.

1. Montrer que la différence de pression $P_A - P_B$ permet de connaître la vitesse v.
2. Ces trous portent les noms de « prise de pression dynamique » et « prise de pression statique ». Expliquer pourquoi.
3. Est-il légitime de considérer l'écoulement comme parfait ?
4. Ce système est-il fiable dans toutes les situations ?

6 Effet Magnus

Du fait de la viscosité de l'air, les lignes de courant autour d'une balle en rotation sont modifiées : on a :



Application 6 : Calcul de la pression

On donne la vitesse autour de la balle :

$$v_r = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta \qquad v_\theta = U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

1. Exprimer la pression $p(\theta)$ à la surface de la balle en fonction de U, μ, R, Γ et p_0.
2. En déduire la force sur le cylindre de hauteur h.

Réponse :

1. *On utilise le théorème de* Bernoulli *entre l'infini (vitesse U, pression p_0) et un point de la balle. On trouve*

$$p(\theta) = p_0 + \frac{\mu}{2}\left(U^2 - \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} - 2U\sin\theta\right)^2\right)$$

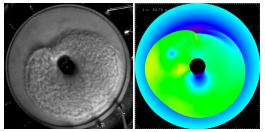
2. *On intègre pour trouver la force*

$$F_y = Rh\int_0^{2\pi} p(\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta = -\mu U H\Gamma$$

Chapitre E6 : Bilans macroscopiques

Turbine

PARTIE E : MÉCANIQUE DES FLUIDES
E-1 : Statique des fluides
E-2 : Cinématique des fluides
E-3 : Viscosité
E-4 : Dyn. F. visqueux
E-5 : Dyn. F. parfaits
E-6 : Bilans macroscopiques
E-7 : Tension Superficielle



Analogie hydraulique du comportement d'une étoile [7]

I Bilan de masse

1 Bilan de masse pour un système infinitésimal fermé

Savoir démontrer №1 : Infinitésimal fermé

Le système fermé est $ABCD$ à la date t.
Le système fermé est $A'B'C'D'$ à la date $t+\mathrm{d}t$, il suit l'écoulement.

$$m(t) = \mu(x,t)\, S\mathrm{d}x$$
$$m(t+\mathrm{d}t) = S\left[\mu(x,t+\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t) + \mu(x+\mathrm{d}x,t+\mathrm{d}t)\, v(x+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t\right]$$

On retrouve la relation de continuité :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial x} = 0}$$

7. Le ressaut hydraulique de 20 cm de rayon oscille avec une période d'environ 3 secondes. Dans une étoile en effondrement, le choc s'étend sur 200 km et sa période d'oscillation est de 30 millisecondes. L'expérience SWASI (voir **??**) est donc un million de fois plus petite et environ 100 fois plus lente que son analogue astrophysique.

2 Bilan de masse pour un système infinitésimal ouvert

Savoir démontrer №2 : Infinitésimal ouvert

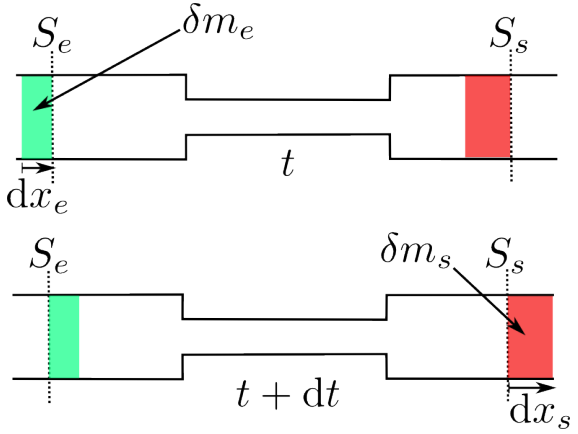
Le système ouvert est $ABCD$ à la date t.

$$\delta m_e = \mu(x,t)\, v(x,t)\, S\mathrm{d}t$$
$$\delta m_s = \mu(x+\mathrm{d}x,t)\, v(x+\mathrm{d}x,t)\, S\mathrm{d}t$$
$$\delta m = \frac{\partial \mu}{\partial t} S\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

On retrouve la relation de continuité :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial x} = 0}$$

3 Bilan de masse pour un grand système ouvert



On considère un fluide en écoulement dans une conduite.

✗ **On se place dans le référentiel lié à la conduite.**
✗ On note $\Sigma(t)$ le système ouvert à la date t.
✗ On note $\Sigma^*(t)$ le système fermé à la date t, $\Sigma^*(t) = \Sigma(t) \cup \delta m_e$
✗ et $\Sigma^*(t+\mathrm{d}t)$ le système fermé à la date $t+\mathrm{d}t$, $\Sigma^*(t+\mathrm{d}t) = \Sigma(t+\mathrm{d}t) \cup \delta m_s$

✗ On remarque que Σ^* n'est défini que pendant $\mathrm{d}t$.

Savoir démontrer №3 : Conservation de la masse

Soit G une grandeur extensive (éventuellement vectorielle), associée au système fermé, sa variation vérifie

$$m\,(t+\mathrm{d}t) - m\,(t) = \delta m_e - \delta m_s$$

On peut également écrire ce résultat sous la forme :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = [D_m]_e^s$$

✗ En régime stationnaire, on trouve

$$\mu_e v_e S_e = \mu_s v_s S_s$$

✗ Pour une tranche infinitésimale, on retrouve l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial x} = 0$$

II Bilan de quantité de mouvement

1 Forces exercées sur un fluide

Point méthode - Répertorier les forces

On fait le bilan des forces s'exerçant sur le fluide contenu dans le système Σ. (Il sera parfois utile d'inclure le support dans le système.)

- ☞ Actions à distance (forces de champ)
  - ✗ le poids s'écrit : $\iiint \mu \vec{g}\,\mathrm{d}\tau$
  - ✗ forces électromagnétiques.
- ☞ Actions de contact
  - ✗ Forces surfaciques (macroscopiques) de pression :

$$-p_e S_e \vec{n}_e - p_s S_s \vec{n}_s$$

orientation normale sortante : les forces de pressions sont **normales au fluide**.

  - ✗ Forces de viscosité, tangentes au fluide. Elles sont nulles si le fluide est parfait (ou écoulement parfait).
  - ✗ Forces de réaction des supports.
- ☞ Forces d'inertie si le référentiel n'est pas galiléen.

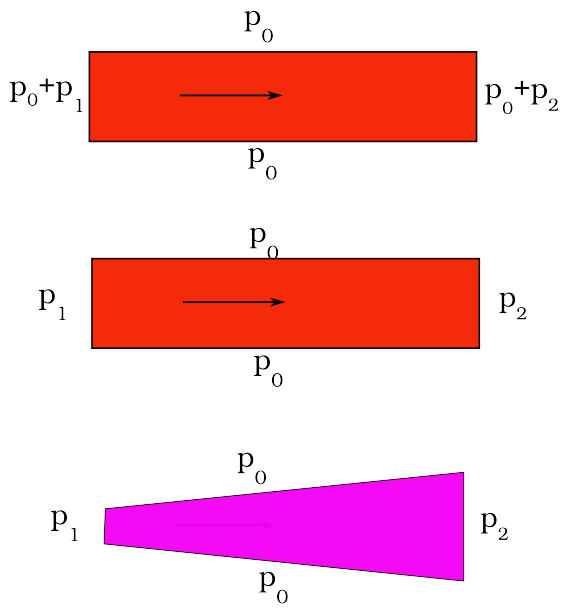
Si l'ensemble du système est plongé dans un gaz à pression uniforme p_0, les forces de pression sont nulles.

$$\oiint p_0 \mathrm{d}\vec{S} = \vec{0}$$

Propriété à connaître

Application 1 : Calcul des forces de pression

Donner l'expression des forces de pression sur le système composé du **fluide + de la tuyère** dans les trois cas suivants :



2 Bilan de quantité de mouvement

2.a Application du théorème de la résultante dynamique

Théorème de la Résultante Dynamique

Pour un système fermé de résultante cinétique $m^* \overrightarrow{v}^*$, on a entre deux instants t et $t + \mathrm{d}t$

$$m^*(t+\mathrm{d}t)\,\overrightarrow{v}^*(t+\mathrm{d}t) - m^*(t)\,\overrightarrow{v}^*(t) = \left(\sum \overrightarrow{F}_{ext}\right)\mathrm{d}t$$

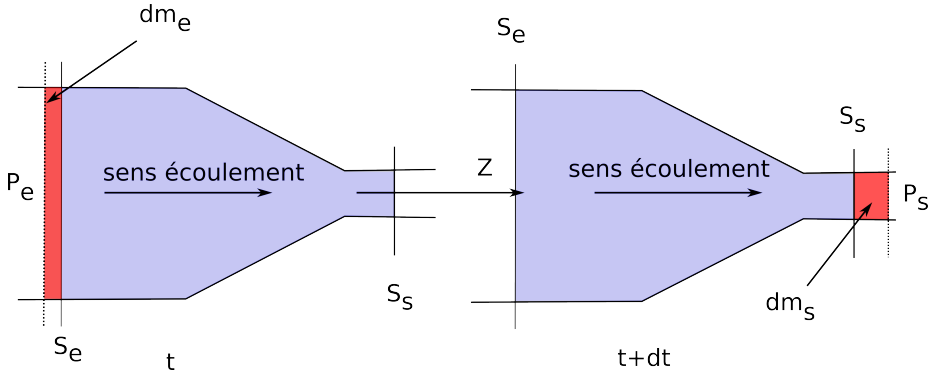
On peut aussi trouver la forme :

$$\frac{\partial(m\overrightarrow{v})}{\partial t} + [D_m \overrightarrow{v}]_e^s = \left(\sum \overrightarrow{F}_{ext}\right)$$

Cette formule n'est pas au programme et doit être redémontrée pour être utilisée.

2.b Ecoulement d'un fluide dans un conduit de section variable

On cherche la force exercée par un fluide parfait en écoulement **incompressible et permanent** sur un conduit ayant une symétrie de révolution ; l'écoulement est unidimensionnel ($\overrightarrow{v} = v(z)\overrightarrow{u}_z$).



Point méthode - Conduite de section variable

1. Le système Σ est le système constitué par le fluide entre S_e et S_s. Il est **ouvert car du fluide entre à gauche et sort à droite**.
2. Le système Σ^* est :
$$\Sigma^*(t) = \Sigma(t) \cup \delta m_e$$
$$\Sigma^*(t+\mathrm{d}t) = \Sigma(t+\mathrm{d}t) \cup \delta m_s$$
3. Le référentiel est le référentiel terrestre, il est galiléen.
4. Les forces appliquées sont les forces de pression $(p_e S_e - p_s S_s)\,\vec{u}_z$ et la force du conduit sur le fluide : $\vec{F}_{\text{conduit - fluide}} = -\vec{F}_{\text{fluide-conduit}}$. Si le système comprend une hélice, il faut ajouter la force de l'hélice sur le fluide.

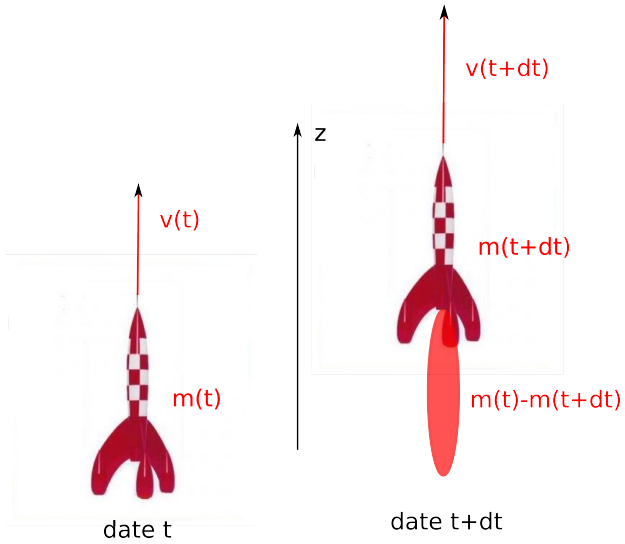
Application 2 : Force du fluide sur le conduit

La force $\vec{F} = \vec{F}_{\text{fluide-conduit}}$ du fluide sur le conduit est :
$$\vec{F} = D_m\,(\vec{v}_e - \vec{v}_s) + (p_e S_e - p_s S_s)\,\vec{u}_z$$

2.c Exemple de la fusée

On considère une fusée qui a la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel terrestre.

Elle éjecte des gaz avec la vitesse $\vec{u}$ par rapport à la fusée avec un débit massique constant D_m **évalué par rapport à la fusée**.



On cherche l'équation différentielle vérifiée par $\vec{v}(t)$ puis une condition pour que la fusée décolle verticalement.

Point méthode - Fusée

1. Le système Σ est le système constitué par la fusée. Il est ouvert car du gaz s'échappe en bas de la fusée : **masse sortante**.
2. Le système Σ^* est :
$$\Sigma^*(t) = \Sigma(t)$$
$$\Sigma^*(t+\mathrm{d}t) = \Sigma(t+\mathrm{d}t) \cup \delta m_s = \Sigma(t+\mathrm{d}t) \cup D_m \mathrm{d}t$$
3. Le référentiel est le référentiel terrestre, il est galiléen.
4. La seule force appliquée au système est le poids :
$$\vec{p} = m(t)\,\vec{g}$$

Savoir démontrer №4 : Résultante dynamique

✗ L'énoncé du TRD permet de trouver

$$m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = m\vec{g} - D_m\vec{u}$$

✗ On retrouve le même résultat dans le référentiel non galiléen $\mathscr{R}'$ de la fusée :

$$\frac{\partial m\vec{0}}{\partial t} + D_m\vec{u} = m\vec{g} - m\vec{a}$$

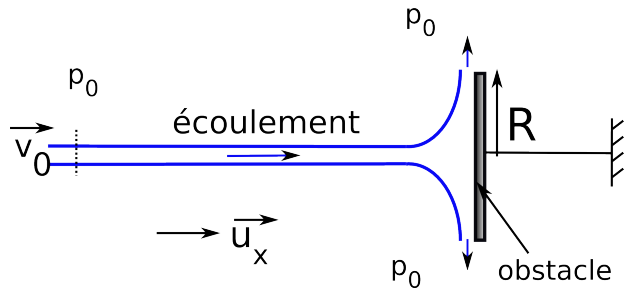
2.d Action d'un jet cylindrique sur une paroi

On considère un fluide incompressible incident à la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel terrestre.

On se place en régime stationnaire.

Il percute un obstacle fixe de rayon R lui même fixé sur un support. On suppose qu'au moment de l'impact la masse se distribue sur une couronne de rayon R.

On cherche à exprimer la force du jet sur l'obstacle.



Point méthode - **Jet sur une paroi plane**

1. Le système Σ est le fluide du jet $\cup$ l'obstacle. Il est ouvert car du fluide entre à gauche et sort sur la couronne.
2. Le système Σ^* est :

$$\Sigma^*(t) = \Sigma(t) \cup \delta m_e$$

$$\Sigma^*(t+\mathrm{d}t) = \Sigma(t+\mathrm{d}t) \cup \delta m_s$$

3. Le référentiel est le référentiel terrestre, il est galiléen.
4. La pression est p_0 sur toute la surface, les forces de pression se compensent. La seule force appliquée au système est la force du support sur l'obstacle $\vec{F}$

Application 3 : Force du jet sur l'obstacle

Le principe de l'action et de la réaction permet d'écrire la force $\vec{F}$ du jet sur l'obstacle :

$$\vec{F}' = \mu s v_0^2 \vec{u_x}$$

III Bilans d'énergie cinétique

1 Méthode générale

Théorèmes de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique

Pour un système fermé soumis à des forces **extérieures** et **intérieures** dans un référentiel $\mathscr{R}$, on a entre deux instants t et $t+\mathrm{d}t$

$$Ec^*(t+\mathrm{d}t) - Ec^*(t) = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}$$

En général, ce théorème permet de calculer les travail des forces intérieures.

$$Ec^*(t+\mathrm{d}t) + Ep^*(t+\mathrm{d}t) - Ec^*(t) - Ep^*(t) = \delta W_{\text{ext}}\left(\vec{F}_{NC}\right) + \delta W_{\text{int}} = \mathcal{P}_{NC}\mathrm{d}t$$

2 Travail et puissance des forces de pression

Savoir démontrer №5 : Expression du travail et de la puissance des forces de pression

$$\boxed{\delta W_p = (p_e D_{V_e} - p_s D_{V_s})\,\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_p = -\left[pD_V\right]_e^s = -\left[D_m \frac{p}{\mu}\right]_e^s}$$

Soit $\delta^{II}W$ le travail élémentaire de la force $\overrightarrow{dF}_{1\to 2}$ entre t et $t+dt$. On note ce travail $\delta^{II}W$ car il est calculé

- ✗ sur une surface élémentaire
- ✗ pendant une durée infinitésimale dt

$$\delta^{II}W = \overrightarrow{dF}_{1\to 2}.\overrightarrow{dl} = -p_1 \overrightarrow{n}_{2\to 1}.\overrightarrow{dl}\,dS$$

— On note $d^{II}V$ le volume élémentaire $d^{II}V = \overrightarrow{n}_{2\to 1}.\overrightarrow{dl}\,dS$. On peut alors exprimer le travail sur la surface S

$$\delta W = -\iint_S p_1 \overrightarrow{n}_{2\to 1}.\overrightarrow{dl}\,dS = -\iint_S p_1 d^{II}V$$

Si la pression p_1 est uniforme alors

$$\delta W = -p_1 dV$$

— Si la pression est uniforme dans des zones $1, 2, 3...$ alors

$$\delta W = -p_1 dV_1 - p_2 dV_2 + ...$$

où dV_1 est la variation de volume du système dans la zone 1, 2...

— Les volumes dV_i sont définis avec la convention normale sortante , donc

— en e : la masse entre dans le système $dV_e < 0 \to \boxed{dV_e = -D_{Ve}dt}$

— en s : la masse sort du système $dV_s > 0 \to \boxed{dV_s = D_{Vs}dt}$
Finalement si la masse entre en e et sort en s

$$\delta W = -p_s D_{Vs}dt + p_e D_{Ve}dt$$

— La puissance des forces de pression est $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt}$

$$\mathcal{P} = -\iint_S p_1 \overrightarrow{n}_{2\to 1}.\overrightarrow{v}\,dS$$

— Pour un système avec entrée et sortie de masse

3 Théorème de Bernoulli

Cas d'un écoulement parfait, homogène, incompressible et stationnaire

Savoir démontrer №6 : Retour sur le théorème de Bernoulli

- ✗ On se place sur une ligne de courant
- ✗ **La puissance des forces intérieures est nulle pour un écoulement parfait incompressible.**

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{p_A}{\mu} + gz_A = \frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\mu} + gz_B$$

Application 4 : Ecoulement dans une pompe

On étudie une conduite horizontale de section (S_e) la pression est p_e. Le refoulement se fait à la pression p_s et la section est S_s. On note D_v le débit volumique ; l'écoulement est supposé parfait , incompressible et permanent.
On recherche $\mathcal{P}_m$ la puissance mécanique exercée par la pompe sur le fluide. On trouve

$$\mathcal{P}_m = D_m \left[\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gh\right]_e^s$$

IV Bilans en thermodynamique

1 Bilan d'énergie totale (ou premier principe industriel)

On suppose que le fluide reçoit une puissance mécanique utile (autre que celle des forces de pression) : $\mathcal{P}_u$ et une puissance thermique $\mathcal{P}_Q$.

Savoir démontrer №7 : Bilan d'énergie totale en RP

✗ On a l'expression du bilan d'énergie interne en régime permanent :

$$[h + e_c + e_p]_e^s = w_u + q$$

✗ On peut également l'écrire en fonction des puissances :

$$\boxed{D_m \left[h + e_c + e_p\right]_e^s = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}}$$

où $h = u + pV_m$ est l'enthalpie massique du fluide, e_c et e_p, resp., son énergie cinétique massique et son énergie potentielle massique (pesanteur et autres éventuellement).

Application 5 : Propriété de la détente de Joule Kelvin

La détente de Joule Kelvin est une détente irréversible au cours de laquelle l'enthalpie est constante. Autrement dit, c'est une détente **isenthalpique**.

(a) Système à l'instant t (b) Système à l'instant $t + \mathrm{d}t$

Figure E.2 – Modélisation d'une détente type Joule-Kelvin

Hypothèses :

☞ Régime stationnaire pour le système (Σ).

☞ Parois calorifugées

☞ $p_s < p_e$ (détente)

la section, ici, n'est pas constante Soient

u_e **et** u_s , les énergies internes massiques ;

v_e **et** v_s , les vitesses (quadratiques) moyennes du fluide ;

V_{m_e} **et** V_{m_s} , les volumes massiques.

Soit (Σ^*) le **système fermé** constitué de :

$(\Sigma) + \delta m_e$ à la date t ;

$(\Sigma) + \delta m_s$ à la date $t + \mathrm{d}t$;

2 Bilan d'entropie

Savoir démontrer №8 : Second Principe pour un fluide en écoulement

$$\frac{\partial S}{\partial t} + [D_m s]_e^s = \frac{\mathcal{P}_{Th}}{T_{Th}} + \dot{S}_c$$

3 Exemple : onde de choc

Soit un écoulement incompressible, uniforme stationnaire de vitesses $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u}_x$. On ferme la conduite brutalement en $x = 0$, il y a propagation d'une onde de choc.
On a une zone ou l'écoulement a lieu à la vitesse $\overrightarrow{v}$ et l'autre où la vitesse est nulle.
La zone de séparation se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v_e} = -c\overrightarrow{u}_x$

3.a Bilan de masse

Savoir démontrer №9 : Masse

$$\mu_2 c = \mu_1 (v + c)$$

3.b Bilan de quantité de mouvement

Savoir démontrer №10 : RFD

$$\mu_1 c^2 - \mu_1 (v + c)^2 = p_1 - p_2$$

3.c Bilan d'entropie

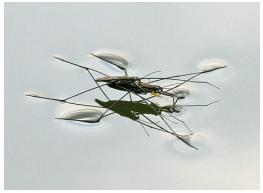
Savoir démontrer №11 : Bilan d'Entropie

$$\mu_2 \simeq \mu_1 \left(1 + \chi_s \Delta p\right)$$

On en déduit

$$\boxed{c \simeq \sqrt{\frac{1}{\mu_1 \chi_s}}}$$

Chapitre E7 : Tension superficielle



Force de tension superficielle

PARTIE E : MÉCANIQUE DES FLUIDES
E-1 : Statique des fluides
E-2 : Cinématique des fluides
E-3 : Viscosité
E-4 : Dyn. F. visqueux
E-5 : Dyn. F. parfaits
E-6 : Bilans macroscopiques
E-7 : Tension Superficielle

Non mouillage

Jurin 1684-1750

Laplace 1749 - 1827

Poincaré 1854-1912

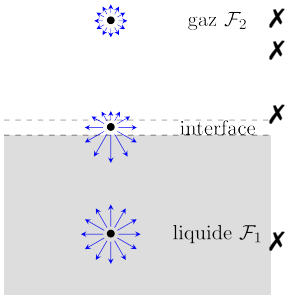
Vidéo, commentaires et schémas sont issus de Gouttes ,bulles, perles et ondes, PG de Gennes, Brochard-Wyart, Quéré, Belin.

VIDÉO 139

Le lézard basilic (parfois appelé Jésus-Christ pour les raisons que l'on devine) a la propriétée de pouvoir courir sur l'eau, quoiqu'il soit beaucoup trop gros (une quinzaine de cm) pour être maintenu par la tension de surface. Comme le montre le film, il frappe la surface avec assez de force pour engendrer une cavité d'air qu'il quitte avant qu'elle ne se referme. Le détail du mécanisme de sustentation reste toutefois à élucider.

I Energie superficielle

1 Origine physique du phénomène



- ✗ Stabilité augmente avec le nombre d'interaction.
- ✗ Une molécule en surface est moins stabilisée qu'une molécule dans le volume.
- ✗ Il faut fournir de l'énergie pour faire passer une molécule de l'intérieur vers la surface :
  Il faut fournir de l'énergie pour fabriquer de l'interface liquide/vapeur.
- ✗ γ mesure cette différence d'énergie par unité de surface de la molécule.

$$\gamma = \frac{U}{2a^2}$$

Application 1 : Evaluer γ

A température ambiante, pour un fluide l'énergie des interactions de Van der Walls est de l'ordre de $k_B T$.
Montrer que

$$\gamma \simeq 20 \text{ mJ.m}^{-2}$$

Liquide	γ_{LV} mN.m^{-1}
Ethanol	23
Glycérol	63
Eau (20 °C)	72
Eau (100 °C)	58
Verre fondu	$\simeq 300$

2 Energie superficielle

DÉFINITION :

Pour augmenter la surface $\mathcal{A}$ d'un fluide dans un gaz de d$\mathcal{A}$, il faut fournir au fluide l'énergie

$$\delta W = \gamma_{LV} \mathrm{d}\mathcal{A}$$

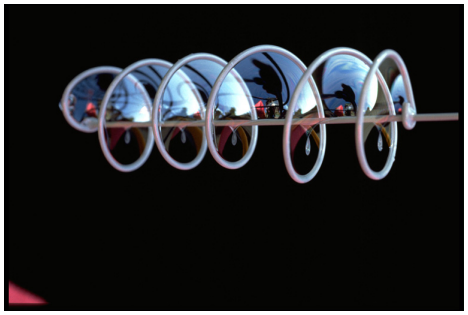
On note $\gamma = \gamma_{LV}$

Application 2 : Evaluer la variation d'énergie

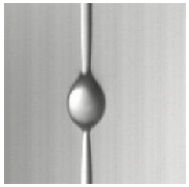
Soit $\gamma = \gamma_{LV}$ le coefficient de tension superficielle entre le liquide et la vapeur. Soit γ_{LS} le coefficient de tension superficielle entre le liquide et le solide. Soit γ_{SV} le coefficient de tension superficielle entre le solide et la vapeur.
La variation d'énergie lorsqu'une goutte de liquide s'étale sur un solide en augmentant sa surface de $\mathrm{d}\mathcal{A}$ est

$$\mathrm{d}E = (\gamma_{LV} + \gamma_{LS} - \gamma_{SV})\,\mathrm{d}\mathcal{A}$$

3 Surfaces minimales



Vidéo 7



On voit, filmé à la caméra rapide (9000 images par seconde), un jet d'eau de rayon millimétrique qui tombe d'un robinet. Le jet, initialement cylindrique, ondule sous l'effet de la tension superficielle, et se fragmente en gouttelettes qui oscillent énergiquement. On remarquera les satellites qui se forment entre deux gouttes principales.

Application 3 : Instabilité de Plateau-Rayleigh

On observe qu'un jet d'eau cylindrique de rayon R, L se fractionne en une série de gouttes de rayon r.
Montrer qu'une série de gouttelettes est plus stable qu'un flux cylindrique si $r > \frac{3R}{2r}$.

II Force capillaire

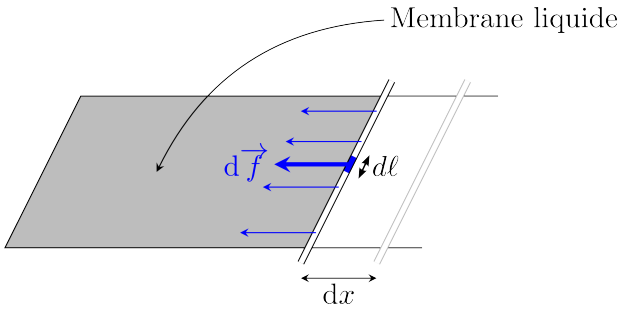
1 Définition

Vidéo 3

On retire un cadre métallique d'un bain d'eau savonneuse. Un film de savon se forme, de part et d'autre d'une barre simplement posée sur le cadre. On perce le film à l'une de ses extrémitées. La barre, tirée par la tension du film, rejoint le bord du cadre. On appelle tension superficielle la force (par unitée de longueur) qui tire sur l'interface, tangentiellement à la surface, et de manière à réduire son aire.

- ✗ La force de tension superficielle est **tangente à la surface**.
- ✗ Pour un élément $\mathrm{d}\ell$ du solide en contact avec la membrane

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{f} = \gamma \mathrm{d}\ell\, \vec{t}}$$



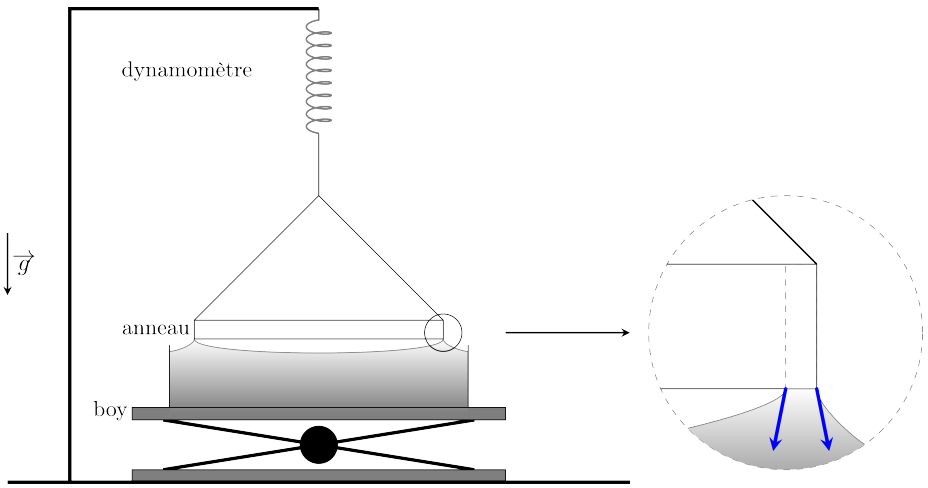
Savoir démontrer №1 : Energie pour fabriquer la surface

Pour fabriquer la surface $2S$ il faut donc fournir le travail

$$W = 2 \iint \gamma \mathrm{d}\ell \mathrm{d}x = 2\gamma S$$

⚠ Attention… Facteur 2 car 2 interfaces !!!

2 Mesure de γ par la méthode d'arrachement



$$F = 2\gamma\ell$$

Savoir démontrer №2 : Mesure de γ

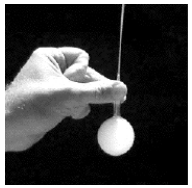
Au moment de l'arrachement, la poussée d'archimède est nulle et le dynamomètre mesure directement la force de tension supercielle.

$$F = 4\gamma\pi r$$

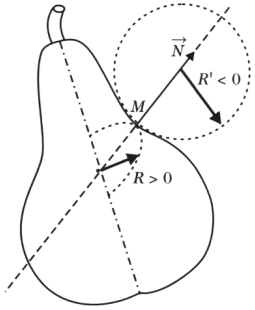
III Pression

1 Loi de Laplace

Vidéo 4



Une bulle de savon préalablement gonflée à la fumée de cigarette est connectée à un petit tube en verre que l'on ferme avec le doigt. Dès que l'on débouche le tube, l'air contenu dans la bulle séchappe, ce qui montre qu'il est en surpression : c'est la loi de Laplace. La bulle se dégonfle et minimise ainsi sa surface.



✗ L'accroissement de pression Δp lorsque l'on traverse une surface de séparation entre deux fluides dont les rayons de courbures sont R et R' vaut

$$P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = \gamma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

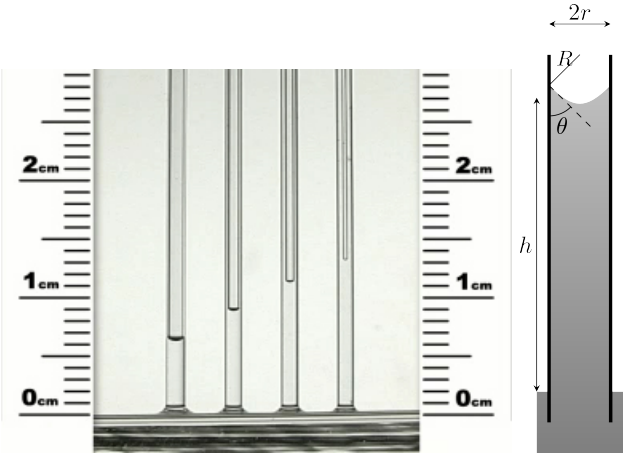
✗ Pour une sphère :

$$\boxed{P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = 2\frac{\gamma}{R}}$$

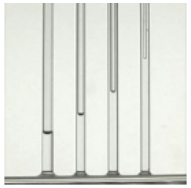
✗ A l'intérieur d'une bulle de savon

$$\boxed{P_{\text{int}} = P_0 + 4\frac{\gamma}{R}}$$

2 Tubes de Jurin



Vidéo 15



On amène quatre tubes capillaires de rayons différents (entre 0, 15 mm et 0, 6 mm) au contact d'une huile silicone mouillante. L'huile monte dans les tubes jusqu'à une hauteur (soulignée en rouge) d'autant plus grande que le rayon est petit : c'est la loi de Jurin. On observe également que l'ascension est d'autant plus lente que le tube est est étroit.

Savoir démontrer №3 : Interprétation énergétique : Loi de Jurin

On néglige la concavité.
L'énergie potentielle de pesanteur est $E_p = \frac{1}{2}\rho g h^2 \pi r^2$.
L'énergie de surface $(\gamma_{SV} - \gamma_{SL})\, 2\pi r h$
En minimisant l'énergie potentielle, on trouve :

$$h = \frac{2\,(\gamma_{SV} - \gamma_{SL})}{\mu g r}$$

Savoir démontrer №4 : Loi de Jurin avec les pressions

Le rayon de courbure est $R = \frac{r}{\cos\theta}$

$$\boxed{h = \frac{2\gamma_{LV}\cos\theta}{\mu g r}}$$

En comparant les deux relations, on trouve la Loi de Young-Dupré : $\gamma_{LV}\cos\theta = \gamma_{SV} - \gamma_{SL}$ (voir mouillage).

3 Bulles connectées

Vidéo 5-6

Deux bulles connectées par un petit tuyau évoluent vers une seule, ce qui abaisse leur surface totale. Ceci pourrait se faire à priori en vidant la grande bulle dans la petite, ou la petite dans la grande. Le sens de l'évolution nous est donné par la loi de Laplace : la petite bulle est en surpression par rapport à la grande, si bien qu'elle se vide dans cette dernière que l'on voit se gonfler.

IV Applications - HP

1 Longueur capillaire

Savoir démontrer №5 : Longueur capillaire

On cherche une distance caractéristique δ au-delà de laquelle la gravité devient importante.
On compare la pression de Laplace à la pression hydrostatique :

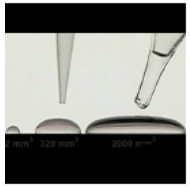
$$\delta = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

Pour des tailles inférieures à δ , on peut négliger la gravité.

Vidéo 1-2

Ce film caméra rapide (9000 images par seconde) montre une banale goutte de pluie (rayon r millimétrique) en train de tomber. Comme $r < \delta$ les forces superficielles dominent et la goutte est sphérique, en dépit du frottement de l'air. La situation serait bien différente avec une goutte centimétrique.

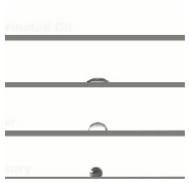
Vidéo 12



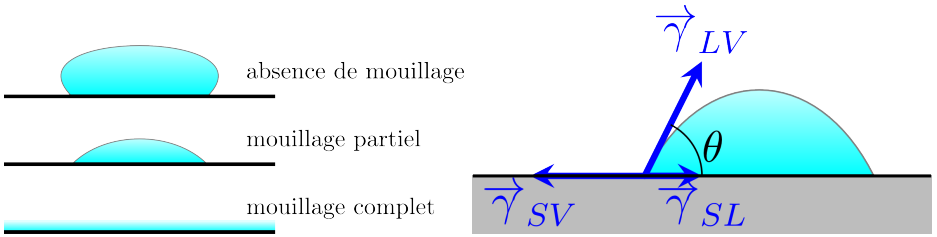
On dépose sur une même matière plastique trois gouttes d'eau de volume différent. La première est petite par rapport à la longueur capillaire δ ($2,7$ mm pour l'eau). Elle s'arrondit en une portion de sphère la gravité n'ayant pas d'influence sur la forme, à cette échelle. Pour des gouttes comparables ou plus grosses que δ la pesanteur aplatit les gouttes, qui deviennent des flaques.

2 Angle de mouillage

Vidéo 9



On dépose sur du téflon quatre gouttes de liquides différents :de haut en bas, de la perfluorodécaline (de tension superficielle $\gamma = 12mN/m$,du méthylnaphtalène ($\gamma = 37mN/m$), de l'eau ($\gamma = 72mN/m$) et du mercure ($\gamma = 485mN/m$). Les liquides sétalent d'autant mieux que leur tension superficielle est faible. La condition de raccord avec le solide (ou angle de contact) est donnée par la relation de Young.

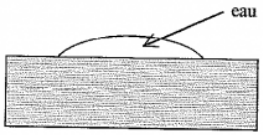


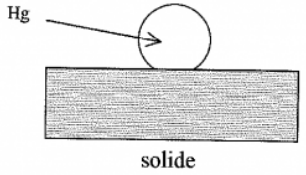
Savoir démontrer №6 : Angle de mouillage

On doit avoir la somme des forces nulle :

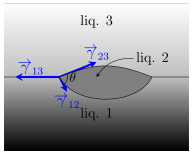
$$\vec{\gamma}_{LV} + \vec{\gamma}_{LS} + \vec{\gamma}_{SV} = \vec{0}$$

$$\cos\theta = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LV}}$$





Vidéo 8



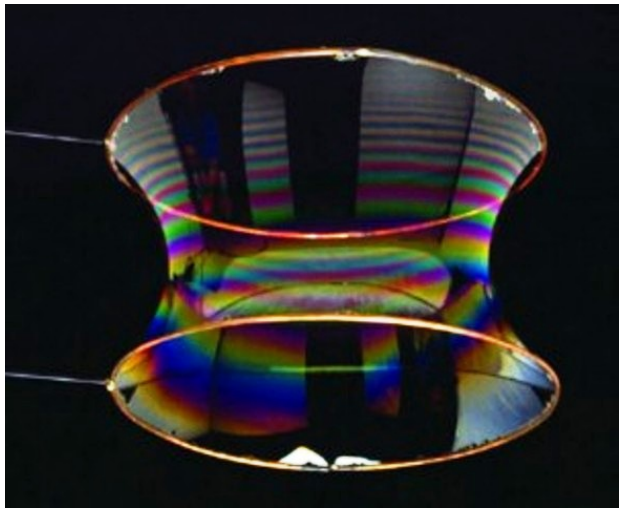
On a placé un film d'eau savonneuse entre deux anneaux de rayon $R = 4$ cm. On éloigne les deux anneaux l'un de l'autre (distance 2D). Puisque l'air circule entre les anneaux, la pression de Laplace, et donc la courbure totale du film, sont nulles. Le film de savon forme une caténoïde qui existe seulement si la distance entre anneaux est assez petite ($2D < 1.3R$) : quand elle devient plus grande, la caténoïde claque.

Application 4 : Angle pour des liquides

Déposons une goutte d'huile d'olive sur de l'eau.
Sachant que $\gamma_{\text{eau-air}} = 73$ N.m^{-1} , $\gamma_{\text{huile-air}} = 32$ N.m^{-1} et $\gamma_{\text{huile-eau}} = 18$N.m^{-1}, dire s'il y a étalement ou non.
Réponse : comme 18+32<73, la condition d'équilibre n'est pas respectée et l'huile d'olive s'étale.

3 Surface minimale ouverte

Lorsque la surface est ouverte $\Delta p = 0 \rightarrow R_1 = -R_2$, on obtient une caténoide.



4 Rôle des tensio-actifs (= surfactants)

DÉFINITION :

Les **tensioactifs** sont constitués de molécules munies d'un pôle hydrophile et d'une longue chaîne hydrophobe. Lorsqu'un tensioactif est ajouté à de l'eau il vient se placer immédiatement à la surface, avec la queue hydrophobe pointant à l'extérieur de la surface. **Ce processus s'accompagne d'une stabilisation de la surface et donc d'une chute de la tension superficielle**.

5 Variation de γ avec la température

$$\boxed{T \nearrow \Rightarrow \gamma \searrow}$$

VIDÉO 10A-10B

On saupoudre de lycopodes (spores de fougére) une huile silicone. Puis on approche un fer à souder porté à chaud (premier film). Les particules, qui flottent à la surface, fuient la zone réchauffée : à cet endroit, la tension superficielle de l'huile diminue et il en résulte une force de surface, dirigée de la zone chaude vers la zone plus froide. Le second film illustre l'effet inverse. Un petit glaçon est introduit dans le récipient : il s'écoule et refroidit la surface à sa verticale.

On observe à nouveau un écoulement de surface dirigé vers la zone froide. Ce phénomène est appelé effet Marangoni thermique.

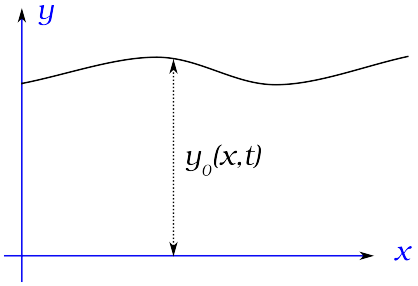
6 Retard des changements d'état

Lorsque l'on détend un liquide de façon isotherme, la thermodynamique prévoit qu'en dessous d'une pression dite pression de vapeur saturante, le liquide change de phase pour se vaporiser. Cependant la formation de la première bulle de vapeur coute de l'énergie de sorte que le liquide peut exister dans une phase métastable en dessous de la pression de vapeur saturante. On parle de retard à la vaporisation. Une simple perturbation locale peut suffire à déclencher la formation d'une première bulle de vapeur. C'est ce phénomène qui fut employé dans les détecteurs de particules du milieu du XXème siècle (chambres à bulles).

V Ondes de gravité et rôle de la tension superficielle

1 Hypothèses

✗ On suppose l'écoulement irrotationnel, donc on peut définir le potentiel des vitesses ϕ. On a



$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$$

✗ L'écoulement est incompressible.
✗ On note $y_0(x,t)$ l'équation de la surface libre.

Savoir démontrer №7 : Vague de faible amplitude

On suppose que l'amplitude de l'onde est faible :

$$\delta_0 \ll \lambda$$

On peut alors négliger l'accélération convective devant l'accélération locale.

2 Conditions aux limites

Savoir démontrer №8 : Ecrire la CL pour l'écoulement

✗ Au fond du récipient, la vitesse normale est nulle, soit

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}|_{y=0} = 0 \tag{E.1}$$

✗ A la surface la vitesse du fluide v_y est la même que celle de l'interface.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}|_{y_0} = \frac{\partial y_0}{\partial t} \tag{E.2}$$

✗ Si on néglige le phénomène de tension superficielle, la pression sur la surface libre est p_0.

$$p(y_0(x,t)) = p_0$$

L'équation de Bernoulli en régime non stationnaire nous permet de relier cette condition à une condition sur ϕ pour t fixé : :

$$\forall\,(x,y)\,, \to \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\mu} + gy = \text{Cte}\,(t) \tag{E.3}$$

La condition aux limites est donc pour t fixé :

$$\forall x \to \frac{\partial \phi}{\partial t}|_{y_0} + \frac{p_0}{\mu} + gy_0 = \text{Cte}\,(t) \tag{E.4}$$

Pour la suite, nous prendrons $\text{Cte}\,(t) = 0$

3 Relation de dispersion

Savoir démontrer №9 : Dispersion

On considère un écoulement incompressible et irrotationnel, le potentiel des vitesses vérifie alors la relation de Laplace :

$$\boxed{\Delta\phi = 0}$$

Cette équation rappelle l'équation de Poisson en électromag $\boxed{\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

On recherche une solution propagative, à cette équation sous la forme

$$\phi(x,y,t) = f(u)g(y)$$

avec $u = x - ct$.

Savoir démontrer №10 : Solution propagative

On note $f''(u) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}$, montrer que l'on trouve l'équation

$$\frac{f''}{f} = -\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} = -k^2$$

On ne conserve que le terme en $\exp i\,(kx - \omega t)$.
On utilise la relation (E.1) , pour trouver

$$\phi(x,y,t) = A \exp i\,(kx - \omega t)\,\mathrm{ch}\,(ky) \qquad \text{(E.5)}$$

Application 5 : Relation de dispersion

On dérive l'équation (E.4) et on remplace avec (E.2), cela donne

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}|_{y_0} + g\frac{\partial\phi}{\partial y}|_{y_0} = 0 \qquad \text{(E.6)}$$

On note h la valeur moyenne de y_0, l'équation est donc valable en $y_0 \simeq h$. En écrivant la solution (E.5) , on trouve la relation de dispersion

$$\boxed{\omega^2 = gk\,\mathrm{th}\,(kh)}$$

La célérité des ondes (vitesse de phase) est donc

$$\boxed{v_\varphi^2 = \frac{g}{k}\mathrm{th}\,(kh)}$$

4 Etude des cas limites

Soit $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ la longueur d'onde des vagues. **Définition :**

- ✗ On se trouve en eau profonde lorsque $h \gg \lambda \Leftrightarrow kh \gg 1$
- ✗ On se trouve en eau peu profonde lorsque $h \ll \lambda \Leftrightarrow kh \ll 1$

Application 6 : Houle en eau profonde

Ces ondes s'appellent des ondes de gravité :

$$\boxed{c = v_\varphi \simeq \sqrt{\frac{g}{k}}}$$

Application 7 : Vagues en eau peu profonde

$$\boxed{c = v_\varphi \simeq \sqrt{gh}}$$

5 Rôle de la tension superficielle

6 Hypothèses et conditions aux limites

La pression n'est plus continue à la surface, on a la relation

$$p = p_0 - \frac{\gamma}{R}$$

- ✗ p est la pression dans le fluide, p_0 est la pression atmosphérique.
- ✗ γ est le coefficient de tension superficielle.
- ✗ $R = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^{-1}$ est la courbure de la surface.

Savoir démontrer №11 :

✗ Les conditions sur la vitesse restent les même en $y = 0$ et $y = h$ (équations (E.1) et (E.2)).
✗ La condition sur la pression est modifée

$$p(y_0(x,t)) = p_0 - \frac{\gamma}{R}$$

L'équation de Bernoulli en régime non stationnaire nous permet de relier cette condition à une condition sur ϕ :
La condition aux limites est donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}|_{y_0} + \frac{p_0}{\mu} - \frac{\gamma}{\mu R} + g y_0 = \text{Cte} \qquad \text{(E.7)}$$

7 Relation de dispersion

On a toujours

$$\phi(x,y,t) = A \exp i\,(kx - \omega t)\,\text{ch}\,(ky)$$

Application 8 : Relation de dispersion

On dérive l'équation (E.7) et on remplace avec (E.2), cela donne

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}|_{y_0} + g\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\gamma}{\mu}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y}\right]_{y_0} = 0 \qquad \text{(E.8)}$$

On note h la valeur moyenne de y_0, l'équation est donc valable en $y_0 \simeq h$. En écrivant la solution (E.5) , on trouve la relation de dispersion

$$\boxed{\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\mu}\right)\text{th}\,(kh)}$$

La célérité des ondes (vitesse de phase) est donc

$$\boxed{v_\varphi^2 = \frac{g}{k}\left(1 + \frac{\gamma k^2}{\mu g}\right)\text{th}\,(kh)}$$

On retrouve le cas précédent lorsque $\gamma = 0$.

Chapitre E9 : Applications

I Enoncés

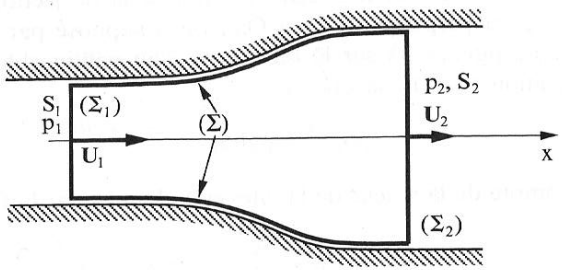
1 Force sur une conduite de révolution

Nous étudions l'écoulement sur une conduite de révolution, d'axe (Ox) avec une zone d'élargissement.

On note U_1, p_1, S_1 et U_2, p_2, S_2 les vitesses, pressions et sections à l'entrée et à la sortie de la conduite.

L'écoulement est considéré comme stationnaire, le fluide homogène et parfait.

Calculer la force exercée par le fluide sur les parois.



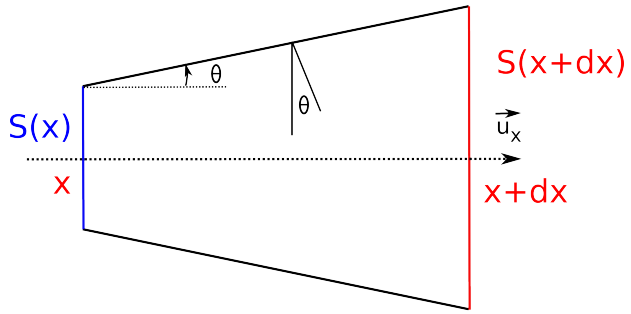
2 Ecoulement dans un pavillon de section variable

On étudie la propagation d'un fluide parfait dans un pavillon décrit sur la figure ci-dessous. On note $S(x)$ la section à l'abscisse x , on suppose que la conduite est de révolution autour de l'axe (Ox).

On se place en régime stationnaire, on néglige le poids, on suppose que la vitesse peut s'écrire sous la forme

$$\overrightarrow{v} = v_x(x)\,\overrightarrow{u}_x + v_r(x,r)\,\overrightarrow{u}_r$$

où $\overrightarrow{u}_r$ est le vecteur des coordonnées cylindriques d'axe (Ox).



On cherche à retrouve de deux manières différentes la relation entre la vitesse et la pression.

1. **Equation d'Euler**

   En écrivant l'équilibre d'une particule de fluide à une dimension montrer que

   $$\boxed{\mu v \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

2. **Bilan de quantité de mouvement**

   Soit (Σ) le système ouvert compris entre les positions x et $x + \mathrm{d}x$ (comprenant uniquement le fluide). Les actions de l'extérieur sur le fluide sont réduits à des forces de pression (pas de force de viscosité).

   On note $p(x)$ la pression en x et $p(x + \mathrm{d}x)$ la pression en $x + \mathrm{d}x$.

   La pression sur la surface latérale du système est $p(x)$.

   Soit θ l'angle entre la verticale et la normale. On note S_{lat} la surface latérale.

   (a) Montrer que $S_{\text{lat}} \sin\theta = S(x + \mathrm{d}x) - S(x)$

   (b) Donner la force de pression exercée sur Σ

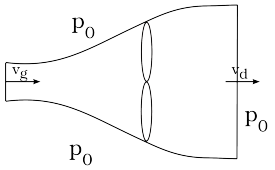
   (c) Ecrire un bilan de quantité de mouvement en utilisant le système Σ^*

   (d) En déduire que

   $$\boxed{\mu v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

3 Théorie des hélices

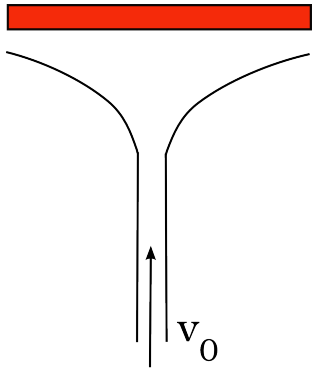
On place une hélice plane d'axe de rotation $x'Ox$, en $x = 0$, elle est solidaire d'une tuyère. L'ensemble est supposé fixe dans le référentiel galiléen de l'étude.



- On étudie un écoulement stationnaire unidimensionnel dans la tuyère à symétrie cylindrique.
- En amont de la tuyère la vitesse est $\overrightarrow{v}_g = v_g \overrightarrow{u}_x$, la section est S_g, la pression p_0.
- En aval de la tuyère la vitesse est $\overrightarrow{v}_d = v_d \overrightarrow{u}_x$, la section est S_d, la pression p_0.
- Dans le plan de l'hélice, la vitesse est $\overrightarrow{v} = v \overrightarrow{u}_x$, la surface est S, la pression est discontinue et vaut $p_- = p(x = 0^-)$ et $p_+ = p(x = 0^+)$.
- A l'extérieur la pression est p_0. Le système sera composé du **fluide et de la tuyère.**
- Soit $\overrightarrow{F} = F \overrightarrow{u}_x$, la force exercée par le fluide sur l'hélice. On note $\mathscr{P}$ la puissance reçue par l'hélice.
- On néglie les phénomènes dissipatifs.

1. Exprimer le débit massique D_m, à gauche, droite et en $x = 0$. En déduire les relations entre les vitesses.
2. Montrer que
$$p_+ - p_- = \frac{1}{2}\mu\left(v_d^2 - v_g^2\right)$$
3. Par un bilan de quantité de mouvement **sur l'ensemble de la tuyère**, exprimer $\overrightarrow{F}$ en fonction de μ, S, v, v_g et v_d.
4. Par un bilan de quantité de mouvement **sur un système compris de part et d'autre et à petite distance de l'hélice**, exprimer $\overrightarrow{F}$ en fonction de S, p_- et p_+.
5. Sur ce petit système, faire un bilan d'énergie cinétique. En déduire la puissance $\mathscr{P}$ reçue par l'hélice en fonction de S, v, p_- et p_+.
6. Déduire de ces questions que
$$v = \frac{v_g + v_d}{2} \qquad F = 2\mu S v\left(v_g - v\right) \qquad \mathscr{P} = 2\mu S v^2\left(v_g - v\right)$$
7. Pour quelle valeur de v, la force est-elle maximale ?
8. Pour quelle valeur de v, la puissance est-elle maximale ?

4 Lévitation sur un jet d'eau



On dispose d'un disque de rayon R, de centre C, de masse m en équilibre à une hauteur h au dessus de la sortie d'un tuyau.

On considère l'écoulement stationnaire, incompressible et homogène de masse volumique μ.

La vitesse est uniforme à la sortie du jet $\overrightarrow{v} = v_0 \overrightarrow{u}_z$ et la pression est p_0.

Au niveau du disque, la vitesse est $\overrightarrow{v} = v \overrightarrow{u}_r$ sur une épaisseur $e \ll h$, avec v =Cte.

1. Montrer que
$$2\pi R e v = s v_0$$
2. On note m_e, la masse d'eau qui est située au dessus du tuyau, montrer que
$$(m + m_e)\, g = \mu s v_0^2$$
3. Exprimer v en fonction de v_0, g et h.
4. Evaluer m_e.
5. En déduire les valeurs de h et de e pour $m = 200$g, $\mu = 10^3$ kg.m^{-3}, $R = 10$cm, $s = 10$cm^2 et $v_0 = 2$ m.s^{-1}.

5 Ressaut hydraulique dans un évier X-ENS PSI 2006

On a un ressaut hydrolique lorsque la hauteur d'un écoulement varie rapidement.

On suppose l'écoulement parfait et incompressible.

Sur une surface perpendiculaire au flux, l'écoulement est considéré comme homogène et la vitesse uniforme.

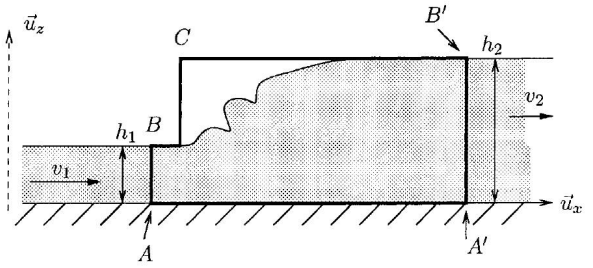


FIG. 6 – Modélisation du ressaut hydraulique.

1. Etablir à l'aide de l'équation d'Euler que la pression varie selon la loi de l'Hydrostatique sur les verticales.

2. Montrer que la force de pression sur le système $(ABCA'B')$ est

$$\overrightarrow{F} = \rho g \ell \left(\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right) \overrightarrow{u_x}$$

3. Par un bilan de quantité de mouvement, montrer que

$$\boxed{v_2^2 h_2 - v_1^2 h_1 = \frac{1}{2} g \left(h_1^2 - h_2^2 \right)}$$

II Indications

1 Force sur une conduite de révolution

Faire un bilan de quantité de mouvement et untiliser le théorème de Bernoulli (cela ressemble à l'exercice 1 de la colle ouverte).

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{f/c}} = \left[p_1 \left(S_1 - S_2 \right) - \frac{1}{2} \mu U_1^2 S_1 \left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \right)^2 \right] \overrightarrow{u}_x}$$

2 Ecoulement dans un pavillon de section variable

1. **Equation d'Euler**
2. **Bilan de quantité de mouvement**

   (a) On peut le voir par projection. On peut le justifier en remarquant que

   $$\oiint \overrightarrow{u}_x . \mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$$

   (b) La force de pression exercée sur Σ est sur l'axe des x, soit :

   $$F = p(x) S(x) - p(x + \mathrm{d}x) S(x + \mathrm{d}x) + p(x) S_{\text{lat}} \sin\theta$$

   (c)

   (d) En déduire que

   $$\boxed{\mu v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

3 Théorie des hélices

1. $D_m = \mu v S = \mu v_g S_g = \mu v_d S_d$.
2. Il faut écrire deux fois le théorème de Bernoulli, une fois entre la gauche et juste avant l'hélice, une autre fois entre juste après l'hélice est la partie droite.

   ⚠ Attention… On ne peut pas utiliser le théorème de Bernoulli de part et d'autre de l'hélice (car il y a une pièce mécanique mobile ! ! !)

   Dans cette question on se place à la même altitude.
3. L'ensemble de la tuyère et du fluide est à la pression p_0, donc la résultante des forces de pression sur le système est nulle.
   La seule force est donc la force de l'hélice sur le fluide.
   On trouve en utilisant le bilan de quantité de mouvement :

   $$\overrightarrow{F} = \mu S v \left(v_g - v_d \right) \overrightarrow{u}_x$$

4. Cette fois les vitesses sont identiques de part et d'autre de l'hélice. Donc en régime stationnaire :

   $$\frac{D\overrightarrow{P}}{Dt} = \overrightarrow{0}$$

   Les forces de pression ne sont pas nulles, on trouve donc

   $$\boxed{F = S \left(p_- - p_+ \right)}$$

5. Pour la même raison qu'à la question précédente, on trouve

   $$\frac{DE_c}{Dt} = 0$$

   On trouve finalement

   $$\mathscr{P} = S v \left(p_- - p_+ \right)$$

6. On trouve alors avec les équations précédentes :

   $$v = \frac{v_g + v_d}{2} \qquad F = 2\mu S v \left(v_g - v \right) \qquad \mathscr{P} = 2\mu S v^2 \left(v_g - v \right)$$

7. On cherche pour quelle valeur, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v} = 0$, on trouve $v_m = \frac{v_g}{2}$
8. De même, on cherche pour quelle valeur, $\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}v} = 0$, on trouve $v_M = \frac{2v_g}{3}$

4 Lévitation sur un jet d'eau

1. Il faut définir le système ouvert Σ et le système fermé Σ^*.
   On écrit alors la conservation de la masse du système fermé σ^*.
   La masse entrante est $\mathrm{d}m_e = \mu s v_0 \mathrm{d}t$
   La masse sortante est $\mathrm{d}m_s = \mu 2\pi R e v \mathrm{d}t$
2. Il faut ensuite écrire un bilan de quantité de mouvement pour le système Σ^*.
   On trouve
   $$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}^*}{\mathrm{d}t} = -\mu s v_0^2 \overrightarrow{u}_z$$
   $$2\pi R e v = s v_0 \qquad (m + m_e)\, g = \mu s v_0^2$$
3. Il faut alors penser au théorème de Bernoulli entre la sortie du tuyau et le bord de la plaque.
   La pression est p_0, on obtient :
   $$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$
4. Il faut évaluer la masse de deux cylindres : $m_e = \mu s h + \frac{\mu s v_0 R}{2\sqrt{v_0^2 - 2gh}}$.
5. On trouve $h = 12$ cm et $e = 2,5$ mm.

5 Ressaut hydraulique dans un évier X-ENS PSI 2006

1.
2. Il faut intégrer sur la verticale à gauche et à droite pour trouver la force de pression.
3. Définir le système ouvert, le système fermé comme sur la figure. Faire un bialn de quantité de mouvement en régime stationnaire.

III Solutions

1 Force sur une conduite de révolution

1. **Relation de Bernoulli**
   On considère un fluide parfait , homogène en régime stationnaire. Sur une ligne la ligne de courant représentée sur le schéma donné, on peut écrire la relation de Bernoulli :
   $$p_1 + \frac{1}{2}U_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}U_2^2$$
   On en déduit la valeur de la différence de pression :
   $$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\mu\left(U_1^2 - U_2^2\right)$$
2. **Bilan de quantité de mouvement sur le système**
   Soit Σ le système compris entre S_1 et $S2$ délimité sur le schéma. Ce système ne comprends pas la conduite.
   De la masse entre en S_1 et sort en S_2, le système est ouvert.
   ✗ $\Sigma^*(t) = \Sigma(t) \cup \delta m_e$
   ✗ $\Sigma^*(t + \mathrm{d}t)$ le système fermé à la date $t + \mathrm{d}t$, $\Sigma^*(t + \mathrm{d}t) = \Sigma(t + \mathrm{d}t) \cup \delta m_s$
   On a
   $$\overrightarrow{p}^*(t + \mathrm{d}t) = \overrightarrow{p}\,(t + \mathrm{d}t) + \mu U_2 S_2 \overrightarrow{U}_2$$
   $$\overrightarrow{p}^*(t) = \overrightarrow{p}\,(t) + \mu U_1 S_1 \overrightarrow{U}_1$$
   $$\frac{D\overrightarrow{p}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{p}}{\partial t} + \left[D_m \overrightarrow{U}\right]_e^s$$
3. **Bilan des forces**
   Les forces de pression sont exercées sur les surfaces S_1 et S_2 :
   $$\overrightarrow{F}_p = (p_1 S_1 - p_2 S_2)\, \overrightarrow{u}_x$$
   Il y a également la force de la conduite sur le fluide : $\overrightarrow{F}_{\mathrm{c/f}}$.
4. **TRC**
   Le théorème de la résultante cinétique permet d'écrire, en régime stationaire, dans le référentiel galiléen du laboratoire :
   $$\left[D_m \overrightarrow{U}\right]_e^s = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_p$$
   Le principe de l'action réaction permet d'exprimer la réaction de la conduite sur le fluide : $\overrightarrow{F}_{\mathrm{c/f}} = -\overrightarrow{F}_{\mathrm{f/c}}$
   On en déduit la force
   $$\boxed{\overrightarrow{F}_{\mathrm{f/c}} = \left[p_1\,(S_1 - S_2) - \frac{1}{2}\mu U_1^2 S_1 \left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}\right)^2\right] \overrightarrow{u}_x}$$

2 Ecoulement dans un pavillon de section variable

1. **Equation d'Euler**
   - ✗ En régime stationaire, $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$
   - ✗ L'accélération convective est :

$$\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v} = v_x\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial x} + v_r\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial r}$$

   En projection sur $\overrightarrow{u}_x$, on trouve

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

   - ✗ Forces volumiques de pression :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\,p = -\frac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{u}_x - \frac{\partial p}{\partial r}\overrightarrow{u}_r$$

- ✗ L'équation d'Euler, on trouve donc

$$\boxed{\mu v\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

2. **Bilan de quantité de mouvement**

(a) On calcule

$$\oiint \overrightarrow{u}_x.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iiint \text{div}\,(\overrightarrow{u}_x)\,\mathrm{d}\tau = 0$$

On peut décomposer l'intégrale sur la surface latérale et les cotés :

$$\oiint \overrightarrow{u}_x.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = S(x) - S(x+\mathrm{d}x) + S_{\text{lat}}\sin\theta = 0$$

On en déduit donc l'équation demandée :

$$\boxed{S_{\text{lat}}\sin\theta = S(x+\mathrm{d}x) - S(x)}$$

(b) La force de pression exercée sur Σ est

$$\overrightarrow{F}_p = p(x)\,S(x)\,\overrightarrow{u}_x - p(x+\mathrm{d}x)\,S(x+\mathrm{d}x)\,\overrightarrow{u}_x + p(x)\,S_{\text{lat}}\,\overrightarrow{n}$$

On peut étudier la projection sur l'axe (Ox) :

$$F_p = p(x)\,S(x) - p(x+\mathrm{d}x)\,S(x+\mathrm{d}x) + p(x)\,S_{\text{lat}}\sin\theta$$

On utilise la relation précédente pour simplifier l'expression :

$$F_p = p(x)\,S(x) - p(x+\mathrm{d}x)\,S(x+\mathrm{d}x) + p(x)\,(S(x+\mathrm{d}x) - S(x))$$

Soit donc

$$F_p = -p(x+\mathrm{d}x)\,S(x+\mathrm{d}x) + p(x)\,S(x+\mathrm{d}x) = -\frac{\partial p}{\partial x}S(x+\mathrm{d}x) \simeq -\frac{\partial p}{\partial x}S(x)$$

(c) En régime stationnaire, le bilan de quantité de mouvement, en projection sur $\overrightarrow{u}_x$, donne la relation

$$D_m\,[v_x]_e^s = F_p$$

$D_m = \mu v(x)\,S(x)$, on trouve donc

$$\boxed{\mu v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

3 Théorie des hélices

1. Comme l'écoulement est stationnaire, le débit massique se conserve. On trouve donc

$$\boxed{D_m = \mu vS = \mu v_g S_g = \mu v_d S_d}$$

2. Il faut écrire deux fois le théorème de Bernoulli, une fois entre la gauche et juste avant l'hélice, une autre fois entre juste après l'hélice est la partie droite.

⚠ Attention… On ne peut pas utiliser le théorème de Bernoulli de part et d'autre de l'hélice (car il y a une pièce mécanique mobile ! ! !)

L'écoulement est **parfait, incompressible, irrotationnel et stationnaire**, on peut donc utiliser le théorème de Bernoulli

Premier théorème de Bernoulli : (on se place à la même altitude)

$$p_0 + \frac{1}{2}\mu v_g^2 = p_- + \frac{1}{2}\mu v^2$$

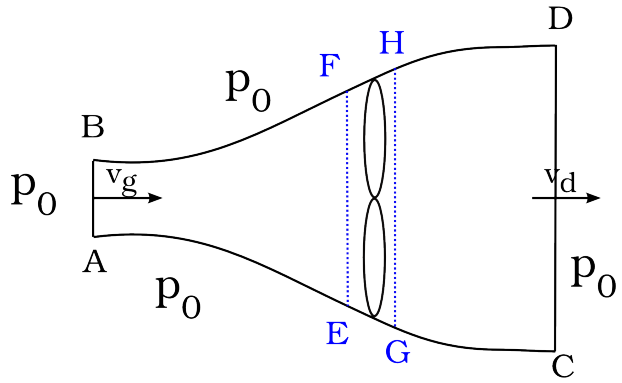
Second théorème de Bernoulli : (on se place à la même altitude)

$$p_0 + \frac{1}{2}\mu v_d^2 = p_+ + \frac{1}{2}\mu v^2$$

En soustrayant les deux équations, on trouve :

$$\boxed{p_+ - p_- = \frac{1}{2}\mu\left(v_d^2 - v_g^2\right)}$$

3. Soit Σ le système compris entre les surface (AB) et (CD). C'est un système ouvert car il y a entrée de masse en (AB) et sortie de masse en (BC).



Soit Σ^*, le système fermé tel que :
✗ $\Sigma^*(t) = \Sigma(t) \cup \delta m_e$
✗ $\Sigma^*(t+\mathrm{d}t)$ le système fermé à la date $t+\mathrm{d}t$, $\Sigma^*(t+\mathrm{d}t) = \Sigma(t+\mathrm{d}t) \cup \delta m_s$

(a) On note $\overrightarrow{P}(t)$, la quantité de mouvement : dans le référentiel galiléen :

$$\overrightarrow{P}^*(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{P}^*(t) = \overrightarrow{P}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{P}(t) + D_m\left[\overrightarrow{v}\right]_s^e = \Sigma\overrightarrow{F}$$

En régime stationnaire $\overrightarrow{P}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{P}(t) = \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t}\mathrm{d}t = \overrightarrow{0}$

(b) Bilan des forces :
L'ensemble de la tuyère et du fluide est à la pression p_0, la résultante des forces de pression sur le système est donc

$$\oiint -p_0\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iiint \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_0\;\mathrm{d}\tau = \overrightarrow{0}$$

La seule force est donc la force de l'hélice sur le fluide.

(c) On trouve donc

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \mu S v\,(v_g - v_d)\,\overrightarrow{u}_x}$$

4. Nouveau système :
Soit Σ_1 le système compris entre les surface (EF) et (GH). C'est un système ouvert car il entre de masse $\delta m_e = D_m \mathrm{d}t$en (EF) et il sort la masse $\mathrm{d}m_s = \mathrm{d}m_e = D_m\mathrm{d}t$ en (GH).
Soit Σ_1^*, le système fermé tel que :
✗ $\Sigma_1^*(t) = \Sigma_1(t) \cup \delta m_e$
✗ $\Sigma_1^*(t+\mathrm{d}t)$ le système fermé à la date $t+\mathrm{d}t$, $\Sigma_1^*(t+\mathrm{d}t) = \Sigma_1(t+\mathrm{d}t) \cup \delta m_s$

(a) Cette fois les vitesses sont identiques de part et d'autre de l'hélice. Donc en régime stationnaire :

$$\frac{D\overrightarrow{P}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t} + D_m\left[\overrightarrow{v}\right]_{EF}^{GH} = \overrightarrow{0}$$

(b) Le système est équivalent à un système ayant la pression p_0 sur toute la surface et la surpression $p_+ - p_0$ à droite et $p_- - p_0$ à gauche.
Les forces de pressions sont donc

$$\overrightarrow{F}_p = S\,(p_+ - p_-)\,\overrightarrow{u}_x$$

(c) Il ya aussi la force de l'hélice.
Finalement :

$$\boxed{F = S\,(p_- - p_+)}$$

5. On utilise toujours le système Σ_1.
— En régime stationnaire et comme les vitesses sont identiques de part et d'autre :

$$\frac{DE_c}{Dt} = \frac{\partial E_c}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}D_m c^2\right)_{EF}^{GH} = 0$$

— L'écoulement étant **parfait et incompressible**, la puissance des forces intérieures est nulle.
— La puissance des forces de pression est $p_- Sv - p_+ Sv$
— La puissance reçue par le fluide est l'opposée de cele reçue par l'hélice donc $\mathscr{P}_{\text{fluide}} = -\mathscr{P}$
Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système Σ_1^* donne

$$\boxed{\mathscr{P} = Sv\,(p_- - p_+)}$$

6. Les deux expressions que nous avons obtenu pour la force F, permettent de trouver :

$$\boxed{v = \frac{v_g + v_d}{2}}$$

On remplace alors dans l'expression de F, on trouve :

$$\boxed{F = 2\mu S v\,(v_g - v)}$$

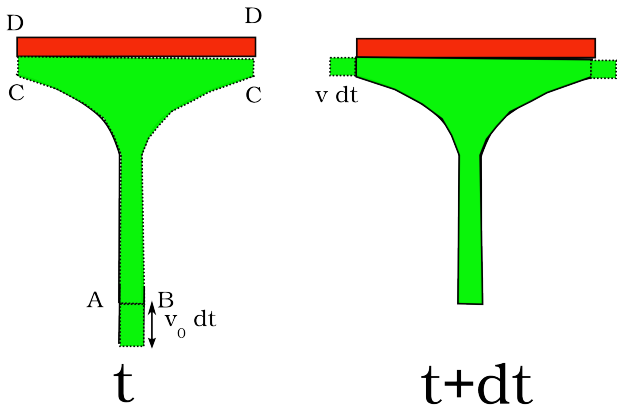
On peut ensuite remplacer dans l'équation qui donne la puissance :

$$\boxed{\mathscr{P} = 2\mu S v^2\,(v_g - v)}$$

On trouve alors avec les équations précédentes :

7. On cherche pour quelle valeur, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v} = 0$.
   On a
   $$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v} = 2\mu S\left((v_g - v) - v^2\right) = 0$$
   On trouve $v_m = \frac{v_g}{2}$
8. De même, on cherche pour quelle valeur,
   $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}v} = 0}$$
   On a
   $$\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}v} = 2\mu S\left(2v\,(v_g - v) - v^2\right) = 0$$
   On trouve
   $$\boxed{v_M = \frac{2v_g}{3}}$$
   .

4 Lévitation sur un jet d'eau



1. On définit le système ouvert Σ compris entre AB et CD. Le système est ouvert car de la masse entre en AB et sort sur la surface latérale du système.
   Soit le système fermé Σ^*, tel que
   - ✗ $\Sigma^*(t) = \Sigma(t) \cup \delta m_e$
   - ✗ $\Sigma^*(t + \mathrm{d}t)$ le système fermé à la date $t + \mathrm{d}t$, $\Sigma^*(t + \mathrm{d}t) = \Sigma(t + \mathrm{d}t) \cup \delta m_s$

   On écrit alors la conservation de la masse du système fermé σ^*.
   La masse entrante est $\mathrm{d}m_e = \mu s v_0 \mathrm{d}t$
   La masse sortante est $\mathrm{d}m_s = \mu 2\pi Re v \mathrm{d}t$
   En régime stationnaire, on a $\mathrm{d}m_s = \mathrm{d}m_e$, soit
   $$\boxed{2\pi Rev = sv_0} \qquad \text{(E.9)}$$
2. Il faut ensuite écrire un bilan de quantité de mouvement pour le système Σ^*, en projection sur la verticale.
   Soit $\overrightarrow{u}_z$, un axe orienté vers le haut :
   (a) On a $\overrightarrow{P}^*(t) = \overrightarrow{P}(t) + D_m \overrightarrow{v}_e = \overrightarrow{P}(t) + -\mu s v_0^2 \mathrm{d}t \overrightarrow{u}_z$
   On a $\overrightarrow{P}^*(t+\mathrm{d}t) = \overrightarrow{P}(t+\mathrm{d}t) + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{P}(t+\mathrm{d}t)\overrightarrow{u}_z$, car les quantités de mouvement latérales se compensent.
   En régime stationnaire
   $$\overrightarrow{P}(t + \mathrm{d}t) = \overrightarrow{P}(t)$$
   On trouve donc
   $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}^*}{\mathrm{d}t} = \mu s v_0^2 \overrightarrow{u}_z}$$
   (b) Les seules forces reçues par le système sont le poids de l'eau et du disque : $\overrightarrow{F} = (m + m_e)\,\overrightarrow{g}$
   (c) Dans le **référentiel galiléen** la RFD permet d'écrire
   $$\boxed{(m + m_e)\,g = \mu s v_0^2}$$
3. On utilise le théorème de Bernoulli entre la sortie du tuyau (point A) et le bord de la plaque (point C).
   L'écoulement est **parfait, stationnaire, incompressible, A et C sont sur une ligne de courant** , donc
   $$p_0 + \frac{v^2}{2} + \mu g h = p_0 + \frac{v_0^2}{2}$$
   On en déduit
   $$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}} \qquad \text{(E.10)}$$
   On remplace dans l'équation (E.9) : $sv_0 = 2\pi Re\sqrt{v_0^2 - 2gh}$

Donc :

$$\boxed{e = \frac{sv_0}{2\pi R\sqrt{v_0^2 - 2gh}}}$$

On en déduit m_e. Il faut évaluer la masse de deux cylindres : $m_e = \mu sh + \frac{\mu s v_0 R}{2\sqrt{v_0^2-2gh}}$.

4. On trouve $h = 12$ cm et $e = 2,5$ mm.

5 Ressaut hydraulique dans un évier X-ENS PSI 2006

1. On écrit l'équation dEuler

$$\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}\right) + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}.\right)\overrightarrow{v} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,p}{\rho} + \overrightarrow{g}$$

   ✗ On étudie la projection de cette équation sur l'axe vertical.
   ✗ En régime stationnaire $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$
   ✗ Comme $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u}_x$, alors $\left(\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}.\right)\overrightarrow{v}\right).\overrightarrow{u}_z = \overrightarrow{0}$
   ✗ Il reste

$$0 = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,p}{\rho} + \overrightarrow{g}$$

   On retrouve la loi de la statique des fluides.

$$\boxed{\text{sur } [AB] \qquad p_1(z) = p_0 - \rho g\,(z - h_1)}$$

$$\boxed{\text{sur } [A'B'] \qquad p_2(z) = p_0 - \rho g\,(z - h_2)}$$

2. Evaluation des forces de pression :
   ✗ Le système est plongé dans p_0, la force de pression résultante est donc la force de surpression à droite et à gauche.
   ✗ Surpression à gauche

$$\overrightarrow{F_g} = \iint (p_1 - p_0)\,\mathrm{d}S\overrightarrow{u_x} = -\rho g\ell \int_0^{h_1} (z - h_1)\,dz\overrightarrow{u_x}$$

   On trouve donc

$$\overrightarrow{F_g} = +\rho g\ell \frac{h_1^2}{2}\overrightarrow{u_x}$$

   ✗ Surpression à droite

$$\overrightarrow{F_d} = -\iint (p_2 - p_0)\,\mathrm{d}S\overrightarrow{u_x} = \rho g\ell \int_0^{h_2} (z - h_2)\,dz\overrightarrow{u_x}$$

   On trouve donc

$$\overrightarrow{F_d} = -\rho g\ell \frac{h_2^2}{2}\overrightarrow{u_x}$$

   ✗ Finalement la force de pression totale est

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \rho g\ell\left(\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2}\right)\overrightarrow{u_x}}$$

3. Bilan de quantité de mouvement
   ✗ Soit Σ le système ouvert compris entre AB et $A'B'$. De la masse entre en AB et sort en $A'B'$.
   On peut définir $\Sigma^*(t) = \Sigma(t) + \mathrm{d}m_e$
   $\Sigma^*(t + \mathrm{d}t) = \Sigma(t) + \mathrm{d}m_s$

   ✗ Evaluons les quantités de mouvement

$$\overrightarrow{p}^*(t) = \overrightarrow{p}(t) + D_m\overrightarrow{v}_1\mathrm{d}t = \overrightarrow{p}(t) + \rho v_1^2 h_1 \ell \mathrm{d}t\,\overrightarrow{u}_x$$

   De même ,

$$\overrightarrow{p}^*(t + \mathrm{d}t) = \overrightarrow{p}(t + \mathrm{d}t) + D_m\overrightarrow{v}_2\mathrm{d}t = \overrightarrow{p}(t + \mathrm{d}t) + \rho v_2^2 h_2 \ell \mathrm{d}t\,\overrightarrow{u}_x$$

   ✗ Le TRD indique que

$$\overrightarrow{p}^*(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{p}^*(t) = \overrightarrow{F}\mathrm{d}t$$

   En projection sur $\overrightarrow{u}_x$, on trouve

$$\boxed{v_2^2 h_2 - v_1^2 h_1 = \frac{1}{2}g\left(h_1^2 - h_2^2\right)}$$

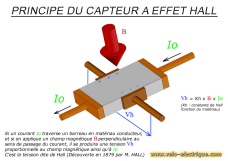
Partie F : Electromagnétisme

Chapitre F1 : Conduction électrique

Paul Karl Ludwig Drude (1863-1906) [8]

Partie F : Electromag.

F-1 : Conduction électrique
F-2 : Electrostatique
F-3 : Exemples
F-4 : Magnétostatique
F-5 : Exemples
F-6 : Equations de Maxwell
F-7 : Induction
F-8 : Compléments



Principe d'une sonde à effet Hall

8. Paul Drude a mené ses premières expériences en mesurant avec une grande précision, les constantes optiques de divers solides. Ses travaux ont ensuite consisté en la dérivation de relations entre constantes optiques et électriques et la structure physique de la matière.

En 1894, il a introduit le symbole "c" (pour célérité) afin de désigner la vitesse de la lumière dans le vide. Durant son mandant à l'université de Leipzig, il a écrit un manuel d'optique Lehrbuch der Optik, publié en 1900, qui réunit pour la première fois l'optique et l'électricité.

En 1900, il a développé un modèle (le modèle de Drude) expliquant les propriétés thermiques, électriques et optiques de la matière qui sera repris en 1933 par Arnold Sommerfeld et Hans Bethe et deviendra alors le modèle Drude-Sommerfeld.

I Sources et loi de conservation de la charge

1 Charge électrique et densité volumique de charge

1.a Charge électrique

Principe de conservation de la charge

Toute particule est caractérisée par une grandeur appelé **charge** qui intervient dans les interactions électromagnétiques, mesurée en **coulomb (C.)**.
La charge électrique totale d'un système **fermé** se **conserve** au cours du temps (Principe de conservation de la charge).
La charge est une grandeur indépendante du référentiel (tout comme la masse).

Quantification de la charge : La charge des particules élémentaires (on exclut les quarks) est de la forme Ze où $e = 1,602.10^{-19}$ C est la charge élémentaire et $Z \in \mathbb{Z}$.

1.b Densité volumique de charge

Définition :

On appelle **densité (volumique) de charge** ou **charge volumique** le champ scalaire $\rho(P,t)$ défini par

$$\rho(P,t) = \frac{\mathrm{d}q(P))}{\mathrm{d}\tau_P}$$

$\rho(P,t)$ s'exprime en C.m^{-3}.

$$\rho(P,t) = q\ n(P,t)$$

Remarques :

On peut introduire différentes familles (ou types) de porteurs de charge :

- **les électrons de conduction** dans les métaux,
- **les ions** des solutions électrolytiques (Na^+, Cl^- de l'eau salée),
- **les électrons et les trous** [9] dans les semi-conducteurs

Soit un milieu décrit par un ensemble de familles (k) de porteurs de charges q_k et de densité particulaire $n_k(P,t)$,

$$\rho(P,t) = \sum_k n_k(p,t) q_k$$

Propriété à connaître

2 Intensité et courant volumique

DÉFINITION :

On appelle **vecteur densité (volumique) de courant**, noté $\vec{j}$, le champ vectoriel tel que le courant à travers la surfec orientée (S) est

$$I = \iint_{P\in(S)} \vec{j}(P,t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}_P$$

Remarque :

Analogie avec la mécanique des fluides

en substituant la masse à charge, $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ est l'analogue du débit massique $D_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \iint_{(S)} \vec{j}_m \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{(S)} \mu \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ où μ est la masse volumique du fluide en mouvement à la vitesse $\vec{v}$

9. Suite au passage d'un électron dans la bande de conduction, il subsiste un trou dans la bande de valence qui participe à la conduction électrique, comme un porteur de charge $+e$.

Savoir démontrer №1 : Densité de charges avec plusieurs types de porteurs

Pour un milieu comportant plusieurs familles de porteurs de charges, on a

$$\vec{j}(P,t) = \sum_k n_k(P,t) q_k \vec{v_k}(P,t)$$

3 Loi de conservation de la charge

Savoir démontrer №2 : Loi locale de conservation de la charge

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0}$$

Savoir démontrer №3 : ARQS et flux conservatif

En régime permanent (courant continu), le vecteur densité de courant est à flux conservatif.

Remarque : On en déduit immédiatement la loi de nœuds.

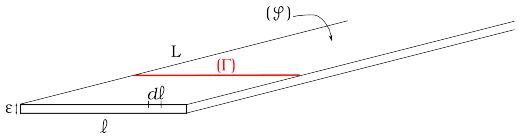
4 Autres modélisations limites des sources

4.a Modélisation surfacique - HP

DÉFINITIONS :

On appelle **densité surfacique de charge** (ou charge surfacique), le champ scalaire $\sigma(P,t)$ qui s'exprime en C. m^{-2}, tel que $\sigma(P,t) = \frac{\mathrm{d}q_P}{\mathrm{d}S_P}$ où $\mathrm{d}S_P$ est un élément de surface situé en P et contenant la charge $\mathrm{d}q_P$ à l'instant t.
On appelle **densité de courant surfacique** (ou courant surfacique), le champ vectoriel $\vec{j}_S(P,t)$ qui s'exprime en A. m^{-1} et qui décrit **localement** sur une surface un transfert de charge par unité de temps et de longueur.

Utilisation :



On passe à une description surfacique lorsque une dimension est négligeable devant les deux autres : $\varepsilon \ll \ell, L$.

Le courant I circulant sur la surface $(\mathscr{S})$ et passant à travers une courbe (Γ), tracée sur $(\mathscr{S})$, se calcule par

$$I = \int_{P\in(\Gamma)} \vec{j}_S \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P$$

où $\mathrm{d}\vec{\ell}_P$ est orienté par un vecteur $\vec{n}_P$ normal à la courbe (Γ) au point P, soit $\mathrm{d}\vec{\ell}_P = \mathrm{d}\ell\vec{n}_P$.

Dans le cas de porteurs décrits par la famille (k), de densité surfacique σ_k, circulant à la vitesse d'ensemble $\vec{v}_k$ et se déplaçant sur la surface $(\mathscr{S})$, on a

$$\vec{j}_S(P,t) = \sum_k \sigma_k(P,t)\vec{v}_k(P,t)$$

4.b Modélisation linéique

Définitions :

On appelle **densité linéique de charge** (ou charge linéique), le champ scalaire $\lambda(P,t)$ qui s'exprime en C. m^{-1}, tel que $\lambda(P,t) = \frac{\mathrm{d}q_P}{\mathrm{d}\ell_P}$ où $\mathrm{d}\ell_P$ est un élément de longueur situé en P et contenant la charge $\mathrm{d}q_P$ à l'instant t.
De façon évidente, un **courant linéique** est le champ scalaire $I(P,t)$ qu'on peut mesurer/calculer au point P, à l'instant t.

⚠ Attention... **aux unités.**

II Interaction charges-champ électromagnétique

1 Action de Lorentz

Postulat

Suite à l'observation expérimentale, on postule qu'une particule de charge q interagit avec d'autres particules chargées, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, suivant la **force de Lorentz**

$$\vec{F}_L = q\left[\vec{E}(M,t) + \overrightarrow{v_{q/\mathcal{R}_g}} \wedge \vec{B}(M,t)\right]$$

Savoir démontrer №4 : Force électromagnétique volumique

La force électromagnétique **volumique** agissant sur des sources $\{\rho, \vec{j}\}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ s'exprime par

$$\boxed{\vec{f}_L = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_L}{\mathrm{d}\tau} = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}}$$

2 Changement de référentiel (non relativiste) HP

Savoir démontrer №5 : Transformation de Galilée (non relativiste)

Entre deux référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}'_g$, en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_e = \vec{v}_{\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g}$, on a

$$\vec{B}' = \vec{B} \text{ et } \qquad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v_e} \wedge \vec{B} \quad \text{(F.1)}$$

Remarque : En réalité, les deux champs dépendent du référentiel d'étude et obéissent à la transformation de Lorentz (relativiste).
En fait, cette relation n'est valable que dans l'**ARQS magnétique**.

3 Puissance volumique cédée aux charges

Savoir démontrer №6 : Action du champ ém sur une charge ponctuelle

Seul le champ électrique contribue à la puissance de la force de LORENTZ sur chaque charge ; le champ magnétique ne peut pas augmenter la vitesse d'une charge, il ne peut qu'incurver sa trajectoire.

Savoir démontrer №7 : Expression de la puissance volumique

Soit une distribution de charge modélisée par des sources $\{\rho, \vec{j}\}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la **puissance volumique transférée par le champ électromagnétique aux charges** est

$$\mathscr{P}_{\text{vol}} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_L}{\mathrm{d}\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Exemple : ***Faisceau de particules***
caractérisé par $\vec{j} = \rho_q \vec{v}$
Conversion en énergie cinétique macroscopique du faisceau (accélérateur de particules).

Exemple : ***Milieu conducteur***
Conversion en énergie interne ⇒ « Effet Joule ».

III Conduction électrique dans les milieux ohmiques

1 Modèle de Drüde

Si on applique un champ électrique extérieur $\vec{E}_0$ (ou qu'on applique une ddp entre 2 extrémités d'un fil conducteur), on a un mouvement d'ensemble des électrons de conduction.

C'est le **courant de conduction**.

HYPOTHÈSES DU MODÈLE DE DRUDE

Soit $q(m)$ soumise
- ✗ à un champ extérieur $\vec{E}_0$ et
- ✗ à une force de frottement qui modélise les interactions avec le réseau cristallin fixe.

Modèle des collisions :
Les électrons de conduction sont soumis à l'agitation thermique et au champ $\vec{E}_0$. De ce fait, ils vont choquer les ions fixes du réseau métallique mais après un choc, on suppose que la répartition des vitesses est **isotrope**.

Application 1 : Calcul de la vitesse des porteurs de charge

1. Montrer que
$$\vec{v}(t) = \vec{V}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{q\tau}{m}\vec{E}_0$$
2. En déduire que le vecteur densité de courant s'écrit
$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_0$$
où γ est une constante caractéristique du milieu conducteur considéré.

DÉFINITIONS :

Soit τ, le temps moyen entre 2 chocs, on définit :

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}_0$$

la **vitesse de dérive** ou vitesse limite atteinte en régime permanent des électrons de conduction ;

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \mu \vec{E}_0$$

la **mobilité**, soit $\mu = \frac{q\tau}{m}$, qui mesure la réponse des charges libres à une excitation électrostatique.

2 Loi d'Ohm locale

Expression locale de la loi d'Ohm

A partir de ce modèle de conduction, on peut donc retrouver la **loi phénoménologique** linéaire, obtenue en 1826 par le physicien allemand G. Ohm :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

où γ est la **conductivité électrique** du milieu qui s'exprime en $\mathrm{S.m^{-1}}$ (ou $\Omega^{-1}\ \mathrm{m^{-1}}$) et est indépendante de $\vec{E}$.
Un milieu vérifiant cette loi est dit **ohmique**.

Remarque : Cette relation marche pour les conducteurs **linéaires homogènes** et **isotropes** (LHI). En effet...

linéarité

isotropie

homogénéité

Exemple : *Conductivité de quelques métaux*

Al	Ag	Cu
$3,7.10^7\ \mathrm{S.m^{-1}}$	$6,2.10^7\ \mathrm{S.m^{-1}}$	$5,9.10^7\ \mathrm{S.m^{-1}}$

Remarque : **Lorsqu'il y a plusieurs types de porteurs mobiles** (exemple solution électrolytique), on doit sommer les contributions de chacun d'eux

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_0 \quad \text{avec} \quad \gamma = \sum_k \frac{n_k q_k^2 \tau_k}{m_k}$$

Définition :

On définit également la **résistivité électrique**, qui s'exprime en Ω m

$$\rho_r = \frac{1}{\gamma}$$

Attention, ne pas confondre avec une densité volumique de charges, surtout qu'on la note le plus souvent ρ.

Ordres de grandeur : concernant les conductivités γ et les densités particulaires de *porteurs mobiles* associées n_{pm} (dans les conditions de températures ambiantes) :

Matériau	$\gamma(\ \mathrm{S.m^{-1}})$	$n_{pm}(\ \mathrm{m^{-3}})$
cuivre (*conducteur*)	$8,8.10^7$	10^{29}
silicium (*semi-conducteur*)	3.10^{-4}	10^{16}
verre (*isolant*)	$< 10^{-12}$	-

3 Puissance Joule

Savoir démontrer №8 : Puissance Joule

La puissance volumique dissipée par un conducteur ohmique est

$$\mathscr{P}_J = \gamma \vec{E}^2 = \frac{\vec{j}^2}{\gamma} > 0$$

⚠ Attention... Ne jamais écrire cette relation directement en complexe (car présence de termes quadratiques).

4 Résistance électrique

Définition :

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I_{1\to 2}}$$

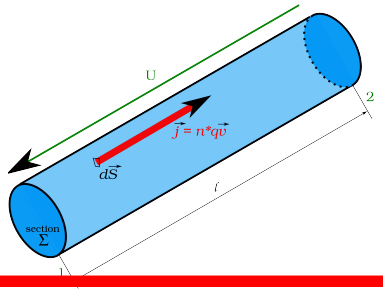
Point méthode - Calcul de résistance pour une géométrie quelconque

- ☞ Invariances et symétries du problème → identifier les surfaces équipotentielles.
- ☞ Donner le sens de $\vec{j}$ (perpendiculaire à ces surfaces)
- ☞ Calculer l'intensité de courant I, comme le flux de $\vec{j}$
- ☞ Appliquer la loi d'Ohm afin de relier $\mathrm{d}U$ et I ;
- ☞ Intégrer entre U_1 et U_2
- ☞ En déduire finalement la résistance R.

Savoir démontrer №9 : Résistance d'un conducteur cylindrique « filiforme »

On considère un conducteur cylindrique de longueur ℓ, de section d'aire S, traversée par un vecteur densité de courant uniforme $\vec{j}$ et soumis à une différence de potentiel U.
Sa résistance électrique s'écrit alors

$$R = \frac{\ell}{\gamma S} = \frac{\rho_r \ell}{S} = \frac{\ell}{\gamma S}$$



Application 2 : Calcul de résistance entre 2 cylindres coaxiaux

On considère un conducteur métallique de conductivité γ compris entre deux cylindres de rayon a et b avec $a < b$. On supposera que le vecteur densité de courant est radial.
Calculer la résistance R de ce conducteur.

Définition :

En utilisant les expressions locales de la loi d'Ohm, on peut définir une expression générale de la résistance d'un conducteur qui dépend de la géométrie de celui-ci

$$\mathrm{d}^{II}R = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}I} = \frac{\mathrm{d}V}{\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

Pour une association série ($I = cste$), on écrira

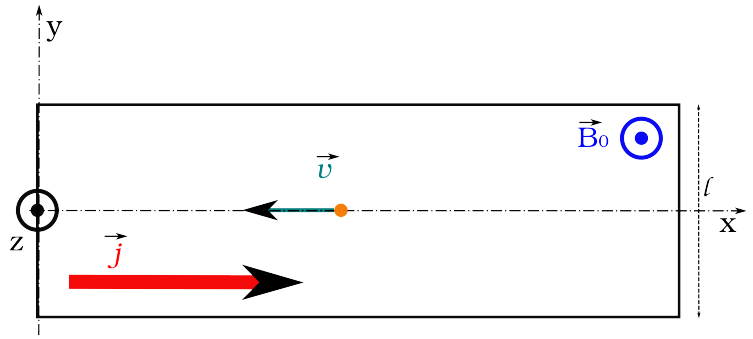
$$R_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}V}{I}$$

Pour une association parallèle ($U = cste$), on calculera

$$\frac{1}{R_{1\to 2}} = \frac{1}{U}\iint_1^2 \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

IV Effets magnétiques dans les conducteurs ohmiques

Condition d'apparition de l'effet Hall



Il s'agit d'étudier l'effet d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$ dans un conducteur métallique rectiligne de section rectangulaire et d'épaisseur ε (dans la direction du champ magnétique).

Savoir démontrer №10 : Champ de Hall

Sous l'action du champ magnétique, il apparait un champ électrique, appelé **champ de Hall**, noté $\overrightarrow{E}_H$.

$$E_H = -\frac{IB_0}{n\ell\varepsilon q}$$

Le sens de l'effet Hall dépend du signe des porteurs de charges.

Définition :

On définit U_H, la **tension de Hall** comme la circulation de ce champ ;
et la **constante de Hall** : $\mathcal{C}_H = \dfrac{1}{nq}$.
On a alors

$$U_H = \mathcal{C}_H \frac{IB_0}{\varepsilon}$$

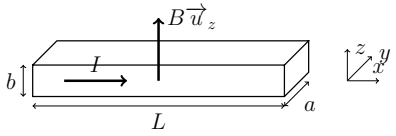
Exemple :

Cu : $\mathcal{C}_H = -5,5.10^{-11}$ C. m^3

Ge : $\mathcal{C}_H = -0,625$ C. m^3

Sonde à effet Hall pour mesurer l'intensité d'un champ magnétique.

Application 3 : Effet Hall (d'après Centrale TSI 2011)



Une plaquette parallélépipédique de grande longueur L, suivant Ox, de largeur a, d'épaisseur b, est parcourue par un courant d'intensité I réparti uniformément sur toute sa section droite (voir figure).

1. Quelle est l'action du champ sur un porteur de charge q supposée < 0 ?
2. Que se passe t-il pendant le régime transitoire ?
   Montrer qu'il apparait alors une différence de potentiel entre les points A et C se situant sur les face latérales parallèles au plan Oxz et tels que $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{u}_y$. La différence de potentiel $V_C - V_A$ est nommée V_H. Quel est son signe ? Dépend-il de celui de q ?
3. On se place ensuite en régime permanent. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un porteur de charges, calculer le champ de Hall $\overrightarrow{E}_H$.
4. Donner la relation liant le vecteur densité de courant volumique $\overrightarrow{j}_H$ à la vitesse de déplacement des charges dans la plaquette et à n (nombre de porteurs de charge par unité de volume) et q. Calculer V_H. On montrera que $V_H b = R_H IB$ où R_H est la constante de Hall que l'on explicitera en fonction de n et q. Que peut-on dire du signe de R_H ?

Chapitre F2 : Electrostatique

Charles Augustin de Coulomb (1736-1806)

Partie F : Electromag.
F-1 : Conduction électrique
F-2 : Electrostatique
F-3 : Exemples
F-4 : Magnétostatique
F-5 : Exemples
F-6 : Equations de Maxwell
F-7 : Induction
F-8 : Compléments

Machine de Wimshurst

I Champ électrostatique

1 Distribution de charges

A retenir : Distribution de charges

Répartition volumique : $\delta q(P,t) = \rho(P,t)\mathrm{d}\tau_P$
Répartition surfacique : $\delta q(P,t) = \sigma(P,t)\mathrm{d}S_P$
Répartition linéique : $\delta q(P,t) = \lambda(P,t)\mathrm{d}\ell_P$

2 Champ créé par une charge ponctuelle

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

3 Loi de Coulomb

Une particule q_1 placée dans le champ créé par la particule q_2 subit la force :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 M_1 M_2^2}\vec{u}_{1-2}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} = \int \lambda\vec{E}\mathrm{d}\ell = \iint \sigma\vec{E}\mathrm{d}S = \iiint \rho\vec{E}\mathrm{d}\tau$$

4 Equations de Maxwell du champ électrique dans le vide - Potentiel électrostatique

Equations de Maxwell pour $\vec{E}$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Savoir démontrer №1 : Le champ électrostatique dérive d'un potentiel

En régime stationnaire, le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire $V(M)$ appelé **potentiel électrique**.

Savoir démontrer №2 : Lien ddp et circulation de $\vec{E}$

Une différence de potentiel est une circulation du champ électrique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V \Leftrightarrow \mathrm{d}V = -\vec{E}.\mathrm{d}\,\vec{\ell}$$

Application 1 : Potentiel d'une charge ponctuelle

Déterminer l'expression du potentiel d'une charge ponctuelle q.

5 Lignes de champ - Surfaces équipotentielles

Définition :

Une **ligne de champ électrique** est une courbe **orientée** par le sens du champ électrique et tangente en M au vecteur $\vec{E}(M)$.
Le long d'une ligne de champ

$$\vec{E}\wedge\mathrm{d}\,\vec{\ell} = \vec{0}$$

DÉFINITION :

Une **surface équipotentielle** est un ensemble de points où le potentiel électrique prend uune même valeur. Son équation est donnée par

$$V(M) = V_0$$

Application 2 : Surfaces équipotentielles d'une charge ponctuelle

Déterminer l'équation des surfaces équipotentielles associées à une charge ponctuelle q.

II Invariances et symétries

1 Principe de Curie

« Lorsque les causes d'un phénomène possèdent des éléments de symétrie, ces éléments de symétrie se retrouvent dans les effets. »

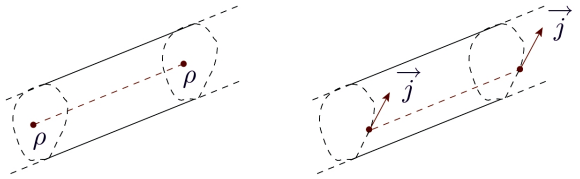
Pierre CURIE, ***Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique*** (1894)

2 Opération de symétrie sur les sources

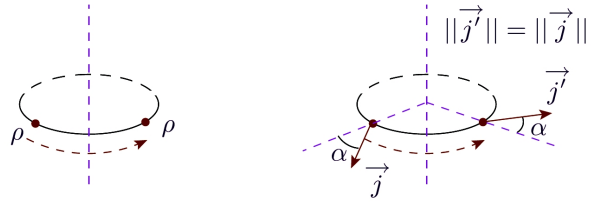
2.a Variables dont dépend le champ : étude des invariances

DÉFINITIONS :

Invariance par translation : cela suppose que le système est d'extension infinie ou bien qu'on néglige les effets de bords.



Invariance par rotation

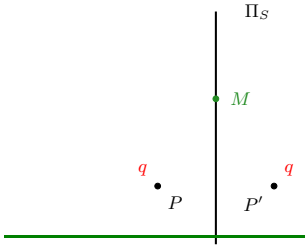


- ☞ Invariance par translation suivant $\vec{u}_z \Rightarrow \vec{E}(x, y, \not{z})$
- ☞ Invariance par rotation d'angle $\theta \Rightarrow \vec{E}(r, \not{\theta}, z)$

Propriété à connaître

2.b Direction du champ : étude des plans de symétrie

DÉFINITION :



Un plan (Π_S) est plan de symétrie de la distribution de charges

- ✗ si il est un plan de symétrie des points
- ✗ si les charges sont de même signe symétriquement par raport au plan, soit

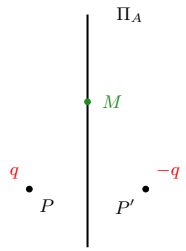
$$\mathrm{d}q(P') = \mathrm{d}q(P)$$

DÉFINITION :

Un plan (Π_A) est plan d'antisymétrie de la distribution de charges

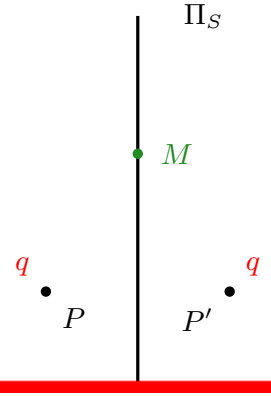
- ✗ s'il constitue un plan de symétrie des points, soit $P \mapsto P' = \text{Sym}(P)_{/(\Pi_S)}$ et ;
- ✗ si les charges sont signe opposé symétriquement par raport au plan, soit

$$\mathrm{d}q(P') = -\mathrm{d}q(P)$$



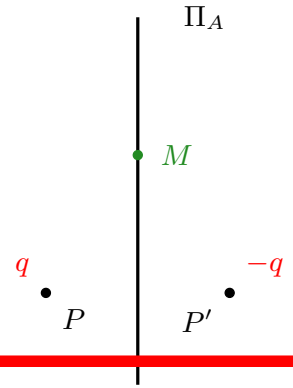
Savoir démontrer №3 : Conséquences sur le champ électrique créé en un point M d'un plan de symétrie

Le champ électrique créé en un point M d'un plan de symétrie (Π_S) d'une distribution de charge est <u>contenu</u> dans ce plan.



Savoir démontrer №4 : Conséquences sur le champ électrique créé en un point M d'un plan d'antisymétrie

Le champ électrique créé en un point M d'un plan d'antisymétrie (Π_{AS}) d'une distribution de charges est <u>normal</u> à ce plan.



⚠ Attention...

Les plans de symétrie/d'antisymétrie doivent **impérativement** passer par le point M (dans le cas général quelconque) où on cherche à calculer le champ.

3 Exemples

Application 3 : Symétries et invariances du champ électrique

On considère une droite Ox

1. On suppose qu'elle est uniformément chargée avec une densité linéique de charge λ. Déterminer les éléments de symétrie de la distribution de charges.
2. On suppose que la densité linéique de charge vaut $-\lambda$ pour $x > 0$ et $+\lambda$ pour $x < 0$. Déterminer les éléments de symétrie de la distribution de charges.
3. De quelle(s) variables dépend le champ électrique ?
4. Que dire de sa direction ?

Application 4 : Symétries et invariances du champ électrique

Le plan infini $z = 0$ porte la charge surfacique uniforme σ.

1. Quelle est la direction du champ électrique ?
2. De quelle(s) variables dépend-il ?
3. Que dire du champ électrique en deux points symétriques par rapport au plan $z = 0$?
4. Conclure pour le potentiel.

III Propriétés topographiques du champ

1 Lien entre le champ et le potentiel

Savoir démontrer №5 : $\vec{E}$ est orienté vers les potentiels décroissants

En régime stationnaire, le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants, par conséquent, une ligne de champ électrique n'est pas fermée sur elle-même.

Savoir démontrer №6 : Lien champ électrostatique et surfaces équipotentielles

Les lignes de champ de $\vec{E}$ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

Savoir démontrer №7 : Evaluer le champ à partir des équipotentielles

$$E\delta\ell = -\delta V$$

La donnée des valeurs des potentiels sur un réseau d'équipotentielles permet de calculer la valeur du champ électrique.

2 Flux du champ électrique

Savoir démontrer №8 : Conservation du flux électrique

Dans une zone **vide de charge**, là où les lignes de champ se resserrent, le champ électrique est **plus intense**.

Savoir démontrer №9 : Extréma relatif de potentiel - HP

Le potentiel ne peut être extrémum en dehors des charges.

A retenir : Interprétation de cartes de lignes de champ et d'équipotentielles

- ☞ En un point M_{max} où le potentiel est un maximum relatif, se trouve une charge positive.
- ☞ En un point M_{min} où le potentiel est un minimum relatif, se trouve une charge négative.

Champ électrique dirigé vers les potentiels décroissants, donc des charges positives vers les charges négatives.
Les seuls cas où on peut observer des **points d'intersection de lignes de champ** :

- **au point où se trouve une charge ponctuelle :** les lignes de champ sont concourrantes puisque le potentiel y est extrémal. En ce point, le champ électrique n'est pas **défini**.
- **au point où le champ électrique est nul :** seul vecteur qui puisse avoir des directions différentes, associées aux différentes lignes de champ qui se croisent en ce point.

Toujours penser aux propriétés d'orthogonalité des lignes du champ électrique et des surfaces équipotentielles pour déduire les unes des autres.
A **écart de potentiel constant** entre 2 surfaces équipotentielles consécutives, un resserrement des surfaces équipotentielles s'interprète comme une intensification du champ électrique, et inversement un écartement des surfaces équipotentielles comme une diminution de la norme du champ électrique.

3 Exemples

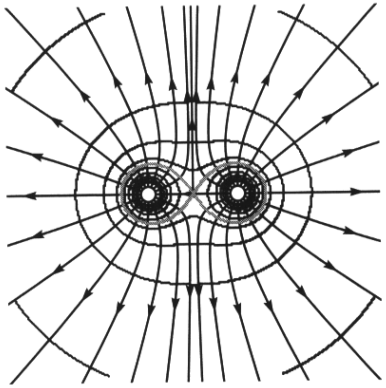


Figure 13.23 – Deux charges de même signe

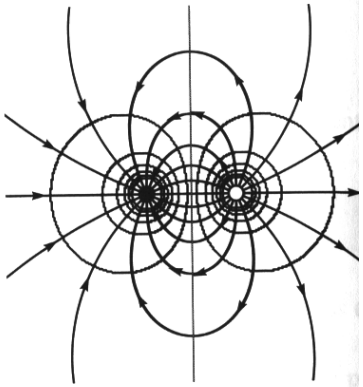
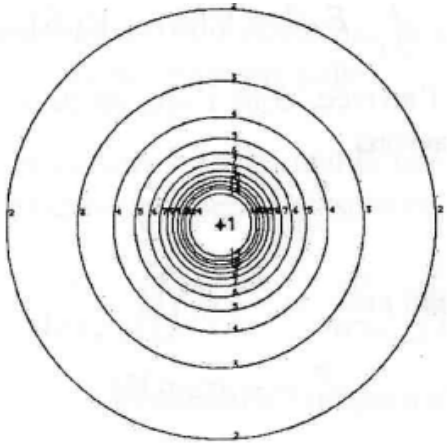
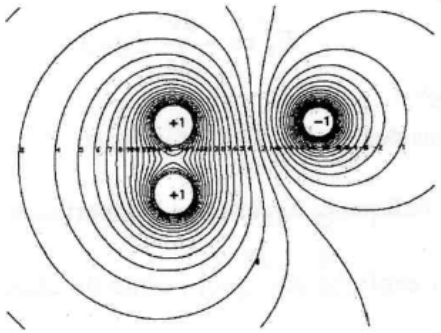


Figure 13.24 – Deux charges de signe contraire

Application 5 : Lecture de carte d'équipotentielles



Application 6 : Lecture de carte d'équipotentielles



IV Flux du champ électrique à travers une surface

1 Orientation d'une surface

DÉFINITIONS :

- ✗ La surface d'un objet désigne en physique sa **limite, sa frontière** avec le milieu qui l'entoure. Une surface peut être fermée ou ouverte.
- ✗ On dit qu'une surface est **ouverte**, si il est possible de passer d'une face à l'autre sans traverser la surface.
- ✗ Si la surface est **fermée**, elle sépare l'espace en deux zones correspondant aux deux faces, l'intérieur et l'extérieur, et il faut traverser la surface pour passer d'une zone à l'autre.

- ✗ Pour une surface fermée, on peut choisir deux types d'orientations : **normales sortantes** et **normales entrantes**.
- ✗ Pour une surface ouverte, l'orientation de la surface est imposée par l'orientation de la ligne qui l'engendre. Les doigts de la main droite suivent la ligne, le pouce donne l'orientation de la surface.

Propriétés à connaître

2 Exemples

Savoir démontrer №10 : Flux de champs de vecteurs

On place en O une charge ponctuelle q. Calculer le flux du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ à travers une sphère de centre O et de rayon R. Montrer que

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Calculer le flux du champ de gravtiation créé par une masse placée en O à travers une sphère de rayon R. Montrer que

$$\Phi = -4\pi G$$

3 Théorème de Gauss

Savoir démontrer №11 : Théorème de Gauss

La relation de Maxwell - Gauss, s'écrit :

$$\text{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Le théorème de Green-Ostrogradsky s'énonce :

$$\oiint \overrightarrow{A}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iiint \text{div}\,\overrightarrow{A}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{\Phi = \oiint \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}}$$

V Utilisation du théorème de Gauss

1 Méthode générale d'utilisation du théorème de Gauss

On utilise le théorème de Gauss pour calculer des champs électriques en tout point de l'espace.

Point méthode - Théorème de Gauss

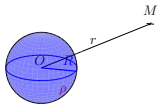
1. Choix du système de coordonnées (cartésiennes, cylindriques ou sphériques).Placer le point M où l'on désire calculer le champ.
2. Etude des invariances de la distribution des charges : invariance de ρ suivant $z \Rightarrow \overrightarrow{E}\,(\not z)$
3. Etude des plans de symétrie (et d'antisymétrie) **passant par** M, cela donne la direction de $\overrightarrow{E}(M)$. ($\overrightarrow{E}(M) \in \Pi_{\text{Sym}}$).
4. Choisir une surface de Gauss qui passe par M, telle que $\overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$ ou $\overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = E\mathrm{d}S$ (ou simple).
5. $E\,(M)$ doit être indépendant du point M.
6. Ecrire le théorème de Gauss sous la forme :
$$\oiint \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = E\,(M)\;\; S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$
7. En déduire $\overrightarrow{E}\,(M)$, changer de point M pour étudier tous les cas.

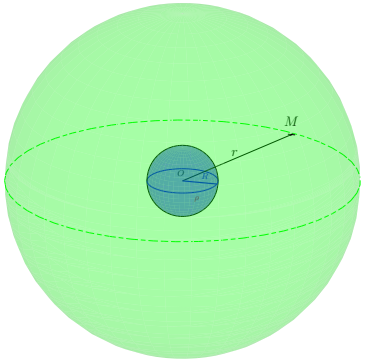
2 Exemples

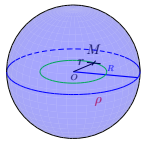
2.a Fil chargé infini

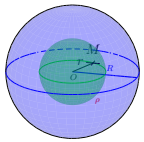
2.b Plan infini chargé en surface

2.c Boule chargée en volume









3 Condensateur plan

Savoir démontrer №12 : Capacité d'un condensateur plan

Un condensateur plan est composé de deux plans de surfaces S parallèles et distants de d.
Les plans ont pour équation $z = 0$ et $z = d$.
Le plan $z = 0$ (resp. $z = d$) porte la densité surfaciques de charge σ (resp. $-\sigma$) .
On néglige les effets de bords : les plans sont considérés comme infinis pour le calcul du champ électrique.
Montrer que $\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{u}_z$ entre les plaques et nul à l'extérieur.
En déduire le potentiel $V(z)$. Soit $U = V(0) - V(d)$ la tension entre les deux plaques.
Soit $C = \dfrac{Q}{U}$ la capacité du condensateur ainsi constitué, montrer que

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{d}}$$

VI Analogie formelle avec le champ de gravitation

	ÉLECTROSTATIQUE	GRAVITATION
Objets en P et M	Charge *fixe* q et charge q'	Masses m et m'
Représentation volumique	Densité vol. de charge : $\rho(P)$	Masse vol. : $\mu(P)$
Force	$\overrightarrow{F}_{q \text{ sur } q'} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq'}{PM^2}\overrightarrow{u}_{PM}$	$\overrightarrow{F}_{m \text{ sur } m'} = -G\dfrac{mm'}{PM^2}\overrightarrow{u}_{PM}$
Particularité	attractive ou répulsive	**toujours** attractive
Champ créé par P	$\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{PM^2}\overrightarrow{u}_{PM}$	$\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) = -G\dfrac{m}{PM^2}\overrightarrow{u}_{PM}$

Application 7 : Le métro gravitationnel (Mines-Ponts PSI 2011)

La Terre est assimilée à un corps sphérique homogène de rayon r_T, de centre O et de masse volumique homogène μ_T. On néglige tous les effets de la rotation de la terre sur elle-même et on se place dans le référentiel géocentrique que l'on supposera galiléen.
On considère un point P situé **à l'intérieur** de la sphère terrestre. On note $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r} = r\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{\mathcal{G}}(P)$ le champ gravitationnel créé par la terre en P.

1. Justifier que $\overrightarrow{\mathcal{G}}(P)$ est porté par $\overrightarrow{u}_r$ et que son module ne dépend que de r, on notera donc $\overrightarrow{\mathcal{G}}(P) = \mathcal{G}(r)\overrightarrow{u}_r$.
   En utilisant le théorème de Gauss gravitationnel, déterminer l'expression de $\mathcal{G}(r)$ en fonction de $\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\mu_T$ et r.
2. Déduire de la question précédente que la force de gravitation s'exerçant sur un point de masse m situé en P dérive de l'énergie potentielle

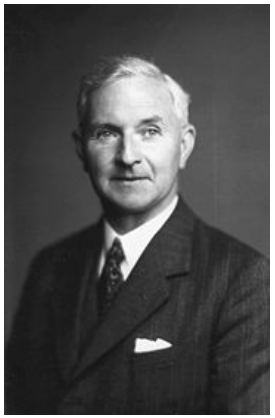
$$E_p(r) = E_{p_0} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

   où E_{p_0} est une constante qui dépend de la référence choisie et que l'on ne demande pas d'expliciter.
   Quelle est la dimension de ω ?

Analogie électrostatique-gravitation

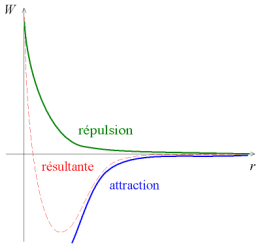
Analogues dimensionnés	
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9.10^9$ m F^{-1}	$-G \simeq -6,67.10^{-11}$ m^3. kg^{-1}. s^{-2}
Equations locales	
$\operatorname{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$	$\operatorname{div}\overrightarrow{\mathcal{G}} = -4\pi G\mu$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\mathcal{G}} = \overrightarrow{0}$
Relation champ-potentiel	
$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$	$\overrightarrow{\mathcal{G}} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$
Equation de Poisson	
$\triangle V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\triangle V = 4\pi G\mu$
Théorème de Gauss	
$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathcal{G}}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}_{\text{ext}} = -4\pi G M_{\text{int}}$

Chapitre F3 : Exemples de champs électrostatiques



John Lennard-Jones
(1894-1954)

Partie F : Electromag.
F-1 : Conduction électrique
F-2 : Electrostatique
F-3 : Exemples
F-4 : Magnétostatique
F-5 : Exemples
F-6 : Equations de Maxwell
F-7 : Induction
F-8 : Compléments



... et "son" potentiel

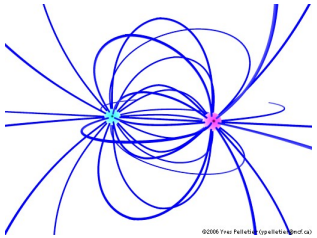


Figure F.1 – Lignes de champ créé par un dipôle électrostatique

La matière contient globalement autant de charges négatives que de charges positives ; il en résulte une compensation à grande distance des champs électrostatiques créés par l'ensemble des charges. Cette compensation n'est cependant pas parfaite et ce sont les caractéristiques du champ résiduel qui donnent à l'édifice toutes ses propriétés électrostatiques, souvent déterminantes.

La plus petite entité qui permet la compensation de ces champs est le **dipôle électrostatique**, doublet de charges opposées. On l'aborde dans ce chapitre du point de vue des actions qu'il exerce sur les particules chargées et de celles qu'il subit dans un champ électrique.

Ses applications sont nombreuses puisqu'il est le modèle de choix de la matière gobalemnt neutre, comme les molécules ; permettant ainsi de modéliser leurs interactions au niveau microscopique et d'en déduire de nombreuses propriétés des fluides, comme des solides. Cette approche reste classique, alors que les objets manipulés sont microscopiques, mais les résultats obtenus sont intéressants et constituent un bon point de départ de leur modélisation quantique.

I Dipôle électrostatique

1 définition : doublet de charges - approximation dipolaire

Définition :

Un **doublet de charges** est l'association de charges ponctuelles opposées, séparées d'une distance a.
Soit O leur milieu, on parlera de **dipôle électrostatique** pour cette association $(+q(P), -q(N))$ si la distance d'observation $r = OM$ est grande devant la taille caractéritique du doublet de charges.
Cette condition $r \gg a$ constitue **l'approximation dipolaire**.

Définition :

On appelle **moment dipolaire** le vecteur

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$

qui s'exprime en Coulomb.mètre ou **Debye**, de symbole D.

$$1D = \frac{1}{3}10^{-29} \text{ C. m}$$

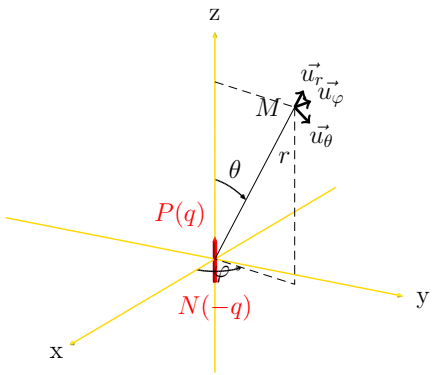
Il est toujours orienté de la charge − vers la charge +.

Application 1 : Moment dipolaire de molécules

Les molécules polaires sont modélisées par de tels moments dipolaires

Exemples : *molécule* H_2O *:* $p_{H_2O} = 1,85$ D
liaison $O-H$ *:* $p_{O-H} = 1,51$ D
liaison $N-H$ *:* $p_{N-H} = 1,31$ D
liaison $C-Cl$ *:* $p_{C-Cl} = 1,57$ D

2 Potentiel et champ électrostatique créé par un dipôle



Savoir démontrer №1 : Expression du potentiel

A partir d'un principe de superposition

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa\cos\theta}{r^2} = \frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Savoir démontrer №2 : Expression du champ du dipôle électrostatique

A partir de $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$,

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u}_\theta$$

Savoir exploiter la forme intrinsèque (indépendante du système de coordonnées choisi)

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(3\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{u}_r)\,\overrightarrow{u}_r - \overrightarrow{p}}{r^3}$$

3 Cartographie du champ

Savoir démontrer №3 : Equation des surfaces équipotentielles

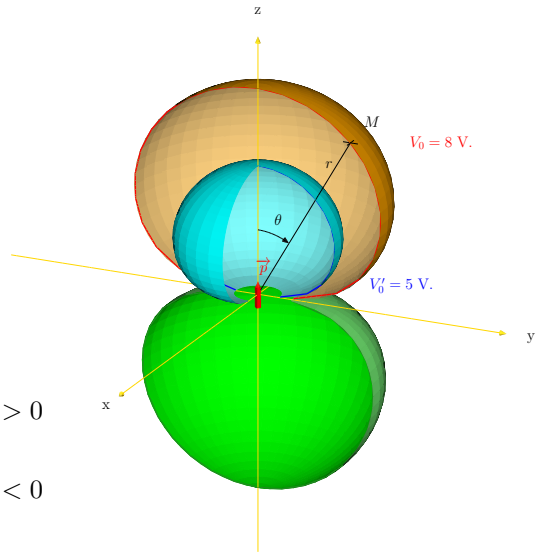
$V(r,\pi-\theta) = -V(r,\theta)$
Donc, en $\theta = \frac{\pi}{2}$ ...

$$\boxed{r^2 = K_0\cos\theta}$$

avec $K_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{V_0}$

Si $V_0 > 0$, alors il faut $\cos\theta > 0$
d'où $z > 0$

Si $V_0 < 0$, alors il faut $\cos\theta < 0$
d'où $z < 0$

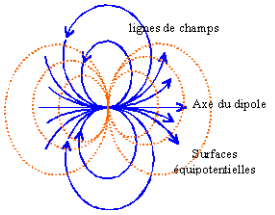


Savoir démontrer №4 : Equation des lignes de champ

2 méthodes possibles pour un même résultat

$$r = r_0\sin^2\theta$$

Remarque :



Toutes ces lignes passent par l'origine $r = 0$ pour $\theta = 0$.
Les lignes de champ sont normales aux équipotentielles en tout point (propriété liée à l'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$).

II Action d'un champ électrostatique extérieur sur un dipôle

1 Cas d'un champ extérieur uniforme - effet principal

Savoir démontrer №5 : Force, couple et énergie potenielle

Un champ électrostatique $\overrightarrow{E}_0$ uniforme exerce sur le dipôle électrostatique $\overrightarrow{p}$ un couple de forces et tend ainsi à l'orienter dans le sens du champ $\overrightarrow{E}_0$

$$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \quad (F.2)$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_0 \quad (F.3)$$

$$\mathscr{E}_p = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}_0 \quad (F.4)$$

Savoir démontrer №6 : Positions d'équilibre

- Position d'équilibre stable pour $\theta = 0$
- Position d'équilibre instable pour $\theta = \pi$

2 Effet d'un champ extérieur non uniforme - Effet faible - HP

Savoir démontrer №7 : Force, couple et énergie potenielle

$$\sum \overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \overrightarrow{E} \quad (F.5)$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E} \quad (F.6)$$

$$\mathscr{E}_p = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E} \quad (F.7)$$

⚠ Attention... Pour un dipôle rigide, $\left(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \overrightarrow{E} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}\right)$

Savoir démontrer №8 : Effets

✗ Effet principal : orientation du dipôle dans le sens de $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$
✗ Effet secondaire : déplacement du dipôle vers les régions de champ élevé.

3 Dipôle induit - Polarisabilité

Définition :

✗ Un atome ou une molécule apolaire peut acquérir un moment dipolaire sous l'action d'un champ extérieur : c'est le **moment dipolaire induit**.
✗ Approximation linéaire :

$$\overrightarrow{p} = \varepsilon_0 \alpha \overrightarrow{E}$$

La molécule est **polarisable** , α est la **polarisabilité**
✗ α en m^3.

Savoir démontrer №9 : Modèle de Thomson -1904

— Noyau $Q = Ze$ sur une sphère de rayon R créent un champ

$$\overrightarrow{E}_1 = \frac{Zer}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \overrightarrow{u}_r$$

— Champ extérieur $\overrightarrow{E}_2$.
— Position d'équilibre d'un électron dans le volume de rayon R

$$r_{\text{eq}} = -\frac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{Ze} \overrightarrow{E}_0$$

On en déduit

$$\boxed{\alpha = 4\pi R^3 \simeq 10^{-30}}$$

4 Forces de Van der Waals

Principal domaine d'application : : les forces de van der Waals

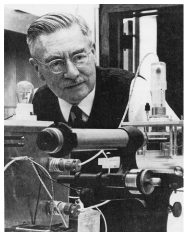
Les forces de Van der Waals, d'intensité faible, sont cependant d'une importance considérable pour expliquer par exemple la cohésion de la matière.

Elles s'expriment toujours en $\frac{1}{r^7}$, ce qui veut dire qu'elle diminue rapidement avec la distance.

Elles sont de diverses natures :

forces de Keesom : interaction dipôle permanent /dipôle permanent

Figure F.2 – Willem Hendrik Keesom (1876-1956)



forces de Debye : interaction dipôle permanent /dipôle induit

Figure F.3 – Peter Debye (1884-1966)

forces de London : interaction dipôle induit /dipôle induit

Figure F.4 – Fritz Wolfgang London (7 mars 1900-30 mars 1954)

III Etude des condensateurs

Définitions :

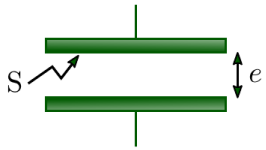
On appelle **charge $Q = Q_1$ du condensateur** la charge portée par l'armature interne $\mathcal{C}_1$, au potentiel V_1 totalement influée par l'autre.
On appelle **capacité C du condensateur**, en farad (F), la quantité telle que, en posant V_2 le potentiel de l'armature externe $\mathcal{C}_2$

$$Q_1 = C\,(V_1 - V_2) \quad \text{ou} \quad Q = CU \quad \text{en posant } U = V_1 - V_2$$

La capacité d'un condensateur est toujours positive et ne dépend que de sa géométrie.

Propriété à connaître

1 Condensateur plan



Un condensateur plan est constitué de deux armatures planes parallèles. On note e la distance entre celles-ci (appelée épaisseur) et S leur surface en regard.

Définition :

Un condensateur **idéal** est un condensateur pour lequel on néglige
en imaginant l'absence de ceux-ci (extension infinie...) dans l'anal
et invariances des sources.

Savoir démontrer №10 : Exploiter le théorème de superposition

Par superposition, on en déduit

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{+\to-} & \text{entre les armatures} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

Point méthode - Calcul de la capacité d'un condensateur

Pour calculer la capacité C d'un condensateur, on cherche à exprimer $V_1 - V_2$ en fonction de Q.
La méthode exposée suppose un degré de symétrie élevé.

1. On relie le champ électrostatique $\vec{E}$ à la charge Q grâce à l'application du théorème de Gauss dans l'espace inter-armatures.
2. On calcule $V_1 - V_2$ comme la circulation du champ électrostatique le long d'un ligne de champ entre les armatures

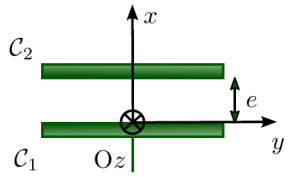
$$V_1 - V_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M$$

   Le caractère **conservatif** du champ électrostatique indique que le résultat est indépendant du choix des points M_1 et M_2.
3. On identifie $C = \dfrac{Q}{V_1 - V_2}$

Savoir démontrer №11 : Capacité du condensateur plan idéal

Un condensateur plan idéal d'épaisseur e et de section S (surface en regard des armatures) a une capacité

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$



A retenir : Prise en compte de la permittivité d'un milieu

Il est possible d'augmenter la capacité d'un condensateur en jouant sur le matériau inter-armatures.
Ainsi, si on place un diélectrique de permittivité relative ε_r à la place du vide, on obtient une capacité multipliée d'un facteur ε_r, soit

$$C' = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{e}$$

2 Autres géométries

Application 2 : Capacité d'un condensateur cylindrique

1. Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique de hauteur h et dont les rayons des conducteurs en regard valent a et b avec $a < b$.
2. Montrer que les densités surfaciques de charge (sur chaque armature) σ_a et σ_b sont distinctes.

Application 3 : Capacité d'un condensateur sphérique

1. Calculer la capacité d'un condensateur sphérique dont les rayons des conducteurs en regard valent R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$.
2. Montrer que les densités surfaciques de charge (sur chaque armature) σ_1 et σ_2 sont distinctes.

3 Aspects énergétiques et électrocinétiques

Définition :

L'**énergie électrostatique emmagasinée** se définit comme le travail que doit **fournir** un opérateur (i.e. un générateur) pour déposer une charge $+Q$ sur l'armature de plus haut potentiel ($V_1 > V_2$).

Savoir démontrer №12 : Energie électrostatique

L'énergie électrostatique stockée dans un condensateur de capacité C vaut

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2$$

Energie électrostatique et densité volumique d'énergie électrostatique

S'il règne un champ électrique $\vec{E}(P)$ entre les armatures d'un condensateur de capacité C, l'énergie électrostatique stockée s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \iiint_{P\in\text{Condensateur}} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2(P)\right) \mathrm{d}\tau_P$$

où l'on introduit la densité volumique d'énergie électrostatique

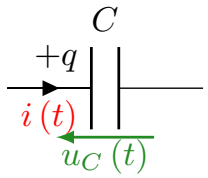
$$u_{\text{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2$$

Remarque : Cette approche énergétique peut permettre de calculer la capacité du condensateur, en identifiant $\mathcal{E}_{\text{el}}$ calculée comme $\iiint u_{\text{el}}\mathrm{d}\tau_P$ à $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ ou $\frac{1}{2}CU^2$.

4 Association de condensateurs

Dans un circuit, on modélise un condensateur par le symbole ci-contre (en convention récepteur) avec

$$i = +\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$$



Savoir démontrer №13 : Association de condensateurs

En série (même courant, donc même charge), le condensateur équivalent présente la capacité

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

En parallèle (même tension), le condensateur équivalent présente la capacité

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

IV Energie de constitution d'une sphère chargée en volume

Savoir démontrer №14 : Analyse dimensionnelle

On cherche l'énergie necessaire à la constitution d'une boule de rayon R chargée uniformément ρ en volume sous la forme :

$$\mathcal{E} = \frac{Q^a R^b}{4\pi\varepsilon_0}$$

On trouve

$$\mathcal{E} = \beta\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

β est une constante sans dimension.

Savoir démontrer №15 : Travail élémentaire pour ammenner la charge dq

On se place dans une situation où la sphère est partiellement réalisée, elle a un rayon $r < R$.
On apporte la charge dq qui fait passer le rayon de r à $r+\mathrm{d}r$, soit $\mathrm{d}q = 4\pi\rho r^2\mathrm{d}r$.
L'énergie d$\mathcal{E}$ pour amener la charge dq depuis l'infini est :

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \mathrm{d}qV\left(r\right) = \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\varepsilon_0}\mathrm{d}r$$

,

Savoir démontrer №16 : Energie totale

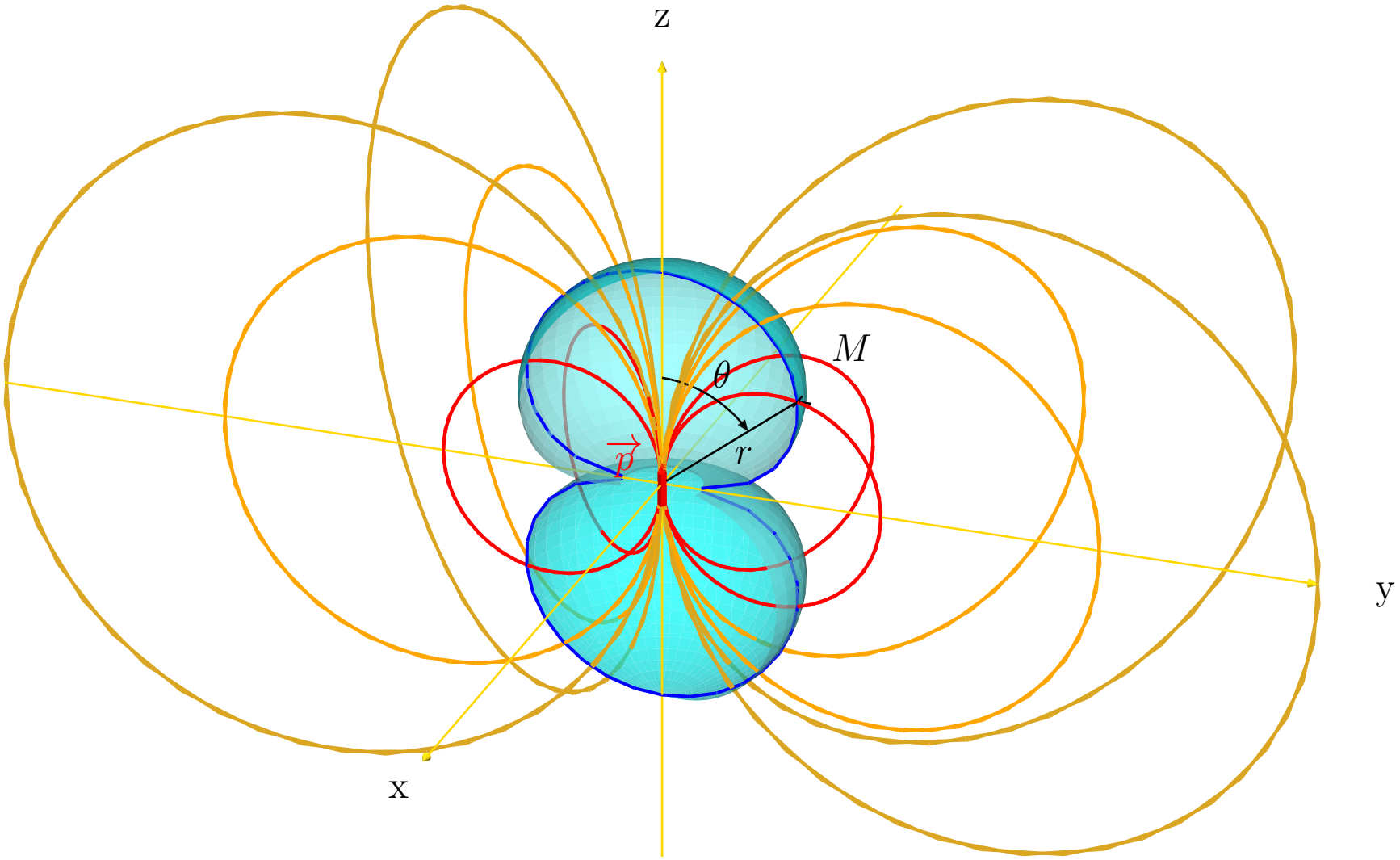
Par intégration, l'énergie totale à fournir pour fabriquer la boule est :

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}}$$

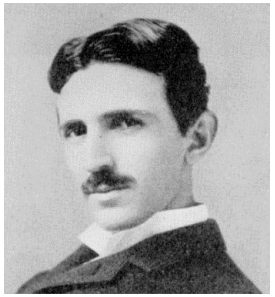
Application 4 : Application au Noyau

Rayon du noyau $R \simeq R_0 A^{\frac{1}{3}}$ avec $R_0 = 1,3.10^{-15}m$, pour le Cobalt $A = 60, Z = 28$, on trouve

$$\mathcal{E} = 44 \text{ MeV}$$


z
M
θ
r
$\overrightarrow{p}$
y
x

Chapitre F4 : Symétries du champ magnétique et Théorème d'Ampère



Nikola Tesla (1856-1943)

Partie F : Electromag.
F-1 : Conduction électrique
F-2 : Electrostatique
F-3 : Exemples
F-4 : Magnétostatique
F-5 : Exemples
F-6 : Equations de Maxwell
F-7 : Induction
F-8 : Compléments

Lévitation magnétique

« Les charges en mouvement créent un champ magnétique »

I Les courants créent des champs magnétiques

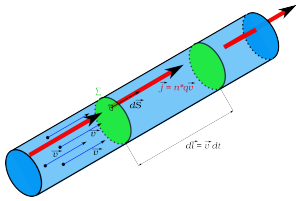
1 Distributions de courant électrique et densité de courant

Définition :

L'intensité du courant électrique est égale au **flux** du vecteur densité de courant $\vec{j}$.

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Dans le cas d'une densité de courant uniforme sur toute la section Σ, on $I = jS$ où S est l'aire de la section Σ.



Remarque : Le vecteur densité de courant $\vec{j}$ est une grandeur **volumique** (ie présente dans tout le volume du conducteur), mais s'exprime en $\mathrm{A.\,m^{-2}}$.

Loi de Biot et Savart - HP

$$\vec{B}(M) = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(M) \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} \mathrm{d}\tau$$

La norme du champ magnétique s'exprime en **Tesla**, de symbole T.
$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ m kg $\mathrm{A^{-2}}$ $\mathrm{s^{-2}}$ est la perméabilité du vide.

Remarque : Un champ magnétique est homogène au rapport $\frac{\mu_0 I}{\text{distance}}$.

2 Le flux du champ magnétique est conservatif

Définition :

On considère une surface (Σ), s''appuyant sur un contour $(\mathscr{L})$ orienté, le **flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers cette surface** est défini par :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Le flux s'exprime en **Weber**, de symbole Wb.

Point méthode - Postulat : interpétation de l'équation (M-Φ), dite Maxwell-flux

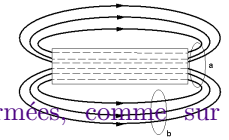
Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est **nul** :

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

ce qui correspond à l'équation de Maxwell

$$\mathrm{div}\, B = 0$$

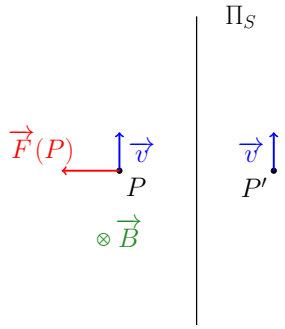
Il en découle la non-existence de monopôles (ou charges) magnétiques desquelles convergeraient ou divergeraient les lignes de champ magnétique.
Par conséquence, ces lignes de champ sont fermées, comme sur l'exemple de la figure ci-dessus.



3 Propriétés du champ magnétique liées symétries de la distribution de courants

3.a Vrai vecteur et pseudo-vecteur

Application 1 : Retrouver le comportement du champ magnétique à partir de la force de Lorentz : cas d'un plan de symétrie



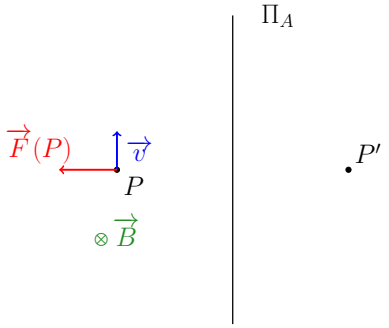
On considère des charges positives en P.

1. Comment est orienté le champ magnétique $\overrightarrow{B}$, à l'origine de la force $\overrightarrow{F}(P)$?
   On suppose que le plan (Π_S) est un plan de symétrie des charges.
2. Construire le vecteur force $\overrightarrow{F}(P')$, correspondant.
3. En déduire l'orientation du champ magnétique $\overrightarrow{B}'$, à l'origine de cette nouvelle force.

Application 2 : Retrouver le comportement du champ magnétique à partir de la force de Lorentz : cas d'un plan d'antisymétrie

On considère des charges positives en P.

1. Comment est orienté le champ magnétique $\overrightarrow{B}$, à l'origine de la force $\overrightarrow{F}(P)$?
   On suppose que le plan (Π_S) est un plan de symétrie des charges.
2. Construire le vecteur force $\overrightarrow{F}(P')$, correspondant.
3. En déduire l'orientation du champ magnétique $\overrightarrow{B}'$, à l'origine de cette nouvelle force.



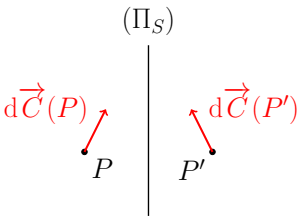
3.b Plans de symétrie et d'antisymétrie

Définition :

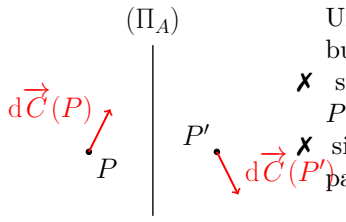
Un plan (Π_S) est plan de symétrie de la distribution de courant

- ✗ s'il constitue un plan de symétrie des points, soit $P \mapsto P' = \mathrm{Sym}(P)_{/(\Pi_S)}$ et ;
- ✗ si les élements de courant sont symétriques par raport au plan, soit

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{C}}(P') = \mathrm{Sym}\left[\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{C}}(P)\right]_{/(\Pi_S)}$$



Définition :

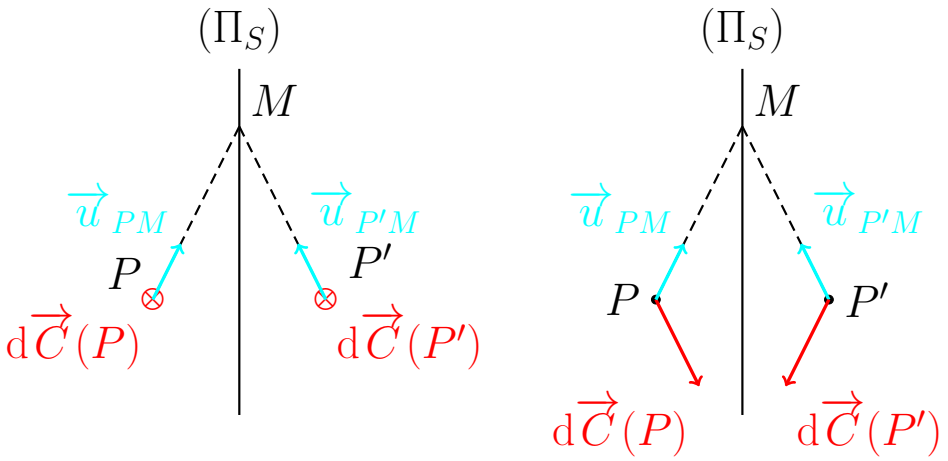


Un plan (Π_A) est plan d'antisymétrie de la distribution de courant

- ✗ s'il constitue un plan de symétrie des points, soit $P \mapsto P' = \mathrm{Sym}(P)_{/(\Pi_A)}$ et ;
- ✗ si les élements de courant sont « anti-symétriques » par raport au plan, soit

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{C}}(P') = -\mathrm{Sym}\left[\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{C}}(P)\right]_{/(\Pi_A)}$$

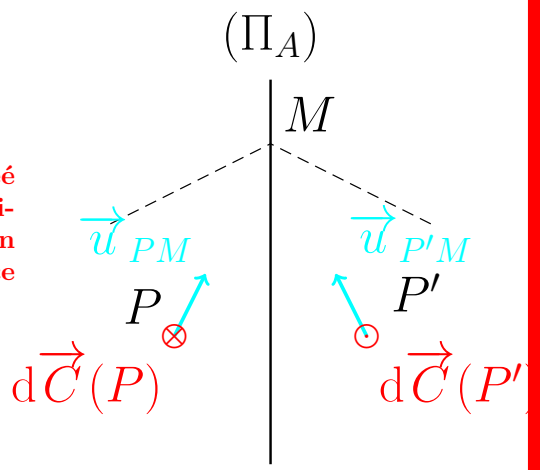
Savoir démontrer №1 : Conséquences sur le champ magnétique créé en un point M d'un plan de symétrie



Le champ magnétostatique créé en un point M d'un plan de symétrie (Π_S) d'une distribution de courant est normal à ce plan.

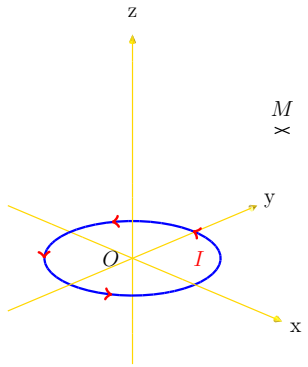
Savoir démontrer №2 : Conséquences sur le champ magnétique créé en un point M d'un plan d'antisymétrie

Le champ magnétostatique créé en un point M d'un plan d'antisymétrie (Π_A) d'une distribution de courant est contenu dans ce plan.



4 Exemple

Application 3 : Etude des invariances et des symétries sur la spire de courant d'axe (Oz)



1. Choisir le système de coordonnées adapté au problème et écrire le champ correspondant (cas général).
2. Etudier les invariances pour en déduire la dépendance « réelle » du champ.
3. Analyser les symétries afin d'obtenir la direction du champ :

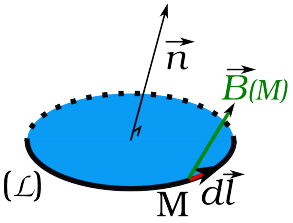
(a) dans le cas général ;

(b) dans le cas où le point M se situe sur l'axe (Oz).

II Théorème d'Ampère

1 Enoncé

DÉFINITION :



La **circulation** du champ magnétique le long d'un contour fermé $(\mathscr{L})$ orienté est, par définition :

$$\mathscr{C} = \oint_{\mathscr{L}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

La surface délimitée par ce contour est orientée suivant la règle du tire-bouchon.

FIGURE F.5 – Plan d'antisymétrie d'une distribution de courant

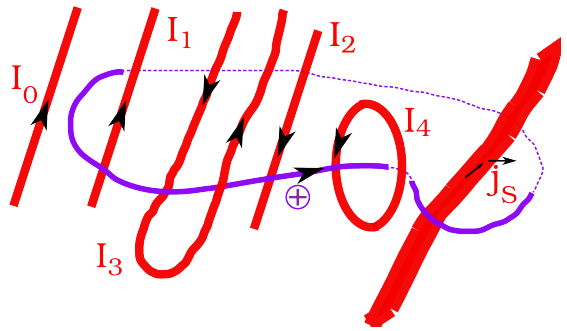
Savoir démontrer №3 : Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour fermé orienté $(\mathscr{L})$ est égale à la somme des intensités **algébriques** des courants enlacés par $(\mathscr{L})$ que multiplie μ_0

$$= \mu_0 \sum_k \varepsilon_k I_k \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon_k = +1 & \text{si } I_k \text{ dans le sens de } \overrightarrow{n} \\ \varepsilon_k = -1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{(F.8)}$$

Remarque : La circulation du champ magnétostatique n'est donc pas conservative, ce champ ne dérive donc pas d'un potentiel scalaire.

Application 4 : Compter les courants enlacés



On envisage la situation suivante : le contour orienté enlace ou non les courants représentés ci-dessus. On notera L, la largeur de la nappe de courant.
Exprimer $I_{\text{enlacés}}$.

Point méthode - **Méthode systématique**

① Analyse des invariances et symétries de la distribution de courants
② Choix du contour fermé
- ☞ **il doit passer par le point** M et pour faciliter les calculs
- ☞ $\overrightarrow{B}$ doit être tangent en chacun de ses points (alors $\overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = B(M)\,\mathrm{d}\ell$)
- ☞ la norme de $\overrightarrow{B}$ doit être identique en chacun de ses points

alors la circulation se calcule aisément

$$\mathscr{C} = \oint_{\mathscr{L}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = B(M) \oint_{\mathscr{L}} \mathrm{d}\ell = B(M)\mathcal{L}$$

où $\mathcal{L}$ est la longueur du contour fermé $\mathscr{L}$.
En pratique, c'est un cercle : $\mathcal{L} = 2\pi r$
ou un rectangle : $\mathcal{L} = 2\,(a+b)$

③ Application du théorème d'Ampère en calculant les courants enlacés.

$$B(M) = \frac{\mu_0 I_{\text{enlacés}}}{\mathcal{L}}$$

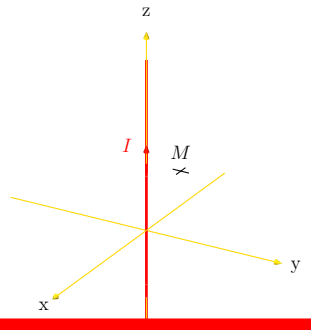
2 Exemples à connaître parfaitement

Savoir démontrer №4 : Champ créé par un fil parcouru par un courant d'intensité constante

On reprend l'exemple du paragraphe 4, pour lequel l'étude des symétries a déjà été effectuée.

Montrer que le champ magnétique en tout point M de l'espace s'écrit

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{u}_\theta$$



Savoir démontrer №5 : Champ créé par un cylindre plein, siège d'une densité de courant uniforme

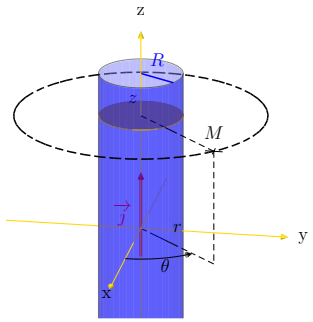


FIGURE F.6 – M extérieur au cylindre.

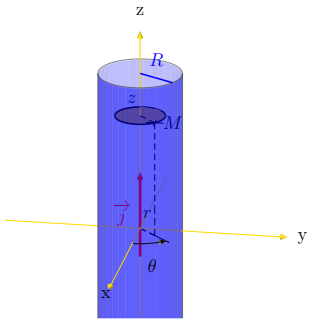
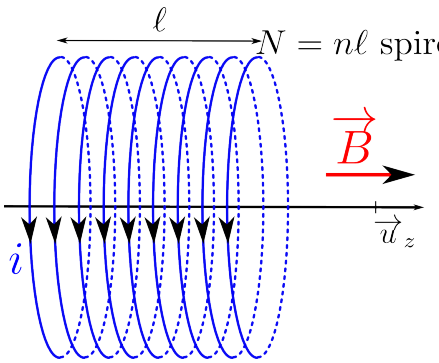


FIGURE F.7 – M intérieur au cylindre.

On montre $\overrightarrow{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j r}{2}\overrightarrow{u}_\theta & \text{si } r < R \\ \frac{\mu_0 j R^2}{2r}\overrightarrow{u}_\theta & \text{si } r > R \end{cases}$

Savoir démontrer №6 : Champ magnétique créé par un solénoïde infini



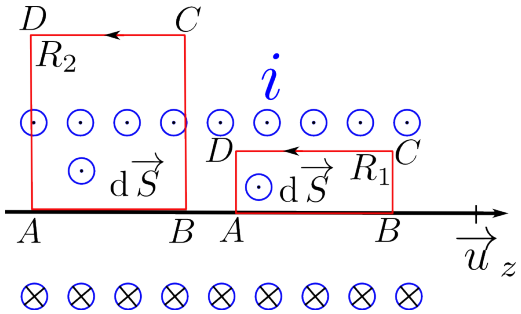
On considère un solénoïde infini d'axe Oz, de rayon a, parcouru par le courant i et comportant n spires par mètre.
On suppose que le champ $\overrightarrow{B}$ est nul à l'extérieur du solénoïde.
On montre que le champ magnétique créé par le solénoïde en tout point de l'espace vaut

$$\boxed{\overrightarrow{B}_{\text{ext}} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B}_{\text{int}} = \mu_0 n i \overrightarrow{u}_z}$$

Réponse :

On choisit les coordonnées cylindriques.

1. *La distribution de courant est invariante par translation par rapport à z donc $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}(r,\theta)$*
   La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe Oz donc $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}(r)$
2. *La plan passant par M et perpendiculaire au solénoïde est un plan de symétrie des courants donc $\overrightarrow{B}$ est perpendiculaire à ce plan donc $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$.*
3. *On choisit deux rectangles R_1 et R_2 représentés sur la figure comme lignes d'*AMPÈRE *qu'on oriente positivement selon la flèche du schéma.*
   Le rectangle R_1 a une longueur ℓ_1 et une largeur $r < a$. Le rectangle R_2 a une longueur ℓ_2 et une largeur $r > a$.
   La circulation de $\overrightarrow{B}$ sur R_1 est



$$\oint_{R_1} \overrightarrow{B}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = B(0)\ell_1 - B(r)\ell_1$$

4. *Pour R_1, les courants enlacés sont $i_e = 0$.*

Pour R_2, les courants enlacés sont $i_e = ni\ell_2$.

5. *Le théorème d'*AMPÈRE *donne*

$$\begin{cases} B(0) = B(r) & \text{pour } r < a \\ B(0) - B(r) = \mu_0 n i \ell_2 & \text{pour } r > a \end{cases} \tag{F.9}$$

Soit

$$B(r) = B(0) - \mu_0 n i$$

Cela montre que le champ est indépendant de r, lorsque $r > a$, il est donc égal à sa valeur en l'infini. On en déduit que le champ extérieur est nul. On peut rassembler les résultats :

$$\boxed{\overrightarrow{B_{ext}} = \overrightarrow{0} \quad et \quad \overrightarrow{B}_{int} = \mu_0 n i \overrightarrow{u_z}}$$

Savoir démontrer №7 : Champ magnétique créé par une bobine torique

On considère une bobine torique d'axe Oz, constituée de N spires bobinées de rayon intérieur R et extérieur $R+a$ et de hauteur a parcourues par le courant I.
On montre que le champ magnétique créé par une telle bobine en tout point de l'espace vaut

$$\boxed{\overrightarrow{B}_{\text{ext}} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B}_{\text{int}}(r) = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} \overrightarrow{u}_\theta}$$

III Topographie des lignes de champ

— Les lignes de champ $\overrightarrow{B}$ sont fermées.
— Les lignes de champ $\overrightarrow{B}$ s'enroulent autour des courants.
— Le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers une surface fermée est nul.

Propriété à connaître

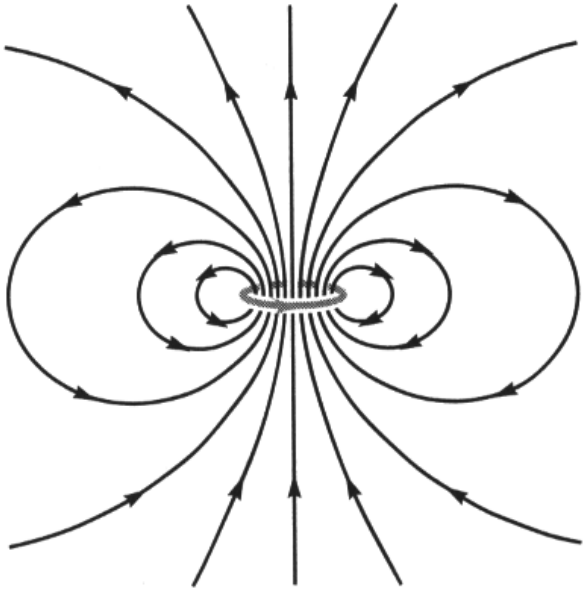


Figure 17.9 – Lignes de champ magnétique d'une spire.

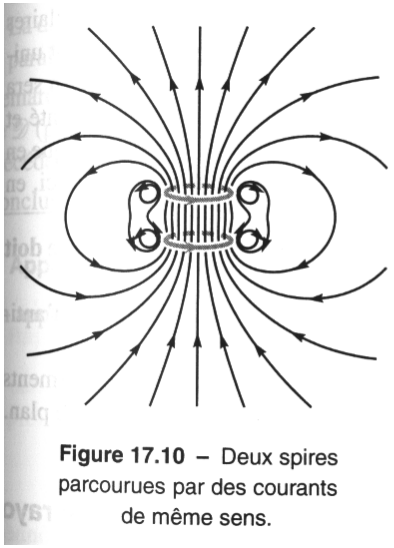


Figure 17.10 – Deux spires parcourues par des courants de même sens.

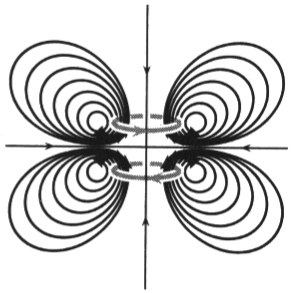
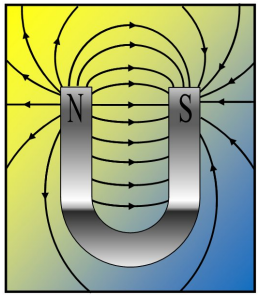


Figure 17.11 – Deux spires parcourues par des courants en sens contraire.

Chapitre F5 : Exemples de champs magnétiques

Andre-Marie Ampère (1775-1836)

Partie F : Electromag.
F-1 : Conduction électrique
F-2 : Electrostatique
F-3 : Exemples
F-4 : Magnétostatique
F-5 : Exemples
F-6 : Equations de Maxwell
F-7 : Induction
F-8 : Compléments



Lignes de champ magnétique pour un aimant en U

I Inductance

1 Auto-induction

Définition :

On note ϕ_p le flux propre induit dans la spire.
Par définition, on a

$$\phi_p = Li$$

L est l'inductance propre du circuit
L s'exprime en henry (H)
Les valeurs utilisées au laboratoire sont comprise entre 0.1 mH et 1 H

Application 1 : Autoinductance par unité de longueur d'un solénoïde

Pour un solénoïde, en négligeant les effets de bord, on trouve l'inductance linéique :

$$L = \mu_0 n^2 S$$

2 Loi de Faraday

- ✗ Une bobine parcourue par un courant variable $i(t)$, créé un champ $B(t)$.
- ✗ Soit $\Phi(t) = \iint \vec{B}.\mathrm{d}\vec{S} = Li(t)$ le flux propre où $\mathrm{d}\vec{S}$ est orientée par i.
- ✗ Il apparait dans le circuit une fem $e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ orientée dans le sens de i.

Propriété à connaître

3 Energie volumique

Savoir démontrer №1 : Energie stockée dans une bobine

La puissance délivrée par la fem est

$$\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{\mathrm{d}t}$$

$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2$ est l'énergie magnétique stockée dans la bobine.

Définition :

On définit la densité volumique d'énergie magnétique $\mathcal{E}_{\text{Vol}} = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Savoir démontrer №2 : Solénoïde infini

Pour le solénoïde infini, on intègre l'énergie volumique sur tout le volume du cylindre pour trouver l'énergie magnétique :

$$\iiint \frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}Li^2$$

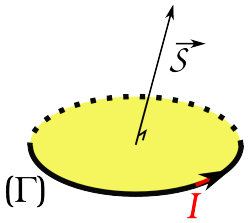
II Dipôle magnétique

Introduction : Pourquoi ce modèle ?

Comme son analogue électrostatique, c'est un modèle susceptible de représenter un « petit » objet magnétique, c'est à dire un petit cicuit (parcouru par un courant électrique, comme une spire) ou un petit aimant.
Le caractère« petit » de l'objet devra toujours être comparé au(x) distance(s) d'observation afin de rester dans le cadre de l'**approximation dipolaire**.

1 Modélisation

Définition :



On considère une boucle (Γ) parcourue par un courant d'intensité I, orientée dans le sens de I. On note $\mathcal{S}$ l'aire de la surface définie par la boucle (Γ) et $\mathcal{S}$ est orientée par la règle du tire-bouchon ;
alors on définit un **moment magnétique** $\vec{\mathcal{M}}$ associé à cette description par la relation

$$\vec{\mathcal{M}} = I\vec{\mathcal{S}}$$

Définition :

Un **dipôle magnétique** est une distribution de courants permanents de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ non nul dont les dimensions, caractérisées par ℓ, sont supposées petites.
On parle d'**approximation dipolaire**.

2 Rapport gyromagnétique de l'électron

Définition :

Le rapport gyromagnétique de l'électron est le nombre γ qui relie le moment magnétique au moment cinétique.

$$\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{L}_0$$

A tout moment magnétique (comme le spin), on peut définir un rapport $\gamma = \frac{\mathcal{M}}{L}$

Savoir démontrer №3 : Rapport gyromagnétique de l'électron

Dans le modèle classique de l'atome (**modèle planétaire**), on considère un électron en mouvement circulaire autour d'un proton :
Le moment cinétique de l'électron est :

$$\vec{L}_{O,\mathcal{R}} = mrv\vec{u}_z$$

Le moment magnétique est

$$\vec{\mathcal{M}} = -\frac{1}{2}evr\vec{u}_z$$

Le **rapport gyromagnétique** de l'électron est

$$\boxed{\gamma = -\frac{e}{2m}}$$

3 Magnéton de Bohr

Savoir démontrer №4 : Magnéton de Bohr

On cherche une unité de moment magnétique à l'échelle atomique que l'on note μ_B, c'est la **magnéton de Bohr**
On cherche

$$\mu_B = \alpha e^a m^b h^c$$

On utilise $[\mu_B] = IL^2, [h] = ML^2T^{-1}, [e] = IT$
On trouve finalement :

$$\mu_B = \frac{1}{4\pi}\frac{eh}{m} = \frac{e\hbar}{2m}$$

Application 2 : Rapport gyromagnétique

En mécanique quantique, le moment cinétique est quantifié : $L = p\hbar$
Cela donne la quatification du moment magnétique : $\mathcal{M} = p\gamma\hbar = -p\frac{e\hbar}{2m} = -p\mu_B$

L'unité de moment magnétique est le magnéton de Bohr :

$\mu_B = 9,3.10^{-24}\text{A.m}^2 \simeq 10^{-23}\text{A.m}^2$

4 Magnétisme de la matière

Définition :

- ✗ Orientation des moments magnétiques d'un matériau sous $\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$ = **paramagnétisme**.
- ✗ Moments magnétiques intenses et orientés par interaction = **ferromagnétisme**
- ✗ Dans un volume $\mathrm{d}\tau$, on identifie le moment magnétique $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}}$.
  Si la densité d'atomes ayant le moment magnétique $\mu_B \overrightarrow{u}_z$ est n, on a

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}} = n\mu_B \overrightarrow{u}_z \mathrm{d}\tau$$

- ✗ La densité volumique de moment magnétique ou **aimantation** est

$$\overrightarrow{M} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}\tau} = n\mu_B \overrightarrow{u}_z$$

- ✗ Dans un aimant $\overrightarrow{M} \simeq 10^6\text{A.m}^{-1}$

Savoir démontrer №5 : Force surfacique entre deux aimants

On cherche par analyse dimensionnelle à exprimer la force d'attraction entre deux aimants : $F = \alpha B^a \mu_0^b S^c$
On prend $[F] = MLT^{-2}, [B] = MI^{-1}T^{-2}, [\mu_0] = MLI^{-2}T^{-2}$

$$F = \alpha \frac{B^2}{\mu_0} S$$

Si on calcule le travail de cette force $W = Fd = \frac{B^2}{2\mu_0}$, on trouve $\alpha = \frac{1}{2}$
Finalement

$$\boxed{\frac{F}{S} = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Application 3 : Ordre de grandeur

Pour un aimant néodyme cylindrique de diamètre 4 mm et de hauteur 10 mm, on trouve une force d'adhésion de 600 g sur la notice.
Est-ce en accord avec nos calculs ?

A retenir : Ordre de grandeur de la force entre aimants

$$F \simeq 10^5 N; m^{-2}$$

La force surfacique est de l'ordre de p_0 pression atmosphérique.

5 Champ d'un dipôle - HP

On retrouve des expressions analogues à celles vues pour le champ du dipôle électrostatique.

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3} \quad \text{(F.10)}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3} \quad \text{(F.11)}$$

(F.12)

Soit

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}\cdot\overrightarrow{u}_r\right)\overrightarrow{u}_r - \overrightarrow{\mathcal{M}}\right]$$

III Actions subies par le dipôle

1 Force moment et énergie potentielle

Un champ magnétostatique $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ uniforme exerce sur le dipôle magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ un couple de forces et tend ainsi à l'orienter dans le sens du champ $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{B}_{\text{ext}}\right) \quad \text{(F.13)}$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}} \quad \text{(F.14)}$$

$$\mathscr{E}_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}}\cdot\overrightarrow{B}_{\text{ext}} \quad \text{(F.15)}$$

Remarque :

- ✗ Pas de force dans un champ uniforme.
- ✗ Orientation de la spire dans le sens de $\overrightarrow{B}$ et attraction vers les champs forts.

2 Energie d'un ensemble de dipôles

Application 4 : Modèle microscopique

Étudions un cristal paramagnétique de cérium. On décrit un solide paramagnétique de volume V par un ensemble de N spins identiques indépendants les uns des autres. Chaque spin possède un moment magnétique noté $\overrightarrow{m}$ et le solide est immergé dans un champ magnétique constant $\overrightarrow{B}_0 = B_0\overrightarrow{u}_z$. La projection du moment magnétique de chaque spin est quantifiée et peut prendre deux valeurs suivant l'axe (Oz) : $m = \pm\mu_B$ où $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$ est le magnéton de Bohr. Dans cette partie, on se propose de retrouver la loi de Curie :

$$\chi = \frac{C}{T}$$

où χ est la susceptibilité magnétique du matériau et C la constante de Curie ; nous calculerons ensuite la capacité thermique des spins dans ce réseau. Déterminer l'énergie d'un moment magnétique dans un champ extérieur B_0. On suppose que l'ensemble de spins est au contact d'un thermostat à la température T, montrer que le moment magnétique de l'échantillon s'écrit

$$\mathcal{M} = N\mu_B \text{ th}\left(\frac{\mu_B B_0}{k_B T}\right)$$

Données :

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38.10^{-23}$ J.K^{-1}

Magnéton de Bohr : $\mu_B = 9,27.10^{-24}$ J. T^{-1}

Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23}$ mol^{-1}

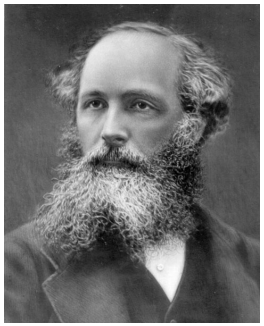
Masse volumique du Cérium : $\rho_{\text{Ce}} = 6,7.10^3$ kg.m^{-3}

Masse molaire du Cérium : $M_{\text{Ce}} = 140$ g.mol^{-1}

Susceptibilité du Cérium : $\chi_{\text{Ce}} = 1,2.10^{-4}$ SI à 300 K

Perméabilité : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}

Chapitre 6 : Les équations de Maxwell de l'électromagnétisme



James Clerk Maxwell (1831-1879)

Partie F : Electromag.
F-1 : Conduction électrique
F-2 : Electrostatique
F-3 : Exemples
F-4 : Magnétostatique
F-5 : Exemples
F-6 : Equations de Maxwell
F-7 : Induction
F-8 : Compléments

Boucle de champ magnétique, prise par le satellite TRACE en UV lointains [10]

A Connaitre

Maxwell-Gauss (MG)

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Flux (MΦ)

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

Maxwell-Faraday (MF)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Maxwell-Ampère (MA)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

10. Le champ magnétique solaire est globalement bipolaire, comme le champ terrestre. Néanmoins, en période de maximum d'activité, il devient plus tortueux, comme en témoigne cette photo qui date de 2000.

La matière solaire, chargée, suit les lignes de champ, et matérialise sa présence, comme la limaille de fer autour d'un aimant. Certaines de ces lignes sont ouvertes jusque loin dans le système solaire. Ainsi, la Terre peut être balayée par les particules électrisées émises par le Soleil, ce qui donne naissance aux aurores polaires.

I Formulation locale des équations de Maxwell

1 Enoncé dans le vide

Quelques constantes de l'électromagnétisme

☞ ε_0 est la permittivité diélectrique du vide :

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} = 8,85.10^{-12}\ \text{Fm}^{-1}$$

☞ μ_0 est la perméabilité magnétique du vide :

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \text{Hm}^{-1}$$

Cette valeur fixe l'ampère.

☞ c est la célérité de la lumière dans le vide $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$.

$$c = 299792458\ \ \text{m.s}^{-1}$$

Cette valeur est fixée depuis 1983 et définit le mètre, comme la distance parcourue par la lumière dans le vide en 1/299792458 s.

A retenir $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9.10^9\ \text{F}^{-1}.\ \text{m}$

2 Commentaires et interprétation physique

2.a Linéarité

2.b Couplage champs-sources

MG - MA : couplage à la matière

MF - MΦ : équations structurelles, couplage intrinsèque.

D'une manière générale, il est instructif d'interpréter les membres de droite comme source du champ figurant dans le membre de gauche.

2.c Compatibilité avec l'équation locale de conservation de la charge

Savoir démontrer №1 : Equation locale de conservation de la charge

L'équation locale de conservation de la charge est contenue dans les équations de Maxwell.

$$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Remarque : C'est ce résultat qui a amené Maxwell à introduire le terme $\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans MA ; sinon, on aurait $\operatorname{div}\vec{j} = 0$, ce qui est faux en régime quelconque.

Application 1 : Loi des nœuds

1. Rappeler l'équation de conservation de la charge et sa version ARQS.
2. Intégrer cette équation sur le volume entourant un nœud, où trois fils (par exemple) parcourus par des intensités I_1, I_2 et I_3 se rencontrent, et en déduire une loi bien connue !

3 Résolution des équations de Maxwell en potentiels

Savoir démontrer №2 : Existence d'un potentiel électromagnétique

Il existe un champ potentiel scalaire V et un champ potentiel vecteur $\vec{A}$ tels que

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Ces champs forment le potentiel électromagnétique et il n'est pas unique.

Attention... La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$ n'est valable qu'en statique.

Remarque : Les potentiels ne sont pas uniques :ainsi, V est défini à une constante près, tandis que $\vec{A}$ est défini à un gradient près.

Définition :

Notion de jauge :
Le choix qui consiste à travailler avec telle ou telle autre expression du potentiel vecteur $\vec{A}$ constitue **un choix de jauge**, qui s'effectue finalement en choisissant une valeur particulière de $\operatorname{div}\vec{A}$ (éventuellement reliée à V).

Exemple : *jauge de* Lorentz
☞régime variable : $\operatorname{div}\vec{A} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$

Exemple : *jauge de* Coulomb
☞régime statique : $\operatorname{div}\vec{A} = 0$

II Forme intégrale des équations de Maxwell

1 Conservation du flux magnétique

Savoir démontrer №3 : $\vec{B}$ est à flux conservatif

Le flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée est nul

$$\oiint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

Conséquence : sur un tube de champ, on a

$$\iint_{(\mathscr{S}_1)} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{(\mathscr{S}_2)} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

2 Théorème de Gauss

Savoir démontrer №4 : Théorème de Gauss valable en régime quelconque

Soit une surface fermée orientée normale sortante et $Q_{\text{int}}(t)$ la charge totale contenue en son volume à l'instant t, alors

$$\oiint_{P\in(\mathscr{S})} \vec{E}(P,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_{P,\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}(t)}{\varepsilon_0}$$

3 Loi de Faraday

Savoir démontrer №5 : Loi de Faraday

Soit $(\mathscr{S})$ une surface **fixe** s'appuyant sur un contour (Γ) fermé orienté ; soit Φ, le flux magnétique (en Wb) à travers $(\mathscr{S})$, alors la fém e induite sur (Γ) vaut

$$\oint_{P\in(\Gamma)} \vec{E}(P,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Application 2 : Solénoïde en ARQS

On considère un solénoïde infini, d'axe Oz, de rayon R, comportant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant $I(t)$. On supposera que ce problème peut se traiter dans le cadre de l'ARQS.

1. Ecrire les équations de Maxwell dans le cadre de cette approximation.
2. Que vaut le champ magnétique $\vec{B}(t)$ à l'intérieur du solénoïde ?
3. Expliquer pourquoi le champ électrique est nécessairement non nul. Quelle est sa forme ?
4. Établir l'expression de $\vec{E}$ en fonction de μ_0, $r<R$, n et $I(t)$.

4 Théorème d'Ampère généralisé

Savoir démontrer №6 : Théorème d'Ampère généralisé

Soit une surface $(\mathscr{S})$ s'appuyant sur un contour (Γ) fermé orienté. On note

- ✗ $i_C = \iint_{(\mathscr{S})} \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$, le courant de conduction **orienté** à travers $(\mathscr{S})$;
- ✗ $i_D = \iint_{(\mathscr{S})} \vec{j}_D\cdot \mathrm{d}\vec{S}$, le courant de « déplacement » **orienté** à travers $(\mathscr{S})$

où $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est le vecteur densité de courant de déplacement.

Alors, la circulation du champ magnétique le long de (Γ) vérifie

$$\oint_{P\in(\Gamma)} \vec{B}(P,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = \mu_0 i_C + \mu_0 i_D$$

Définition :

On appelle **courant de déplacement** une grandeur proportionnelle à la variation temporelle de flux électrique Φ_E :

$$i_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint \vec{j}_D\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

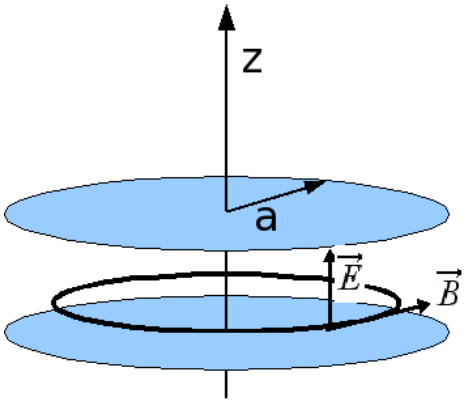
avec

$$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

le **vecteur densité de courant de déplacement**.

Application 3 : Comportement d'un condensateur en régime quasi-stationnaire

Un condensateur est constitué de deux armatures planes, séparées par du vide et modélisées par deux disques métalliques de rayon a et d'axe (Oz), de cotes repectives $-h$ et $+h$. En supposant un régime "lentement variable" (que l'on précisera ultérieurement), on admet que le champ électrique est, dans tout le volume du condensateur uniforme et non permanent :



$$\vec{E} = E(t)\,\vec{u_z}$$

et l'on étudie le système pendant la décharge du condensateur à travers un circuit extérieur purement résistif.

1. Dans tout le problème, on négligera les effets de bord, à quelle condition (pratique) cela est-il possible ?
2. Au cours de cette décharge, préciser l'évolution de $E(t)$ sachant qu'à $t = 0$, on avait $E(0) = E_0$. On notera τ, la constante de temps associée.
3. Ce champ électrique est à l'origine d'un champ magnétique, que l'on cherche sous la forme :
$$\vec{B} = B(r,t)\,\vec{u_\theta}$$
   (a) Justifier l'existence d'un tel champ.
   (b) Donner l'expression de B en fonction de E_0, r, t et τ.

III Régime statique

1 Le régime statique et les équations de Maxwell associées

Savoir démontrer №7 : Les équations de Maxwell en statique

$\operatorname{div}\vec{B} = 0$	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$	**Magnétostatique**
$\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$	**Electrostatique**

Savoir démontrer №8 : En statique, $\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire uniquement

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$$

Savoir démontrer №9 : Equation de Poisson électrostatique

$$\triangle V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

La solution générale de l'équation de Poisson donnant la valeur de $V(M)$ créé par une distribution de charges $\mathcal{D}$ s'écrit

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathcal{D}}\frac{\mathrm{d}q_P}{PM} + \text{cste}$$

Propriété à connaître

Remarque : L'origine des potentiels est prise en général à l'infini, de sorte que si $\mathcal{D}$ est d'extension spatiale bornée alors cste $= 0$.

Pour une distribution	volumique	surfacique	linéique
$\mathrm{d}q_P =$	$\rho(P)\mathrm{d}\tau_P$	$\sigma(P)\mathrm{d}S_P$	$\lambda(P)\mathrm{d}\ell_P$

Propriété à connaître

Savoir démontrer №10 : Formule de Coulomb du champ électrostatique

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}q_P}{PM^2} \overrightarrow{u}_{PM}$$

IV Equation locale de Poynting

1 Rappel : puissance volumique reçue par les charges

$$\mathscr{P}_{\text{vol}} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\tau} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}$$

Dans le cas d'un conducteur ohmique : $\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E}$

$$\mathscr{P}_{\text{vol}} = \frac{j^2}{\gamma}$$

Propriétés à connaître

2 Théorème de Poynting

Savoir démontrer №11 : Identités de Poynting

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \operatorname{div} \overrightarrow{\Pi} = -\mathscr{P}_{\text{vol}} = -\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}$$

avec

$$u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \overrightarrow{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{B}^2}{\mu_0} \qquad \text{(F.16)}$$

la densité volumique d'énergie électromagnétique en J. m^{-3}.

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} \qquad \text{(F.17)}$$

le **vecteur de Poynting**, désignant le vecteur densité de courant volumique de puissance électromagnétique qui s'exprime en W. m^{-2}.
Son flux est une puissance (en W)

Formulaire

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{A} - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{B}$$

Attention...

Le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie électromagnétique sont des grandeurs **quadratiques** avec les champs, donc...

Ne pas utiliser les complexes pour calculer ces grandeurs (sauf en valeur moyenne).

Ne pas utiliser le théorème de superposition (le principe de superposition s'applique sur les champs).

3 Formulation intégrale du bilan d'énergie électromagnétique

Attention...

$\mathscr{P}_{\text{vol}}$ est la puissance reçue par les charges et donc **perdue** par le champ électromagnétique.

Savoir démontrer №12 : Bilan intégral d'énergie électromagnétique

Le champ électromagnétique, créé par les sources $\{\rho, \overrightarrow{j}\}$ dans le vide, vérifie l'équation intégrale

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} = -\oiint_{P \in (\mathscr{S}),\, \text{Sort.}} \overrightarrow{\Pi}(P,t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}_{P,\text{ext}} - \iiint_{P \in (\mathscr{V})} \mathscr{P}_{\text{vol}} \mathrm{d}\tau_p$$

où on note $\overrightarrow{\Pi}$ un vecteur densité de courant de puissance électromagnétique qui s'exprime en W.m^{-2}

Application 4 : Analogie sur les principes de conservation de...

	la charge électrique		l'énergie électromagnétique	
Grandeur	$q(t)$	C	U_{em}	J
Grandeur volumique	$\rho(P,t)$	C. m^{-3}	u_{em}	J. m^{-3}
Flux	$i(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$	A (C. s^{-1})	$\mathcal{P}(t)=\frac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t}$	W (J. s^{-1})
Vecteur densité	$\overrightarrow{j}$	A. m^{-2}	$\overrightarrow{\Pi}$	W. m^{-2}
Flux	$i(t)=\iint \overrightarrow{j}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$	A (C. s^{-1})	$\mathcal{P}(t)=\iint \overrightarrow{\Pi}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$	W (J. s^{-1})

4 Puissance rayonnée

4.a Définition

DÉFINITION :

On appelle **puissance rayonnée**, la puissance électromagnétique transférée à travers une surface $(\mathscr{S})$ orientée, donc le flux de $\overrightarrow{\Pi}$ à travers $(\mathscr{S})$

$$\mathcal{P}_{(\mathscr{S})}=\iint_{P\in(\mathscr{S})}\overrightarrow{\Pi}(P,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_P$$

Application 5 : Symétrie sphérique

Une source située dans le vide à l'origine O, crée en régime statique un champ électromagnétique tel qu'en coordonnées sphériques, le vecteur de POYNTING s'écrit

$$\overrightarrow{\Pi}=\Pi(r)\overrightarrow{u}_r$$

1. Quelle est la puissance rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon R ?
2. Quelle est la dépendance de $\Pi(r)$ avec r ? Commenter.

5 Puissance moyenne rayonnée

Savoir démontrer №13 : Régime sinusoïdal forcé

En régime sinusoïdal, le vecteur de POYNTING moyen est

$$\boxed{\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle=\frac{1}{2\mu_0}\mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{E}}\wedge\underline{\overrightarrow{B}}^*\right)}$$

Savoir démontrer №14 : Puissance moyenne rayonnée

Pour calculer la puissance moyenne rayonnée, on calcule la moyenne de POYNTING puis le flux de ce vecteur à travers la surface considérée.

$$\boxed{\langle\mathcal{P}_{(\mathscr{S})}\rangle=\frac{1}{2\mu_0}\iint_{P\in(\mathscr{S})}\mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{E}}\wedge\underline{\overrightarrow{B}}^*\right)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_P}$$

V Discussion de l'ARQS magnétique

1 Rappels sur l'ARQS

DÉFINITION :

- ✗ Soit T le temps de propagation des ondes électromagnétiques, cT est la distance caractéristique de propagation
- ✗ Soit L l'ordre de grandeur de la distance PM (sources-observateur),
- ✗ Dans l'ARQS on néglie les phénomènes de propagation :

L'**ARQS** consiste à supposer que

$$\boxed{L\ll cT}$$

Exemple : *en TP*
$L=$

Exemple : *à l'échelle d'un département français*
$L=$

2 Limite magnétique de l'ARQS

2.a Définitions

Définition :

On appelle **limite magnétique de l'ARQS** la situation de l'ARQS où

✗ il est possible de négliger le courant de déplcement $\overrightarrow{j}_D$
ce qui peut encore s'énoncer de façon équivalente

✗ le « comparateur » des sources β est à dominante source de courants

$$\beta = \frac{\widetilde{j}}{c\widetilde{\rho}} \gg 1$$

où on note $\widetilde{\ }$ les ordres de grandeurs associés aux grandeurs $\overrightarrow{j}$ et ρ.

Application 6 : Dans un conducteur ohmique en régime sinusoïdal

A quelle condition sur la pulsation ω a-t-on $\|\overrightarrow{j}_D\| \ll \|\overrightarrow{j}_C\|$?

Les équations de Maxwell en ARQS magnétique

Maxwell-Gauss (MG) : $\operatorname{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Maxwell-Flux (MΦ) : $\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0$

Maxwell-Faraday (MF) : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$

Maxwell-Ampère (MA) : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j}$

2.b Conséquences

☞ $\operatorname{div}\overrightarrow{j} = 0$ partout ; les lignes de courant sont fermées (loi des nœuds).

☞ La loi de Biot et Savart et le théorème d'Ampère restent valables

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\mathcal{D}} \frac{i(t)\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}_P \wedge \overrightarrow{u}_{PM}}{PM^2} \quad \text{et} \quad \oint_{P\in(\Gamma)} \overrightarrow{B}(P)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}_P = \mu_0 i_{\text{enlacés}}(t)$$

☞ mais le théorème de Gauss, valable en régime quelconque, est valable en ARQS magnétique.

3 Ouverture sur la notion d'ARQS électrique - HP

⚠ Attention... Lors de l'étude du condensateur en régime variable, il n'est pas possible de se placer en ARQS magnétique.

On est alors dans l'**ARQS électrique** décrite par les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell en ARQS électrique

Maxwell-Gauss (MG) : $\operatorname{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Maxwell-Faraday (MF) : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E} \simeq 0$

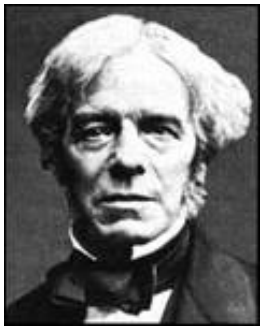
Maxwell-Flux (MΦ) : $\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0$

Maxwell-Ampère (MA) : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\left(\overrightarrow{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$

Remarque : On est alors dans le cas où le comparateur des sources β est à dominante source de charges

$$\beta = \frac{\widetilde{j}}{c\widetilde{\rho}} \ll 1$$

Chapitre F7 : Induction Electromagnétique



Faraday (1791-1867)

Partie F : Electromag.
F-1 : Conduction électrique
F-2 : Electrostatique
F-3 : Exemples
F-4 : Magnétostatique
F-5 : Exemples
F-6 : Equations de Maxwell
F-7 : Induction
F-8 : Compléments

Lenz (1804-1865)

I Expériences de Faraday

1 Loi de Faraday et loi de Lenz

Théorème

✗ Dans toutes les expériences, on trouve que le f.e.m. peut s'exprimer comme une variation du flux du champ magnétique : c'est la loi de Faraday

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}}}{\mathrm{d}t}$$

✗ L'effet produit à toujours tendance à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance (c'est la loi de Lenz qui est un cas particulier du principe de **modération**).

⚠ Attention...

L'effet s'oppose ainsi à la **variation** du flux magnétique.

2 Force de Laplace

Théorème

✗ Pour un élément $\vec{\mathrm{d}\ell}$ de conducteur parcouru par le courant i et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$, il subit la force de Laplace

$$\vec{\mathrm{d}F_\ell} = i\vec{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{B}$$

✗ Pour un conducteur placé entre les points A et B, on trouve la force

$$\boxed{\vec{F}_\ell = \int_A^B i\vec{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{B}}$$

✗ Pour un courant volumique la force volumique de Laplace est

$$\boxed{\vec{f}_v = \frac{\vec{\mathrm{d}F_\ell}}{\mathrm{d}\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}}$$

✗ Pour un courant surfacique la force surfacique de Laplace est

$$\vec{f}_s = \frac{\vec{\mathrm{d}F_\ell}}{\mathrm{d}S} = \vec{j}_s \wedge \vec{B}$$

Lorsqu'un conducteur se déplace à la vitesse $\vec{v}_e$, on note $\mathcal{P}_\ell$ la puissance des forces de Laplace qui est la quantité

$$\mathcal{P}_\ell = \vec{F}_\ell . \vec{v}_e$$

Application 1 : Calcul de force de Laplace

Soit une spire de rayon a, de centre C et d'axe (Oz) parcourue par le courant I (orienté suivant $\vec{u}_\theta$) , qui est placée dans un champ $\vec{B} = B\vec{u}_r$. Montrer que la résultante des forces de Laplace sur la spire est

$$\vec{F} = -2\pi aBI\vec{u}_z$$

3 Bilan

3 phénomènes

✗ Un courant électrique continu ou non, créé un champ magnétique. C'est l'équation de Maxwell-Ampère qui permet d'exprimer $\overrightarrow{B}$

Théorème d'Ampère $\oint \overrightarrow{B}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0 i_{\text{enlacés}} + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS}$

✗ Une variation de flux magnétique créé une f.e.m. induite. C'est l'équation de Maxwell-Faraday qui permet d'exprimer e

$$e = \oint \frac{\overrightarrow{F}}{q}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \oint \left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}\right).\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\overrightarrow{B}}}{\mathrm{d}t}$$

✗ Un circuit éléctrique parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique subit la force de Laplace

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F} = i\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}\wedge\overrightarrow{B}$$

II Circuit fixe dans un champ magnétique variable : induction de Neumann

1 Equation de Maxwell Faraday

Savoir démontrer №1 : Loi de Faraday

On démontre, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday la loi de faraday

$$\boxed{e = \oint_\ell \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\overrightarrow{B}}}{\mathrm{d}t}}$$

$\Phi_{\overrightarrow{B}}$ est le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers la surface S s'appuyant sur le contour ℓ.

2 Cas des conducteurs filiformes

Convention

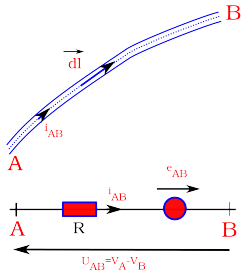
On choisit une orientation positive de A vers B. Les conséquences sont les suivantes :

✗ Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est orienté de de A vers B.

✗ Le courant est alors orienté de A vers B et noté i_{AB}

✗ Les f.e.m. que nous allons calculer sont orientées de A vers B

✗ La surface S est orientée par la ligne.



Application 2 : N spires

Soit un circuit composé de N spires, soit ϕ le flux de $\overrightarrow{B}$ dans chaque spires, alors la f.e.m. vaut

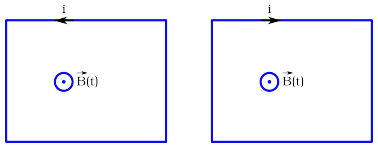
$$\boxed{e = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$$

Application 3 : Calcul de f.e.m.

Pour le schéma ci-dessous à gauche, on note R la résistance du fil et $\overrightarrow{B}_e = B_0\sin(\omega t)\,\overrightarrow{u}_z$ le champ extérieur.
Montrer que le courant est

$$\boxed{i = -\frac{\omega B_0 S}{R}\cos(\omega t)}$$

Montrer que l'on trouve le même résultat avec la convention du schéma de droite.



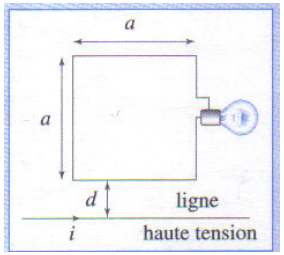
3 Loi de Lenz

Loi de Lenz

Les effets de l'induction s'opposent à la la cause qui les a produits.

Application 4 : Détection d'un courant électrique

Soit $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ le courant éléctrique qui circule dans le fil haute tension. Montrer que la lampe s'allume.



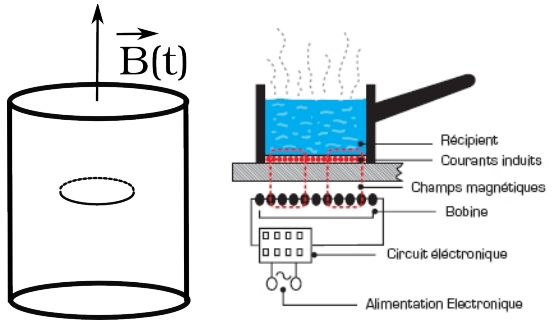
4 Courants de Foucault

Définition :

Les courants de Foucault sont par définition **les courants volumiques induits dans un conducteur**.

Application 5 : Calcul de f.e.m.

Soit $\overrightarrow{B} = B_0 \sin(\omega t)\,\overrightarrow{u}_z$ le champ magnétique qui règne dans un cylindre de rayon R, de hauteur h et de conductivité γ.

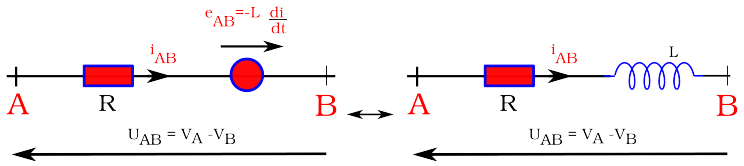


1. En utilisant le théorème de Stokes, on a
$$\oint \frac{\overrightarrow{j}}{\gamma}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$
2. Montrer que les symétries imposent un courant $\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{u}_\theta$.
On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z)
3. En déduire que la densité volumique de courant est
$$\overrightarrow{j} = -\frac{\omega\gamma B_0 r}{2}\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_\theta}$$
4. En déduire que la puissance totale moyenne dissipée dans le cylindre est
$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\omega^2\pi}{16}\gamma B_0^2 h R^4$$

5 Autoinduction

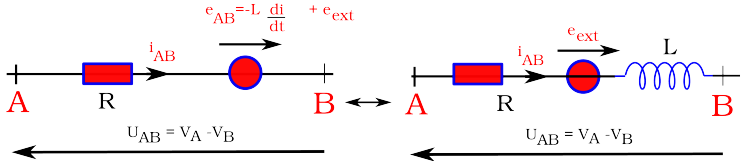
5.a Loi de Faraday

Savoir démontrer №2 :



Dans une bobine sans champ extérieur, le calcul de la f.e.m. auto-induite donne

$$V_A - V_B = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



En présence d'un champ extérieur

$$V_A - V_B = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{ext}}$$

6 Bilan

Bilan

- ✗ Il faut répérer la cause de l'induction : pourquoi le flux de $\overrightarrow{B}$ varie-t-il ?
- ✗ Choisir une orientation, représenter la f.e.m. dans le circuit électrique équivalent orienté dans le sens positif.
  - ☞ Si le circuit est ouvert (ou fermé par une impédance importante : oscilloscope, voltmètre ...) alors $i = 0$ et la tension mesurée est la f.e.m.
  - ☞ Si le circuit est fermé et que l'on néglige l'autoinduction, on calcule le courant $i = \frac{e}{R}$. i est orienté dans le sens positif.
  - ☞ Si le circuit est fermé et que L n'est pas négligée on a une équation sur i

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = e$$

i est orienté dans le sens positif.

III Circuit mobile dans un champ magnétique : induction de Lorentz

1 Force électromotrice d'induction

On utilise la relation de Faraday ; la relation suivante est HP

$$\boxed{e = \int_A^B \left(\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}\right).\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}$$

Application 6 : Rails de Laplace

On considère une tige mobile située entre A et B, on note $\vec{v}$ sa vitesse dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude. La tige de longueur ℓ peut se déplacer sur des rails (dits rails de Laplace). Le circuit est fermé et on note R la résistance équivalente de l'ensemble du circuit. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique permanent $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ et on donne une vitesse $v_0 \vec{u}_x$ à la barre. On néglige l'autoinduction du circuit.

1. Discuter physiquement de ce qu'il se passe.
2. Ecrire l'équation électrique du circuit, en déduire le courant i
3. Ecrire l'équation mécanique, en déduire la loi de vitesse

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \tau = \frac{Rm}{B_0^2 \ell^2}$$

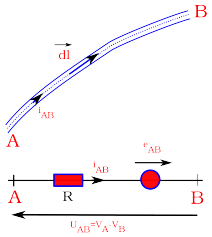
4. Calculer l'énergie dissipée par effet Joule dans la barre. Comparer à la variation d'énergie cinétique.

Convention et f.e.m.

On choisit une orientation positive de A vers B. Les conséquences sont les suivantes :

- ✗ Le vecteur $\vec{d\ell}$ est orienté de A vers B. Il est utilisé pour le calcul du flux coupé et pour la circualtion.
- ✗ Le courant que l'on va calculer sera orienté de A vers B et noté i_{AB}
- ✗ Les f.e.m. que nous allons calculer sont orientées de A vers B
- ✗ Dans $\mathscr{R}'$ la barre est fixe, la f.e.m. peut donc s'écrire

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$



2 Loi d'Ohm locale

On considère un solide qui se déplace à la vitesse $V\vec{u}_x$ dans un champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

Un champ électrique appliqué (celui qui provoque le passage du courant) est $\vec{E} = E_y \vec{u}_y$. A cause du phénomène de Hall, on trouve un champ suivant $\vec{u}_x$. Au final,

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y$$

On note $\vec{U} = U\vec{u}_y$, la vitesse des électrons par rapport à la barre.

Savoir démontrer №3 : loi d'Ohm locale

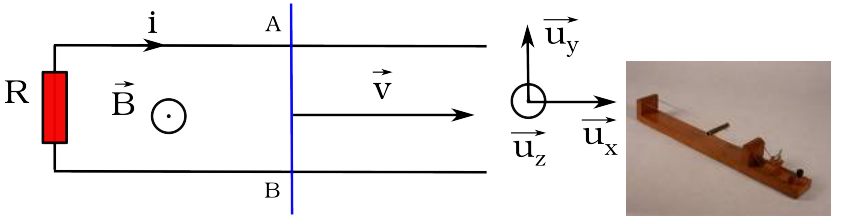
On a

$$\vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m}\left(\vec{E} + \left(\vec{U} + \vec{V}\right) \wedge \vec{B}\right)$$

Le vecteur $\vec{j}$ est suivant $\vec{u}_y$ (le courant ne peut pas passer perpendiculairement à la barre), donc

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\left(E_y - VB\right)\vec{u}_y}$$

La composante suivant $\vec{u}_x$, $\vec{U} \wedge \vec{B}$ est compensée par un champ électrique suivant $\vec{u}_x$: c'est le champ de Hall.



Bilan

- ✗ Il faut répérer la cause de l'induction : quelle partie du circuit est mobile dans un champ $\overrightarrow{B}$?
- ✗ Choisir une orientation, calcule de la fem : circualtion de $\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}$
- ✗ Représenter la f.e.m. dans le circuit électrique équivalent orienté dans le sens positif.
- ✗ Ecrire l'équation électrique :
  - ☞ Si le circuit est ouvert (ou fermé par une impédance importante : oscilloscope, voltmètre ...) alors $i = 0$ et la tension mesurée est la f.e.m.
  - ☞ Si le circuit est fermé et que l'on néglige l'autoinduction, on calcule le courant $i = \frac{e}{R}$. i est orienté dans le sens positif.
  - ☞ Si le circuit est fermé et que L n'est pas négligé on a une équation sur i

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = e$$

  i est orienté dans le sens positif.
  - ✗ Pour une excitation sinusoïdale, on passe en notation complexe.

IV Haut parleur

1 Description

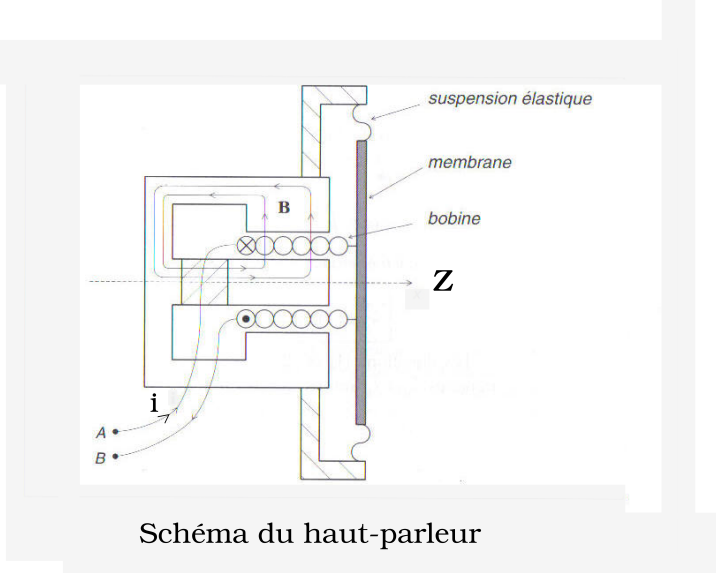


Schéma du haut-parleur

2 Equation mécanique

Savoir démontrer №4 : Equation mécanique

On trouve l'équation mécanique

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz - Ki = 0$$

Avec une géométrie simplifiée, on trouve $K = 2\pi rNB$

3 Equation électrique

Savoir démontrer №5 : Equation électrique

On trouve l'équation mécanique

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + K\dot{z} = e$$

Avec une géométrie simplifiée, on trouve $K = 2\pi rNB$

4 Bilan énergétique

Savoir démontrer №6 : Bilan énergétique

On trouve l'équation bilan d'énergie

$$ei\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{z}\right)^2 + \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}kz^2\right) + Ri^2\mathrm{d}t + \alpha v^2\mathrm{d}t$$

5 Etude en régime sinusoïdal

Savoir démontrer №7 : Etude en régime sinusoïdal

On trouve une impédance électrique équivalent

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{K^2}{\alpha + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)}$$

On trouve donc le circuit équivalent :

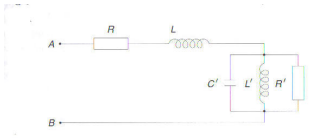
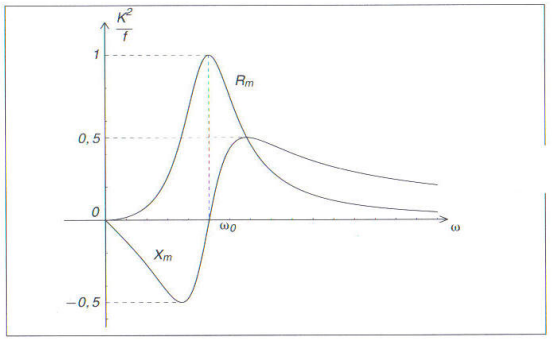


Schéma électrique équivalent du haut-parleur.



6 Couplage électromécanique parfait

Savoir démontrer №8 : Couplage électromécanique parfait

La puissance $\mathcal{P}_e$ de la f.e.m induite est

$$\mathcal{P}_e = ei = -Kvi$$

La puissance des forces de Laplace $\mathcal{P}_\ell = Fv = Kvi$.

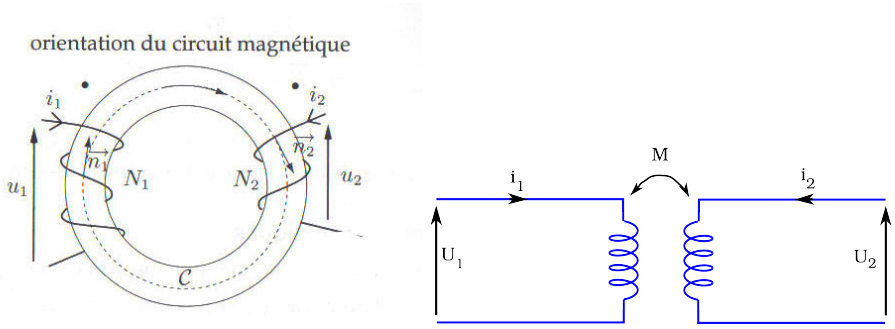
Important : couplage parfait

On peut généraliser le résultat trouvé dans le cas du haut parleur : lors d'un **couplage électro-mécanique parfait**, la puissance $\mathcal{P}_e$ de la f.e.m induite est égale à la puissance des forces de Laplace $\mathcal{P}_\ell$.

$$\boxed{\mathcal{P}_e + \mathcal{P}_\ell = 0}$$

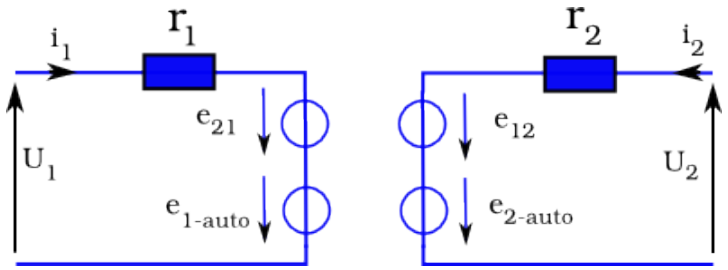
V Circuits magnétiques couplés

1 Couplage magnétique de deux circuits



⚠ Attention… - Le point indique que le fil sort par le dessus de l'enroulement. - Fonctionnement uniquement en régime sinusoïdal.

1.a Equations électriques de deux circuits couplés



Savoir démontrer №9 : Equations couplées

On a les deux équations couplées :

$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + r_1 i_1$$

$$u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + r_2 i_2$$

1.b Energie magnétique

Savoir démontrer №10 : Bilan énergétique

On a le bilan énergétique suivant

$$(u_1 i_1 + u_2 i_2)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right) + \left(r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2\right)\mathrm{d}t$$

1.c Coefficient de couplage

Application 7 : Coefficient de couplage

On montre que $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$.
On donne alors le coefficient de couplage

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \in [0,1]$$

Définition :

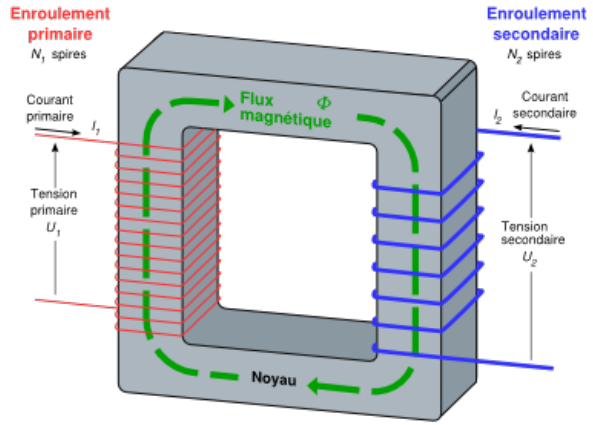
On dit que le couplage entre deux circuit est parfait lorsque toutes les lignes de champ magnétique du premier traversent la surface du deuxième. Pour un couplage parfait

$$M = \sqrt{L_1\ L_2} \Leftrightarrow k = 1$$

2 Présentation d'un transformateur parfait

Définition :

On dit qu'un transformateur est parfait ou idéal si :
- ✗ Le couplage magnétique est parfait
- ✗ La puissance électrique reçue par le primaire est intégralement trasnférée dans le secondaire.



3 Transformateur idéal

Savoir démontrer №11 : Gain en tension

Si on applique une tension u_1 sur le primaire, **le secondaire étant à vide**, on trouve

$$\boxed{\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} = m}$$

Savoir démontrer №12 : Gain en courant

En utilisant la conservation de la puissance pour un transformateur parfait, on trouve

$$\boxed{\frac{i_2}{i_1} = -\frac{1}{m}}$$

Pour les valeurs efficaces, on a

$$\frac{I_2}{I_1} - \frac{1}{m}$$

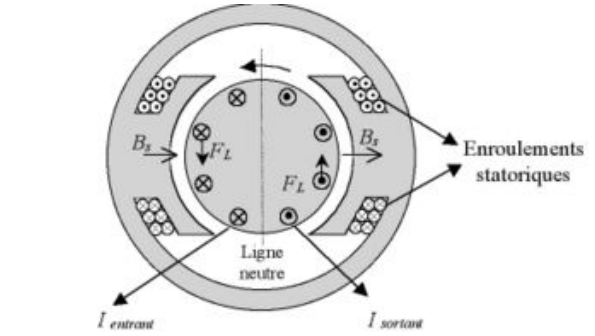
Application 8 : Adaptation d'impédance

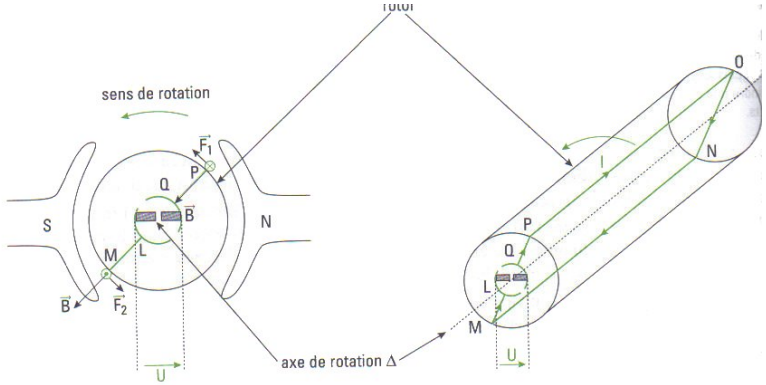
L'impédance équivalente, vue du primaire au système composé du transformateur et de l'impédance $\underline{Z}$ est :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}}{m^2}$$

On dit que le transformateur permet **d'adapter l'impédance** (avec un choix judicieux de m).

VI Etude du moteur à courant continu

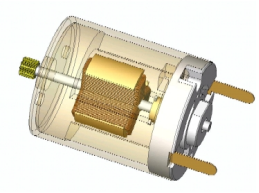




Chapitre F8 : Compléments

Exemple de transformateur

PARTIE F : ELECTROMAG.
F-1 : Conduction électrique
F-2 : Electrostatique
F-3 : Exemples
F-4 : Magnétostatique
F-5 : Exemples
F-6 : Equations de Maxwell
F-7 : Induction
F-8 : Compléments



Moteur à courant continu

I Relations de passage aux interfaces - HP

1 Distribution surfacique

Lorsque les distributions de charges et/ou de courants sont réparties sur de très faibles épaisseur, il est pratique de les modéliser comme des distributions surfaciques $\{\sigma, \overrightarrow{j}_S\}$ (limite des répartitions volumiques pour une épaisseur $\to 0$).

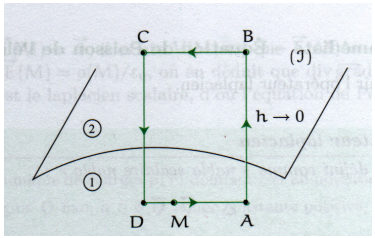
Cela crée des discontinuités artificielles du champ électromagnétique : on cherche ici les relations entre les champs **de part et d'autre** de l'interface et non sur l'interface.

2 Relations de passage pour le champ électrique

Savoir démontrer №1★ : Continuité de la composante tangentielle ★

A la traversée d'une interface (Σ), chargée ou non, la composante tangentielle du champ $\overrightarrow{E}$ est **continue** en tout point de l'interface

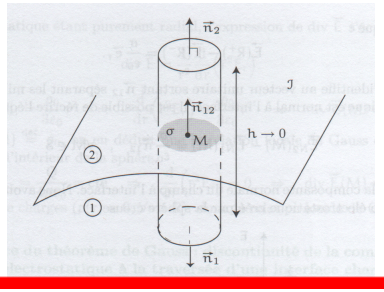
$$\overrightarrow{E}_{T_1}(M) = \overrightarrow{E}_{T_2}(M) \quad \forall M \in (\Sigma)$$



Savoir démontrer №2★ : Discontinuité de la composante normale ★

A la traversée d'une interface (Σ), localement chargée avec la densité surfacique $\sigma(M)$, la composante normale du champ $\overrightarrow{E}$ subit une **discontinuité** en tout point de l'interface

$$\overrightarrow{E}_{N_2}(M) - \overrightarrow{E}_{N_1}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}_{12} \quad \forall M \in (\Sigma)$$



Application 1 : Champ électrostatique écranté

On a montré que le potentiel dans un plasma s'écrit $V(r) = V_0 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$ pour $r > r_0$, avec r_0 le rayon moyen des ions positifs présents dans le plasma.

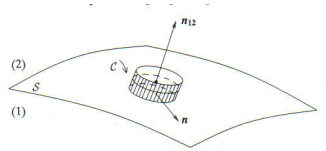
1. En déduire le champ électrique associé.
2. Justifier la présence d'une densité surfacique de charge σ à la « traversée » de l'ion qu'on modélisera comme une sphère creuse. La déterminer.

3 Relations de passage pour le champ magnétique

Savoir démontrer №3★ : Continuité de la composante normale ★

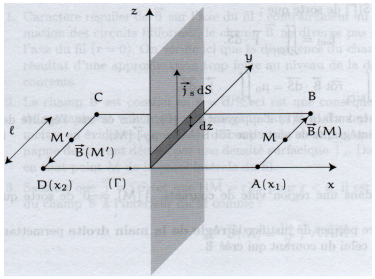
A la traversée d'une interface (Σ), parcourue ou non par des courants, la composante normale du champ $\overrightarrow{B}$ est **continue** en tout point de l'interface

$$\overrightarrow{B}_{N_1}(M) = \overrightarrow{B}_{N_2}(M) \quad \forall M \in (\Sigma)$$



Savoir démontrer №4★ : Discontinuité de la composante tangentielle ★

A la traversée d'une interface (Σ), parcourue par des courants surfaciques de densité $\vec{j}_S$, la composante tangentielle du champ $\vec{B}$ subit une **discontinuité** en tout point de l'interface



$$\vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12} \quad \forall M \in (\Sigma)$$

Application 2 : Se servir des relations de passage

La distribution de courants permettant d'obtenir en coordonnées cylindriques un champ $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{u}_\theta$ avec $B_\theta(r<a) = B_1\frac{r^2}{a^2}$ et $B_\theta(r>a) = B_2\frac{a}{r}$, s'écrit

$$j(r) = \begin{cases} \frac{3rB_1}{\mu_0 a^2} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de $B(r)$ et commenter.
2. En déduire...

4 Résumé

Composante tangentielle

$$\vec{E}_{T_1} = \vec{E}_{T_2} \qquad \text{(F.18)}$$

$$\vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n_{12}} \qquad \text{(F.19)}$$

Composante normale

$$\vec{E}_{N_2} - \vec{E}_{N_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12} \qquad \text{(F.20)}$$

$$\vec{B}_{N_1} = \vec{B}_{N_2} \qquad \text{(F.21)}$$

Ces relations se substituent une à une aux 4 équations de Maxwell :

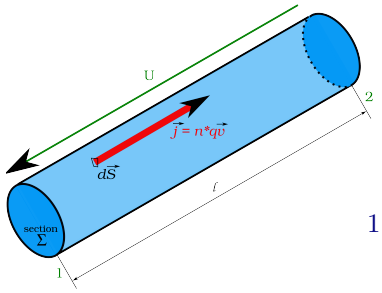
	(F.33) à MF	(F.35) à MG	(F.36) à MΦ	(F.34) à MA
Démonstration	en **statique**	cas général	cas général	en **statique**

Il est impératif de connaître ces relations de passage. Ainsi, dès qu'un problème présente une interface, il faut penser soit à les utiliser, soit à les vérifier : cela permet d'écrire des conditions aux limites (cf. Appli 0et 2).

II Exemples de bilans énergétiques

1 Fil conducteur en régime statique

Application 3 : Bilan d'énergie dans un conducteur ohmique



Soit un cylindre conducteur de grande longueur, d'axe (Oz), de conductivité γ et de rayon a parcouru par une densité de courant $\vec{j} = j\vec{u}_z$ uniforme et stationnaire.

On néglige les effets de bords.

1. Calculer la puissance électromagnétique reçue par un tronçon du fil de hauteur h en utilisant le vecteur de Poynting.
2. Exprimer la résistance de ce tronçon. Conclure grâce au bilan énergétique de Poynting.

Réponse :

*On néglige les effets de bords : tout se passe comme si le conducteur était **infini**.*

1. *On doit calculer*

$$\Phi_{reçu} = \oiint \vec{\Pi}.\mathrm{d}\vec{S}_{ext} = \iint \vec{\Pi}.\mathrm{d}\vec{S}_{lat} + \iint \vec{\Pi}.\mathrm{d}\vec{S}_{gauche} + \iint \vec{\Pi}.\mathrm{d}\vec{S}_{droite} \qquad \text{(F.22)}$$

Il faut donc exprimer $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{j}\wedge\vec{B}}{\gamma\mu_0}$.

Le champ électrostatique est clairement nul à l'extérieur (car $\vec{j} = 0$ *, pas de charges statique* $(\rho = 0)$ *et statique donc* $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ *).*

Pour calculer $\vec{B}$ *à l'extérieur on utilise le th d'*Ampère *:*

✗ *Symétrie cylindrique :* $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ *est plan de sym. donc* $\vec{B}(M)\perp(\Pi)_{sym}$ *donc* $\vec{B}(M)$ *est suivant* $\vec{u}_\theta$.

✗ *invariance selon* z *et* θ *donc*

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$$

✗ *Théorème d'Ampère sur un contour fermé Γ : cercle de centre m (projeté de M sur l'axe Oz) de rayon r, **orienté dans le sens direct**.*

$$\oint_{(\Gamma)} \overrightarrow{B}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0\left[i_c(t)+i_D(t)\right]$$

$$= \mu_0\left[\iint \overrightarrow{j}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \varepsilon_0 \iint \underbrace{\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}}_{=\overrightarrow{0}\ car\ rég.\ statique}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}\right] \qquad \text{(F.23)}$$

$$= \mu_0 j \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{a} r\mathrm{d}r$$

$$2\pi r B(r) = \begin{cases} \mu_0 j\pi a^2 & si\ r \geqslant a \\ \mu_0 j\pi r^2 & si\ r \leqslant a \end{cases}$$

d'où, en posant $I = j\pi a^2$,

$$\overrightarrow{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 j\frac{a^2}{2r}\overrightarrow{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{u}_\theta & si\ r \geqslant a \\ \mu_0 j\frac{r}{2}\overrightarrow{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r\overrightarrow{u}_\theta & si\ r \leqslant a \end{cases} \qquad \text{(F.24)}$$

On en déduit

$$\overrightarrow{\Pi}(r) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & si\ r \geqslant a \\ \frac{1}{\gamma\mu_0}\mu_0 j^2\frac{r}{2}\left(\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{u}_\theta\right) = -\frac{j^2 r}{2\gamma}\overrightarrow{u}_r & si\ r \leqslant a \end{cases} \qquad \text{(F.25)}$$

⚠ $\overrightarrow{\Pi}$ *est orienté vers l'intérieur du conducteur.*
On reprend le calcul de l'équation (F.37) *:*

$$\Phi_{reçu,\Pi} = \iint \underbrace{\overrightarrow{\Pi}}_{en\ r=a}.\underbrace{\mathrm{d}\overrightarrow{S}_{lat,ext}}_{=a\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\overrightarrow{u}_r} + \iint \underbrace{\overrightarrow{\Pi}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}_{gauche}}_{=0\ car\ \overrightarrow{u}_r.\overrightarrow{u}_z} + \iint \underbrace{\overrightarrow{\Pi}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}_{droite}}_{=0\ car\ \overrightarrow{u}_r.\overrightarrow{u}_z} \qquad \text{(F.26)}$$

$$= -\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta a\frac{j^2 a}{2\gamma}$$

$$\boxed{\Phi_\Pi = -\frac{h}{\gamma\pi a^2}I^2}$$

— *Résistance d'un cylindre de section constante : $R = \frac{\ell}{\gamma S} \underbrace{=}_{ici} \frac{h}{\gamma\pi a^2}$.*

D'où $\boxed{\Phi = -RI^2}$.
D'après le bilan d'énergie en stationnaire,

$$0 = -\Phi - \iiint \mathscr{P}_{vol}\mathrm{d}\tau_P$$

Ici, $\mathscr{P}_{vol} = \frac{j^2}{\gamma}$, soit en intégrant sur tout le volume du conducteur : $\mathcal{P}_J = \frac{j^2}{\gamma}\left(\pi a^2 h\right)$, et finalement

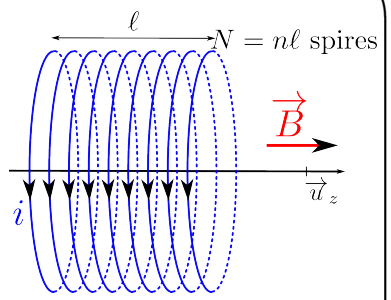
$$\mathcal{P}_J = \frac{h}{\gamma\pi a^2}I^2 = -\Phi_\Pi$$

ce qui s'interprète de la manière suivante : la totalité de l'énergie reçue par le champ électromagnétique (de la part du générateur extérieur) est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

2 Solénoïde infini

Application 4 : Bilan d'énergie dans une bobine

Soit un solénoïde idéal d'axe (Oz), de rayon a, parcouru par $i(t)$ comportant n spires par unité de longueur. On néglige les effets de bords et on se place dans l'ARQS avec $a \ll \lambda = c\tau$ où τ est un temps caractéristique associé aux évolutions de $i(t)$.



1. Calculer la puissance électromagnétique reçue sur un tronçon cylindrique de longueur ℓ et de rayon $r = a^-$, à intérieur au solénoïde.
2. On donne l'inductance propre $L = \mu_0 n^2 \ell\pi a^2$ pour une longueur ℓ de solénoïde. Montrer que la puissance précédente correspond à la variation dans le temps d'une énergie magnétique d'expression connue.
3. Le bilan de Poynting est-il vérifié ?

Réponse :

1. *On cherche tout d'abord à exprimer le vecteur de* Poynting *:* $\overrightarrow{\Pi} = \dfrac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$.

On utilise le champ magnétique d'un solénoïde infini : $\overrightarrow{B} = \mu_0 n i(t) \overrightarrow{u}_z$ *à l'intérieur du solénoïde, il est nul à l'extérieur.*
Il faut déterminer le champ électrique correspondant, donné par l'équation de Maxwell-Faraday *:* $\overrightarrow{\text{rot}}\, E = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \underbrace{=}_{ici} -\mu_0 n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \overrightarrow{u}_z$.

On en déduit que $\overrightarrow{E}$ *est à géométrie cylindrique, ne dépendant que de* r *(invariance par rotation/*θ *et par translation selon* z*) et est orienté selon* $\overrightarrow{u}_\theta$ *(car le rotationnel de* $\overrightarrow{E}$ *est suivant* $\overrightarrow{u}_z$*, donc nécessairement* $\overrightarrow{E}$ *est suivant* $\overrightarrow{u}_\theta$ *(règle de la baffe !)).*
On calcule la circulation de $\overrightarrow{E}$ *le long d'un cercle de centre* m *(projection de* M *sur l'axe* Oz*) et de rayon* r *:*

$$\oint \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \iint \overrightarrow{\text{rot}}\, E.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\mu_0 n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \iint \overrightarrow{u}_z.\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

$$\textit{soit} \quad 2\pi r E(r) = -\mu_0 n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \pi r^2$$

$$\textit{Finalement,} \quad \boxed{E_\theta(r) = -\frac{\mu_0}{2} n r \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

On en déduit $\overrightarrow{\Pi} = \dfrac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$ *:*

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = -\frac{1}{2}\mu_0 n^2 r i \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \overrightarrow{u}_r}$$

à nouveau orienté selon $-\overrightarrow{u}_r$.
On peut alors calculer le flux reçu par le solénoïde sur un tronçon de longueur ℓ *:*

$$\Phi_{reçu,\Pi} = \iint \underbrace{\overrightarrow{\Pi}}_{en\ r=a} . \underbrace{\mathrm{d}\overrightarrow{S}_{lat,ext}}_{=a\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,\overrightarrow{u}_r} + \iint \underbrace{\overrightarrow{\Pi}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}_{couvercles,ext}}_{=0\ car\ \overrightarrow{\Pi} \perp \mathrm{d}\overrightarrow{S}_{ext}} \qquad \text{(F.27)}$$

$$= -\frac{1}{2}\mu_0 n^2 a i \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(2\pi a \ell)$$

$$\boxed{\Phi_\Pi = -\mu_0 n^2 \ell \pi a^2 i \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

2. *En identifiant* $L = \mu_0 n^2 \ell \pi a^2$*, on a*

$$\Phi_\Pi = -Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

3. *Bilan de* Poynting *:*

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} = -\Phi_\Pi - \iiint \underbrace{\overrightarrow{j}}_{\substack{=\overrightarrow{0}\ à\ l'intérieur\ du\ solénoïde}} .\overrightarrow{E}\,\mathrm{d}\tau_P$$

$$Or \quad \frac{\partial U_{em}}{\partial t} \underbrace{=}_{par\ déf.} \frac{\partial}{\partial t}\left[\iiint u_{em}\mathrm{d}\tau_P\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\iiint \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)\mathrm{d}\tau_P\right]$$

$$Avec\ \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\mu_0^2}{4} n^2 \left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)^2 a^2 \underbrace{\simeq}_{odg} \frac{\mu_0}{8c^2} n^2 a^2 \left(\frac{I_m}{\tau}\right)^2$$

$$et\ \frac{B^2}{2\mu_0} \underbrace{\simeq}_{odg} \frac{1}{2\mu_0}\mu_0^2 n^2 I_m^2$$

Par comparaison des deux termes :

$$\frac{u_m}{u_e} \underbrace{\simeq}_{odg} \frac{2\mu_0^2 n^2 I_m^2 (2c\tau)^2}{2\mu_0\mu_0 n^2 a^2 I_m^2},\ soit \quad \left(\frac{2c\tau}{a}\right)^2 \gg 1$$

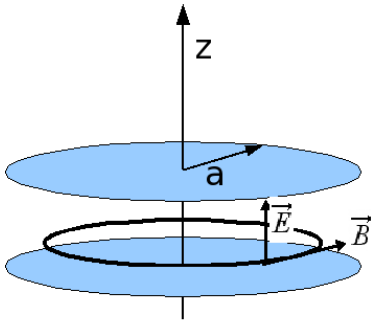
Donc dans l'ARQS (magnétique), le bilan de Poynting *est vérifié : on a*

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} \simeq \frac{\partial}{\partial t}\left[\iiint \left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)\mathrm{d}\tau_P\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\mu_0 n^2 i(t)^2 \pi a^2 \ell\right]$$

$$Soit \quad \boxed{\frac{\partial U_{em}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = -\Phi_\Pi}$$

3 Condensateur plan

Application 5 : Bilan d'énergie dans un condensateur



Soit un condensateur plan à armatures circulaires d'axe (Oz), de rayon a et distantes de e. Il est alimenté par un courant électrique $i(t)$ orienté comme l'axe (Oz), tel que $a \ll \lambda = c\tau$ où τ est un temps caractéristique associé aux évolutions de $i(t)$.
On admet alors que le champ électrique inter-armatures est uniforme (i.e. on néglige les effets de bords et on se place dans l'ARQS). De plus, les armatures sont supposées être des conducteurs parfaits (champ électrique nul en leur sein).

1. Calculer la puissance électromagnétique reçue par l'espace inter-armatures.
2. On donne la capacité $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$ du condensateur. Montrer que la puissance précédente correpsond à la variation dans le temps d'une énergie électrique d'expression connue.
3. Le bilan de Poynting est-il vérifié ?

Réponse :

On reprend la même démarche...

⚠ Attention...

Ici, on doit se placer en ARQS électrique, ce qui signifie que $\vec{j} \simeq \vec{0}$ et que MA s'écrit simplement : $\overrightarrow{\text{rot}}\, B = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

1. *Dans l'ARQS, on peut utiliser l'expression du champ électrique créé par un condensateur en régime statique, soit $\vec{E}(t) = \dfrac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$ avec $\sigma(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S} = \dfrac{\int i(t)\mathrm{d}t}{\pi a^2}$.*
   Au sein du condensateur, on a un champ magnétique (dû aux variations temporelles du champ électrique, cf. chapitre F- de la forme $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{u}_\theta$. On calcule $B_\theta(r)$ à partir du théorème d'Ampère généralisé

$$\oint \vec{B}.\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\varepsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\mathrm{d}\vec{S} = \mu_0\varepsilon_0 \iint \frac{\dot{\sigma}(t)}{\varepsilon_0} \underbrace{\mathrm{d}S}_{=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta} \tag{F.28}$$

$$2\pi r B_\theta(r) = \pi r^2 \mu_0 \dot{\sigma}(t)$$

On en déduit $\boxed{B_\theta(r) = \dfrac{1}{2}\mu_0 r\dot{\sigma}(t) = \dfrac{\mu_0 i(t) r}{2\pi a^2}}$

Calcul du vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$

$$\boxed{\vec{\Pi} = -\frac{r}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\sigma(t)i(t)\vec{u}_r}$$

à nouveau orienté selon $-\vec{u}_r$.
Calcul du flux reçu par le condensateur entre ses armatures :

$$\Phi_{reçu,\Pi} = \iint \underbrace{\vec{\Pi}}_{en\ r=a}.\underbrace{\mathrm{d}\vec{S}_{lat,ext}}_{=a\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\vec{u}_r} + \iint \underbrace{\vec{\Pi}.\mathrm{d}\vec{S}_{armatures,ext}}_{=0\ car\ \vec{\Pi}\perp\mathrm{d}\vec{S}_{ext}} \tag{F.29}$$

$$= \iint -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a}\sigma(t)i(t)a\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$\boxed{\Phi_\Pi = -\frac{e}{\varepsilon_0}\sigma(t)i(t)}$$

2. *En écrivant ce résultat à l'aide de la charge présente sur les armatures (et supposée uniformément répartie sur leur surface) à l'instant t, on obtient*

$$\Phi_\Pi = -\frac{e}{\varepsilon_0}\left(\frac{q(t)}{\pi a^2}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{e}{\varepsilon_0 S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}q^2(t)\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{q^2(t)}{2C}\right) \tag{F.30}$$

On retrouve bien l'énergie électrique emmagasinée par le condensateur : $U_{él} = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$ avec $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$.

3. *Bilan de Poynting et discussion*
   Il faut comparer les termes de densité volumique d'énergie magnétique et électrique : $\dfrac{B^2}{2\mu_0}$ et $\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ en $r = a$, soit $\dfrac{u_m}{u_e} \underbrace{\simeq}_{odg} \dfrac{1}{2\mu_0}\left(\dfrac{\mu_0 i(t)}{2\pi a}\right)^2 \times \dfrac{2}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{\varepsilon_0\pi a^2}{\tau i(t)}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{2\tau c}\right)^2 \ll$

1. *Cela permet donc, dans l'ARQS (électrique), de négliger l'énergie magnétique devant l'énergie électrique dans le condensateur.*

Le bilan de Poynting *s'écrit*

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} = -\Phi_\Pi - \iiint \underbrace{\overrightarrow{j}}_{=\overrightarrow{0} \text{ à l'intérieur du condensateur}} .\overrightarrow{E}\,\mathrm{d}\tau_P$$

soit finalement simplement

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}\tau_P\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\left(\pi a^2 e\right)\right] \underbrace{=}_{\sigma=\frac{q}{S}} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\frac{q^2 e}{\pi a^2 \varepsilon_0}\right]$$

Avec $C = \dfrac{\pi a^2 \varepsilon_0}{e}$*, on reconnaît bien l'expression du flux du vecteur de* Poynting *de l'équation* (F.45) *: OK !*

III Effet de peau dans un conducteur

1 Electroneutralité

Application 6 : Equation vérifiée par ρ

1. Montrer que ρ vérifie l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma \rho}{\epsilon_0} = 0$$

2. Montrer qu'au bout d'un temps τ, le milieu est neutre.
3. Sachant que $\tau \simeq 10^{-14}$ s, commentez.

2 Equation de diffusion vérifiée par les champs

Savoir démontrer №5 : Equation de diffusion vérifiée par le champ électrique

Le champ électrique, se propageant dans un conducteur ohmique dans le domaine basses fréquences, pour lequel l'ARQS et l'hypothèse d'électroneutralité sont vérifiées, satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\triangle \overrightarrow{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Cette équation constitue une **équation de diffusion**.

Remarque :

Par application de la loi d'Ohm, on obtient de même

$$\triangle \overrightarrow{j} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t}$$

et une équation analogue pour le champ magnétique, en calculant $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B})$

$$\triangle \overrightarrow{B} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

3 Effet de peau dans le conducteur

3.a Modélisation du conducteur et équation en régime harmonique

Savoir démontrer №6 : Direction du champ électrique dans un conducteur en régime variable

On considère un conducteur semi-infini ($z > 0$) (***on néglige les effets de bords***), soumis à un champ électrique sinusoïdal à la pulsation $\omega \ll \omega_E$ et dirigé suivant $\overrightarrow{u}_x$.
Alors le champ résultant en tout point M du conducteur s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M,t) = E(z,t)\overrightarrow{u}_x}$$

3.b Détermination du champ dans le conducteur

DÉFINITION :

On appelle **épaisseur (ou profondeur) de peau** la quantité

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

homogène à une longueur.

Application 7 : Epaisseur de peau dans le cuivre

D'après la définition de l'épaisseur de peau, celle-ci dépend de la fréquence ($\omega = 2\pi f$). On donne pour le cuivre $\gamma_0 = 5,9.10^7$ S.m^{-1} et on rappelle que $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$Hm.

f	100 Hz	1 kHz	100 kHz	10 MHz	1 GHz
δ (en μm)	$6,55.10^3$	$2,07.10^3$	207	20,7	2,07

Dans le domaine hyperfréquence

f en MHz	200	300	500	1200	4000	10000
δ (en μm)	4,6	3,8	2,9	1,9	1,0	0,65

Savoir démontrer №7 : Expression du champ électrique dans le conducteur ohmique, en régime variable

En utilisant les **conditions aux limites**

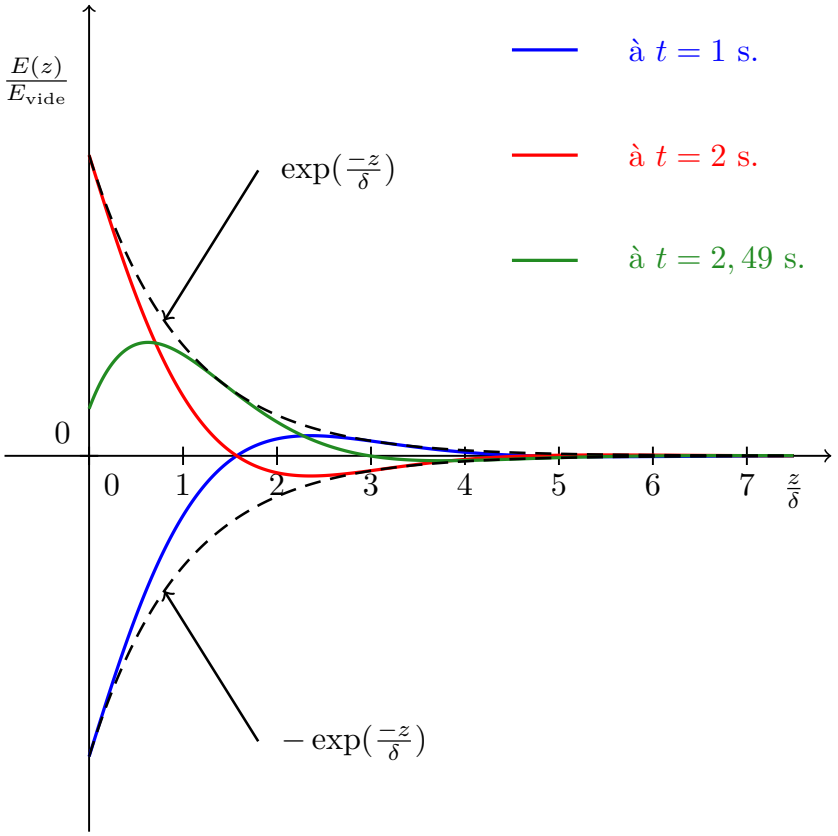
- ✗ en $z \to +\infty$, le champ ne doit pas diverger ;
- ✗ en $z = 0$, continuité de la composante tangentielle du champ électrique

$$\underline{E}(z = 0^+) = \underline{E}(z = 0^-) = E_0$$

on écrit le champ réel

$$\boxed{\overrightarrow{E}(z,t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \overrightarrow{u}_x}$$

3.c Discussion de l'effet de peau électromagnétique



L'amplitude du champ électrique $\overrightarrow{E}$ diminue lors de sa progression dans le conducteur. La distance caractéristique de cette décroissance est $\delta(\omega)$.

DÉFINITION :

On appelle **effet de peau** l'aptitude d'un conducteur à s'opposer à la pénétration d'un champ électromagnétique variable en son sein.
le champ électromagnétique se trouve réparti au voisinnage de la surface sur une profondeur qui vaut quelque fois l'épaisseur de peau $\delta(\omega)$.

Influence de la fréquence et de la conductivité :

Lorsque $\omega \nearrow$, $\delta(\omega) \searrow$;
et lorsque $\gamma_0 \nearrow$, $\delta(\omega) \searrow$ donc l'effet de peau est plus marqué.

Répartition (quasi-)surfacique du courant dans le conducteur :

D'après la loi d'Ohm (et analogie équation diffusion), on a

$$\vec{j} = j_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

avec $j_0 = \gamma_0 E_0$.

Il pourra être intéressant d'écrire une distribution surfacique des courants modélisée par

$$\vec{j}_S = \int_0^{+\infty} \vec{j}\, \mathrm{d}z$$

Application 8 : Calcul d'un vecteur densité de courants surfaciques

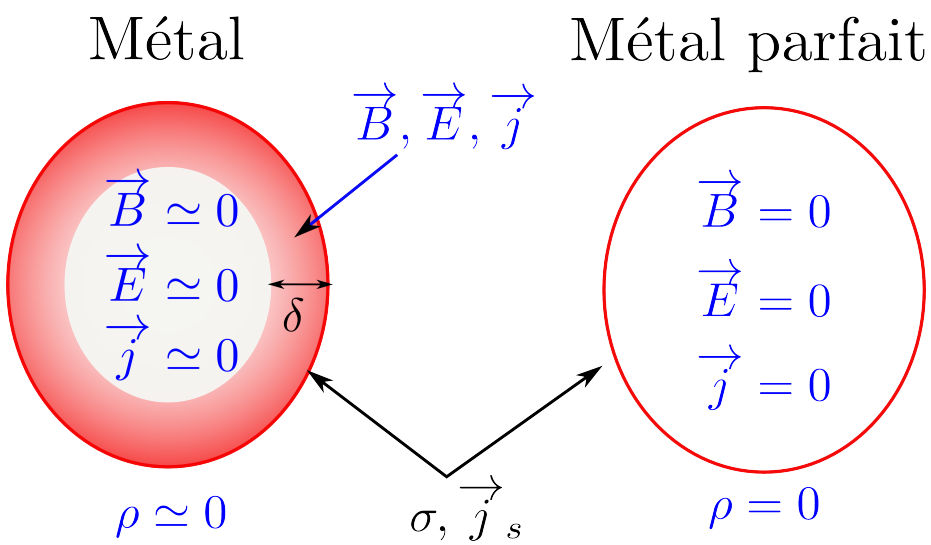
En reprenant les résultats obtenus pour le champ électrique, montrer que

$$\vec{j}_S = \frac{j_0 \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Pertinence du modèle du conducteur semi-infini :

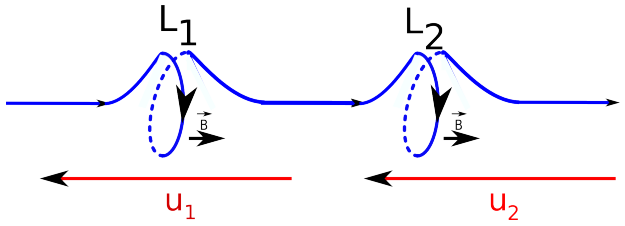
L'exemple du conducteur semi-infini modélisera un problème physique réel dans le cas où le conducteur

- ☞ est une plaque d'épaisseur $d \gg \delta$;
- ☞ présente un rayon de courbure grand devant la profondeur de peau.



IV Mesure d'inductances

1 Bobines avec mutuelle en série



La tension aux bornes de la première bobine est

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

La tension aux bornes de la seconde bobine est

$$u_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

La tension totale est donc

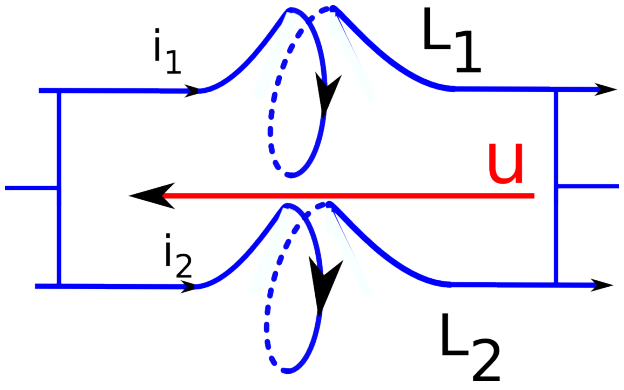
$$u = u_1 + u_2 = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

On en déduit que l'impédance équivalente est

Si on tourne une des bobines par rapport à l'autre (ou si on inverse les bornes d'une des bobines), M devient $-M$, l'impédance équivalent est alors :

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M}$$

2 Bobines avec mutuelle en parallèle



Rque : Sur le dessin on ne voit pas que les deux bobines sont couplées par une mutuelle ; Il faut en fait imaginer que les deux bobinages sont face à face (ou s'interpénètrent) La tension aux bornes de la première bobine est

$$u = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

La tension aux bornes de la seconde bobine est

$$u = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

En égalant les deux tensions, on en déduit que

$$(L_1 - M) \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = (M - L_2) \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

La loi des noeuds permet d'exprimer le courant total $i = i_1 + i_2$.
En remplaçant $i_2 = i - 1$ dans la relation ci-dessus, on trouve

$$(L_1 + L_2 - 2M) \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = (L_1 - M) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Les circuits 1 et 2 ayant des rôles symétriques, on en déduit immédiatement (en inversant 1 et 2) :

$$(L_1 + L_2 - 2M) \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = (L_2 - M) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

La tension u, peut donc s'écrire :

$$u = \frac{L_1}{L_1 + L_2 - 2M} (L_2 - M) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{M}{L_1 + L_2 - 2M} (L_1 - M) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

On peut donc réécrire la relation sous la forme :

$$u = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

On en déduit que l'impédance équivalente est

$$\boxed{L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}}$$

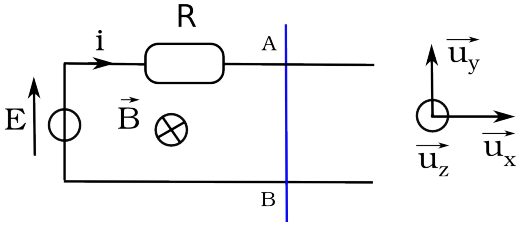
Si on tourne une des bobines par rapport à l'autre (ou si on inverse les bornes d'une des bobines), M devient $-M$, l'impédance équivalent est alors :

$$\boxed{L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}}$$

V Exercices classiques

1 Rails de Laplace

Dans un dispositif des rails de Laplace, on impose une tension E sur les rails. La barre, de largeur ℓ est libre de se déplacer sur les rails conducteurs horizontaux. Soit R la résistance équivalente du système et on néglige l'inductance du circuit. Soit $\vec{B} = -B_0 \vec{u}_z$, le champ magnétique uniforme avec $B_0 > 0$.



1. Décrire les phénomènes qui apparaissent.
2. Donner l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$

Réponse :

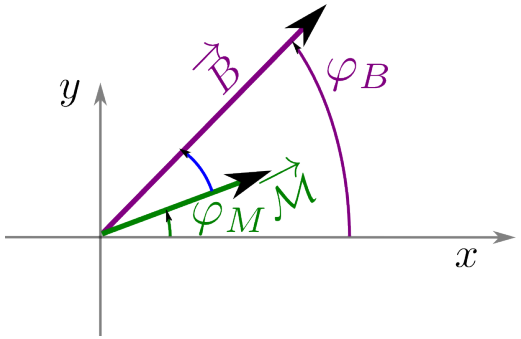
1. *Il y a un mouvement d'un circuit dans un champ magnétique permanent, donc de l'induction de* Lorentz. *Il va donc y avoir une fem d'induction,comme le circiut électrique est fermé cela va donner lieu à un courant électrique. Une force de* Laplace *va s'exercer sur le conducteur orientée vers la droite.*
2. *On choisit une orientation du circuit positive dans le sens du courant.*
   La fem d'induction est $e = \oint \left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\mathrm{d}\vec{\ell}$
   On a
   La circulation se fait sur tout le circuit, mais seule la partie mobile a une vitesse non nulle. On a donc $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}y\vec{u}_y$ *et* $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$.
   Donc
   $$e = \int_\ell^0 B\dot{x}\mathrm{d}y = -B\ell\dot{x}$$
   Deux étapes dans le calcul : équation électrique et équation mécanique :
   (a) *Equation électrique :*
   Le schéma électrique du circuit est R en série avec E (on néglie l'auto-induction car on a une seule spire et non un bobinage)et la fem calculée ci-dessus. On en déduit l'équation
   $$\boxed{E = Ri - e = Ri + B\ell\dot{x}} \quad \text{(F.31)}$$
   (b) *Equation mécanique :*
   On peut calculer la force de Laplace *sur la barre, on a* $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}y\vec{u}_y$ *finalement*
   $$\vec{F} = \int_\ell^0 -iB\mathrm{d}y\vec{u}_x = iB\ell\vec{u}_x$$
   On trouve une force qui éloigne la barre du générateur. La fem est opposée à E : principe de modération. La projection de la RFD sur l'axe des x, donne
   $$\boxed{\ddot{x} = \frac{iB\ell}{m}} \quad \text{(F.32)}$$
   (c) *Simplification des deux équations :*
   En dérivant l'équation (F.46)*, on trouve l'équation vérifiée par i*
   $$\ddot{x} = \frac{EB\ell}{mR} - \frac{B^2\ell^2}{mR}\dot{x}$$
   On peut également l'écrire sous la forme
   $$\boxed{\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau}}$$
   Si la vitesse initiale de la barre est nulle, on a
   $$v(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

2 Moteur synchrone

On considère un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ tournant dans le plan (Oxy) , à la vitesse angulaire constante $\omega_B = \frac{\mathrm{d}\varphi_B}{\mathrm{d}t}$.

On place un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ dans ce champ magnétique. Le moment magnétique tourne lui aussi dans le plan (Oxy), on note $\omega_M = \frac{\mathrm{d}\varphi_M}{\mathrm{d}t}$ sa vitesse angulaire également supposée constante.

On note $\alpha = \left(\vec{\mathcal{M}}, \vec{B}\right)$ l'angle entre les deux vecteurs à $t = 0$.



1. Donner l'angle $\varphi(t) = \varphi_B - \varphi_M$ entre les vecteurs $\to M$ et $\to B$ une date t.
2. Calculer la valeur instantannée du couple magnétique $\vec{\Gamma}$ exercé par le champ $\vec{B}$ sur la spire. En déduire sa valeur moyenne selon les valeurs de $\dot{\varphi}_M$ et $\dot{\varphi}_B$. Dans la suite, on prend $\dot{\varphi}_M = \dot{\varphi}_B$.
3. Dans le cours de mécanique, on montrera que la puissance est $\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v} + \Gamma.\vec{\omega}_M$. Pour quelles valeurs de α, le couple est-il moteur, récepteur ?
4. Donner la puissance maximale que l'on peut obtenir avec cette machine.

Réponse :

1. $\varphi = \varphi_B - \varphi_M$. *Comme* $\omega_B = Cte$, $\varphi_B = \omega_B t$, *on trouve donc :*
   $$\boxed{\varphi = \alpha + (\omega_B - \omega_M)\,t}$$
2. *Le couple subit par l'aimant est* $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$. *On trouve donc un couple suivant* $\vec{u}_z$ *et il vaut :*

$$\overrightarrow{\Gamma} = \mathcal{M}B_0 \sin\left((\omega_B - \omega_M)\,t + \alpha\right)\overrightarrow{u}_z$$

Si $\omega_B \neq \omega_M$, le couple moyen est nul en moyenne temporelle, les forces de frottement finissent par arrêter la spire.

Si $\omega_B = \omega_M$ alors le couple moyen est $\overrightarrow{\Gamma} = \mathcal{M}B_0 \sin\alpha\,\overrightarrow{u}_z$, il doit être positif pour entrainer la spire (= être moteur).

3. *La machine va fonctionner correctement uniquement si $\omega_B = \omega_M$, c'est une machine* ***synchrone****.*
   La puissance va être maximale si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on trouve donc

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}B_0\omega_M$$

3 Moteur asynchrone

On reprend le même dispositif que dans le calcul précédent, mais on tient compte de l'autoinduction et on suppose que $\alpha = 0 \to \varphi(t) = (\omega_B - \omega_M)\,t$.

1. Comment réaliser le champ magnétique tournant ?
2. Evaluer la fem dans la spire.
3. On ne néglige pas l'auto-induction, donner l'équation vérifiée par le courant $i(t)$
4. Montrer que $i(t) = i_0 \sin(\omega_B t - \omega_M t + \phi)$; donner ϕ et i_0.
5. Calculer le moment des forces de Laplace. Simplifier l'expression en utilisant

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

6. Calculer la valeur moyenne du couple. Pour quelles valeurs de ω et ω_0, le couple est-il moteur ?

Réponse :

1. *Le champ magnétique est*

$$B_x = B_0 \cos\omega_B t$$
$$B_y = B_0 \sin\omega_B t$$

On peut réaliser un tel champ en utilisant deux solénoïdes ; un qui produit un champ suivant $\overrightarrow{u}_x$, l'autre suivant $\overrightarrow{u}_y$. Les deux solénoïdes doivent être alimentés par des courants de même intensité et déphasés de $\frac{\pi}{2}$.

2. *Il y a un mouvement dans un champ $\overrightarrow{B}$, donc induction de Lorentz. On calcule e par la variation du flux.*

$$\phi = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = SB_0 \cos(\omega_B t - \omega_M t)$$

Donc on a la fem

$$e = SB_0\left(\omega_B - \omega_M\right)\sin(\omega_B t - \omega_M t)$$

3. *On pose $\Omega = (\omega_B - \omega_M)$. On se place en notation complexe à la pulsation Ω.*
   On ne néglige pas l'auto-induction

$$\boxed{L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = SB_0\Omega\sin(\Omega t)}$$

On passe en notation complexe avec des parties imaginaires (car terme en sinus) : on cherche i sous la forme $i = i_0 \sin(\Omega t + \phi)$.
On en déduit, en notation complexe que

$$\underline{i} = \frac{SB_0\Omega}{R + jL\Omega}$$

avec $i_0 = \frac{SB_0\Omega}{\sqrt{R^2+L^2\Omega^2}}$ et $\tan\phi = -\frac{L\Omega}{R}$. On peut également exprimer $\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2\Omega^2}}$

4. *Le moment magnétique de la spire est $\overrightarrow{\mathcal{M}} = IS\overrightarrow{n}$, le moment de la force est*

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B} = i(t)SB_0 \sin(\omega_0 t - \omega t)\,\overrightarrow{u}_z$$

Soit finalement $\overrightarrow{\Gamma} = i_0 SB_0 \sin\Omega t \sin(\Omega t + \phi)\,\overrightarrow{u}_z$
On peut simplifier avec l'expression donnée :

$$\overrightarrow{\Gamma} = i_0 SB_0\left(\cos(2\Omega t + \phi) - \cos(\phi)\right)\overrightarrow{u}_z$$

5. *La moyenne dans le temps du moment de la force est :*

$$\left\langle\overrightarrow{\Gamma}\right\rangle = -i_0 SB_0 \cos(\phi)\,\overrightarrow{u}_z$$

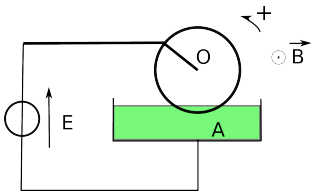
soit

$$\boxed{\left\langle\overrightarrow{\Gamma}\right\rangle = \frac{RS^2B_0^2\Omega}{2\left(R^2 + L^2\Omega^2\right)}\overrightarrow{u}_z}$$

Le couple calculé est le couple reçu, un système est moteur si le couple est négatif.
Le système est moteur si $\left\langle\overrightarrow{\Gamma}\right\rangle < 0 \Leftrightarrow \omega > \omega_0$

4 Roue de Barlow

On considère une roue de Barlow de rayon a, placée dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B_0 \overrightarrow{u}_z$. On a le circuit de la figure suivante. A $t = 0$, on allume le générateur.



1. Interpréter les phénomènes. Dans quel sens la roue va-t-elle tourner ?
2. Calculer la f.e.m. d'induction
3. Donner l'équation électrique du circuit
4. Soit $\overrightarrow{L} = J\omega \overrightarrow{u}_z$ le moment cinétique de la roue. Ecrire le théorème du moment cinétique pour la roue.
5. Donner $\omega(t)$.

Réponse :

1. *Lorsque l'on ferme le circuit, il apparait un courant électrique vertical dans la roue (de O vers A). Dans un champ magnétique, cela créé une force de* Laplace *dans le conducteur. Le courant électrique allant de O vers A, la rotation du disque a lieu dans le sens horaire (sens −).*
2. *On choisit une orientation positive de O vers A. La fem orientée de O vers A est*

$$e = \int_O^A \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}.\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \int_O^A B_0 r\omega \mathrm{d}r = \frac{a^2 B_0 \omega}{2}$$

3. *On néglige l'auto-induction, on trouve donc E, e et R en série, cela donne l'équation*

$$E = Ri - e = Ri - \frac{1}{2}\omega a^2 B_0$$

4. *Il faut calculer le moment de la force de* Laplace *:*

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \int_O^A i\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{B}\right) = -\frac{1}{2} B_0 a^2 \overrightarrow{u}_z$$

Soit $\overrightarrow{L} = J\omega \overrightarrow{u}_z$ le moment cinétique de la roue. Le théorème du moment cinétique, en projection sur l'axe (Oz) pour la roue donne

$$\boxed{J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2} B_0 a^2}$$

5. *On trouve l'équation*

$$\dot{\omega} + \frac{\omega - \omega_0}{\tau} = 0$$

avec $\tau = \frac{4JR}{B_0^2 a^2}$ et $\omega_0 = -\frac{2E}{B_0^2 a^2}$.
Soit finalement

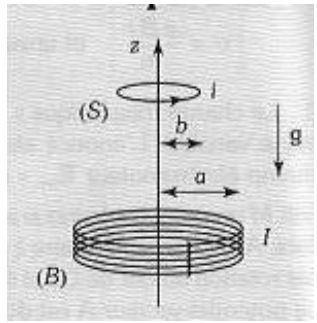
$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

5 Lévitation d'un spire conductrice

Une bobine comprenant N spires de rayon a parcourue par le courant I, créé un champ magnétique au voisinage de son axe $\overrightarrow{u}_z$ tel que

$$B_r = -\frac{NIr}{2}\beta'(z) \qquad B_z = NI\beta(z)$$

β est une fonction que l'on ne cherchera pas à expliciter et $\beta' = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z}$.
Une autre spire de rayon b et de masse m est en lévitation au dessus de ce solénoïde à une altitude z. Cette spire est supraconductrice (pas de résistance), elle est donc modélisée par une inductance pure L. Elle est parcourue par le courant i.



1. Justifier les expressions du champ magnétique.
2. Donner la valeur de l'inductance mutuelle $M(z)$ entre les deux systèmes.
3. Montrer que $MI + Li$ est indépendant du temps. Trouver i
4. Montrer que la force verticale resultante dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{\pi^2 b^4 N^2 I^2 \beta^2}{2L}$$

Comment trouver la position d'équilibre ?

Réponse :

1. *Il faut utiliser* $\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$ *cela donne la relation entre B_r et B_z :*

2. *La flux magnétique créé par la grande bobine sur la petite est*

$$\Phi = B_z \pi b^2 = NI\pi b^2 \beta = MI$$

La valeur de l'inductance mutuelle est

$$\boxed{M(z) = N\beta\pi b^2}$$

3. *Le flux magnétique dans la petite spire est la somme du flux propre et du flux induit, donc*

$$\Phi = Li + MI$$

La loi de Faraday *donne* $e = -\frac{\mathrm{d}(Li+MI)}{\mathrm{d}t} = 0$ *car le circuit est fermé sur une résistance nulle (supraconducteur).*
On en déduit la valeur du courant i *:*

$$\boxed{i = -\frac{\pi b^2 N \beta I}{L}}$$

4. *La spire est parcourue par un courant* i *dans un champ* $\overrightarrow{B}$*, elle reçoit donc la force de* Laplace.

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F} = i\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B} = ibB_z \mathrm{d}\theta \overrightarrow{u}_r - ibB_r \mathrm{d}\theta \overrightarrow{u}_z$$

Les forces radiales vont se compenser sur l'ensemble de la spire.
La force verticale est

$$F_z = -\frac{\pi^2 b^4 N^2 I^2 \beta\beta'}{L}$$

On remarque que $\beta\beta' = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\beta^2}{\mathrm{d}z}$

La force dérive d'une énergie potentielle si $F_z = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}\overrightarrow{u}_z$*, on en déduit :*

$$\boxed{E_p = \frac{\pi^2 b^4 N^2 I^2 \beta^2}{2L}}$$

Pour trouver la position d'équilibre , il faut ajouter l'énergie potentielle de pesenteur , dériver pour chercher les positions d'équilibre.

6 Electron dans un solénoïde

On place une enceinte à vide à l'intérieur d'un solénoïde long parcouru par un courant i. On admet que le potentiel électrique V est uniformément nul dans l'enceinte.

1. Un électron est émis à l'intérieur de l'enceinte à une distance r de l'axe (Oz) avec une vitesse initiale orthoradiale de norme v.
   A quelle condition décrit-il un cercle d'axe (Oz). Donner la période T du mouvement.
2. Le courant $i(t)$ varie sur une échelle caractéristique très supérieure à T. Montrer qu'il existe une loi de conservation de la forme

$$B(t)\, r^{\alpha}(t) = Cte$$

   Trouver α.

Réponse :

1. *C'est l'étude du rayonnement synchrotron.*
   Le champ magnétique est

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 ni \overrightarrow{u}_z$$

   La partie magnétique de la force de Lorentz *doit être radiale pour avoir un mouvement circulaire : on prend* $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u}_\theta$ *donc*

$$\overrightarrow{F} = -e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{b} = -ev\overrightarrow{u}_r$$

   La RFD dans le référentiel d'étude galiléen donne en projection sur $\overrightarrow{u}_r$ *et* $\overrightarrow{u}_\theta$ *:*

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \frac{mv^2}{r} = evB$$

   On trouve $v = \frac{eBr}{m}$ *et la période est*

$$\boxed{T = \frac{2\pi m}{eB}}$$

   Cette période est la ***période cyclotron****.*
2. *Le champ magnétique est maintenant variable,* $\overrightarrow{B}(t) = \mu_0 ni(t)\overrightarrow{u}_z$*, des effets inductifs peuvent apparaitre. Il va donc y avoir un champ électrique créé qui va intervenir dans la force de* Lorentz*. Il faut déterminer* $\overrightarrow{E}$ *puis réécrire la RFD.*

(a) Le champ électromoteur $E_m = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$ *est égal au champ électrique car* $V = 0$.
Comme $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$ *et* $\overrightarrow{B}$ *est un vecteur constant de direction fixe, on peut calculer directement en utilisant la relation :*

$$\overrightarrow{A} = \frac{\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{B}}{2} = \frac{rB}{2}\overrightarrow{u}_\theta$$

On en déduit $\overrightarrow{E} = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{B}}{\mathrm{d}t}$

(b) La force de Lorentz, *s'écrit* $\overrightarrow{F} = -e\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)$, *La RFD dans le référentiel d'étude galiléen donne en projection sur* $\overrightarrow{u}_r$ *et* $\overrightarrow{u}_\theta$ *:*

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{er}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad \frac{mv^2}{r} = evB$$

On en déduit : $v = \frac{eBr}{m}$.
On peut remplacer l'expression de v, *dans la première équation, cela donne :*

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = er\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + eB\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{er}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \rightarrow B\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

On sépare les variables :

$$\frac{\mathrm{d}B}{B} = -2\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

On en déduit que

$$\boxed{r^2B = Cte}$$

Chapitre 19 : Nos meilleurs Moments ...

I Mécanique

1 Moment cinétique

Soit O un point particulier du système (en général O est fixe et le centre du système de coordonnées).
Soit $\mathcal{R}$ un référentiel d'étude.

Définition :

On peut définir le moment cinétique pour

- ✗ un point matériel de masse m situé au point M : $\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}(M)$
- ✗ un système $\mathcal{S}$ de N points matériels placés en M_i et de masse m_i :

$$\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \overrightarrow{v}_i(M)$$

- ✗ Pour un solide, cela revient à écrire une intégrale :

$$\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \iiint \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}m\,\overrightarrow{v}(M)$$

Application 1 : Mouvement plan

Pour une particule de masse m ayant un mouvement plan perpendiculaire à Oz, le moment cinétique en O s'exprime simplement en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(M) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$$

Réponse :

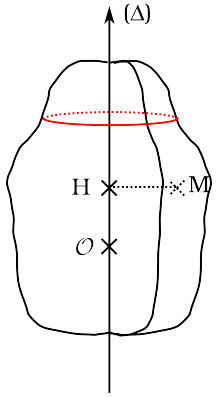
On a $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{v}(M) = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$. Le moment cinétique est alors le produit vectoriel des deux termes.

Définition :

On peut définir le moment cinétique par rapport à un axe Δ de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_\Delta$ par

$$L_\Delta = \overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(M).\overrightarrow{u}_\Delta$$

2 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe



Définition :

Le moment d'inertie d'un solide autour d'un axe Δ est noté J_Δ et il vaut :

$$J_\Delta = \iiint HM^2\mathrm{d}m$$

Application 2 : Point matériel

Pour un point matériel, M à la distance d d'un axe Δ, le moment d'inertie s'écrit $J_\Delta = md^2$

Application 3 : Cylindre plein

Pour un cylindre homogène de masse m de rayon R, et d'axe z, le moment cinétique par rapport à l'axe z est

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2$$

Réponse :

Soit μ la masse volumique uniforme du cylindre.

$$J_z = \iiint HM^2 \mathrm{d}m$$
$$J_z = \iiint HM^2 \mu \mathrm{d}\tau$$
$$J_z = \iiint \mu r^2 r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$
$$J_z = \mu h \frac{R^4}{4} 2\pi$$

D'autre part $m = \mu\pi R^2 h$ donc

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2$$

Savoir démontrer №1 : Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

On suppose que l'axe (Δ) est fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$.
On note $\overrightarrow{\omega} = \omega \overrightarrow{u}_\Delta$ le vecteur rotation du solide dans $\mathcal{R}$.

$$\boxed{L_\Delta = J_\Delta \ \omega}$$

J_Δ est le moment d'inertie du solide par rapport à Δ

Réponse :

Pour une rotation autour d'un axe fixe, la vitesse d'un point M du solide est $\overrightarrow{v} = r\omega\overrightarrow{u}_\theta = HM\omega\overrightarrow{u}_\theta$. H est la projection orthogonale de M sur l'axe Δ (voir figure).

Evaluons L_Δ :

$$L_\Delta = \overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(\mathcal{S}) . \overrightarrow{u}_\Delta \ \mathrm{d}\tau$$
$$L_\Delta = \iiint \mu \left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(M)\right) . \overrightarrow{u}_\Delta \ \mathrm{d}\tau$$
$$L_\Delta = \iiint \mu \left(\overrightarrow{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM}\right) . \overrightarrow{v}(M) \ \mathrm{d}\tau$$
$$L_\Delta = \iiint \mu \left(\overrightarrow{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM}\right) . (HM\omega\overrightarrow{u}_\theta) \ \mathrm{d}\tau$$

On remarque que $\overrightarrow{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}_\Delta \wedge \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right) = HM\overrightarrow{u}_\theta$

Finalement :

$$L_\Delta = \iiint \mu H M^2 \omega \ \mathrm{d}\tau$$
$$L_\Delta = J_\Delta \ \omega$$

Savoir démontrer №2 : Energie cinétique

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ), l'énergie cinétique s'écrit :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \ \omega^2}$$

3 Moment des forces = couples

Définition :

✗ Pour un point matériel, le moment en O de la force $\vec{F}$ exercée sur le point M est

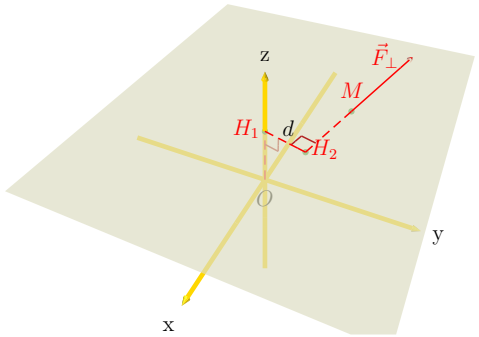
$$\vec{\mathcal{M}_0} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

✗ On peut également définir le moment par rapport à un axe Δ :

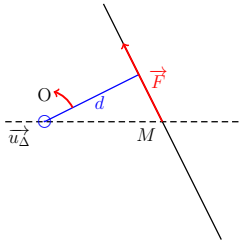
$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}_0}.\vec{u}_\Delta = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right).\vec{u}_\Delta$$

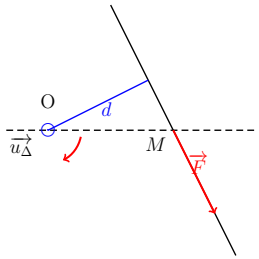
✗ On peut utiliser la méthode du bras de levier, prenons $\Delta = (Oz)$:

$$\mathcal{M}_\Delta = \mathcal{M}_z = \pm |F| \times d$$



1. $|F|$ est l'intensité de la force.
2. la distance $d = \|\overrightarrow{H_1H_2}\|$ entre l'axe de rotation (Δ) et la droite support $(\mathscr{D})$ de la force $\vec{F}_\perp$ est appelée **bras de levier**.
3. Signe positif "si la force fait tourner dans le sens positif", négatif sinon. C'est l'axe $\Delta = (Oz)$ qui détermine le sens positif.





4 Théorème du moment cinétique

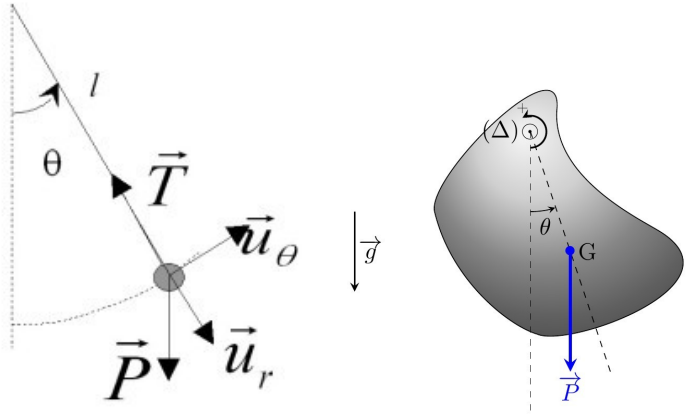
✗ TMC général : O point fixe, $\mathcal{R}$ référentiel d'étude.

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_{o,\mathcal{R}}}(M)}{dt} = \sum_{forces} \vec{\mathcal{M}} + \vec{\mathcal{M}}_{Fie} + \vec{\mathcal{M}}_{FiC}}$$

✗ Par rapport à un axe fixe :

$$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = \sum_{forces} \mathcal{M}_z + \mathcal{M}_{zFie} + \mathcal{M}_{zFiC}}$$

Application 4 : Pendule simple et pendule pesant



1. Un pendule simple est constitué d'une masse m au bout d'un fil de longueur ℓ (schéma de gauche)
2. Un pendule pesant est un solide de moment d'inertie J par rapport à l'axe $(Oz) = \Delta$ suspendu au point O et qui peut osciller (schéma de droite).

Retrouver l'équation du pendule en utilisant le TMC

Réponse :

On utilise dans les deux cas le TMC par rapport à l'axe $Oz = \Delta$ où O est le point d'accroche du pendule. $\mathcal{R}$ est le référentiel galiléen terrestre.

1. *Pour le pendule simple :* $L_\Delta = m\ell^2\dot{\theta}$, $\mathcal{M}_z\,(Poids) = -mg\ell\sin\theta$, $\mathcal{M}_z\,(Tension\,) = 0$

   On trouve donc

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

2. *Pour le pendule pesant. Poids appliqué en G soit* $\ell = OG$*, force de réaction du support en O.* $L_\Delta = J\dot{\theta}$, $\mathcal{M}_z\,(Poids) = -mg\ell\sin\theta$, $\mathcal{M}_z\,(Réaction\ en\ O\,) = 0$

   On trouve donc

$$J\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{J}\sin\theta = 0}$$

II Moment dipolaire électrique

1 Définition

Définitions :

✗ Pour un doublet de deux charges $+q$ placée en P et $-q$ placée en N. La distance $d = NP$, soit (Oz) tel que $\overrightarrow{NP} = d\,\overrightarrow{u}_z$ et

$$\boxed{\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{NP}}$$

✗ Pour une distribution quelconque de charges avec la charge totale nulle : $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i = 0$ et O un point fixe , alors

$$\boxed{\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i\overrightarrow{OA_i}}$$

2 Champ créé

Savoir démontrer №3 : Expression du potentiel

A partir d'un principe de superposition

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa\cos\theta}{r^2} = \frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Savoir démontrer №4 : Expression du champ du dipôle électrostatique

A partir de $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$,

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u}_\theta$$

Savoir exploiter la forme intrinsèque (indépendante du système de coordonnées choisi)

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(3\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{u}_r)\,\overrightarrow{u}_r - \overrightarrow{p}}{r^3}$$

3 Actions sur un dipôle

Savoir démontrer №5 : Force, couple et énergie potentielle

Dans un champ exterieur $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$:

1. Force sur un dipôle

$$\overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \overrightarrow{E}_{\text{ext}} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{E}_{\text{ext}}\right)$$

2. Moment sur le dipôle (ou couple)

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_{\text{ext}}$$

3. Énergie potentielle du dipôle

$$\mathscr{E}_p = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}_{\text{ext}}$$

Application 5 : Pulsation d'oscillation d'un dipôle

On considère un dipôle électrostatique $\overrightarrow{p}$ considéré comme un solide constitué des points N et P qui peut tourner dans le plan Oxy. On applique un champ électrique extérieur uniforme $\overrightarrow{E}_{\text{ext}} = E_0 \overrightarrow{u}_x$, on note θ l'angle entre le champ extérieur et le dipôle. Le dipôle va s'aligner sur le champ mais avec son inertie il va osciller autour de la position d'équilibre $\theta = 0$.
Donner la pulsation ω_0 de cette oscillation.

Réponse :

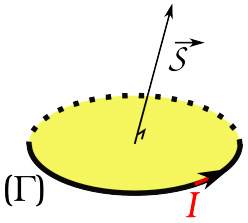
Le champ extérieur est uniforme, la force sur le dipôle est donc nulle.
On peut calculer le moment de la force $\overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_{ext} = -pE_0 \sin\theta \overrightarrow{u}_z \simeq -pE_0\theta \overrightarrow{u}_z$
Le moment cinétique par rapport à (Oz) *est* $L_z = J\dot{\theta}$
Le TMC sur le dipôle par rapport à l'axe (Oz) *s'écrit :*

$$J\ddot{\theta} = -pE_0 \sin\theta \rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{pE_0}{J}}}$$

III Moment dipolaire magnétique

1 Définition

Définition :



On considère une boucle (Γ) parcourue par un courant d'intensité I, orientée dans le sens de I. On note $\mathcal{S}$ l'aire de la surface définie par la boucle (Γ) et $\mathcal{S}$ est orientée par la règle du tire-bouchon ;
alors on définit un **moment magnétique** $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ associé à cette description par la relation

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\overrightarrow{\mathcal{S}}$$

2 Champ créé

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3} \quad \text{(F.33)}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3} \quad \text{(F.34)}$$

(F.35)

Soit

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3\left(\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{u}_r\right)\overrightarrow{u}_r - \overrightarrow{\mathcal{M}}\right]$$

3 Actions sur un dipôle

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{B}_{\text{ext}}\right) \quad \text{(F.36)}$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}} \quad \text{(F.37)}$$

$$\mathscr{E}_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{B}_{\text{ext}} \quad \text{(F.38)}$$

4 Rapport gyromagnétique

Définition :

Le rapport gyromagnétique de l'électron est le nombre γ qui relie le moment magnétique au moment cinétique.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \gamma \overrightarrow{L}_0$$

A tout moment magnétique (comme le spin), on peut définir un rapport $\gamma = \frac{\mathcal{M}}{L}$

Savoir démontrer №6 : Rapport gyromagnétique de l'électron

Dans le modèle classique de l'atome (**modèle planétaire**), on considère un électron en mouvement circulaire autour d'un proton :
Le moment cinétique de l'électron est :

$$\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}} = mrv\overrightarrow{u}_z$$

Le moment magnétique est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = -\frac{1}{2}evr\overrightarrow{u}_z$$

Le **rapport gyromagnétique** de l'électron est

$$\boxed{\gamma = -\frac{e}{2m}}$$

Chapitre J2 : Nos meilleurs Moments ...

I Mécanique

1 Moment cinétique

Soit O un point particulier du système (en général O est fixe et le centre du système de coordonnées).
Soit $\mathcal{R}$ un référentiel d'étude.

Définition :

On peut définir le moment cinétique pour

- ✗ un point matériel de masse m situé au point M : $\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}(M)$
- ✗ un système $\mathcal{S}$ de N points matériels placés en M_i et de masse m_i :

$$\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \overrightarrow{v}_i(M)$$

- ✗ Pour un solide, cela revient à écrire une intégrale :

$$\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \iiint \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}m\overrightarrow{v}(M)$$

Application 1 : Mouvement plan

Pour une particule de masse m ayant un mouvement plan perpendiculaire à Oz, le moment cinétique en O s'exprime simplement en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(M) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$$

Réponse :

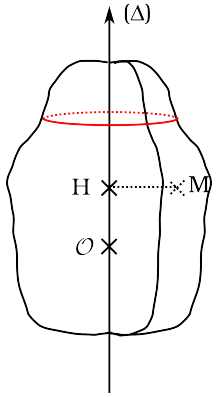
On a $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{v}(M) = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$. Le moment cinétique est alors le produit vectoriel des deux termes.

Définition :

On peut définir le moment cinétique par rapport à un axe Δ de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_\Delta$ par

$$L_\Delta = \overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(M).\overrightarrow{u}_\Delta$$

2 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe



Définition :

Le moment d'inertie d'un solide autour d'un axe Δ est noté J_Δ et il vaut :

$$J_\Delta = \iiint HM^2\mathrm{d}m$$

Application 2 : Point matériel

Pour un point matériel, M à la distance d d'un axe Δ, le moment d'inertie s'écrit $J_\Delta = md^2$

Application 3 : Cylindre plein

Pour un cylindre homogène de masse m de rayon R, et d'axe z, le moment cinétique par rapport à l'axe z est

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2$$

Réponse :

Soit μ la masse volumique uniforme du cylindre.

$$J_z = \iiint HM^2 \mathrm{d}m$$
$$J_z = \iiint HM^2 \mu \mathrm{d}\tau$$
$$J_z = \iiint \mu r^2 r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$
$$J_z = \mu h \frac{R^4}{4} 2\pi$$

D'autre part $m = \mu\pi R^2 h$ donc

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2$$

Savoir démontrer №1 : Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

On suppose que l'axe (Δ) est fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$.
On note $\overrightarrow{\omega} = \omega \overrightarrow{u}_\Delta$ le vecteur rotation du solide dans $\mathcal{R}$.

$$\boxed{L_\Delta = J_\Delta \ \omega}$$

J_Δ est le moment d'inertie du solide par rapport à Δ

Réponse :

Pour une rotation autour d'un axe fixe, la vitesse d'un point M du solide est $\overrightarrow{v} = r\omega\overrightarrow{u}_\theta = HM\omega\overrightarrow{u}_\theta$. H est la projection orthogonale de M sur l'axe Δ (voir figure).

Evaluons L_Δ :

$$L_\Delta = \overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}}(\mathcal{S}) . \overrightarrow{u}_\Delta \ \mathrm{d}\tau$$
$$L_\Delta = \iiint \mu \left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(M)\right) . \overrightarrow{u}_\Delta \ \mathrm{d}\tau$$
$$L_\Delta = \iiint \mu \left(\overrightarrow{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM}\right) . \overrightarrow{v}(M) \ \mathrm{d}\tau$$
$$L_\Delta = \iiint \mu \left(\overrightarrow{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM}\right) . (HM\omega\overrightarrow{u}_\theta) \ \mathrm{d}\tau$$

On remarque que $\overrightarrow{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}_\Delta \wedge \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right) = HM\overrightarrow{u}_\theta$

Finalement :

$$L_\Delta = \iiint \mu H M^2 \omega \ \mathrm{d}\tau$$
$$L_\Delta = J_\Delta \ \omega$$

Savoir démontrer №2 : Energie cinétique

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ), l'énergie cinétique s'écrit :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \ \omega^2}$$

3 Moment des forces = couples

DÉFINITION :

✗ Pour un point matériel, le moment en O de la force $\vec{F}$ exercée sur le point M est

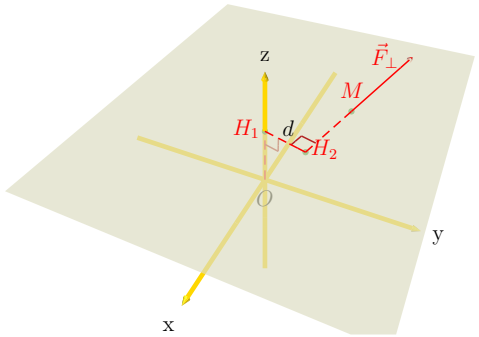
$$\vec{\mathcal{M}_0} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

✗ On peut également définir le moment par rapport à un axe Δ :

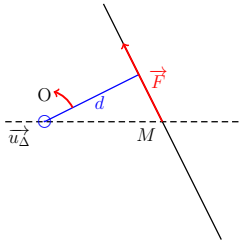
$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}_0}.\vec{u}_\Delta = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right).\vec{u}_\Delta$$

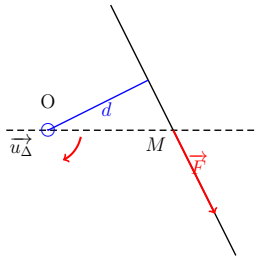
✗ On peut utiliser la méthode du bras de levier, prenons $\Delta = (Oz)$:

$$\mathcal{M}_\Delta = \mathcal{M}_z = \pm |F| \times d$$



1. $|F|$ est l'intensité de la force.
2. la distance $d = \|\overrightarrow{H_1H_2}\|$ entre l'axe de rotation (Δ) et la droite support $(\mathscr{D})$ de la force $\vec{F}_\perp$ est appelée **bras de levier**.
3. Signe positif "si la force fait tourner dans le sens positif", négatif sinon. C'est l'axe $\Delta = (Oz)$ qui détermine le sens positif.





4 Théorème du moment cinétique

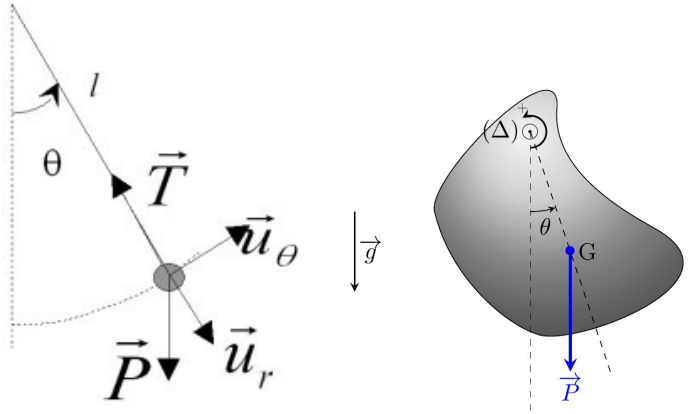
✗ TMC général : O point fixe, $\mathcal{R}$ référentiel d'étude.

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_{o,\mathcal{R}}}(M)}{dt} = \sum_{forces} \vec{\mathcal{M}} + \vec{\mathcal{M}}_{Fie} + \vec{\mathcal{M}}_{FiC}}$$

✗ Par rapport à un axe fixe :

$$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = \sum_{forces} \mathcal{M}_z + \mathcal{M}_{zFie} + \mathcal{M}_{zFiC}}$$

Application 4 : Pendule simple et pendule pesant



1. Un pendule simple est constitué d'une masse m au bout d'un fil de longueur ℓ (schéma de gauche)
2. Un pendule pesant est un solide de moment d'inertie J par rapport à l'axe $(Oz) = \Delta$ suspendu au point O et qui peut osciller (schéma de droite).

Retrouver l'équation du pendule en utilisant le TMC

Réponse :

On utilise dans les deux cas le TMC par rapport à l'axe $Oz = \Delta$ où O est le point d'accroche du pendule. $\mathcal{R}$ est le référentiel galiléen terrestre.

1. *Pour le pendule simple :* $L_\Delta = m\ell^2\dot{\theta}$, $\mathcal{M}_z\,(Poids) = -mg\ell\sin\theta$, $\mathcal{M}_z\,(Tension\,) = 0$

   On trouve donc

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

2. *Pour le pendule pesant. Poids appliqué en G soit* $\ell = OG$*, force de réaction du support en O.* $L_\Delta = J\dot{\theta}$, $\mathcal{M}_z\,(Poids) = -mg\ell\sin\theta$, $\mathcal{M}_z\,(Réaction\ en\ O\,) = 0$

   On trouve donc

$$J\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{J}\sin\theta = 0}$$

II Moment dipolaire électrique

1 Définition

Définitions :

✗ Pour un doublet de deux charges $+q$ placée en P et $-q$ placée en N. La distance $d = NP$, soit (Oz) tel que $\overrightarrow{NP} = d\,\overrightarrow{u}_z$ et

$$\boxed{\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{NP}}$$

✗ Pour une distribution quelconque de charges avec la charge totale nulle : $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i = 0$ et O un point fixe , alors

$$\boxed{\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i\overrightarrow{OA_i}}$$

2 Champ créé

Savoir démontrer №3 : Expression du potentiel

A partir d'un principe de superposition

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa\cos\theta}{r^2} = \frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Savoir démontrer №4 : Expression du champ du dipôle électrostatique

A partir de $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$,

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u}_\theta$$

Savoir exploiter la forme intrinsèque (indépendante du système de coordonnées choisi)

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(3\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{u}_r)\,\overrightarrow{u}_r - \overrightarrow{p}}{r^3}$$

3 Actions sur un dipôle

Savoir démontrer №5 : Force, couple et énergie potentielle

Dans un champ exterieur $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$:

1. Force sur un dipôle

$$\overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \overrightarrow{E}_{\text{ext}} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{E}_{\text{ext}}\right)$$

2. Moment sur le dipôle (ou couple)

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_{\text{ext}}$$

3. Énergie potentielle du dipôle

$$\mathscr{E}_p = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}_{\text{ext}}$$

Application 5 : Pulsation d'oscillation d'un dipôle

On considère un dipôle électrostatique $\overrightarrow{p}$ considéré comme un solide constitué des points N et P qui peut tourner dans le plan Oxy. On applique un champ électrique extérieur uniforme $\overrightarrow{E}_{\text{ext}} = E_0 \overrightarrow{u}_x$, on note θ l'angle entre le champ extérieur et le dipôle. Le dipôle va s'aligner sur le champ mais avec son inertie il va osciller autour de la position d'équilibre $\theta = 0$.
Donner la pulsation ω_0 de cette oscillation.

Réponse :

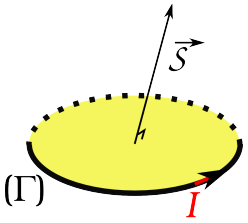
Le champ extérieur est uniforme, la force sur le dipôle est donc nulle.
On peut calculer le moment de la force $\overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_{ext} = -pE_0 \sin\theta \overrightarrow{u}_z \simeq -pE_0\theta \overrightarrow{u}_z$
Le moment cinétique par rapport à (Oz) *est* $L_z = J\dot{\theta}$
Le TMC sur le dipôle par rapport à l'axe (Oz) *s'écrit :*

$$J\ddot{\theta} = -pE_0 \sin\theta \rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{pE_0}{J}}}$$

III Moment dipolaire magnétique

1 Définition

Définition :



On considère une boucle (Γ) parcourue par un courant d'intensité I, orientée dans le sens de I. On note $\mathcal{S}$ l'aire de la surface définie par la boucle (Γ) et $\mathcal{S}$ est orientée par la règle du tire-bouchon ;
alors on définit un **moment magnétique** $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ associé à cette description par la relation

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\overrightarrow{\mathcal{S}}$$

2 Champ créé

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3} \quad \text{(J.1)}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3} \quad \text{(J.2)}$$

(J.3)

Soit

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3\left(\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{u}_r\right)\overrightarrow{u}_r - \overrightarrow{\mathcal{M}}\right]$$

3 Actions sur un dipôle

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{B}_{\text{ext}}\right) \quad \text{(J.4)}$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}} \quad \text{(J.5)}$$

$$\mathscr{E}_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{B}_{\text{ext}} \quad \text{(J.6)}$$

4 Rapport gyromagnétique

Définition :

Le rapport gyromagnétique de l'électron est le nombre γ qui relie le moment magnétique au moment cinétique.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \gamma \overrightarrow{L}_0$$

A tout moment magnétique (comme le spin), on peut définir un rapport $\gamma = \frac{\mathcal{M}}{L}$

Savoir démontrer №6 : Rapport gyromagnétique de l'électron

Dans le modèle classique de l'atome (**modèle planétaire**), on considère un électron en mouvement circulaire autour d'un proton :
Le moment cinétique de l'électron est :

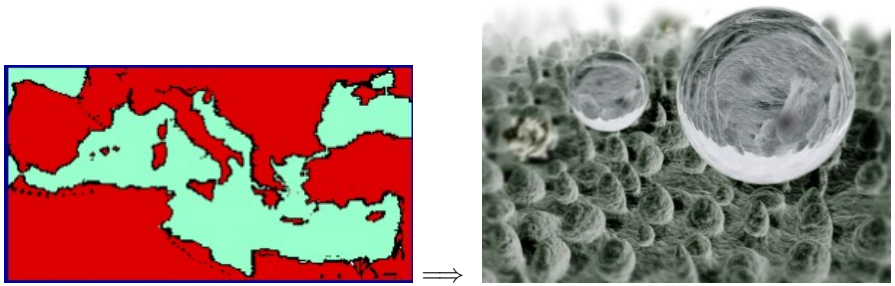
$$\overrightarrow{L}_{O,\mathcal{R}} = mrv\overrightarrow{u}_z$$

Le moment magnétique est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = -\frac{1}{2}evr\overrightarrow{u}_z$$

Le **rapport gyromagnétique** de l'électron est

$$\boxed{\gamma = -\frac{e}{2m}}$$



(a) (b)

FIGURE 1.1 – Dans un centimètre cube d'eau, il y a autant d'atomes d'oxygène et d'hydrogène que de gouttelettes d'eau dans la Méditerranée. Visiter l'atome, c'est en quelque sorte passer de l'échellede la Méditerranée à celle d'une goutte d'eau.

1 Outils préliminaires

I Dimension et ordre de grandeur

1 Mesure d'un grandeur

« Ne jamais faire de calculs avant d'en connaîtrele résultat. » *J. Wheeler*

1.a Qu'est-ce qu'une grandeur physique ?

DÉFINITION :

Terme générique associé aux fonctions que l'on utilise en sciences physiques.
En général, on y accède grâce à une mesure ou un calcul.
Elle sera donnée sous la forme :

$$\text{Grandeur physique} = \text{valeur numérique} \times \text{unité}$$

Exemple : ***distance focale d'une lentille*** $= 6,73$ m

1.b Les 7 unités fondamentales (+ 2 supplémentaires)

dimension associée	grandeur fondamentale	symbole	unité fondam.	symbole
[ ]	longueur	ℓ	mètre	m
[ ]	masse	m	kilogramme	kg
[ ]	temps	t	seconde	s
[ ]	intensité de courant	I	ampère	A
[ ]	température absolue	T	kelvin	K
[ ]	intensité lumineuse	$\mathscr{I}$	candela	cd
[ ]	quantité de matière	n	mole	mol
	angle plan	θ	radian	rad
	angle solide (d'espace)	Ω	stéradian	sr

Remarque : Un angle est une grandeur sans dimension, qu'on exprimera en radian pour tous les calculs. Cependant, il est parfois judicieuxde donner un résultat en degrés, souvent plus parlant que les radians. Ainsi, « sans dimension » n'est pas synonyme de « sans unité ».

1.c Equation aux dimensions et unités dérivées

L'équation aux dimensions d'une grandeur dérivée est son expression en fonction des grandeurs fondamentales ; pour chacune d'entre elles, leur dimension s'écrit par des lettres majuscules droites (sauf pour le temps et l'intensité lumineuse). En général, une dimension s'écrit entre crochets.

Exemples :
$[vitesse] =$
$[masse\ volumique] =$

Les unités dérivées SI permettent d'exprimer certaines grandeurs dérivées. Elles ont leur propre nom et leur propre symbole.

Exemples :
unité de force :
unité d'énergie :
unité de pression :

Grandeurs, dimensions et unités dérivées

Grandeur physique	symbole usuel	dimension	unité	Remarques
Mécanique				
masse	m	M	kg	1 t $= 10^3$ kg
position	x	L	m	
vitesse	v	Lt^{-1}	$\mathrm{m.s}^{-1}$	$1\ \mathrm{m.s}^{-1} = 3,6\ \mathrm{km.h}^{-1}$
force	F	MLt^{-2}	N	
accélération	a	Lt^{-2}	$\mathrm{m.s}^{-2}$	Ex : g
vecteur rotation	ω	t^{-1}	$\mathrm{rad.s}^{-1}$	1 tour/h $= 1,74.10^{-3}\ \mathrm{rad.s}^{-1}$
Thermodynamique				
Température	T	T	K	$T = \theta + 273,15$
Volume	V	L^3	m^3	$1\ \mathrm{m}^3 = 10^3$ L
Masse volumique	μ	ML^{-3}	$\mathrm{kg.m}^{-3}$	$\mu_{\mathrm{eau}} = 10^3\ \mathrm{kg.m}^{-3}$
Energie	E	$\mathrm{ML}^2\mathrm{t}^{-2}$	J	$1\ \mathrm{eV} = 1,6.10^{-19}$ J
Pression	P	$\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{t}^{-2}$	Pa	1 bar $= 10^5$ Pa et 1 atm $= 1,013$ bar
Electromagnétisme				
Intensité de courant	i	I	A	
Charge	q	It	C	$\mathrm{e} = 1,6.10^{-19}$ C
Résistance	R	$\mathrm{ML}^2\mathrm{t}^{-3}\mathrm{I}^{-2}$	Ω	
Tension	U	$\mathrm{ML}^2\mathrm{t}^{-3}\mathrm{I}^{-1}$	V	
Champ électrique	$\vec{E}$	$\mathrm{MLt}^{-3}\mathrm{I}^{-1}$	$\mathrm{V.m}^{-1}$	$\vec{F}_{\text{élec}} = q\vec{E}$
Champ magnétique	$\vec{B}$	$\mathrm{Mt}^{-2}\mathrm{I}^{-1}$	T	$\vec{F}_{\text{élec}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Remarque : Certaines unités n'appartenant pas au SI sont cependant très utilisées. Il est **impératif** d'effectuer une conversion en unités SI afin d'utiliser correctement les données correspondantes lors d'une application numérique.

Exemples :

minute | *heure* | *tonne* | *litre* | *bar* | *électron-volt* | *degré Celcius*

Définition :

Lorsque toutes les dimensions ou unités dimensionnées disparaissent après simplification d'une équation aux dimensions, le résultat obtenu est dit **sans dimension** ; son expression numérique se réduit alors à une valeur chiffrée.

Exemples :

2 Homogénéité des formules

A retenir : Sur l'homogénéité des formules...

Toute formule littérale doit être homogène : les deux membres d'une formule ou d'une équation physiques doivent impérativement satisfaire une même équation aux dimensions, autrement dit, être de même dimension.

Ce contrôle est indispensable dans tout exercice.

2.a Règles d'écriture des relations

- **Règle 1 :** Toujours ajouter des grandeurs de même dimension
- **Règle 2 :** On peut multiplier des grandeurs de dimension différente
- **Règle 3 :** Toujours prendre le cos, le ln ou exp ... d'une grandeur sans dimension

$$\mathrm{p}H =$$

2.b Conséquences

✍ **Vérification de l'homogénéité d'une formule**

Application 1 :

- effet Doppler

$$T = T_0\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

- vitesse au sol lors d'une chute libre de hauteur h

$$V_{sol} = \sqrt{2gh}$$

✍ **Détermination de la dimension d'une grandeur ou constante**

✍ **Comparaison de deux grandeurs**

3 Les constantes de la Physique

4 CONSTANTES FONDAMENTALES

Nom	Symbole	Valeur numérique
célérité de la lumière	c	$2,99792\ .10^{8}$ m.s^{-1}
constante de la gravitation	G	$6,67259.10^{-11}$ kg^{-1}.m^{3}.s^{-2}
constante de Planck	h	$6,626.10^{-34}$ J.s
constante de Boltzmann	k_B	$1,380662.10^{-23}$J.K^{-1}

4 Chiffres significatifs

notation scientifique :

nombre décimal < 10 $\times$ puissance de 10

DÉFINITION :

On appelle **chiffres significatifs**, tout chiffre non nul, ainsi que les zéros s'ils sont situés à droite d'un chiffre non nul, qui composent le décimal. Ils indiquent implicitement la **précision** de la grandeur chiffrée.

4.a Chiffres significatifs d'une grandeur mesurée

Toute grandeur est mesurée avec une précision limitée. Le dernier chiffre significatif donne une indication sur cette précision : c'est le premier chiffre entaché d'erreur.

4.b Chiffres significatifs d'une grandeur calculée

Un résultat calculé doit être cohérent avec la précision des données, c'est- à-dire en pratique avec le nombre de chiffres significatifs du terme le moins précis.

II Notation différentielle et intégrale en physique

1 Fonctions à une variable

DÉFINITION :

Soit $f = f(x)$, une fonction de la variable x,

— on définit la **dérivée** $f'(x)$ au point d'abscisse x comme la limite quand δx tend vers zéro du taux d'accroissement de f :

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

— on définit la **différentielle** df comme la variation de f sous l'effet d'une variation δx **en limitant le calcul aux termes d'ordre 1 en** δx. D'après le théorème des accroissement finis, on peut écrire

$$df = f'(x)\,\delta x \tag{1.1}$$

Remarque :

Et dans le cas où la variable x peut être considérée comme une fonction [1], l'équation (1.1) devient $dx = 1\delta x$. Ceci explique qu'on remplace usuellement l'infiniment petit δx par la différentielle dx dans l'expression (1.1). On obtient ainsi finalement la notation suivante qu'on s'efforcera d'utiliser :

$$df = \frac{df}{dx}\,dx \qquad \text{soit} \qquad f'(x) = \frac{df}{dx}$$

exemples :

$f(x) = \sin x$ $\quad df =$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad df =$

1. Un infiniment petit ne peut pas toujours apparaitre comme la différentielle d'une fonction g : dans ce cas, on conservera la notation δ pour cet infiniment petit.

Remarque :

1. si $x = x(t)$, alors
$$df = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}dt$$
2. une différentielle d'ordre 2, s'écrit
$$d^2f = \frac{d^2f}{dx^2}(dx)^2 = f"(x)\,dx^2$$

Interpretation physique de la différentielle :

En physique, on utilise beaucoup la notion de différentielle car elle permet de faire un lien direct avec les expériences mises en œuvre : on modifie une ou plusieurs grandeur(s) physique(s) (ce sont les paramètres expérimentaux), dont la variation s'identifie à la **différentielle** de cette grandeur ; c'est ce qui explique qu'on utilise pour la dérivée la notation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ plutôt que la notation $y'(x)$.

exemple 1 : Loi d'Ohm en électricité

$$U = R\,i$$

Une petite variation de di de l'intensité du courant aux bornes d'une résistance R conduit à une petite variation de tension dU,telle que :

$$\mathrm{d}U = R\,\mathrm{d}i$$

exemple 2 : Loi des gaz parfaits

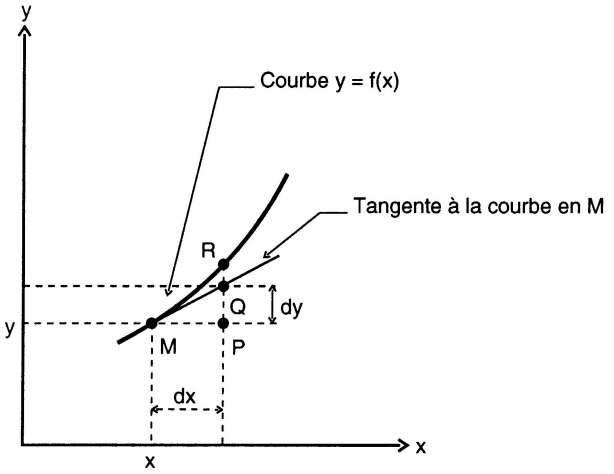
$$PV = nRT$$

On peut envisager

- une petite variation de température dT, qui va entrainer une petite variation de pression dP, telle que
$$\mathrm{d}P =$$
- une petite variation de volume dV, qui va entrainer une petite variation de pression dP, telle que
$$\mathrm{d}P =$$

Interpretation graphique de la differentielle :

Soit (T) la tangente en un point M d'abscisse x à la courbe d'équation : $y = f(x)$.
☞ La dérivée $\frac{dy}{dx}$ en M est la limite de la pente de la corde MR lorsque le point R tend vers M c'est donc la **pente de la tangente** (T).
☞ La différentielle : $dy = PQ = y'(x)\,dx = \frac{dy}{dx}dx$ apparait comme l'écart entre l'ordonnée du point M d'abscisse x et l'ordonnée du point Q d'abscisse $x + dx$ situé sur la tangente (T) : c'est la **variation de y mesurée sur la tangente** (T). La variation de l'ordonnée y mesurée sur la courbe $(\mathcal{C})$ entre les points M et R est égale à PR ; la différentielle PQ représente une estimation de PR obtenue en négligeant QR, c'est-à-dire l'écart entre la courbe et sa tangente, c'est-à-dire encore un terme d'ordre deux en dx.



En définitive, la **dérivée** apparait comme un **taux d'accroissement** estimé à l'ordre 1 en dx, (c'est la « pente ») et la **différentielle** comme une **variation** estimée à l'ordre 1 en dx.

2 Application au calcul intégral

Soit F une primitive d'une fonction f. Cela signifie que f est la dérivée de F et se traduit donc par :

$$\mathrm{d}F = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{d}F = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$$

soit encore

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

Déterminer la fonction F à partir de f revient à "*intégrer*" l'équation différentielle précédente,en calculant :

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

qui se lit « *somme de* $f(x)\mathrm{d}x$ » et s'appelle intégrale indéfinie de $f(x)$. F est alors **définie à une constante près** que les conditions aux limites ou conditions initiales permettent de déterminer.

Application 2 : équation horaire d'un mouvement de chute libre verticale sans vitesse initiale

La variable est le temps. On connait l'accélération $a(t) = g = cte$ (axe (Oz) descendant, O origine de la chute,g accélération de pesanteur). Comme $a = \frac{dv}{dt}$, soit $dv = a\ dt$, l'intégration donne

$$v = gt + v_0, \qquad \text{où} \qquad v_0 = v(t_0)$$

soit, ici, $t_0 = 0$ et $v_0 = v(t_0) = 0$, d'où :

$$v = gt$$

De même, comme $v = dz/dt$, soit $dz = v(t)\ dt = gt\ dt$, une nouvelle intégration donne

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

3 Forme différentielle et intégration

On rencontre aussi en physique des grandeurs qui **dépendent du chemin suivi**, tels les travaux W de certaines forces $\vec{f}$. Cela signifie qu'il n'existe pas de fonction W telle que

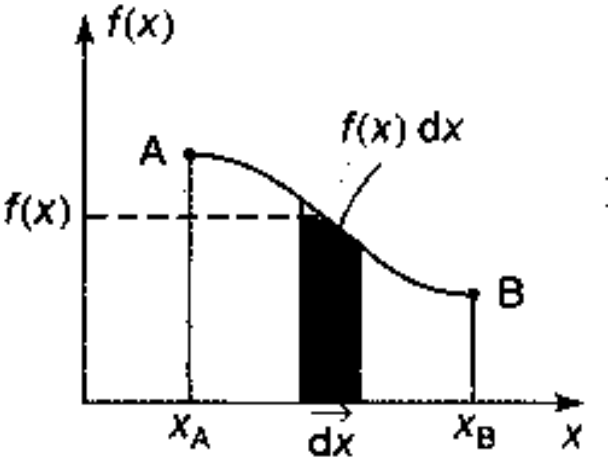
$$\mathrm{d}W = \vec{f}\ .\ \mathrm{d}\vec{\ell}$$

soit une **différentielle totale exacte**. Dans ce cas, $\vec{f}\ .\ \mathrm{d}\vec{\ell}$ est appelée forme différentielle ; **on la note** δW) et δW traduit non plus une petite variation mais une petite quantité de la grandeur W, c'est-à-dire ici **un travail élémentaire**.

Exemple : ***Cas d'une force ne dépendant que de x :***

Le graphe de $f(x)$ en fonction de x est donné ci-contre ; le **travail élémentaire** $\delta W = f(x).\mathrm{d}x$ représente l'aire du rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur $\mathrm{d}x$.

Le travail total de A à B est la somme des travaux élémentaires et représente l'aire totale délimitée par x_A et x_B (on retrouve la notion de sommation intégrale).



Ainsi, plus généralement, le travail de la force $\vec{f}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ se note :

$$W = \int_{\mathscr{C}} \delta W = \int_{\mathscr{C}} \vec{f}\ .\ \mathrm{d}\vec{\ell}$$

2 Equations différentielles

I 1er ordre

1 Equation homogène

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{f}{\tau} = 0$$

Solution : $\boxed{f(t) = F_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$.

τ **temps de relaxation**, caractéristique de la décroissance exponentielle.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{f}{\delta} = 0$$

Solution : $\boxed{f(x) = F_0 \mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}}$.

δ **épaisseur de peau**, profondeur/longueur caractéristique de la décroissance exponentielle.

2 Equation avec second membre constant

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{f}{\tau} = \frac{f_p}{\tau}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{f}{\delta} = \frac{f_p}{\delta}}$$

3 Domaines d'application

charge, décharge d'un condensateur

$$f = q,\ u_c$$

établissement d'un courant dans une bobine

$$f = i_L$$

mouvement avec vitesse limite

$$v(t) = v_{\lim}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

Exemple : *chute dans un milieu visqueux*

Exemple : *modèle de Drüde pour la conduction électrique*

champ de pression dans le modèle de l'atmosphère isotherme.

$$p(z) = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

II 2e ordre

1 Oscillateur harmonique non amorti

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

Solution :

$$\boxed{X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

en général plus aisée à exploiter que la forme équivalente

$$X(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les CI permettent de déterminer A et B (ou X_m et φ selon la forme choisie).

2 Oscillateur harmonique amorti

2.a Equation homogène : régime libre

$$\ddot{s} + 2\lambda\dot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

où Q est le **facteur de qualité** sans dimension.

$$\ddot{s} + 2\xi\omega_0\dot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

où ξ est le **taux d'amortissement** sans dimension.

Equation caractéristique : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ de discriminant $\boxed{\Delta = 4\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right)}$

Solutions : plusieurs cas sont à distinguer...

1er cas - Régime apériodique : $\Delta > 0$, soit $\lambda > \omega 0$ ou $Q < \frac{1}{2}$ ou $\xi > 1$

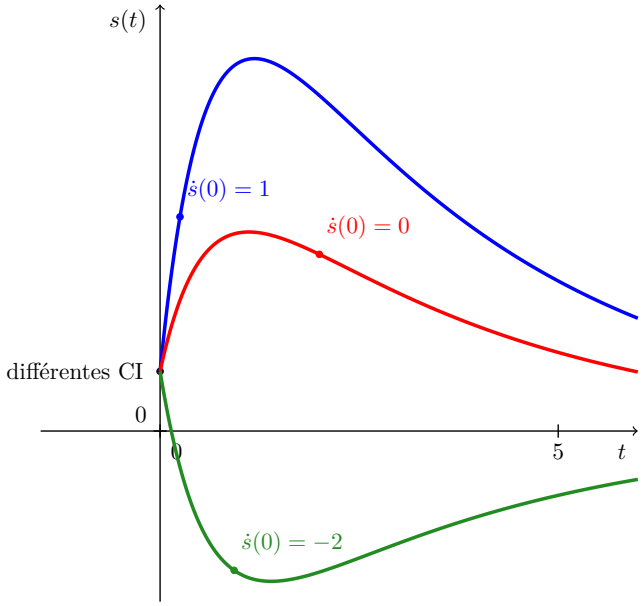
Les racines de l'équation caractéristique sont réelles : $r_\pm = -\lambda \pm \Omega$, en posant $\Omega = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$.

$$s(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[\alpha \mathrm{e}^{\Omega t} + \beta \mathrm{e}^{-\Omega t}\right] \quad (2.1)$$

$$s(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[A' \mathrm{ch}\,(\Omega t) + B' \mathrm{sh}\,(\Omega t)\right] \quad (2.2)$$

⚠ Attention...

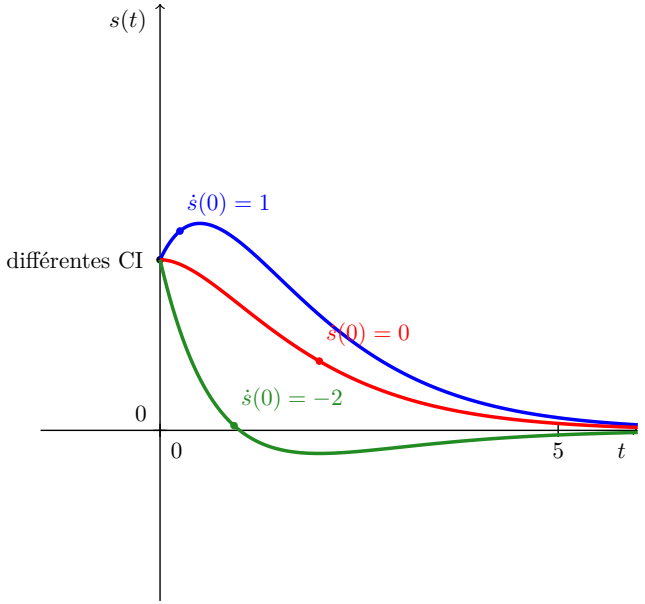
Utiliser **obligatoirement** la solution (2.1) si on dispose d'une condition en $\pm\infty$ (variable temporelle ou spatiale indifféremment) pour trouver α et β.
Utiliser préférentiellement la solution (2.2) si on dispose d'une condition en 0 pour exprimer A' et B'.



2e cas - Régime critique : $\Delta = 0$, soit $\lambda = \omega 0$ ou $Q = \frac{1}{2}$ ou $\xi = 1$

Les racines de l'équation caractéristique sont doubles : $r_0 = -\lambda$.

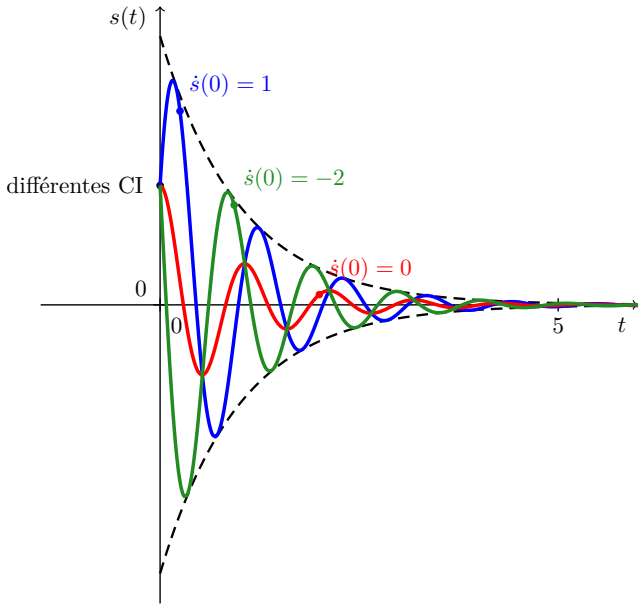
$$s(t) = (A_0 + B_0 t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \quad (2.3)$$



3e cas - Régime pseudo-périodique :$\Delta < 0$, soit $\lambda < \omega 0$ ou $Q > \frac{1}{2}$ ou $\xi < 1$

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées : $\underline{r}_\pm = -\lambda \pm i\omega_p$, en posant $\omega_p = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

$$s(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right] \quad (2.4)$$



Exemples

De nombreux systèmes physiques peuvent être modélisés par un oscillateur harmonique amorti, ce qui rend ce modèle très important dans divers domaines. Citons :

- en électricité, le circuit RLC ;
- en mécanique,
  - ☞ système masse-ressort-amortisseur
  - ☞ pendule simple amorti
  - ☞ pendule de torsion amorti
  - ☞ un tremblement de terre
- un quartz piezo-électrique
- une cavité micro-ondes
- un laser
- ....

A retenir : Modélisation par un OH amorti

Un oscillateur harmonique amorti est caractérisé par

- ☞ la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement λ,
- ☞ ou par la pulsation propre ω_0 (ou la fréquence propre f_0) et le facteur de qualité Q.

On retiendra que ω_0 (ou f_0) et Q sont les deux principales caractéristiques d'un oscillateur.
L'étude expérimentale d'un système physique implique généralement l'enregistrement du graphe de sa réponse.
Dans le cas où les oscillations, libres et amorties, correspondent à un régime pseudo-périodique, on mesure à partir de l'enregistrement les valeurs du décrément logarithmique et de la pseudo-période. On en déduit successivement les valeurs du coefficient d'amortissement , de la pulsation propre et du facteur de qualité. On détermine ainsi les caractéristiques de l'oscillateur.

2.b Traitement d'un second membre

i de type constante

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s_p$$

avec $s_p = \text{cste}$

Sous cette forme, la solution s'écrit simplement

$$\boxed{s(t) = s_h(t) + s_p}$$

⚠ Attention...

Les constantes d'intégration sont introduites sur la fonction $s_h(t)$ (dont la forme dépend du facteur de qualité ou du taux d'amortissement, conformément à la discussion du paragraphe II-2.a) mais se **détermine sur la fonction complète** $s(t)$: en aucun cas sur $s_h(t)$ seule.

ii de type harmonique : régime sinusoïdal forcé

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 S_0 \cos(\omega t)$$

On suppose que $s_h(t) \to 0$ de sorte qu'on ne cherche que le **régime permanent**, en utilisant la notation complexe sous la forme

$$\underline{S}(i\omega) = S_m(\omega)\mathrm{e}^{i\Phi(\omega)} \quad \text{et} \quad \boxed{s(t) = S_m(\omega)\cos\left[\omega t + \Phi(\omega)\right]}$$

Soit en posant $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, $\left(-\omega^2 + \dfrac{i\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)\underline{S} = \omega_0^2 S_0$ et finalement la solution complexe

$$\boxed{\underline{S} = \frac{S_0}{1 - x^2 + i\frac{x}{Q}}}$$

⚠ Attention…

Ne pas apprendre par cœur un tel résultat : il faut comprendre la méthode et l'appliquer au cas par cas.

Exemples

Oscillations forcées en mécanique, en électricité...
Modèle de l'électron élastiquement lié (dipôle oscillant) : atome soumis à un champ électrique de type opph (prise en $x = 0$: position de l'atome étudié).

3 Attention à cette forme…

3.a Variable temporelle

$$\ddot{X} - \Omega^2 X = 0$$

⚠ Attention…

Ne pas confondre avec l'équation différentielle associée à l'oscillateur harmonique non amorti.

Equation caractéristique : $r^2 - \Omega^2 = 0$, d'où les racines **réelles** : $r = \pm\Omega$
Solution :

$$\boxed{X(t) = A\mathrm{e}^{\Omega t} + B\mathrm{e}^{-\Omega t}}$$

Lorsque $t \to \infty$, $X(t)$ ne peut pas diverger donc nécessairement $\boxed{A = 0}$.

3.b Variable spatiale

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - k^2 f = 0$$

Equation caractéristique : $r^2 - k^2 = 0$, d'où les racines **réelles** : $r = \pm k$
Solution :

$$f(x) = A\mathrm{e}^{kx} + B\mathrm{e}^{-kx} \tag{2.5}$$
$$f(x) = \alpha\mathrm{ch}(kx) + \beta\mathrm{sh}(kx) \tag{2.6}$$

⚠ Attention…

Si conditions aux limites en $x \pm \infty$, garder l'expression (2.5) et éliminer le terme faisant diverger $f(x)$ en $\pm\infty$.
Si conditions aux limites en $x = 0$, garder l'expression (2.6). En général, elle permet d'obtenir assez rapidement les constantes d'intégration α et β

III Exercices

1. Résoudre les équations différentielles suivantes avec les conditions initiales précisées à la suite de l'équation. α, ω_0, x_0 sont des constantes.

$$\boxed{\dot{x} + \tfrac{x}{\tau} = \omega_0 x_0 \qquad \text{avec } x(0) = 0}$$

Solution : $x(t) = x_0\omega_0\tau\left(1 - \exp\left(-\tfrac{t}{\tau}\right)\right)$

2. .

$$\boxed{\dot{x} - \tfrac{x}{\tau} = \alpha t^3 \qquad \text{avec } x(0) = x_0}$$

Solution : $x(t) = \left(x_0 + 6\alpha\tau^4\right)\exp\tfrac{t}{\tau} - \alpha\tau\left(t^3 + 3t^2\tau + 6t\tau^2 + 6\tau^3\right)$

3. .

$$\boxed{\ddot{x} + 3\dot{x} - 4x = 0 \qquad x(0) = 2 \text{ et } \dot{x}(0) = 2}$$

Solution : $x(t) = 2\exp t$

4. .

$$\boxed{-4\ddot{x} - 6\dot{x} + 4x = \exp(t) \text{ avec } x(0) = 0 \text{ et } \dot{x}(0) = 2}$$

Solution : $x(t) = \exp\tfrac{t}{2} - \tfrac{5}{6}\exp(-2t) - \tfrac{1}{6}\exp t$

3 Fonctions

I Dérivées

$f(t)$	$\ln(t)$	$\exp(at)$	t^α	a^t
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$	$\frac{1}{t}$	$a\exp(at)$	$\alpha\ t^{\alpha-1}$	$a^t\ \ln a$

$f(t)$	$\ln[u(t)]$	$\exp[u(t)]$	$[u(t)]^n$	$\sqrt{u(t)}$
$\frac{df}{dt}$	$\frac{du}{dt}\frac{1}{u(t)}$	$\frac{du}{dt}\exp[u(t)]$	$n\frac{du}{dt}[u(t)]^{n-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{u(t)}}\frac{du}{dt}$
$\dot{f}$	$\frac{\dot{u}}{u}$	$\dot{u}\ e^u$	$n\ \dot{u}\ u^{n-1}$	$\frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$

$f(t)$	$\cos(\omega t)$	$\sin(\omega t)$	$\tan(t)$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$	$-\omega\sin(\omega t)$	$\omega\cos(\omega t)$	$1+\tan^2(t)=\frac{1}{\cos^2(t)}$

$f(t)$	$\arcsin[u(t)]$	$\arccos[u(t)]$	$\arctan[u(t)]$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$	$\frac{du/dt}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{-du/dt}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{du/dt}{1+u^2}$

$f(t)$	$\mathrm{sh}(at)$	$\mathrm{ch}(at)$	$\mathrm{th}(at)$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$	$a\ \mathrm{ch}(at)$	$a\ \mathrm{sh}(at)$	$a\ \left(1-\mathrm{th}^2(at)\right)=\frac{a}{\mathrm{ch}^2(at)}$

$f(t)$	$\mathrm{Argsh}[u(t)]$	$\mathrm{Argch}[u(t)]$	$\mathrm{Argth}[u(t)]$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$	$\frac{du/dt}{\sqrt{u^2+1}}$	$\frac{du/dt}{\sqrt{u^2-1}}$	$\frac{du/dt}{1-u^2}$

II Primitives

Les primitives sont calculables à une constante près, notée ici κ

$\int t^\alpha dt=\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}+\kappa$ sauf pour $\alpha=-1$	$\int\exp(at)\,dt=\frac{1}{a}\exp(at)+\kappa$
$\int\sin(\omega t)\,dt=-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)+\kappa$	$\int\cos(\omega t)\,dt=\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)+\kappa$
$\int\frac{dt}{t}=\ln\lvert t\rvert+\kappa$	$\int\frac{dt}{a^2-t^2}=\begin{cases}\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right)+\kappa\\ \text{ou}\\ \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+t}{a-t}\right\rvert\ \text{avec}\ a^2>t^2\end{cases}$
$\int a^t dt=\frac{a^t}{\ln a}+\kappa$	$\int\ln t\ dt=t\ln t-t+\kappa$
$\int\frac{dt}{\cos^2(t)}=\tan(t)+\kappa$	$\int\tan t\ dt=-\ln\lvert\cos t\rvert+\kappa$
$\int\frac{f'(t)dt}{\sqrt{f(t)}}=\int\frac{df}{\sqrt{f(t)}}=2\sqrt{f(t)}+\kappa$	$\int\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=\arcsin\left(\frac{t}{\lvert a\rvert}\right)+\kappa$
$\int\mathrm{sh}(at)\,dt=\frac{1}{a}\mathrm{ch}(at)+\kappa$	$\int\mathrm{ch}(at)\,dt=\frac{1}{a}\mathrm{sh}(at)+\kappa$

III Développements limités

Pour $x\ll 1$, on a :

$\sin x\simeq x-\frac{x^3}{3!}$	$\exp x\simeq 1+x+\frac{x^2}{2!}$	$\frac{1}{1+x}\simeq 1-x+x^2$
$\mathrm{ch}x\simeq 1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{2n!}$	$\mathrm{sh}x\simeq x+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$
$\cos x\simeq 1-\frac{x^2}{2!}$	$\ln(1+x)\simeq x-\frac{x^2}{2}$	$\frac{1}{1-x}\simeq 1+x+x^2$
$\tan x\simeq x+\frac{x^3}{3}$	$\ln(1-x)\simeq -x-\frac{x^2}{2}$	$(1+x)^\alpha\simeq 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2$

4 Relations trigonométriques

I Formules trigonométriques

1 Sommes et produits

$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$	$\cos(2a) = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2\cos^2 a - 1 \\ 1 - 2\sin^2 a \end{cases}$	Si $t = \tan\frac{\theta}{2}$
$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$	$\sin(2a) = 2\sin a.\cos a$	$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$
$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$	$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$	$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$		$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$
$\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$	$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos(2a))$	
$\tan(a-b) = \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$	$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos(2a))$	

$2\cos a.\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
$2\sin a.\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
$\tan(p) + \tan(q) = \frac{\sin(p+q)}{\cos p.\cos q}$
$\tan(p) - \tan(q) = \frac{\sin(p-q)}{\cos p.\cos q}$

2 Relations avec les nombres complexes

$\underline{z} = r\exp(j\theta) = a + jb$ avec $a = r\cos\theta$ $b = r\sin\theta$ $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$$\cos\theta = \frac{\exp(j\theta)+\exp(-j\theta)}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\exp(j\theta)-\exp(-j\theta)}{2j}$$

Cas particulier :

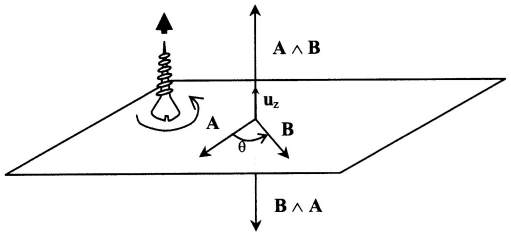
$$\underline{H} = \frac{\mathcal{A}}{a+jb} = |\underline{H}|\exp(j\varphi) \quad \text{où} \quad \varphi = \arg\underline{H}$$

avec $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\sin\varphi = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\tan\varphi = -\frac{b}{a}$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{ou} \qquad \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

selon le domaine d'appartenance de φ, compris entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, à déterminer en fonction du signe de $\cos\varphi$ et/ou $\sin\varphi$.

II Grandeurs vectorielles



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = AB\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right)\vec{u_z}$$

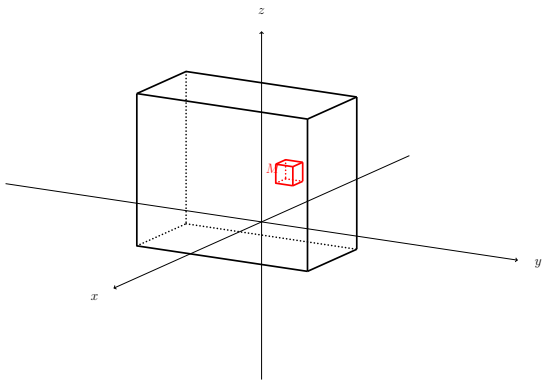
avec $\left(\vec{A},\vec{B}\right)$: angle **orienté** de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$.

5 Systèmes de coordonnées

I Les systèmes de coordonnées

1 Cartésiennes

On rappelle que pour un point de l'espace $M(x, y, z)$.



Eléments de longueur	
le long de l'axe des x	$\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u}_x$
le long de l'axe des y	$\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mathrm{d}y\overrightarrow{u}_y$
le long de l'axe des z	$\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mathrm{d}z\overrightarrow{u}_z$
Eléments de surface	
latérale gauche/droite ($y = cst$)	$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}z$
devant/derrière ($x = cst$)	$\mathrm{d}S = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$
dessous/dessus ($z = cst$)	$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
Elément de volume	
Volume	$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

2 Cylindriques

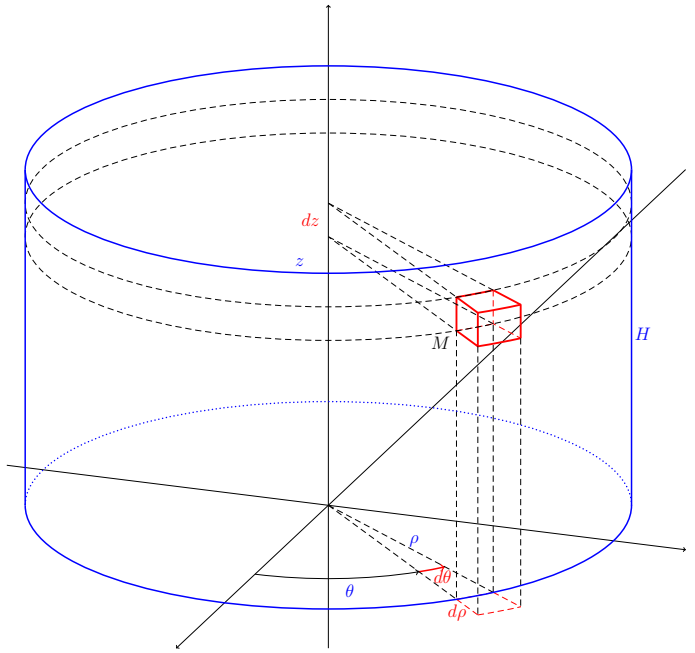
géométrie à symétrie axiale

On rappelle que pour un point de l'espace $M(\rho, \theta, z)$ avec

$\rho \in \mathbb{R}^+$
$\theta \in [0, 2\pi[$
$z \in \mathbb{R}$

On a :

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z! \end{cases}$$



Déplacements

suivant le rayon	$\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mathrm{d}\rho\overrightarrow{u}_\rho$
suivant une rotation d'angle $\mathrm{d}\theta$	$\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \rho\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u}_\theta$
suivant la cote z	$\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mathrm{d}z\overrightarrow{u}_z$

Eléments de surface

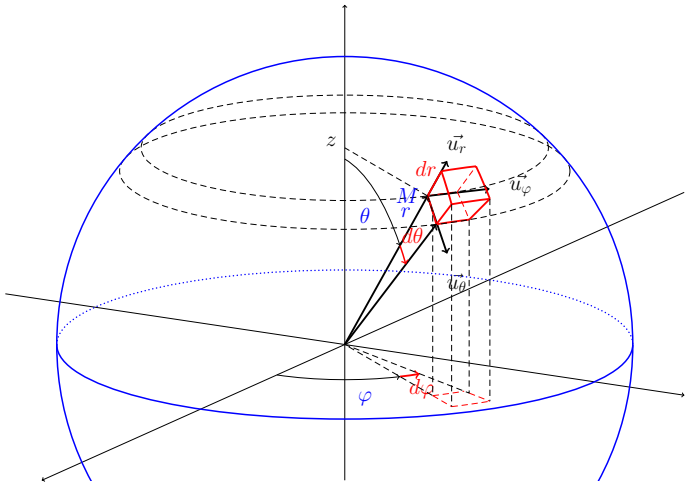
latérale ($\rho = cst$)	$\mathrm{d}S_{\mathrm{lat}} = \rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
dessus/fond ($z = cst$)	$\mathrm{d}S_{\mathrm{fond}} = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$
radiale ($\theta = cst$)	$\mathrm{d}S_{\mathrm{rad}} = \mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$

Element de volume

$\mathrm{d}\tau = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$

3 Sphériques

géométrie à symétrie centrale



On rappelle que pour un point de l'espace $M(r,\theta,\varphi)$ avec

$$r \in \mathbb{R}^+$$
$$\theta \in [0,\pi[$$
$$\varphi \in [0,2\pi[$$

On a :

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$

Déplacements

suivant le rayon	$\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u}_r$
le long d'un méridien	$\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u}_\theta$
le long d'un parallèle	$\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u}_\varphi$

Eléments de surface

sur l'enveloppe ($r = cst$)	$\mathrm{d}S_{\text{env}} = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$
dans un plan méridien ($\varphi = cst$)	$\mathrm{d}S_{\text{mer}} = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$
dans un plan « parallèle » ($\theta = cst$)	$\mathrm{d}S_{\text{par}} = r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$

Element de volume

$$\mathrm{d}\tau = r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

II Exercices

1. Calculer la surface d'une sphère de rayon R.

2. Calculer en coordonnées sphériques sur la demi-boule de rayon R, $z > 0$: $\overrightarrow{I} = \iiint \overrightarrow{u_r} dV$

3. Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$, créé par une distribution de courant

$$\begin{aligned} 0 &< r < a \rightarrow \overrightarrow{j} = j_0\overrightarrow{u_z} \\ a &< r < b \rightarrow \overrightarrow{j} = -j_1\overrightarrow{u_z} \\ a &< r \rightarrow \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

4. Calculer le champ électrique créé par une boule chargée uniformément en volume de rayon R et de charge volumique ρ.

5. Donner l'expression du vecteur des $\overrightarrow{u_{\theta\,s}}$ des coordonnées sphériques, dans la base cylindrique $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u}_{\theta_c}, \overrightarrow{u_z})$

6. Soit $P_v = \alpha\rho^2$, la puissance volumique de la force F. Calculer la puissance totale dissipée dans un cylindre de rayon R et de hauteur h.

7. Soit $\lambda = \frac{\lambda_0}{h}z$, la masse linéique d'un fil hélicoïdal de pas a et de rayon R et enroulé sur deux tours. L'origine du fil est en $z = 0$, calculer la masse du fil.

6 Repère de FRENET

I Définitions

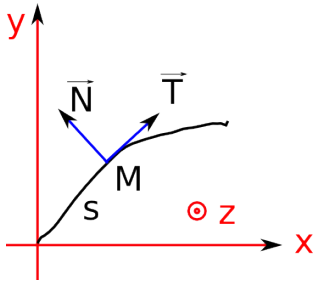
1 Abscisse curviligne

Définition :

1. On étudie le déplacement dans **le plan** d'un point matériel M sur une courbe. Le plan est l'ensemble des points tels que $z = Cte$.
2. On note s la distance sur la courbe entre le point O et le point M : $s = \widetilde{OM}$, c'est l'abscisse curviligne.
3. Finalement, le point M est repéré par

$$\boxed{M\left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right)}$$

2 Vecteurs de base



En tout point M, on peut définir la base locale : $\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{u}_z$, c'est la **base locale de Frenet.**

Soit le vecteur **tangent unitaire** :

$$\boxed{\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}}$$

Le vecteur **normal unitaire** :

$$\boxed{\overrightarrow{N} = \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{T}}$$

La base $\left(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{u}_z\right)$ est une **base orthonormée directe.**

- ✗ $\overrightarrow{T}$ est tangent à la trajectoire
- ✗ $\overrightarrow{T}$ est orienté dans le sens de la vitesse du point matériel.

Propriété à connaître

3 Dérivations

Par définition, on note :

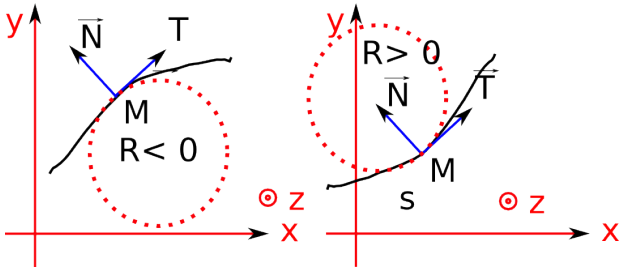
1. γ la **courbure de la trajectoire** telle que

$$\frac{\partial \overrightarrow{T}}{\partial s} = \gamma \overrightarrow{N}$$

2. le **rayon de courbure** est

$$\boxed{R = \frac{1}{\gamma}}$$

Il s'exprime en mètres.



- ✗ R est algébrique. Si $\overrightarrow{N}$ est orienté vers la concavité, alors $R > 0$.
- ✗ γ est lié à la dérivée seconde de OM :

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s^2}.\overrightarrow{N}$$

Propriété à connaître

- ✗ R est donc relié à l'inverse de la dérivée seconde.

3. On a finalement

$$\boxed{\frac{\partial \overrightarrow{T}}{\partial s} = \frac{\overrightarrow{N}}{R}}$$

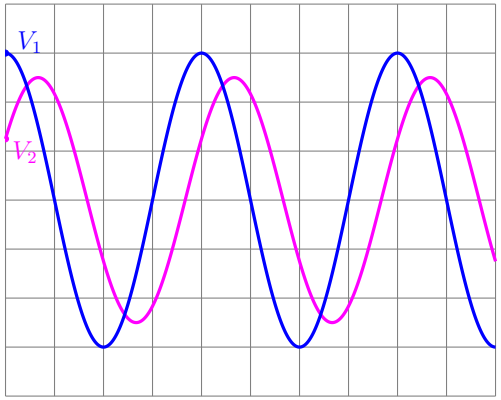
II Vitesse et accélération

La vitesse est uniquement colinéaire au vecteur $\overrightarrow{T}$, l'accélération est suivant $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$: :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T}} \qquad \boxed{\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N}}$$

7 Déphasages

I Avance ou retard de phase ?



Le signal V_1 est **en avance** sur V_2 : il atteint ses maxima avant l'autre, et semble donc être en arrière de lui dans la représentation temporelle.

Le déphasage du signal 2 par rapport au signal 1 est négatif

$$\boxed{\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 < 0}$$

Le déphasage du signal 1 par rapport au signal 2 est positif

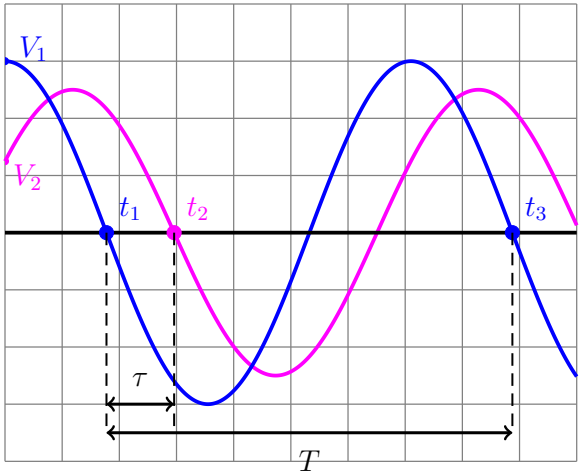
$$\boxed{\varphi_{1/2} = \varphi_1 - \varphi_2 > 0}$$

II Mesure du déphasage

Un règle de trois permet de trouver la valeur du déphasage.

Ecart temporel	déphasage
T	2π
$t_1 - t_2$	$\varphi_{2/1}$

$$\boxed{\varphi_{2/1} = 2\pi \frac{t_1 - t_2}{T}}$$



⚠ Attention… Verifier le signe et $\varphi_{2/1}$ doit être dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$

- ✗ Si $\varphi_{2/1} = 0$, les signaux sont en phase
- ✗ Si $\varphi_{2/1} = \pi$, les signaux sont en opposition de phase.
- ✗ $\varphi_{2/1} = +\frac{\pi}{2}$, 2 est en quadrature avance sur 1.
- ✗ $\varphi_{2/1} = -\frac{\pi}{2}$, 2 est en quadrature retard sur 1.

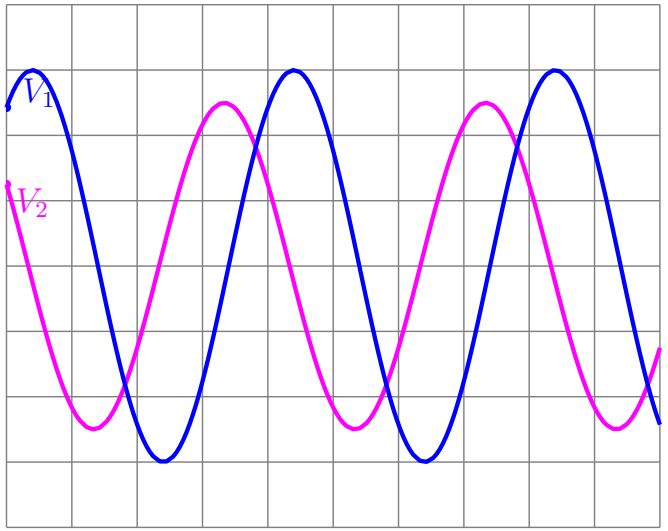
III Notation

— Soient deux ondes planes progressives :

$$V_1 = V_{1m}\cos(\omega t - kx + \varphi_1) \qquad V_2 = V_{2m}\cos(\omega t - kx + \varphi_2)$$

Si $\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 < 0 \Leftrightarrow \varphi_2 < \varphi_1$, alors 2 est en retard de phase sur 1.
Le signal $\cos(\omega t - kx)$ est en retard de phase de $\varphi = kx$ par rapport au signal $\cos(\omega t)$: c'est du à la propagation (temps nécessaire pour la propagation d'un signal.

IV Calcul du déphasage



8 Valeur moyenne

I Moyenne sur une série discrète

1 Evènements équiprobables

Définition :

Pour une série de N évènements A_i de même poids, on a par définition

$$\overline{A} = \langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} A_i$$

2 Probabilités

Définition :

Pour une série de N évènements A_i ayant la probabilité p_i, on a par définition

$$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^{N} p_i \; A_i$$

Pour des évènements équiprobables, $p = \frac{1}{N}$

Propriété à connaître

Application 3 : Moments magnétiques

On considère des moments magnétiques $\overrightarrow{M}$ dont les orientations sont $+\overrightarrow{u}_z$ où $-\overrightarrow{u}_z$ dans un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_z$.
La norme des moments est constante.

1. Quelle situation est la plus probable. On notera p_1 sa probabilité.
2. Donner le moment magnétique moyen.

II Moyenne sur une grandeur continue à 1D

1 Moyenne temporelle

Définition :

La moyenne temporelle d'un signal de période T est

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \; \mathrm{d}t$$

Savoir démontrer №1 : Moyennes classiques

$$\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0 \qquad \left\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle = \frac{1}{2}$$
$$\langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle = 0 \qquad \left\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \right\rangle = \frac{1}{2}$$

Application 4 :

Soit $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ et $g(t) = \cos(\Omega t + \varphi)$
Trouver les grandeurs suivantes

$$\langle f(t) \times g(t) \rangle = \qquad \left\langle (f(t) + g(t))^2 \right\rangle =$$
$$(\langle f(t) + g(t) \rangle)^2 =$$

Savoir démontrer №2 : Notation complexe

Montrer que pour un signal sinusoïdal, alors

$$\langle f(t)\rangle_T = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(\underline{f}\,\underline{f}^*\right)$$

Montrer que pour un signal sinusoïdal, alors

$$\left\langle \overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}\right\rangle_T = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{E}}\wedge\underline{\overrightarrow{B}}^*\right)$$

2 Loi de probabilité

Définition :

Si la probabilité d'être entre x et $x+\mathrm{d}x$ est $\mathrm{d}p(x) = P(x)\mathrm{d}x$, alors la moyenne d'une fonction $g(x)$ est

$$\langle g(x)\rangle = \int_0 g(x)\mathrm{d}p = \int G(x)P(x)\mathrm{d}x$$

On a $\int P(x)\mathrm{d}x = 1$

Propriété à connaître

Application 5 : Durée moyenne entre deux chocs

On considère un électron qui subit des chocs, soient t_q les temps qui séparent deux chocs.
La durée Δt qui sépare deux chocs suit la loi de probabilité

$$P(\Delta t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right)$$

1. Justifier que τ est la durée moyenne entre deux chocs.
2. Calculer $\overline{\Delta t^2}$

Application 6 : Hauteur moyenne

On se place dans le modèle de l'atmosphère isotherme $P = P_0\exp\left(-\frac{mgz}{k_BT}\right)$.

1. Montrer que
$$P(z) = \frac{P_0 S}{k_B T}\exp\left(-\frac{mgz}{k_BT}\right)$$
2. Trouver la hauteur moyenne $\overline{z}$ des molécules de gaz de masse m.

III Système à deux dimensions

Définition :

Vitesse moyenne :
Pour un écoulement dans un tuyau, soit une section perpendiculaire au tuyau de surface S, alors

$$\langle v\rangle = \frac{1}{S}\iint \overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Savoir démontrer №3 : Ecoulement de Poiseuille

Soit une loi de vitesse

$$v = \frac{\Delta p}{4L\eta}\left(R^2 - r^2\right)$$

Montrer que la vitesse moyenne est

$$\langle v\rangle = \frac{v_{\max}}{2}$$

Application 7 : Moments magnétiques à 3D

On considère des moments magnétiques $\overrightarrow{M}$ dont les orientations sont dans l'espace sont données par la loi de Maxwell-Boltzmann :

$$P(\theta) = A \exp\left(\frac{-MB\cos\theta}{k_B T}\right)$$

. θ est l'angle des coordonnées sphériques.

1. Calculer A.
2. Calculer $\overline{M_z}$.

IV Vitesse quadratique

Définition :

Par définition, on définit la vitesse quadratique moyenne

$$u = \sqrt{\overline{v^2}}$$

9 Mathématiques pour l'optique

I Propriétés des intégrales

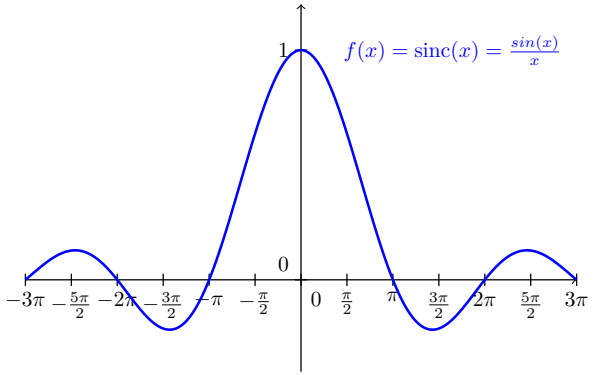
Si les variables x et y sont indépendantes et les bornes d'intégrations indépendantes alors

$$\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int \mathrm{d}x\right)\left(\int \mathrm{d}y\right)$$
$$\iint f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int g(y)\mathrm{d}y\right)$$
$$\iint (f(x)+g(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int \mathrm{d}y\right) + \left(\int g(y)\mathrm{d}y\right)\left(\int \mathrm{d}x\right)$$

Application 8 : Calculs de surfaces

- ✗ Calculer l'aire d'un carré.
- ✗ Calculer l'aire d'un triangle rectangle de coté a et b.

II fonction sinc



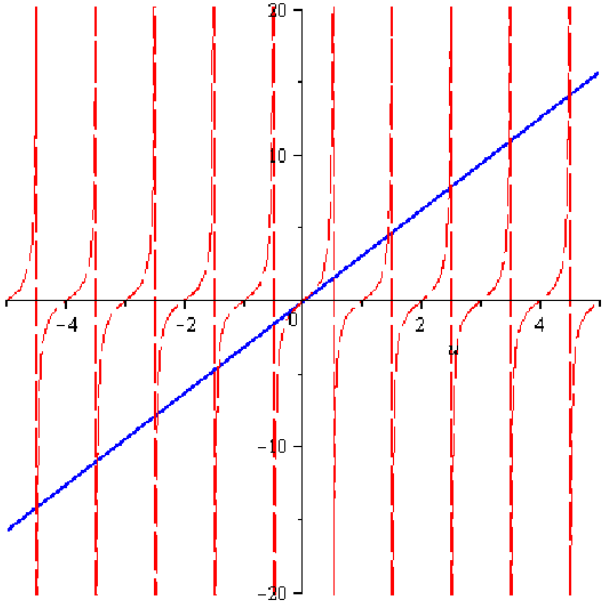
1. La fonction est prolongée par continuité en $x = 0$, on a $\mathrm{sinc}(0) = 1$.
2. Annulations pour

$$\boxed{x = p\pi} \text{ avec } p \in \mathbb{Z}^*$$

3. Lorsque $x \to \pm\infty$, $\mathrm{sinc}(x) \to 0$.
4. $\mathrm{sinc}(x)$ est une fonction **paire** (rapport de 2 fonctions impaires).

Maxima de $f(x) = \mathrm{sinc}(x)$:
Maximum principal en $x = 0$ où la fonction vaut 1.
Maxima secondaires vérifient la relation : $\boxed{x_M = tan(x_M)}$.
Il n'existe pas de solutions analytiques à cette équation (mis à part le cas $x = 0$) mais une rapide étude graphique montre que ces racines sont très proches des valeurs $\frac{q\pi}{2}$ avec $q \in \mathbb{Z}^*$ et $q \geqslant 3$.

Propriétés à connaître



III Fonction $sinc^2$

Propriétés de la fonction $g(x) = \text{sinc}^2(x)$:

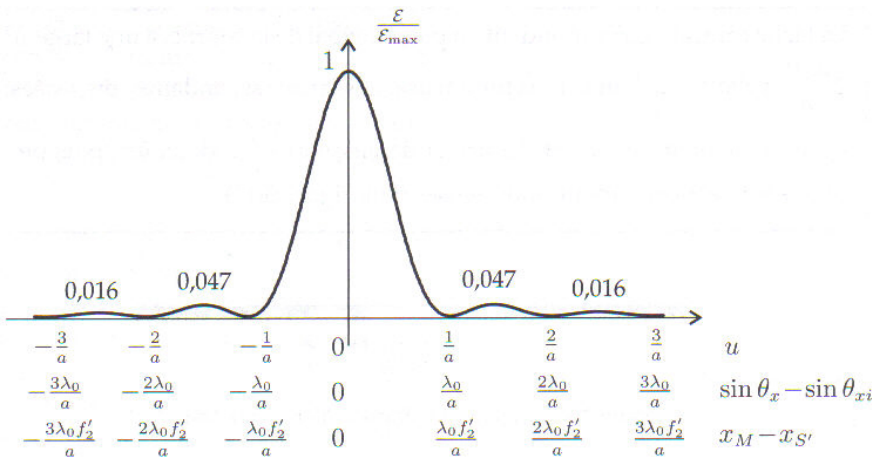
Les **minima** correspondent aux annulations de $\text{sinc}(x)$, soit $x_p = p\pi$ et avec les notations du calcul, $\pi u_p \epsilon_x = p\pi$, soit

$$u_p = \frac{p}{\epsilon_x} \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}^*$$

Propriétés à connaître

Maxima

$g(x)$ admet un maximum principal en $x = 0$ où la fonction vaut 1. ainsi que des maxima secondaires vérifiant la relation : $\boxed{x_M = tan(x_M)}$.



x	0	π	$1,43\pi$	2π	$2,45\pi$	$3,47\pi$	$4,48\pi$
$\text{sinc}(x)$	1	0	$-0,27$	0	$0,128$	$-0,091$	$0,071$
$\text{sinc}^2(x)$	1	0	$0,047(\simeq 5\%)$	0	$0,016(\simeq 2\%)$	$8,3.10^{-3}$	$5,2.10^{-3}$

TABLE 1 – Quelques valeurs caractéristiques de $g(x) = \text{sinc}^2(x)$

Le domaine $-\pi < x < \pi$ caractérise la **tache centrale** : l'aire sous la tache centrale est égale à environ 90% de l'aire totale sous la courbe.

La demi-largeur correspondante s'écrit en fonction

- ✗ de u : $\frac{1}{\epsilon_x}$
- ✗ de $\Delta x = x_{S'} - x_M$: $\frac{\lambda_0 f_2'}{\epsilon_x}$

10 Propriétes du gradient, de la divergence et du rotationnel

I Propriétes du gradient

1 Expression dans les différents systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u}_z$$

Coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\overrightarrow{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u}_z$$

Coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\overrightarrow{u}_\phi$$

2 Théorème du gradient

2.a Enoncé

$$\oiint_S u\overrightarrow{dS} = \iiint_V \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,u\right)\text{d}\tau$$

Le volume V est intérieur à la surface S.

2.b Application aux forces de pression

Sur un système fermé de surface S, la somme des forces de pression peut s'écrire :

$$\oiint(-p)\overrightarrow{n}dS = -\iiint\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,p\right)\text{d}\tau$$

Les forces surfaciques de pression peuvent s'exprimer comme une force volumique $f_v = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p$

II Propriétes de la divergence

1 Expression dans les différents systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes :

$$\text{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordonnées cylindriques :

$$\text{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques :

$$\text{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

2 Théorème d'Ostrogradsky

Le flux d'un vecteur à travers une surface **fermée** orientée **normale sortante** est égal à l'intégrale triple sur le **volume intérieur** de la divergence :

$$\oiint_S \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{V_{\text{int}}} \text{div}\,\overrightarrow{A}\,\text{d}\tau$$

2.a Théorème de Gauss

En électromagnétisme, l'équation de Maxwell-Gauss

$$\text{Maxwell-Gauss}\quad \text{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

permet d'en déduire le théorème de Gauss :

$$\oiint_S \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{Vint} div\overrightarrow{E}\;d\tau = \iiint_{Vint}\frac{\rho}{\varepsilon_0}d\tau = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On retient donc le théorème de Gauss : le flux du champ électrique à travers une surface fermée S **orientée normale sortante** est égal à la charge intérieure à S divisée par ε_0.

$$\boxed{\oiint_S \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Ce théorème permet de calculer le champ $\overrightarrow{E}$ lorsque le flux de $\overrightarrow{E}$ est facile à exprimer.

2.b Lois de conservation

Le théorème d'Ostrogradsky permet de démontrer les lois de conservation :

✗ Conservation de la masse :
Le flux sortant de masse est

$$\oiint_S \mu \vec{v}.\vec{dS} = \iiint_{Vint} \text{div } (\mu \vec{v})\, d\tau$$

d'où l'équation :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + div\,(\mu \vec{v}) = 0}$$ Equation locale de conservation de la masse

✗ Equation de la chaleur :
Le flux sortant d'énergie

$$\oiint_S \vec{j_Q}.\vec{dS} = \iiint_{Vint} \text{div } \left(\vec{j_Q}\right) d\tau$$

d'où l'équation :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + div\left(\vec{j_Q}\right)$$

On peut transformer cette équation avec la loi de Fourier :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\lambda}{\mu c}\Delta n = 0}$$

✗ Equation de diffusion : sans terme de création
Le flux sortant de particules

$$\oiint_S n \vec{v}.\vec{dS} = \iiint_{Vint} \text{div } (n \vec{v})\, d\tau$$

D'où l'équation en posant $\vec{j} = n\vec{v}$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + div\left(\vec{j}\right)$$

En utilisant la loi de Fick

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + D\Delta n = 0}$$

3 Champ à flux conservatif

On dit qu'un champ $\vec{j}$ est à flux conservatif lorsque son flux à travers toute surface fermée est nul ; ce qui revient à dire que sa dievrgence est nulle en tout point.

$$\vec{j} \text{ à flux conservatif} \iff \text{div } \vec{j} = 0$$

Sur un tube de courant, le flux sur les cotés étant nul ; on en déduit que le flux de $\vec{j}$ entrant par la surface S_e : $\Phi_e = \iint_{S_{ent.}} \vec{j}.dS$ est égal au flux sortant par la surface S_s : $\Phi_s = \iint_{S_{sort.}} \vec{j}.dS$

$$\boxed{\vec{j} \text{ à flux conservatif} \iff \Phi_e = \Phi_s \text{ sur tous les tubes de courant}}$$

$\iff$ conservation du flux

✗ Equation de Maxwell-Flux : $div\vec{B} = 0 \to \vec{B}$ est à flux conservatif

✗ Régime stationnaire de l'équation de la chaleur $div\left(\vec{j_Q}\right) = 0 \to \vec{j_Q}$ est à flux conservatif $\iff$ conservation du flux d'énergie Φ

✗ Ecoulement incompressible $\iff div\,(\vec{v}) = 0 \to \vec{v}$ est à flux conservatif $\iff$ conservation du **débit volumique**

✗ Ecoulement stationnaire $\iff div\,(\mu\vec{v}) = 0 \to \vec{j} = \mu\vec{v}$ est à flux conservatif $\iff$ conservation du **débit massique**

4 Potentiel vecteur

Pour tout champ vectoriel $\vec{A}$, on a $div\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right) = 0$. On peut donc trouver un potentiel vecteur :

$$\boxed{div\vec{B} = 0 \to \vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}} \to \vec{A} \text{ est un potentiel vecteur}$$

III Propriétés du rotationnel

1 Expression dans les différents systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{u}_z$$

2 Théorème de Stokes

La circulation d'un vecteur sur une ligne **fermée** Γ , orientée, est égale au flux du rotationnel de ce vecteur sur la surface ouverte S s'appuyant sur Γ et orientée par Γ.

$$\boxed{\oint_\Gamma \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS}}$$

2.a Théorème d'Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère pour la magnétostatique est $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j}$. On peut donc exprimer la circulation de $\overrightarrow{B}$ sur une ligne fermée :

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS} = \iint_S \mu_0\overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS}$$

$\overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS}$ représente les courants qui traversent la surface S ; ils sont notés les courants enlacés soit

$$\boxed{\oint_\Gamma \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 i_{enlacés}\ \text{Th d'Ampère}}$$

Ce théorème permet de calculer le champ $\overrightarrow{B}$ lorsque $\oint_\Gamma \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl}$ est facile à exprimer.

2.b Mécanique des fluides

On a le vecteur tourbillon $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot\,(\overrightarrow{v})}$, on a donc :

$$\boxed{\oint_\Gamma \overrightarrow{v}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}.\overrightarrow{dS} = 2\iint_S \overrightarrow{\Omega}.\overrightarrow{dS} = 2\Phi_\Omega}$$

2.c Induction loi de Faraday

En régime non permanent, l'équation de Maxwell-Faraday est $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\frac{\partial B}{\partial t}}$, on en déduit la fem d'induction :

$$\boxed{e = \oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS}\right) = -\frac{d\phi}{dt}}$$

3 Potentiel scalaire

Lorsque le rotationnel est nul, alors le champ dérive d'un potentiel :

$$\text{si } \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0} \rightarrow \overrightarrow{X} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(\Phi)$$

✗ Cas du champ électrique.
En électrostatique, l'équation de Maxwell Faraday donne $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ donc le champ électrique dérive du potentiel électrique V :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \rightarrow \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V)}$$

✗ Champ des vitesses irrotationnel :

$$\boxed{\text{Ecoul. irrotationnel} \rightarrow \overrightarrow{rot\,\overrightarrow{v}} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(\Phi)\ \text{écoul. potentiel}}$$

IV Relations utiles

1 Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f+g) = \overrightarrow{\text{grad}}\,f + \overrightarrow{\text{grad}}\,g$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}\,g + g\overrightarrow{\text{grad}}\,f$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}) = (\overrightarrow{B}.\overrightarrow{\text{grad}})\,\overrightarrow{A} + (\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\text{grad}})\,\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}$$

2 Divergence

$$div(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}) = div\,\overrightarrow{A} + div\,\overrightarrow{B}$$
$$div(f\overrightarrow{A}) = f\,div(\overrightarrow{A}) + \overrightarrow{A}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f$$
$$div(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{rot}A - \overrightarrow{A}.\overrightarrow{rot}B$$

3 Rotationnel

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}) + \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B})$$
$$\overrightarrow{rot}(f\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,f\wedge\overrightarrow{A} + f\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}$$

4 Relations imbriquées

$$div(\overrightarrow{\text{grad}}\,U) = \triangle U$$
$$div(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}) = 0$$
$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\text{grad}}\,U) = 0$$
$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(div\,\overrightarrow{A}) - \overrightarrow{\triangle}\,\overrightarrow{A}$$
$$div(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} - \overrightarrow{A}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}$$

5 Autres relations intégrale

$$\oint V\,d\ell = -\iint \overrightarrow{\text{grad}}\,V\wedge\overrightarrow{dS}$$
$$\oint\oint \overrightarrow{dS}\wedge\overrightarrow{A} = \iiint \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}\,d\tau$$

V Formulaire

	Coordonnées cartésiennes x,y,z	Coordonées cylindriques ρ,θ,z	Coordonnées sphériques r,θ,ϕ
$f(\overrightarrow{r})$	$f(x,y,z)$	$f(\rho,\theta,z)$	$f(r,\theta,\phi)$
$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})$	$A_x(x,y,z)\,\overrightarrow{u}_x +$ $A_y(x,y,z)\,\overrightarrow{u}_y +$ $A_z(x,y,z)\,\overrightarrow{u}_z$	$A_\rho(\rho,\theta,z)\,\overrightarrow{u}_\rho +$ $A_\theta(\rho,\theta,z)\,\overrightarrow{u}_\theta +$ $A_z(\rho,\theta,z)\,\overrightarrow{u}_z$	$A_r(r,\theta,\varphi)\,\overrightarrow{u}_r +$ $A_\theta(r,\theta,\varphi)\,\overrightarrow{u}_\theta +$ $A_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\overrightarrow{u}_\varphi$
$\overrightarrow{\text{grad}}\,f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u}_z$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\overrightarrow{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u}_\theta +$ $\frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u}_z$	$\frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u}_\theta +$ $\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u}_\varphi$
$\text{div}\,\overrightarrow{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} +$ $\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u}_x +$ $\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u}_y +$ $\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u}_z$	$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u}_\rho +$ $\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\overrightarrow{u}_\theta +$ $\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{u}_z$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\overrightarrow{u}_r +$ $\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\overrightarrow{u}_\theta +$ $\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{u}_\varphi$
$\triangle f(\overrightarrow{r})$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} +$ $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) +$ $\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) +$ $\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

11 Incertitude sur une mesure

Ce texte comprend trois parties distinctes : un texte introductif sur les notions relatives à l'étude des incertitudes sur une mesure, une proposition de TP et un TD d'analyse statistique.

I Notion d'incertitudes

1 Introduction

Lors d'une expérience, on cherche à mesurer une grandeur physique, c'est à dire la chiffrer dans un système d'unités.
Cependant, la valeur trouvée peut varier selon la méthode de mesure utilisée, les caractéristiques du matériel de mesure, le soin apporté ···
Voici un exemple qui illustre cette remarque :

Application 9 :

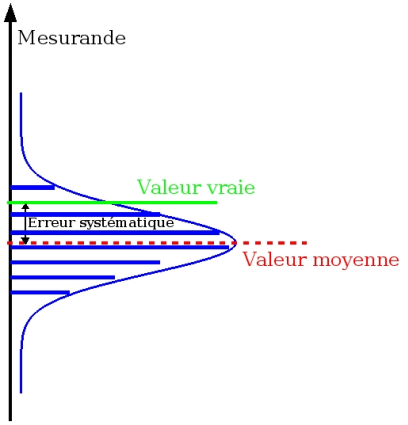
On mesure la largeur d'une table de plusieurs manières :

Méthode	Mesure de ℓ	Incertitude $\Delta\ell$	$\frac{\Delta\ell}{\ell}$
Juxtaposition de mains	4 mains = 80 cm	5 cm	6%
Double décimètre	$3*20+19=79$ cm	0.5 cm	0,2%
Mètre ruban	79,8 cm	0,2 cm	0,2%

On définit un intervalle de confiance, c'est à dire une plage de mesure dans laquelle, on juge que la valeur réelle de la mesure doit se trouver. La largeur de l'intervalle est **l'incertitude sur la mesure**. Exemple : pour une mesure avec la main : on peut mesurer avec la précision d'un quart de main, soit un $\ell = 80 \pm 5$ cm. L'incertitude relative est le rapport $\frac{\Delta\ell}{\ell}$.

2 Vocabulaire

- ✗ La grandeur dont l'on souhaite obtenir la valeur est appelée le **mesurande**.
- ✗ La **valeur vraie** (M_{vrai}) du mesurande est la valeur que l'on obtiendrait si la mesure était parfaite.
  Une mesure n'étant jamais parfaite, cette valeur est toujours inconnue.
- ✗ **Exactitude** d'une mesure : étroitesse de l'accord entre le résultat d'un mesurage et la valeur vraie du mesurande.



II Deux méthodes pour évaluer l'incertitude :

Pour déterminer une incertitude, une étude statistique est suffisante (type A). Si il est difficile ou impossible de réaliser plusieurs expériences, on évaluera l'incertitude en estimant les erreurs expérimentales (type B).

1 Evaluation des erreurs expérimentales : type A

1.a Erreur systématique

Toute mesure peut-être entachée d'une erreur de mesure d'origine physique, qui doit être éliminée pour minimiser l'incertitude.

Application 10 :

✗ Dans le cas de mesure avec la main, on ne connaît pas la taille réelle de la main, elle est supposée égale à 20 cm alors que sa taille réelle est inconnue, de plus l'écartement entre les doigts peut varier d'une mesure à l'autre ... Cette méthode comporte une grande erreur systématique.

✗ Dans le deuxième exemple, la règle peut-être déformée, la mesure peut-être faite suivant une direction non perpendiculaire à la longueur, la position du zéro sur le double décimètre peut-être mal repérée... L'incertitude sur la mesure va être limitée par ces erreurs systématiques ;pour en rendre compte, l'expérimentateur l'a estimée à $\Delta\ell = 0,5$ cm.

1.b Précision intrinsèque :

Si on parvient à éliminer ces erreurs systématiques, on atteint la précision intrinsèque du matériel ou de la méthode. La précision intrinsèque est souvent donnée par le constructeur.

Application 11 :

Pour l'utilisation du mètre, la précision intrinsèque de la mesure est de 0,1 cm car c'est la graduation la plus petite lisible sur l'outil. On note $\Delta\ell = 0,1$ cm.
C'est à l'opérateur de trouver la valeur de l'erreur intrinsèque par lecture des documentations, estimation ...

2 Etude statistique

2.a Fluctuation statistique

On constate que lorsque l'on reproduit plusieurs fois une même mesure, avec une précision suffisante, les valeurs observées diffèrent. Sur les histogrammes ci-dessous, on a représenté les résultats obtenus ℓ_i pour $N = 100$ expériences consécutives dans les trois cas :

La précision de la première mesure ne permet pas de faire une étude statistique satisfaisante. La deuxième expérience est entachée d'une erreur systématique. Sur la troisième série, on peut définir la **valeur moyenne observée** $(80,0)$ et la dispersion de ces mesures autour de la valeur moyenne : c'est l'écart type $(0,18)$.
Cette dernière mesure est utilisée pour évaluer l'incertitude : ici $\Delta\ell = 0,1$ cm.
De manière qualitative, on constate que l'augmentation du nombre de mesures entre les mesures 3 et 4 diminue l'incertitude.

3 Incertitude

De manière plus quantitative, on définit : Valeur moyenne et écart type :

$$\overline{\ell} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ell_i \text{ et} \sigma(\ell) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{i=N}\left(\ell_i - \overline{\ell}\right)^2}$$

Ecart type de la moyenne [2] :

$$\sigma\left(\overline{\ell}\right) = \frac{\sigma(\ell)}{N}$$

L'écart type de la moyenne décroît comme $\frac{1}{\sqrt{N}}$.
Ainsi la réalisation d'un grand nombre d'expériences conduit à une meilleure précision sur le résultat final. On retient , que si l'on réalise N mesures de ℓ, on peut écrire

$$\boxed{\ell = \overline{\ell} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

Application 12 :

On a reproduit dans le diagramme suivant les mesures de largeur avec le mètre ruban pour 10, 100 et 200 mesures.

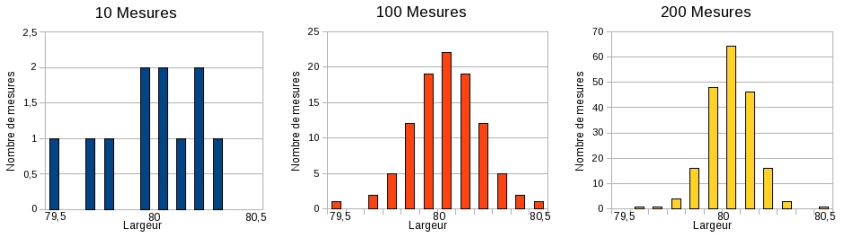


FIGURE 11.1 – $N = 10$ Mesures, écart type $\sigma = 0.57$ cm , $N = 100$ Mesures, écart type $\sigma = 0.18$ cm $N = 200$ Mesures, écart type $\sigma = 0.12$ cm

On retrouve les résultats attendus : l'incertitude est divisée par $\frac{100}{10} = 0.57$ entre la première et la deuxième expérience et par $\frac{200}{10} = 4.6$ entre la première et la troisième.

2. pour un petit nombre d'expériences, $\sigma\left(\overline{\ell}\right) = t\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$ où t est appelé coefficient de Student, proche de 1 pour nous

4 Bilan

Lors d'une mesure, on doit

1. Eliminer ou estimer l'erreur systématique
2. Evaluer la précision intrinsèque
3. Effectuer des séries de mesures si la précision intrinsèque est trop faible.

III Propagation de l'incertitude :

Application 13 :

On utilise la mesure précédente pour mesurer la surface de la table. On mesure la largeur avec les même méthodes, la surface est : $S = L * \ell$

Méthode	Mesure S	Incertitude ΔS	$\frac{\Delta S}{S}$
Mains	$0,80 * 1,0 = 0,8\text{m}^2$	640 cm^2	8%
Double décimètre	$79 * 101 = 0,79$ m^2	64 cm^2	0.8%
Mètre ruban	$79,6 * 100,9 = 0,803$ m^2	26 cm^2 0.3%	

On estime l'incertitude sur la mesure de la surface de la manière suivante :

$$\Delta S = \sqrt{L^2 \left(\Delta \ell\right)^2 + \ell^2 \left(L^2\right)}$$

De manière générale si une fonction $f(x, y)$ est exprimée en fonction des variables x et y alors :

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2}$$

IV Présentation d'un résultat :

1 Ecrire un nombre :

Pour écrire un nombre, on va utiliser la notation suivante : $x \pm \Delta x$
On pourra alors estimer,avec une bonne approximation, pour un nombre de mesures supérieur à 10, que Δx est égal à l'incertitude.
Dans tous les cas, on ne donnera pas plus de deux chiffres significatifs pour l'incertitude.

2 Etude d'une courbe :

Une manière claire de présenter des résultats d'expérience, est de représenter sur un graphe le résultat d'une mesure Y en fonction d'un paramètre X que l'on peut faire varier.
On représente ici la tension U en fonction du courant I dans une résistance R. On peut faire figurer les incertitudes sur les mesures : chaque valeur est représentée par une case de largeur l'incertitude ΔUet de hauteur ΔI.

On peut représenter la droite médiane (obtenue par modélisation $R = 469\ \Omega$) et les deux droites extrêmes $R = 480\ \Omega$ et $R = 459\ \Omega$ soit $R = 469 \pm 11\ \Omega$.

3 Exemples et exercices :

- ✗ On mesure la longueur d'une voiture en utilisant un double décimètre et un décamètre. Quelle mesure vous paraît la mieux adaptée ?
- ✗ Pour la mesure d'une résistance de 10 Ω , on utilise une méthode entachée d'une erreur sytématique de 1 Ω. 10 mesures ont donné une incertitude statistique de 0.8 Ω, vous parait-il utile de réaliser d'autres expériences ?

Travaux Dirigés

I Introduction

On se propose d'estimer l'inductance d'une bobine par l'étude de la résonance d'un circuit RLC série dans laquelle est placée la bobine. La fréquence de résonance vérifiant

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$$

On se propose de déterminer f_0 avec une incertitude de type B (analyse statistique). Pour cela deux étudiants sont affectés à un même poste et disposent de différentes méthodes de mesurage de f_0 ; ils ont à leur disposition :

- ✗ deux oscilloscopes (un semi analogique et un numérique), permettant un mesurage en mode balayage (avec curseurs ou non) de la période, qui ont une fonction *mesure de fréquence* et enfin permettent l'affichage en mode Lissajous.
- ✗ deux GBF à affichage digital de la fréquence de fonctionnement (dont un avec réglage plus précis -micro ajustable-)
- ✗ plusieurs résistances

II Résultats

Oscilloscope 1 :

Méthode	Série 1	Série 2
Curseurs	3.185	3.190
Automatique	3.195	3.205
GBF 1 Balayage max	3.070	3.197
GBF 1 Balayage phi	3.223	3.181
GBF 1 XY	3.165	3.183
GBF 2 Balayage max	3.202	3.175
GBF 2 Balayage phi	3.194	3.183
GBF 2 XY	3.185	3.176

Oscilloscope 2 :

Méthode	Série 1	Série 2
Curseurs	3.183	3.194
Automatique	3.192	3.207
GBF 1 Balayage max	2.960	3.198
GBF 1Balayage phi	3.231	3.182
GBF 1 XY	3.179	3.187
GBF 2 Balayage max	3.205	3.180
GBF 2 Balayage phi	3.199	3.192
GBF 2 XY	3.182	3.180

III Analyse des résultats

1 Incertitude sur f_0

Estimateur de la fréquence de résonance $f_0 = 3.180$ kHz. Ecart type expérimental

$$\sigma\left(\overline{f_0}\right) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{i=N}\left(f_{0i} - \overline{f_0}\right)^2} = 0.47 \text{ Hz}$$

Incertitude $\Delta f = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0.008$ kHz.

2 incertitude sur C

On étudie l'incertitude sur C, par une évaluation de type A. Le constructeur donne $C = \overline{C} \pm 5\%$ Soit $\Delta C = \frac{C}{\sqrt{3}} = 6.4$ nF. Finalement

$$C = 220 \pm 6.4 \text{ nF}$$

3 Valeur de L

Avec la composition des incertitudes, on trouve

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial f_0}\right)^2 \Delta f_0^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial C}\right)^2 \Delta C^2}$$

On trouve finalement

$$L = 11,38 \pm 0.64 \text{ mH}$$

12 Ordres de Grandeur en Physique

I Les 7 unités de base du système international

Unité	Symbole	Grandeur	Définition
seconde	s	temps	La **seconde** est la durée égale à 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.
mètre	m	longueur	Le **mètre** est la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide en une durée de 1/299 792 458 de seconde.
kilogramme	kg	masse	Le **kilogramme** est la masse du prototype en platine iridié, sanctionné par la conférence générale des poids et mesures en 1889 et déposé au pavillon de Breteuil, à Sèvres.
ampère	A	intensité	L'**ampère** est l'intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans des conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2.10^{-7} N par mètre de longueur.
kelvin	K	température	Le **kelvin**, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.
mole	mol	quantité de matière	La **mole** est la quantité de matière contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12.
candela	cd	intensité lumineuse	La **candela** est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540.10^{12} hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian.

II Electricité

1 Composants usuels de TP

Résistance	$R \simeq 1\ \Omega$ à $100\ \text{k}\Omega$
Inductance d'une bobine	$L \simeq 10\ \text{mH}$
Capacité d'un condensateur	$C \simeq 1\ \text{nF}$ à $1\mu\text{F}$
Pulsation de résonance	$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \simeq 10\text{kHz}$

2 Quelques résistances

Supraconducteur	$R \simeq 0\ \Omega$
1km de fil à haute tension	$\simeq 0,1\ \Omega$
1km de cuivre	$\simeq 8\ \Omega$
Résistance du corps humain	$\simeq 1\ \text{k}\Omega$
Impédance de sortie d'un GBF	$R = 50\ \Omega$
Impédance d'entrée d'un oscilloscope ou voltmètre	$R = 1\ \text{M}\Omega$

3 Électricité de la maison

Tension efficace EDF et fréquence	$U = 230\ \text{V}$ et $f = 50\ \text{Hz}$
Puissance bouilloire	$P \simeq 2\text{kW}$
Intensité et puissance moyenne dans une lampe LED	$I \simeq 20\text{mA}$ et $P \simeq 5\text{W}$

III Ondes

1 Célérité

Célérité du son dans l'air à 20 °C	$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 346\ \text{ms}^{-1}$
Célérité du son dans diff. matériaux	$c_{\text{eau}} = 1400\ \text{ms}^{-1}$, $c_{\text{acier}} = 4000\ \text{ms}^{-1}$, $c_{\text{verre}} = 5500\ \text{ms}^{-1}$
Fréquences audibles par l'Homme	$f \in [20\ \text{Hz}, 20\ \text{kHz}]$
Puissance sonore $P = 10 \log \frac{\lvert\langle\Pi\rangle\rvert}{\lvert\langle\Pi_0\rangle\rvert}$	$P_{\text{seuil}} = 0\ \text{dB}$, $P_{\text{conversation}} = 60\ \text{dB}$, $P_{\text{Avion}} = 130\ \text{dB}$
Célérité des ondes EM dans le vide	$c = 3.10^8\ \text{ms}^{-1}$
Indices optiques	$n_{\text{eau}} = 1,33$, $n_{\text{air}} - 1 = 3.10^{-4}$, $n_{\text{huile}} = 1,5$
Dispersion dans un verre	$\frac{\text{d}n}{\text{d}\lambda} \simeq -2.10^{-4}\text{nm}^{-1}$
Célérité des ondes EM dans un câble coaxial	$c_{\text{cable}} \simeq 2.10^8\ \text{ms}^{-1}$

IV Optique

1 Longueurs d'onde

Doublet jaune du Sodium	$\lambda_1 = 589\ \text{nm}$, $\lambda_1 = 589,6\ \text{nm}$, $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq 10^{-3}$
Raie rouge du laser He-Ne	$\lambda = 632,8\ \text{nm}$
Raie verte du mercure	$\lambda = 546,1\ \text{nm}$
Largeur naturelle d'une raie d'une lampe spectrale	$\Delta\nu_{\text{naturelle}} \simeq 100\ \text{MHz}$
Largeur spectrale d'une raie d'une lampe spectrale	$\Delta\lambda_{\text{Doppler+Chocs}} \simeq 2.10^{-1}\ \text{nm} \rightarrow \Delta\nu \simeq 200\ \text{GHz}$ $\ell_c = \frac{c}{\Delta\nu} = 1\ \text{mm}$

2 Instruments d'Optique

Focales usuelles	$f' \in [100\text{ mm}, 1000\text{ mm}]$
Faire l'image d'un objet sur écran	$f' \in [100\text{ mm}, 200\text{ mm}]$ (Michelson en coin d'air)
Faire l'image d'un objet situé à l'infini	$f' \in [500\text{ mm}, 1000\text{ mm}]$ (Michelson en anneaux)
Pouvoir de résolution de l'œil = précision angulaire d'un goniomètre	$\Delta\theta = 1' = 3.10^{-4}$ rad

V Thermodynamique

1 Valeurs pour l'air

Masse molaire	$M = 29$ g.mol^{-1}
Capacité thermique molaire à volume constant	$c_{vm} = \frac{5R}{2} = 21$ J.K^{-1}.mol^{-1}
Capacité thermique molaire à pression constante	$c_{pm} = \frac{7R}{2} = 29$ J.K^{-1}.mol^{-1}
Coefficient γ de Laplace	$\gamma = \frac{c_{pm}}{c_{vm}} = \frac{7}{5} = 1,4$
Masse volumique (à 20 °Csous 1 bar)	$\mu = \frac{MP}{RT}/RT = 1,2$ kg.m^{-3}
Densité particulaire (à 20 °Csous 1 bar)	$n = \frac{P}{kBT} = 2,5.10^{25}$ m^{-3}

2 Valeurs pour l'eau

Masse molaire	$M = 18$g.mol^{-1}
Capacité thermique massique liquide	$c_\ell = 4,18.10^3$J.K^{-1}.kg^{-1}
Capacité thermique massique de la glace	$c_g = 2,1.10^3$J.K^{-1}.kg^{-1}
Masse volumique de l'eau liquide (à 20°Csous 1 bar)	$\mu = 10^3$ kg.m^{-3}
Masse volumique de la glace	$\mu \simeq 0,9.10^3$ kg.m^{-3}
Chaleur latente de vaporisation de l'eau (à 100 °Csous 1 bar)	$\ell_{vap} = 2300$ kJ.kg^{-1}
Chaleur latente de fusion de la glace	$\ell_{fus} = 330$ kJ.kg^{-1}
Point Triple	$T = 273,16$K, $p = 600$ Pa

3 Pression

Pression atmosphérique	$P_0 = 1$ atm $= 1,013$ bar $= 1,013.10^5$ Pa
Loi de l'hydrostatique	$p = p_0 + \mu gz$, soit +1 bar tous les 10 m.
Profondeur des océans	$h_{ocean} \simeq 4$ km
Hauteur de l'atmosphère	$h_{atmo} \simeq 40$ km

4 Corps noir

Température d'un corps noir qui émet dans le visible (loi de Wien) 6000 à 8000 K

VI Mécanique

1 Terre

Age	$T = 4,5$ milliards d'années
Rayon moyen R_T , périmètre p	$R_T = 6400$ km, $p = 40000$ km
Masse	$M_T = 6.10^{24}$ kg
Latitude de Paris	$\lambda_{Paris} \simeq 49$ °
Rayon de l'orbite autour du soleil	$a = 150.10^6$ km
Vitesse de satellisation depuis la surface de la Terre	$v_{Sat} \simeq 8$ km.s^{-1}
Vitesse de libération depuis la surface de la Terre	$v_{lib} \simeq 11$ km.s^{-1}
Altitude satellite géostationnaire	$h \simeq 36000$ km.s^{-1} , $r = 42400$ km

2 Lune

Rayon moyen R_L	$R_L = 1760$ km $\simeq \frac{R_T}{4}$
Masse	$M_T = 7.10^{22}$ kg $= \frac{M_T}{85}$
Lunaison : période autour de la Terre	$T \simeq 29,5$æ
Période des marées sur Terre	$T = 12$ h25 min

3 L'univers

Age	$T \simeq 14$ milliards d'années
Nb d'étoiles dans la voie lactée	$N \simeq 300$ milliards
Masse	$M_T = 6.10^{24}$ kg
Lunaison : période autour de la Terre	$T \simeq 29,5$ j
Période des marées sur Terre	$T = 12$ h 25 min

4 Solides

Coefficient de frottement solide dynamique	$\mu_{\text{acier-acier}} \simeq 0,2$, $\mu_{\text{pneu-route seiche}} \simeq 0,7$, $\mu_{\text{bois-bois}} \simeq 0,3$,$\mu_{\text{acier-glace}} \simeq 0,02$
Module d'Young $\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{F}{ES}$	$E_{\text{béton}} \simeq 30$ GPa , $E_{\text{acier}} \simeq 200$ GPa

VII Electromagnétisme

1 Constantes fondamentales

Charge élémentaire	$e = 1,6.10^{-19}$ C
Perméabilité magnétique du vide [3]	$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F.m^{-1}
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00.10^{8}$ m.s^{-1}

Remarque : $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$ exactement

2 Spectre électromagnétique

Ondes radio transportant les signaux radiophoniques	$f \simeq 100$ MHz pour la bande F.M.
France Inter Nice	88,9 MHz
Ondes électromagnétiques des téléphones portables	$f \in$ [1900 MHz, 2100 MHz]

3. permet de définir l'Ampère

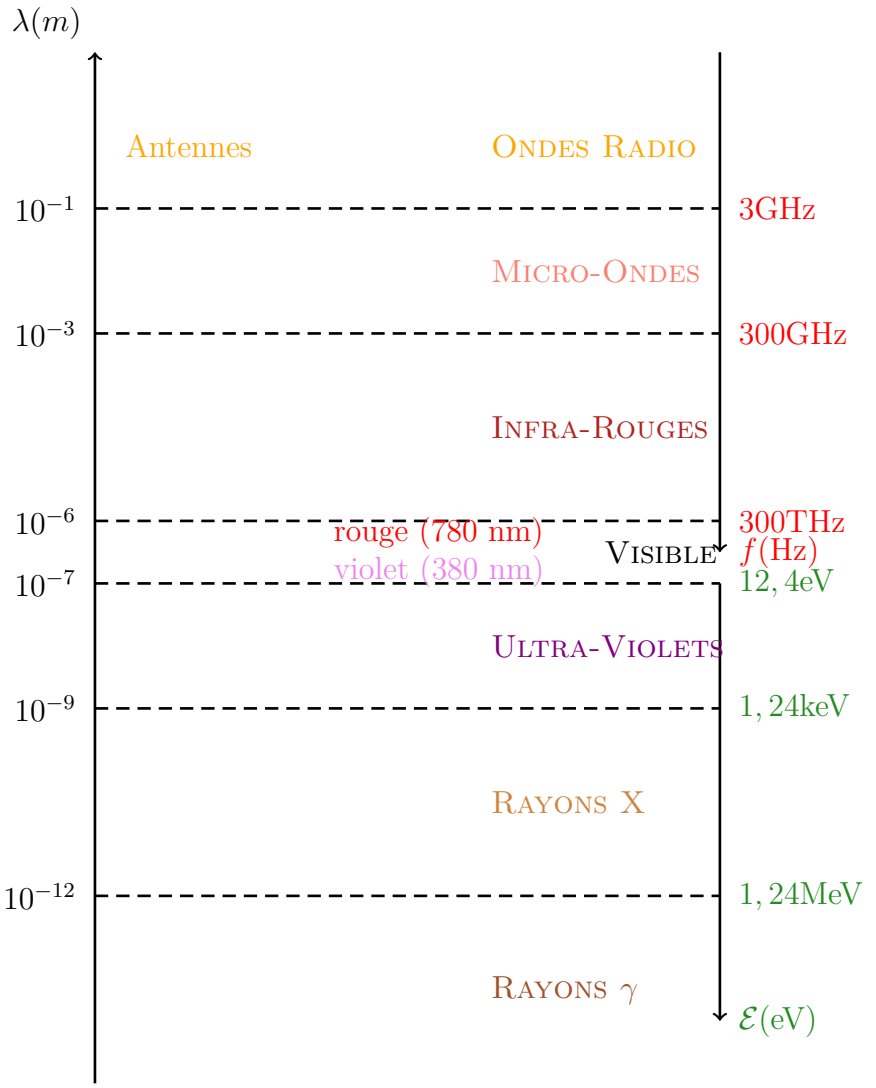


Figure 12.1 – Spectre électromagnétique : domaines usuels à connaître.

3 Flux énergétiques surfaciques moyens

laser hélium-néon	$\simeq 300$ W.m^{-2}
flux solaire	$\simeq 1000$ W.m^{-2}

4 Énergie transportée par les photons

photon visible	$E \simeq 1$ eV
photon X	$E \simeq 1$ keV
photon γ	$E \simeq 1$ MeV

5 Champs usuels

Electrique	
Dans un atome	$E \simeq 10^{11}$ V.m^{-1}
Champ électrique ambiant à la surface de la Terre par beau temps	$E \simeq 100$ V.m^{-1}
Champ de claquage de l'air	$E \simeq 2.10^{6}$ V.m^{-1}
Magnétique	
Composante horizontale du champ magnétique terrestre (sous nos latitudes)	$B \simeq 5.10^{-5}$ T
Champ créé par une bobine de 10 cm d'environ 1000 spires parcourue par un courant de $0,5$ A	$B \simeq 5.10^{-3}$ T
Champ créé par une bobine supraconductrice	$B \simeq 30$ T

VIII Atomes et molécules

1 Constantes fondamentales

Constante de Planck	$h = 6,62.10^{-34}$ J.s
Constante de Planck réduite	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 10^{-34}$ J.s
Charge élémentaire	$e = 1,6.10^{-19}$ C
Électron volt	1 eV $= 1,6.10^{-19}$ J

2 Particules élémentaires

Électron	$m_e \approx 9,1.10^{-31}$ kg $= 0,511$ MeV/c^2
Proton	$m_p \approx 1,67.10^{-27}$ kg $= 938$ MeV/c^2
Neutron	$m_n \approx 1,67.10^{-27}$ kg $= 939$ MeV/c^2
Rayon d'un nucléon	1 fermi $= 10^{-15}$ m

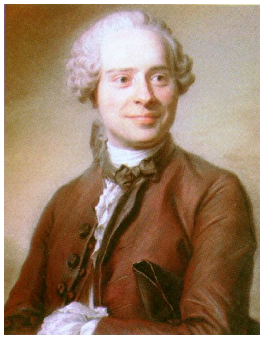
3 Atomes

Rayon de Bohr	$a_0 = 52,9.10^{-12}$ m
Rayon atomique typique [4]	$a = 10^{-10}$ m
Constante de Rydberg	$E_0 = 13,6$ eV

4. dans un solide par exemple.

Partie G : Ondes (suite)

Chapitre G1 : Ondes sonores dans un fluide



D'Alembert (1717 - 1783)

PARTIE G : ONDES

G-1 : Ondes sonores dans un fluide

G-2 : Ondes e.m. dans le vide
G-3 : Propagation dans un milieu dispersif
G-4 : Plasma et métaux
G-5 : Métaux
G-6 : Polarisation

Mur du son

I Mise en équation des ondes sonores

1 Approximation acoustique

Liste des hypothèses :

- ✗ On étudie la propagation d'une onde sonore dans un fluide **parfait**, on **néglige la pesanteur**, les seules forces sont les **forces de pression**.
- ✗ Au repos, la masse volumique μ_0 est uniforme, la pression p_0 est uniforme et le champ de vitesse est supposé nul.
- ✗ L'onde sonore est une perturbation de cet état d'équilibre :

$$\mu = \mu_0 + \mu_1(M,t) \ , \ p = p_0 + p_1(M,t) \ , \ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1$$

- ✗ p_1 est la **pression acoustique** ou surpression.

DÉFINITION :

L'approximation acoustique consiste à considérer que les champs qui caractérisent l'onde acoustique (ceux qui portent l'indice 1)

- ✗ sont des infiniments petits du **premier ordre** ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles. On négligera les termes du second ordre devant les terme du premier ordre.
- ✗ leur **moyenne temporelle** est nulle

$$\langle p_1 \rangle = 0 \qquad \langle \mu_1 \rangle = 0 \qquad \langle v_1 \rangle = 0$$

2 Equation à 1D

Savoir démontrer №1 : Equation de d'Alembert à 1D

On étudie un système **fermé** situé entre z et $z + \mathrm{d}z$. On note $\xi(z,t)$ le déplacement du plan situé en z sous l'effet de l'onde sonore.
A la date t, le système est donc compris entre $z + \xi(z)$ et $z + \mathrm{d}z + \xi(z + \mathrm{d}z) = (z + \mathrm{d}z + \mathrm{d}\xi)$.
La résultante des forces de pression est :

$$\mathrm{d}F_z = -S\frac{\partial p_1}{\partial z}\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\mathrm{d}z \simeq -S\frac{\partial p_1}{\partial z}\mathrm{d}z$$

La RFD sur le système donne :

$$\mu_0 S\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\mathrm{d}z = \mathrm{d}F_z$$

On donne $\chi_s = -\frac{1}{V}\frac{\partial p}{\partial V}$, soit $p_1 \simeq -\frac{1}{\chi_s}\frac{\partial \xi}{\partial z}$
Finalement

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0}$$

3 Linéarisation des équations fondamentales

Savoir démontrer №2 : Linéarisation

Dans l'approximation acoustique, on peut linéariser :

✗ L'équation d'Euler :

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} \simeq -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1} \qquad \text{(G.1)}$$

✗ La loi de conservation de la masse (équation de continuité)

$$\boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}\,(\overrightarrow{v}_1) \simeq 0} \qquad \text{(G.2)}$$

✗ La loi d'évolution thermodynamique du fluide :

Soit $\chi_s = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\mu}\frac{\frac{D\mu}{Dt}}{\frac{Dp}{Dt}}$

$$\boxed{\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1} \Leftrightarrow \boxed{p_1 = c^2 \mu_1} \qquad \text{(G.3)}$$

4 Equation de propagation

Savoir démontrer №3 : d'Alembert

p et μ vérifient des équations de d'Alembert à trois dimensions. On pose

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

On trouve

$$\boxed{\triangle p_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \ , \ \triangle \mu_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} = 0}$$

Application 1 : Analyse dimensionnelle

On montre que

$$[\mu_0 \chi_s] = T^2 L^{-2}$$

II Solutions en ondes progressives

1 Expression de la célérité des ondes

Savoir démontrer №4 : Célérité

Solide → $\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\mu E^{-1}}}}$

Liquide → $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}}$

Gaz Parfait isentropique → $\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}}$

Gaz Parfait isotherme → $\boxed{c = \sqrt{\frac{RT}{M}}}$

Milieu	Vitesse du son m.s^{-1}
Aluminium	6420
Acier	5940
Silice fondue	5968
Cuivre	5010
Eau (20°C)	1483
Eau de mer (20°C)	1522
Ethanol	1162
Helium	965
Vapeur d'eau (100°C)	473
Air sec (25°C)	346
Dioxyde de soufre	213

La vitesse du son vérifie donc

$$\boxed{c_{\text{solide}} \gg c_{\text{liquide}} \gg c_{\text{gaz}}}$$

Expériences

On peut mesurer la vitesse du son dans l'air avec la méthode du clap ou en mesurant la longueur d'onde des ondes sonores.

2 Structure de l'onde plane progressive harmonique - OPPH

Définition :

- ✗ Notation réelle, $p_1(M,t) = p_{1M}\ \cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \varphi\right)$
- ✗ En notation complexe, on a

$$\underline{p}_1(M,t) = p_{1M}\ \exp j\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \varphi\right)$$

- ✗ $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u}$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde.
- ✗ Soit $\overrightarrow{\nabla}. = -j\overrightarrow{k}.$, alors

$$\text{div}\ \overrightarrow{\underline{a}} = -j\overrightarrow{k}.\overrightarrow{a}\ ,\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\underline{a}} = -j\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{a}$$

- ✗ On a également

$$\underline{v}_1(M,t) = v_{1M}\ \exp j\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \varphi\right)$$

Savoir démontrer №5 : Ondes planes progressives harmoniques

On retrouve les résultats plus rapidement en utilisant la notation complexe :

1. Ondes longitudinales :
$$\omega\mu_0\,\overrightarrow{\underline{v}}_1 = p_1\,\overrightarrow{\underline{k}}$$
On en déduit que le champ des vitesses est parallèle à la direction de propagation de l'onde, donc
Les ondes sonores dans un fluide sont **longitudinales**.
2. Impédance pour une propagation suivant les x croissants :
$$Z_{\rightarrow} = \frac{\underline{p}_1}{\underline{v}_1} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}}$$
3. Propagation suivant les x décroissants : $Z_{\leftarrow} = -\mu_0 c$ On retient :
$$\boxed{Z_{\rightarrow} = \mu_0 c} \quad \text{et} \quad \boxed{Z_{\leftarrow} = -\mu_0 c}$$

Attention : La définition rigoureuse de l'impédance est donnée par rapport aux débits :

1. Par définition l'impédance acoustique se définit par rapport au **débit** :
$$Z^D_{\rightarrow} = \frac{p_1}{D_{v1}} = \frac{p_1}{v_1 S_1}$$
2. Si la section de l'écoulement ne varie pas , les résultats seront identiques en utilisant l'impédance Z^D ou Z.
3. Si la section varie, on utilise Z^D.

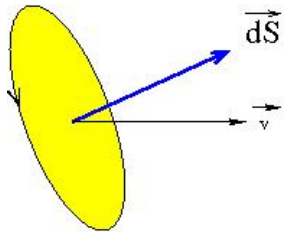
Savoir démontrer №6 : Condition sur la vitesse

Montrer que dans l'approximation acoustique, on a
$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{v_1}{c} \ll 1$$

3 Bilan énergétique

3.a Puissance échangée à travers une surface

Savoir démontrer №7 :



Le travail des forces de pression sur une surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est $\delta^{II}W = p_1\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}\ \mathrm{d}t$
Le travail élémentaire sur une surface S est
$$\delta W = \iint p_1\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}\ \mathrm{d}t = \iint \overrightarrow{\Pi}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}\ \mathrm{d}t$$
Soit $\overrightarrow{\Pi} = p_1\overrightarrow{v_1}$ le vecteur densité de flux de puissance sonore (ou densioté de courant d'énergie).

Définition :

La moyenne du vecteur $\overrightarrow{\Pi}$, notée $\left\langle\overrightarrow{\Pi}\right\rangle$ est mesurée en $\mathrm{W.m^{-2}}$, elle mesure la **puissance moyenne par unité de surface** traversant une surface S.

Ainsi $\left\langle \iint_S \overrightarrow{\Pi}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle$ est la **puissance moyenne qui traverse** S

De même, $\left\langle \oiint_{S\text{sort}} \overrightarrow{\Pi}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle$ est la **puissance moyenne qui sort de** S

3.b Equation énergétique locale

Savoir démontrer №8 : Equation locale

La loi de conservation de l'énergie permet de trouver :

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \overrightarrow{\Pi} = 0}$$

Avec

$$e = e_c + u = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2}\chi_s p_1^2$$

Définition :

- ✗ $e_c = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2$ est l'**énergie cinétique** volumique
- ✗ $u = \frac{1}{2}\chi_s p_1^2$ est l'**énergie interne volumique** due à l'onde sonore.
- ✗ $e = e_c + u$ est l'**énergie sonore volumique**.

3.c Bilan énergétique de la propagation d'un onde sonore

On obtient donc

$$\oiint \overrightarrow{\Pi}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint e \, \mathrm{d}\tau$$

3.d Cas particulier de l'OPPH

⚠ Attention…

Pour le calcul des puissances **toujours passer en notation réelle**.

Savoir démontrer №9 :

Pour une OPPH, on trouve

$$e_c = u$$

Soit

$$\boxed{e = \mu_0 v_1^2 = \chi_s p_1^2}$$

Et

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = ec\overrightarrow{u} = Zv_1^2\overrightarrow{u}}$$

On exprime également la moyenne temporelle :

$$\boxed{\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2}\mu_0 c v_{1\mathrm{M}}^2 \overrightarrow{u}}$$

4 Intensité sonore, Décibels acoustiques

Définition :

- ✗ Soit $\langle \Pi_0 \rangle = 10^{-12}$ W.m^{-2} une valeur de référence.
- ✗ L'oreille ayant une réponse logarithmique, on choisit une échelle logarithmique pour définir **l'intensité sonore**.

$$\boxed{I = 10 \log\left(\frac{\langle \Pi \rangle}{\langle \Pi_0 \rangle}\right)}$$

- ✗ L'intensité sonore s'exprime en **dB** (décibel acoustique).

⚠ Attention…

Certains sujets donnent : $I = \langle \Pi \rangle$ comme **intensité sonore** et $L = 10 \log\left(\frac{\langle \Pi \rangle}{\langle \Pi_0 \rangle}\right)$ le **niveau sonore**

Pour une OPPH, $I = 10 \log\left(\frac{\left\langle \frac{p^2}{\mu_o c} \right\rangle}{\langle \Pi_0 \rangle}\right)$

	Surpression (eff)	intensité (eff.)	Vitesse
Seuil d'audition	3.10^{-5} Pa	0 dB	4.10^{-8} m.s^{-1}
Téléviseur à 1m	64.10^{-3} Pa	70 dB	4.10^{-5} m.s^{-1}
Marteau piqueur à 1m	6 Pa	110 dB	
Seuil de douleur	30 Pa	120 dB	4.10^{-2} m.s^{-1}

fréquence Hz	
$f \in [0, 10^4]$	son audible par l'Homme
$f > 10^4$Hz	Ultra-sons

Sensibilité de l'oreille $\simeq 1$ dB.

Application 2 : Surpression

Lorsqu'un son passe d'une intensité sonore de 70dB à 80dB, comment varie $\langle \Pi \rangle$ et comment varie la pression acoustique (p_1) ?

Application 3 : Calcul de supression

Un lave-vaisselle produit un son d'intensité sonore $I = 60$ dB, calculer la pression acoustique associée et la vitesse.

$$p_1 = \sqrt{I * 10^{-12} \mu_0 c} = 20 \text{ mPa}$$

III Ondes sphériques harmoniques

1 Champs de pression et vitesse

Savoir démontrer №10 : Forme de l'onde

On donne $\triangle f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 rf}{\partial r^2}$
On a l'équation :

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial t^2} = 0$$

Finalement

$$\boxed{p_1 = \frac{A_0}{r} e^{i(\omega t - kr)}}$$

Savoir démontrer №11 : Champ des vitesses

On recherche la vitesse sous la forme

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}(r) \exp i(\omega t - kr)$$

On trouve

$$\overrightarrow{v} = \frac{A_0}{\mu_0 c}\frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} \overrightarrow{u}_r + \frac{A_0}{\mu_0 c}\frac{i}{kr^2} e^{i(\omega t - kr)} \overrightarrow{u}_r$$

Le premier est le **champ lointain** et le second le **champ proche**.

2 Intensité sonore

Savoir démontrer №12 : Puissance moyenne

$$\overrightarrow{\Pi} = p_1 v \overrightarrow{u}_r$$

✗ Pour la puissance il fait revenir aux notations réelles.
✗ La puissance moyenne est :

$$\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \frac{A_0^2}{2\mu_0 c r^2}$$

Savoir démontrer №13 : Puissance sortant d'une sphère

La puissance totale sortant d'une sphère est

$$\mathcal{P} = \frac{2\pi A_0^2}{\mu_0 c}$$

Cette puissance est indépendante de r, ce qui traduit la conservation de l'énergie.

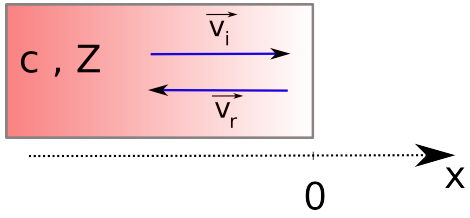
IV Solutions en ondes stationnaires

1 Structure

Application 4 : Addition de deux OPPH

On considère une onde incidente

$$v_i = A\cos(\omega t - kx)$$



qui se propage dans le demi-space $x < 0$.
En $x = 0$, elle rencontre un obstacle imperméable.
La continuité de la vitesse en $x = 0$ impose $v(0^-) = v(0^+) = 0$, cela produit une onde réfléchie :

$$v_r = -A\cos(\omega t + kx)$$

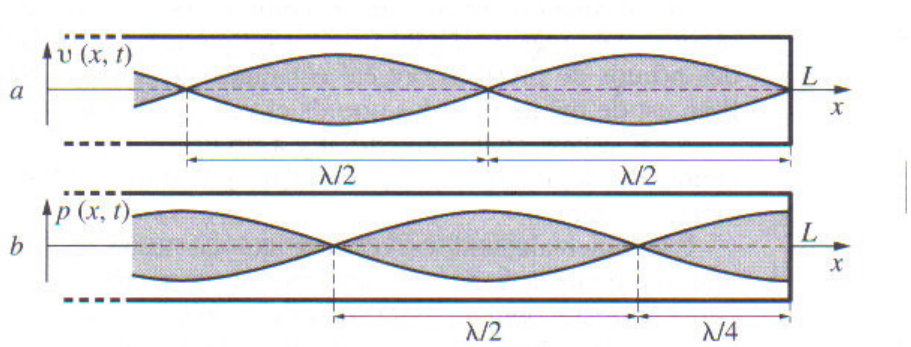
1. En déduire que l'onde totale est une onde stationnaire :

$$v = 2A\sin(\omega t)\sin(kx)$$

2. Ecrire l'onde de pression associée. Vérifier qu'elle est en quadrature temporelle et spatiale.

⚠ Attention…

La relation $p_1 = Z_{\rightarrow} v_1$ ne peut pas être utilisée pour une onde stationnaire.



Définition :

- ✗ Un **ventre** de vitesse correspond à une zone de l'espace où la vitesse varie entre $+v_{max}$ et $-v_{max}$, où v_{max} estla vitesse maximale du fluide.
- ✗ Un **noeud** de vitesse correspond à une zone de l'espace où la vitesse est toujours nulle.
- ✗ Pour l'onde stationnaire obtenue, les ventres de pression correspondent à des noeuds de vitesse et les noeuds de pression à des ventres de vitesse.
- ✗ Vitesse et pression sont également en quadrature temporelle.
- ✗ Un obstacle **fixe créé un noeud de vitesse** donc un ventre de pression.

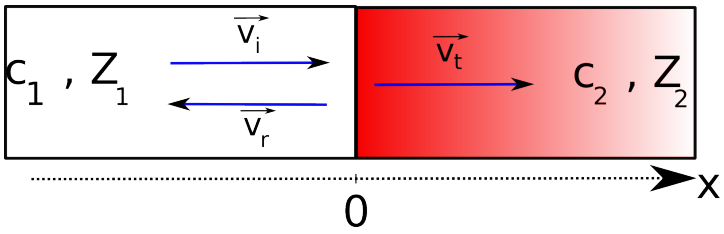
2 Energie

Savoir démontrer №14 : Energie moyenne

$$\left\langle \vec{\Pi}_{\text{Stationnaire}} \right\rangle = \vec{0}$$

L'onde stationnaire ne transporte en moyenne aucune énergie.

V Coefficients de reflexion et transmission des amplitudes



1 Conditions aux limites

1.a Condition sur la vitesse

1. On note $\overrightarrow{V}$ la vitesse de l'interface et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à la surface, on traduit alors la continuité de la **vitesse normale** à l'interface :

$$\overrightarrow{V}\left(0^-\right).\overrightarrow{n} = \overrightarrow{V}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{V}\left(0^+\right).\overrightarrow{n}$$

2. Si la section varie, on utilisera la continuité du débit volumique :

$$\overrightarrow{V}\left(0^-\right).\overrightarrow{S}\left(0^-\right) = \overrightarrow{V}\left(0^+\right).\overrightarrow{S}\left(0^+\right)$$

3. En toute rigueur, il faut utiliser la conservation du débit massique (rare qu'on en arrive la !).

1.b Condition sur la pression

Savoir démontrer №15 : Pression

On note σ la masse surfacique de l'interface que l'on suppose uniforme et $\overrightarrow{V}$ la vitesse de l'interface.

✗ Si la section est la même des deux cotés de l'écoulement :

$$\sigma\frac{\partial V}{\partial t} = p_1(0^-,t) - p_2(0^+,t)$$

✗ Si l'interface a une masse négligeable ou est infiniment petit on a la continuité de la pression :

$$\boxed{p_1(0^-,t) = p_2(0^+,t)}$$

2 Coefficients de reflexion et transmission des amplitudes

DÉFINITIONS :

A l'interface entre deux milieux, on définit

le **coefficient de réflexion en vitesse** : $r_v = \dfrac{v_r(0,t)}{v_i(0,t)}$

le **coefficient de transmission en vitesse** : $t_v = \dfrac{v_t(0,t)}{v_i(0,t)}$

le **coefficient de réflexion en pression** : $r_p = \dfrac{p_r(0,t)}{p_i(0,t)}$

le **coefficient de transmission en pression** : $t_p = \dfrac{p_t(0,t)}{p_i(0,t)}$.

Savoir démontrer №16 : Coefficients de réflexion

Pour une onde OPPH incidente, $v_i = A_i \exp j\left(\omega t - kx\right)$
Pour respecter les conditions aux limites, il faut une onde réfléchie : $v_r = A_r \exp j\left(\omega t + kx\right)$
Le coefficient de réflexion en vitesse est $r_v = \frac{A_r}{A_i}$, le coefficient de transmission est $t_v = \frac{A_t}{A_i}$

$$\boxed{r_v = \frac{Z - Z'}{Z + Z'}} \text{ et } \boxed{t_v = \frac{2Z}{Z + Z'}}$$

Savoir démontrer №17 :

Le coefficient de réflexion en pression est r_p, le coefficient de transmission est t_p

$$r_p = \frac{Z' - Z}{Z + Z'} = -r_v \quad \text{et} \quad t_p = \frac{2Z'}{Z + Z'}$$

3 Coefficients de reflexion et transmission des puissances

DÉFINITION :

1. On calcule les vecteurs $\overrightarrow{\Pi}$ **en notation réelle**.
2. On calcule leur projection sur la direction de propagation $\Pi = \overrightarrow{\Pi}.\overrightarrow{u}_x$.
3. On évalue la valeur moyenne de la projection pour des OPPH :
4. Les coefficients de reflexion et transmission sont les rapports des valeurs absolues de ces coefficients :

$$R = \left|\frac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}\right| \quad \text{et} \quad T = \left|\frac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}\right|$$

Savoir démontrer №18 : Coefficient de réflexion en puissance OPPH

Pour des OPPH :

$$\langle \Pi_i \rangle = \frac{1}{2} Z A_i^2 \quad , \quad \langle \Pi_r \rangle = -\frac{1}{2} Z r_v^2 A_i^2 \quad \text{et} \quad \langle \Pi_t \rangle = \frac{1}{2} Z' t_v^2 A_i^2$$

Le coefficient de reflexion en puissance est :

$$R = \left|\frac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}\right| = r_v^2 = \left(\frac{Z - Z'}{Z + Z'}\right)^2$$

Le coefficient de transmission en puissance est :

$$T = \left|\frac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}\right| = |t_v|^2 \frac{Z'}{Z} = \left(\frac{4Z'Z}{(Z + Z')^2}\right)$$

On a la conservation de l'énergie sonore :

$$\boxed{R + T = 1}$$

⚠ Attention...

On peut démontrer la même formule en utilisant seulement des OPP :

$$p_i = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad v_i = \frac{1}{Z} f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$
$$p_r = g\left(t + \frac{x}{c}\right) \qquad v_r = -\frac{1}{Z} g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$
$$p_t = h\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad v_t = \frac{1}{Z'} h\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Application 5 : Echographie - X-PC 2008

On cherche à faire passer des ondes ultrasonores à l'intérieur du corps humain pour y distinguer une strucure interne.
Lorsque l'on passe d'un milieu d'impédance Z vers un milieu d'impédance Z', les ondes sont réfléchies et transmises avec les coefficients de réflexion en puissance R et de transmission T :

$$R = \left(\frac{Z - Z'}{Z + Z'}\right)^2 \text{ et } T = \left(\frac{4Z'^2 Z^2}{(Z + Z')^2}\right)$$

Milieu	Impédance ($\text{kg.m}^{-2}\text{s}^{-1}$)	Milieu	Impédance ($\text{kg.m}^{-2}\text{s}^{-1}$)
Air	$Z = 400$	Sang, peau	$Z = 1,66.10^6$
Eau	$Z = 1,5.10^6$	Os	$Z = 7,8.10^6$

1. Si on place de l'air entre le corps et l'émetteur, le coefficient de transmission est $T \simeq 10^{-3}$, il faut donc placer du gel sur le corps.
2. Les os sont très visibles car le coefficient de reflexion est important : couleur blanche sur les échographies.

VI Compléments

1 Structure de l'onde plane progressive - OPP

Définition :

- ✗ Soit $f(u)$ une fonction C_2, on note $f'(u)$ sa dérivée par rapport à u.
- ✗ Si p_1 est solution progressive à l'équation de d'Alembert alors

$$p_1(\overrightarrow{r}) = f\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}\right)$$

- ✗ $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u}$, k est le nombre d'onde et $\overrightarrow{u}$ est la direction de propagation.
- ✗ $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z$ repère la position du point M ou on calcule la pression acoustique.

Savoir démontrer №19 : Onde Plane progressive

1. L'équation G-1, permet de trouver que :

$$\overrightarrow{v}_1 = f\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}\right)\frac{\overrightarrow{k}}{\mu_0\omega}$$

   $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{k}$, **l'onde est longitudinale**
2. L'équation de d'Alembert permet de trouver la **relation de dispersion** :

$$\omega^2 = k^2c^2$$

3. Impédance acoustique : pour une OPP se propageant suivant les x croissants (notation $Z_{\rightarrow}$) :

$$p_1 = Z_{\rightarrow}v_1 \text{ et } Z_{\rightarrow} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}}$$

2 Equation de d'Alembert pour la vitesse : HP

Application 6 : Equation de d'Alembert pour la vitesse - HP

Si on admet que l'écoulement est irrotationnel ($\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$) et avec

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\overrightarrow{v} - \overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{v}$$

on trouve alors

$$\boxed{\overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{v} - \frac{1}{c^2}\overrightarrow{v} = 0}$$

Puisque $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} = 0$, alors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$.
On montre que ϕ vérifie également l'équation de d'Alembert

3 Ondes dans le champ de pesanteur

Application 7 : Etude avec la pesanteur

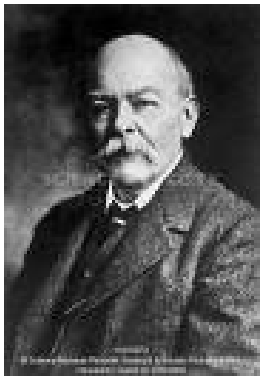
On cherche l'équation de propagation des ondes sonores dans un fluide vertical en tenant compte du poids.
L'équation d'Euler linéarisée devient :

$$\boxed{\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{v}_1}{\partial t} \simeq -\overrightarrow{\text{grad}}\,p_1 + (\mu_0 + \mu_1)\overrightarrow{g}}$$

On étudie des ondes qui se propagent verticalement, on projette les équations sur un axe vertical $\overrightarrow{u}_z$, on trouve finalement :

$$\frac{\partial^2\mu_1}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2} - g\frac{\partial\mu_1}{\partial z} = 0$$

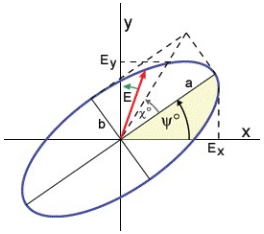
Chapitre G2 : Ondes électromagnétiques dans le vide



Poynting

PARTIE G : ONDES

G-1 : Ondes sonores dans un fluide
G-2 : Ondes e.m. dans le vide
G-3 : Propagation dans un milieu dispersif
G-4 : Plasma
G-5 : Métaux
G-6 : Polarisation



Polarisation elliptique

I Equation de propagation des champs

1 Equations de Maxwell

Savoir démontrer №1 :

— On a la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\overrightarrow{E} - \overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{E}$$

— On en déduit que $\overrightarrow{E}$ vérifie l'équation

$$\overrightarrow{\square}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{\rho}{\epsilon_0} + \mu_0\frac{\partial\overrightarrow{j}}{\partial t}$$

— De même :

$$\overrightarrow{\square}\overrightarrow{B} = -\mu_0\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{j}$$

2 Conséquence en l'absence de charges et de courants

Savoir démontrer №2 : Equation de D'Alembert

En l'absence de charge et de courant, on trouve des équations de D'ALEMBERT vectorielles :

$$\boxed{\overrightarrow{\triangle}\left(\overrightarrow{E}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\triangle}\left(\overrightarrow{B}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial t^2} = 0}$$

avec $c = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 3.10^8$ m.s^{-1}

II Ondes électromagnétiques planes progressives dans le vide

1 Structure de l' OEMPPH dans le vide

✗ Toute solution des équations de MAXWELL dans le vide est une superposition d'ondes planes progressives. La somme porte sur les pulsations et les directions de propagation.

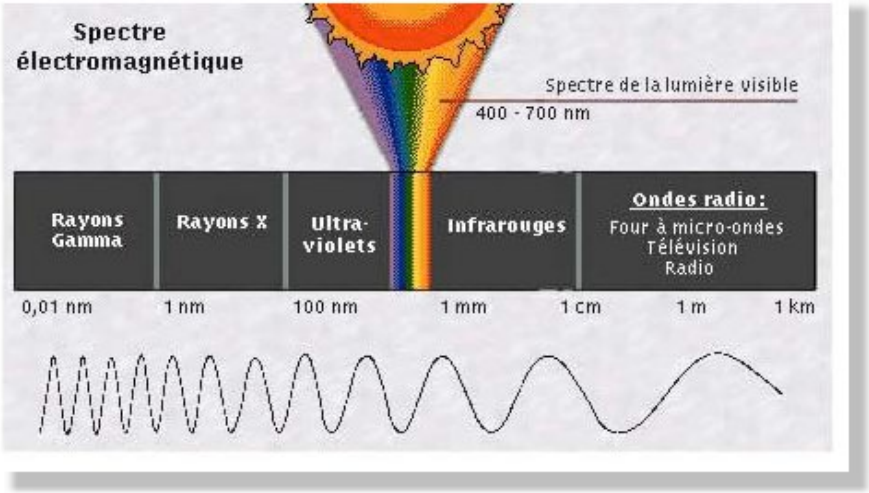
✗ On prendra une solution des équation de MAXWELL composée de 6 composantes OEMPPH scalaire de même pulsation ω, de même vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ mais avec des phases différentes. Soit pour les champs $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$:

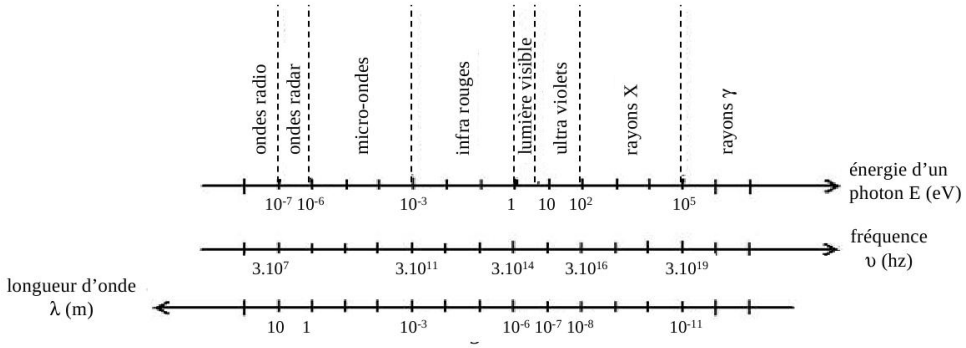
$$E_x = E_{0x}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}\right) \qquad B_x = B_{0x}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \varphi_{Bx}\right)$$
$$E_y = E_{0y}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \varphi_{Ey}\right) \qquad B_y = B_{0y}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \varphi_{By}\right)$$
$$E_z = E_{0z}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \varphi_{Ez}\right) \qquad B_z = B_{0z}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \varphi_{Bz}\right)$$

— Les $E_{Ox}\ldots$ sont les amplitudes des projections des ondes.
— ω est la pulsation.
— φ_{Ey} est la phase à l'origine (peut être prise nulle = changement d'origine des temps, pour une seule onde).

— $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u}$ est le vecteur d'onde, k est le nombre d'onde.

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$



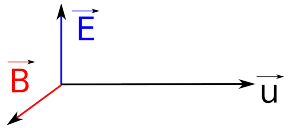


Equations de Maxwell dans le vide en notations complexes

$$\begin{aligned}
\text{div}\,\overrightarrow{E} = 0 &\quad\Rightarrow -i\overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{E}} = 0\\
\text{div}\,\overrightarrow{B} = 0 &\quad\Rightarrow -i\overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{B}} = 0\\
\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} &\quad\Rightarrow -i\overrightarrow{k}\wedge\underline{\overrightarrow{E}} = -i\omega\underline{\overrightarrow{B}}\\
\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} &\quad\Rightarrow -i\overrightarrow{k}\wedge\underline{\overrightarrow{B}} = i\mu_0\varepsilon_0\omega\underline{\overrightarrow{E}}
\end{aligned}$$

Savoir démontrer №3 : OEMPPH dans le vide

- ✗ $\text{div}\,\overrightarrow{E} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{k}.\overrightarrow{E} = 0$: l'onde est **transverse électrique**
- ✗ $\text{div}\,\overrightarrow{B} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{k}.\overrightarrow{B} = 0$: l'onde est **transverse magnétique**
- ✗ Les ondes électromagnétiques sont **transversales**.
- ✗ L'équation de Maxwell - Faraday implique



$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{E}}{\omega}}$$

$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}\right)$ est un **trièdre orthonormé direct.**

Savoir démontrer №4 : OEMPPH dans le vide

Si on remplace dans l'équation de d'Alembert, on trouve la relation de dispersion dans le vide :

$$\boxed{\omega = \pm kc}$$

2 Propagation de l'énergie des OEMPPH

On considère une OEMPPH du type

$$\overrightarrow{E}\begin{vmatrix} E_x = & E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_y = & E_{0y}\cos(\omega t - kz - \varphi) \\ E_z = & 0 \end{vmatrix}$$

Savoir démontrer №5 : Poynting avec des OEMPPH

$$\langle \Pi \rangle = \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\mu_0 c}\overrightarrow{u}_z$$

$$\langle e \rangle = \langle e_e + e_m \rangle = \frac{\epsilon_0\left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2\right)}{2}$$

Soit finalement :

$$\boxed{\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \langle e \rangle c\overrightarrow{u}_z}$$

Définition :

- ✗ Π est la puissance surfacique de l'onde électromagnétique.
- ✗ La puissance électromagnétique qui traverse une surface S orientée par le vecteur $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ est

$$\boxed{\mathcal{P} = \iint \overrightarrow{\Pi}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}}$$

Savoir démontrer №6 : Vitesse de propagation de l'énergie

Pour une OEMPPH , l'énergie moyenne qui traverse $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}S\overrightarrow{u}$ pendant $\mathrm{d}t$ peut s'évaluer de deux manières différentes :

- $\langle \mathrm{d}U_{em} =\rangle = \|\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle\|\mathrm{d}S\mathrm{d}t$
- $\langle \mathrm{d}U_{em} =\rangle = \langle u_{em}\rangle v_e \mathrm{d}S\mathrm{d}t$ où v_e est la vitesse de déplacement de l'énergie.

Conclusion

$$\boxed{v_e = \frac{\|\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle\|}{\langle u_{em}\rangle}}$$

Pour OEMPPH,

$$\boxed{v_e = c}$$

Attention...

Le calcul du vecteur de Poynting se fait toujours en notation réelle sauf si on veut évaluer **uniquement** la valeur moyenne.

Laser Helium-Néon	$\langle\Pi\rangle \simeq 10^3 \mathrm{W.m^{-2}}$	$E \simeq 10^3$ V/m
Téléphone portable	$\langle\Pi\rangle \simeq 1 \mathrm{W.m^{-2}}$	$E \simeq 20$ V/m

Savoir démontrer №7 : Interprétation corpusculaire

On note n la densité volumique de photons dans un faisceau.
L'énergie contenue dans un cylindre de surface S et de volume $\mathrm{d}\tau = c\overrightarrow{u}.\overrightarrow{S}\mathrm{d}t$ est :

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \mathrm{d}\tau = nh\nu\mathrm{d}\tau$$

On en déduit :

$$\boxed{n = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2h\nu}}$$

3 Polarisation des OEMPPH

Définitions :

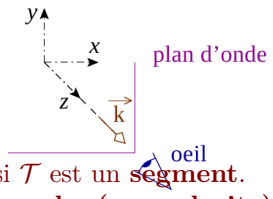
On appelle **direction de polarisation** d'une onde électromagnétique plane (TE), le direction du champ **électrique** dans un plan d'onde donné à un instant donné. L'évolution de cette direction au cours du temps définit l'**état de polarisation** de l'onde.

L'état de polarisation est étudié en décrivant la trajectoire suivie par l'extrémité du champ $\vec{E}(M,t)$ dans le plan d'onde, l'observateur voyant l'onde venir vers lui.

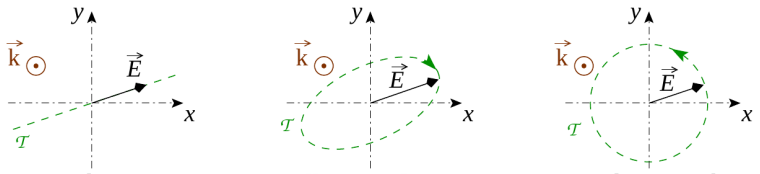
Propriété à connaître

Définition des états de polarisation

Soit une oempph TE se propageant suivant $\vec{u}_z$. On imagine un observateur regardant la trajectoire $\mathcal{T}$ suivie par la pointe du vecteur $\vec{E}$ dans le plan d'onde, **l'onde venant vers lui**.



- ✗ L'onde est **polarisée rectilignement** si $\mathcal{T}$ est un **segment**.
- ✗ L'onde est **polarisée elliptiquement gauche (resp. droite)** si $\mathcal{T}$ est un **ellipse décrite dans le sens trigonométrique (resp. horaire)**.
- ✗ L'onde est **polarisée circulairement gauche (resp. droite)** si $\mathcal{T}$ est un **cercle décrit dans le sens trigonométrique (resp. horaire)**.



4 Propagation dans un milieu d'indice n

Savoir démontrer №8 : Diélectrique

- ✗ La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{c}{n}$, où n désigne l'indice.
- ✗ Le nombre d'onde est k il est relié au nombre d'onde dans le vide par :

$$\boxed{k = nk_0}$$

- ✗ La relation de dispersion sécrit

$$\boxed{\omega = \pm\, k\frac{c}{n}}$$

- ✗ La pulsation ω reste identique puisque : $\omega = \pm\, k\frac{c}{n} = \pm\, \frac{nk_0c}{n} = \pm\, k_0c$
- ✗ Une OEMPPH s'écrit alors dans ce milieu :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - nk_0x)\,\vec{u}_z$$

III Réflexion des ondes

1 Conditions aux limites et conditions initiales

Relations de passage

Au passage d'une interface (Σ) modélisée par des sources surfaciques σ et $\vec{j}_s$,

$$\vec{E}_{2T}(\Sigma) = \vec{E}_{1T}(\Sigma) \quad \vec{B}_{2T}(\Sigma) - \vec{B}_{1T}(\Sigma) = \mu_0\,\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$
$$\vec{E}_{2N}(\Sigma) - \vec{E}_{1N}(\Sigma) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12} \qquad \vec{B}_{2N}(\Sigma) = \vec{B}_{1N}(\Sigma)$$

$\vec{n}_{12}$ désigne un vecteur unitaire normal à (Σ) orienté de (1) vers (2).

2 Réflexion d'une onde en incidence normale sur un conducteur parfait

Définition :

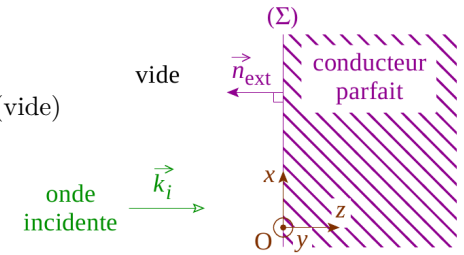
✗ Dans un métal parfait $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$, la conductivité $\gamma \to \infty$

Savoir démontrer №9 : Métal parfait

L'onde incidente est considérée OEMPPH, polarisée rectilignement

$$\underline{\overrightarrow{E}}_i = E_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - k_1 z)} \overrightarrow{u}_x \quad \text{avec} \quad k_i = \frac{\omega}{c} \text{ (vide)}$$

$$\underline{\overrightarrow{B}}_i = \frac{\overrightarrow{k}_i \wedge \underline{\overrightarrow{E}}_i}{\omega} = \frac{E_0}{c} \mathrm{e}^{i(\omega t - k_1 z)} \overrightarrow{u}_y$$



Savoir démontrer №10 : Onde réfléchie

La continuité de $\overrightarrow{E}$ implique la présence d'une onde réfléchie dans le vide.

$$\overrightarrow{E}_r = -E_0 \mathrm{e}^{i(\omega t + k_1 z)} \overrightarrow{u}_x \qquad \overrightarrow{B}_r = \frac{E_0}{c} \mathrm{e}^{i(\omega t + k_1 z)} \overrightarrow{u}_y$$

$$\sigma = 0 \qquad \overrightarrow{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \overrightarrow{u}_x$$

Savoir démontrer №11 : Expression des champs

On trouve des **ondes stationnaires**

$$\overrightarrow{E} = -2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \overrightarrow{u}_x \qquad \overrightarrow{B} = 2\frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \overrightarrow{u}_x$$

$\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont **en quadrature spatiale et temporelle** : à un nœud du champ $\overrightarrow{E}$ correspond un ventre de $\overrightarrow{B}$.

Attention… La relation de structure $\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega}$ ne s'applique pas aux champs de l'onde totale car ce n'est pas une onde plane **progressive**.

Savoir démontrer №12 : Pression de radiation

On peut définir la **pression de radiation** en calculant la force de surfacique de Laplace sur le métal :

$$\langle p \rangle = \epsilon_0 E_0^2$$

3 Réflexion d'une onde entre deux diélectriques

Savoir démontrer №13 : Coefficient de réflexion en amplitude

coefficient de réflexion en amplitude et **coefficient de transmission en amplitude** du champ électromagnétique $\overrightarrow{E}$

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_r(M,t)}{\underline{E}_i(M,t)} \qquad \underline{t} = \frac{\underline{E}_t(M,t)}{\underline{E}_i(M,t)}$$

$$\boxed{r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}} \text{ et } \boxed{t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}}$$

Application 1 : généralisation

✗ Déphasage de π, lors du passage d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent.
✗ relations valbles pour $\underline{n} \in \mathbb{C}$

3.a Coefficient de réflexion en puissance

Savoir démontrer №14 : Coefficient de réflexion en puissance

$$R = \frac{\left\langle \left| \overrightarrow{\Pi}_r \right| \right\rangle}{\left\langle \left| \overrightarrow{\Pi}_i \right| \right\rangle} \quad \text{et} \quad T = \frac{\left\langle \left| \overrightarrow{\Pi}_t \right| \right\rangle}{\left\langle \left| \overrightarrow{\Pi}_i \right| \right\rangle}$$

$$\boxed{R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}}$$

La conservation de l'énergie assure :

$$\boxed{R + T = 1}$$

Application 2 : Cas de l'interface air-verre

$R = 4\%$ et $T = 96\%$

IV Compléments

1 Onde plane progressive dans la direction $\vec{u}$

1.a Définitions

Définition :

On appelle **onde électromagnétique plane progressive** une onde d'axe $(O\vec{u})$ représentant $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ qui se propage sans se déformer à la célérité c dans le vide d'expression générale

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_+\left(t - \frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right) + \vec{E}_-\left(t + \frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)$$

$$\vec{B}(M,t) = \vec{B}_+\left(t - \frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right) + \vec{B}_-\left(t + \frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$
Le champ indicé + (resp. −) est une onde électromagnétique plane progressive se propageant à lé célérité c dans le **sens des u croissants** (resp. **décroissants**).

Remarque :

Principe de superposition

$$\vec{\Psi} = \sum_{\vec{u}} \Psi_{\pm}(ct - \vec{u}\cdot\vec{r})$$

où $\vec{\Psi}$ représente $\vec{E}$ ou $\vec{B}$.

⚠ Attention...

Cette somme est solution de l'équation de d'Alembert mais n'est pas forcément une oempp!! (cf. par exemple ops)

1.b Structure de l'oempp dans le vide

Savoir démontrer №15 : Structure de l'oempp dans le vide

Une oempp **dans le vide** se propageant à la célérité $c\,\vec{u}$

- ✗ est **transverse électrique** (TE) c'est-à-dire que son champ $\vec{E}$ est perpendiculaire à la direction de propagation

$$\vec{u}\cdot\vec{E}(M,t)=0$$

- ✗ est **transverse magnétique** (TM) c'est-à-dire que son champ $\vec{B}$ est perpendiculaire à la direction de propagation

$$\vec{u}\cdot\vec{B}(M,t)=0$$

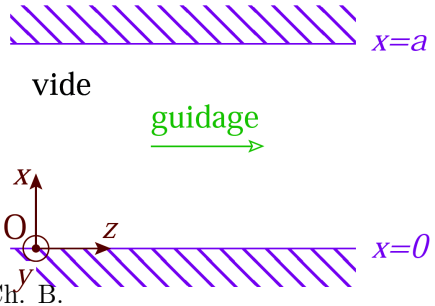
- ✗ et vérifie les **relations de structure**

$$\boxed{\vec{B}(M,t)=\frac{\vec{u}\wedge\vec{E}(M,t)}{c}} \quad \text{et} \quad \vec{E}(M,t)=-c\,\vec{u}\wedge\vec{B}(M,t)$$

- ✗ $\left(\vec{E},\vec{B},\vec{u}\right)$ forment un **trièdre droit direct**.

2 Guide d'ondes plan-plan

2.a Mise en équation : recherche d'une solution TE



On s'intéresse aux ondes guidées suivant un axe (Oz) entre 2 plans conducteurs infinis, distants de a.

On cherche une solution en ondes TE harmoniques polarisées selon $\vec{u}_y$.

Remarque : On pourrait envisager des ondes TM ou TEM (à la fois TE et TM, ce qui n'est pas toujours possible).

$$\vec{E}(M,t)=\mathcal{E}(x,y)\cos(\omega t-Kz)\,\vec{u}_y \qquad \text{avec } \vec{K}=K\vec{u}_z$$

Savoir démontrer №16 : Equation vérifiée par l'amplitude du champ

On montre que l'amplitude $\mathcal{E}$ du champ électrique vérifie une équation différentielle du second ordre

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}}{\mathrm{d}x^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-K^2\right)\mathcal{E}=0$$

2.b Rôle des conditions aux limites : étude de la dispersion

Savoir démontrer №17 : Relation de dispersion de type Klein-Gordon avec quantification

Le type de solution conduit à une relation de dispersion de type Klein-Gordon et les conditions aux limites imposent certaines valeurs du vecteur d'onde K

$$K_n^2(\omega)=\frac{\omega^2}{c^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

Définition :

Les vecteurs d'onde associés à la propagation dans le guide d'ondes sont **quantifiés** ; on définit un **mode de propagation** pour chaque valeur de $n\in\mathbb{N}^*$, noté TE_n

Savoir démontrer №18 : Pulsation de coupure

Le guide d'onde se comporte comme un **filtre passe-haut**, de fréquence de coupure

$$\omega_{c,n} = \frac{n\pi c}{a}$$

Application 3 : Expression des vitesses de phase et de groupe

1. Interpréter la propagation selon la pulsation de coupure.
2. En déduire l'expression de la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$.
3. Exprimer la vitesse de groupe correspondante $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$.

2.c Stucture du champ électromagnétique associé

On a finalement

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a} \cos(\omega t - Kz)\, \overrightarrow{u}_y\right)$$

L'onde électrique

- ✗ **se propage selon** $\overrightarrow{u}_z$ (axe du guide)
- ✗ est **stationnaire selon** $\overrightarrow{u}_x$ car elle peut s'interprétée comme la somme de 2 ondes réfléchies sans cesse sur les 2 plans conducteurs (propagation en zigzag)
- ✗ enfin, est **polarisée selon** $\overrightarrow{u}_y$.

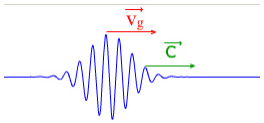
Propriétés à connaître

Savoir démontrer №19 : Expression du champ magnétique

Connaissant le champ électrique, il faut être capable de calculer le champ magnétique correspondant. Ici, $\overrightarrow{B}(M,t) = B_x \overrightarrow{u}_x + B_z \overrightarrow{u}_z$

$$B_x = -\frac{KE_{0,n}}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz)\, B_z \quad = -\frac{n\pi}{a\omega} E_{0,n} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - Kz)$$

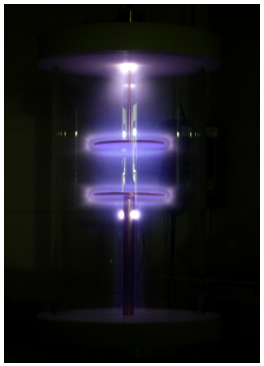
Chapitre G3 : Propagation dans un milieu dispersif



Paquet d'Ondes

Partie G : Ondes

G-1 : Ondes sonores dans un fluide
G-2 : Ondes e.m. dans le vide
G-3 : Propagation dans un milieu dispersif
G-4 : Plasma
G-5 : Métaux
G-6 : Polarisation



Réacteur au plasma pour la déposition de couches minces [11]

Exemples d'équations d'ondes autres que de d'Alembert

1. Equation d'ondes thermiques.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

2. Equation d'onde sur une corde : si on prend en compte des frottements de la forme $\vec{f} = -\frac{\mu}{\tau}\frac{\partial \Psi}{\partial t}$, on obtient

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{\mu}{\tau}\frac{\partial \Psi}{\partial t} - c_0^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0$$

10. La polymérisation au plasma est une technique qui nous permet, à partir d'un monomère en phase gazeuse, de déposer une mince couche réactive sur une surface.
Le principe est fort simple : sous pression réduite, le monomère qui est à la base sous forme liquide, arrive à la chambre d'ionisation sous forme gazeuse. À la surface des électrodes, le bombardement des électrons ionise les molécules gazeuses du monomère. Les molécules du monomère se fractionnent alors pour créer des électrons libres, des ions, des molécules dans un état hautement énergétique et des radicaux libres. Ces radicaux sont finalement adsorbés et polymérisés directement sur la surface du substrat.
Le plasma généré dans le réacteur de cette façon est appelé un plasma froid. Le vide étant contrôlé, les électrons n'arrivent pas à être en équilibre thermodynamique avec les molécules gazeuses du monomère.

I Milieu dispersif , absorbant

1 OPPH*

Définition :

On appelle **pseudo-onde plane progressive harmonique (opph*)** toute onde dont les champs scalaires associés sont de la forme

$$\Psi(M,t) = \mathcal{R}e\left[\underline{\Psi}(M,t)\right] \quad \text{avec}$$

$$\boxed{\underline{\Psi}(M,t) = \underline{\Psi_0}\exp\left[i\left(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\overrightarrow{OM}\right)\right]}$$

où $\underline{\Psi_0}$ est une constante complexe et $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\vec{u}$ est un vecteur à composantes ***a priori*** complexes.

$$\boxed{\underline{k} \in \mathbb{C}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega \in \mathbb{R}^+}$$

⚠ Attention…

Une telle onde **n'est généralement pas plane progressive !** On est sûr qu'elle l'est seulement si $\underline{\vec{k}}$ est un vecteur réel.

2 Relation de dispersion

Définition :

On appelle **relation de dispersion** vérifiée par ω et les composantes de $\underline{\vec{k}}$ pour que l'opph* soit solution de l'équation d'onde étudiée.
Donc à chaque problème, une relation de dispersion.

Point méthode - Etablir la relation de dispersion

Pour une opph* de forme complexe

$$\underline{\Psi}(M,t) = \underline{\Psi_0} \exp\left[i\left(\omega t - \underline{\vec{k}} \cdot \overrightarrow{OM}\right)\right]$$

où $\underline{\Psi_0}$ est une constante, on a les identités d'opérateurs suivantes

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega \times \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} * = \left(-i\,\underline{\vec{k}}\right) *$$

En écrivant que la forme de solution choisie vérifie l'équation de propagation étudiée, on en déduit la relation de dispersion du problème reliant $\underline{\vec{k}}(\omega) = \vec{k'}(\omega) + i\vec{k''}(\omega)$ à ω.

3 Vitesse de phase

Définition :

On appelle **vitesse de phase** v_φ la vitesse de déplacement des plans équiphase de l'onde $\Psi(M,t)$. Elle est définie par la relation suivante

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)} = \frac{\omega}{\mathcal{R}e\left[\underline{k}(\omega)\right]}}$$

⚠ Attention...

v_φ n'a pas de signification physique réelle et peut être supérieure à c.

4 Vitesse de groupe

Définition :

La vitesse de **groupe** est la vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes :

$$\boxed{v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\mathcal{R}e(k)}}$$

C'est la vitesse à laquelle, on peut envoyer de l'information donc

$$\boxed{v_g \leq c}$$

Contrairement à la vitesse de phase v_φ qui, n'ayant pas de signifaction physique réelle [11], peut être supérieure à c, la vitesse de groupe est la vitesse à laquelle, on peut envoyer de l'information donc

$$\boxed{v_g \leq c}$$

Propriété à connaître

Savoir démontrer №1 : Equation de D'alembert

Dans le cas d'une équation de d'Alembert, la relation de dispersion s'écrivant $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ on a :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c = v_g$$

Point méthode - Expression de la vitesse de groupe

Il faut différencier la relation de dispersion donnant $k'^2(\omega)$. Ainsi on en déduit $2k'\mathrm{d}k' = \cdots \mathrm{d}\omega$

5 Absorption et dispersion

Définitions :

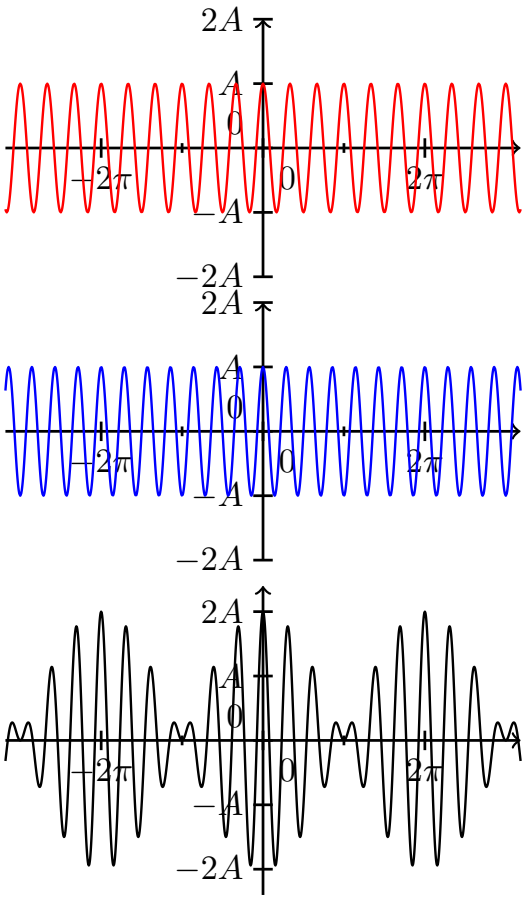
Soit une opph* $\underline{\Psi}(M,t)$, de partie réelle $\Psi(M,t)$ solution de l'équation d'onde étudiée. On dit que

- ☞ que la propagation est **dispersive** lorsque v_φ dépend de ω.
- ☞ qu'il y a **absorption** si, au cours de la propagation, l'amplitude de l'onde réelle tend à décroître.

II Paquet d'ondes

1 Propagation de deux OPPH de fréquences voisines

1.a Somme de deux ondes



On étudie la propagation de deux opph* de pulsations proches, ω_1 et ω_2.

$$\psi_1 = A\cos(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$\psi_2 = A\cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

Comme le milieu est linéaire, on observe la somme des deux ondes soit :

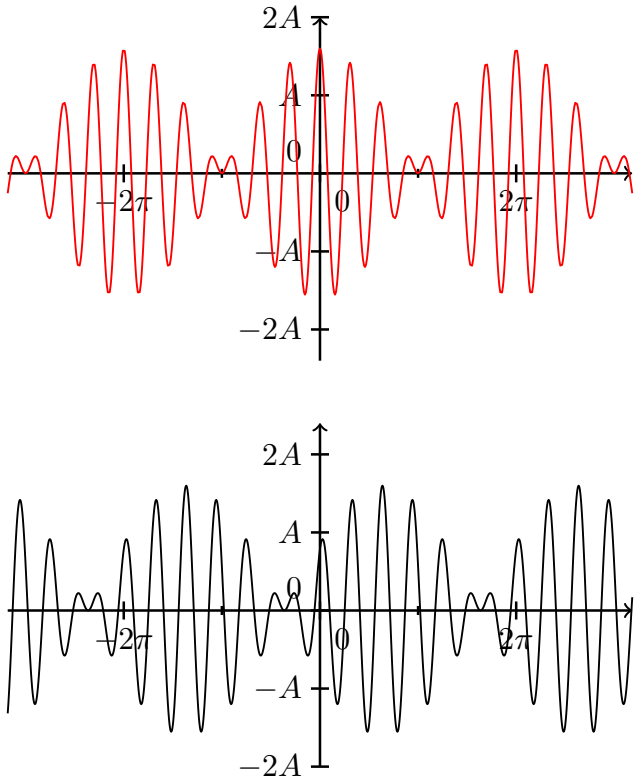
$$\psi = 2A\cos(\omega_0 t - k_0 x)\cos\left(\frac{1}{2}\delta\omega t - \frac{1}{2}\delta k x\right)$$

avec

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$\delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \qquad \delta k = k_2 - k_1$$

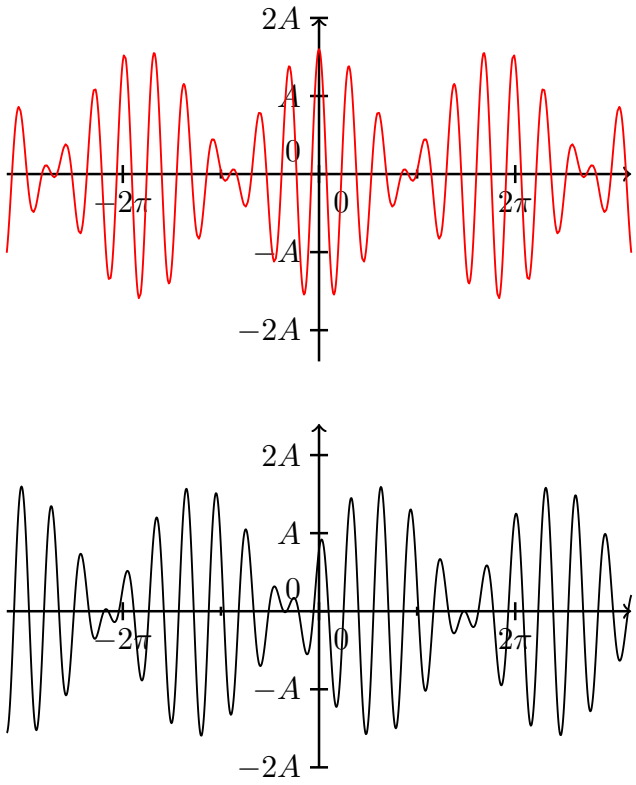
1.b Milieu non dispersif



$\omega_1 = k_1 c$ et $\omega_2 = k_2 c$

L'onde et l'enveloppe se déplacent à la même vitesse : il y a déplacement d'ensemble du système.

1.c Milieu dispersif



$\omega_1 = k_1 v_{\varphi_1}$ et $\omega_2 = k_2 v_{\varphi_2}$

L'onde et l'enveloppe ne se déplacent pas à la même vitesse.

2 Généralisation à un paquet d'ondes

Définition :

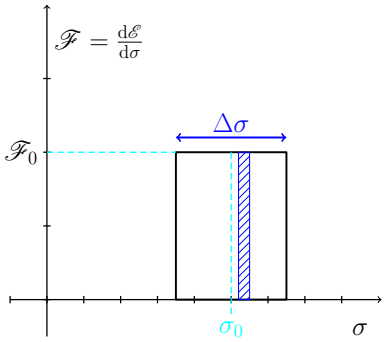
On appelle **paquet d'ondes**, ou groupe d'ondes une ensemble d'OPPH* de pulsations voisines, d'amplitudes significatives dans un domaine $\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$ on effectue la somme d'ondes harmoniques (ou monochromatiques) à répartition continue en pulsations (ou fréquences).

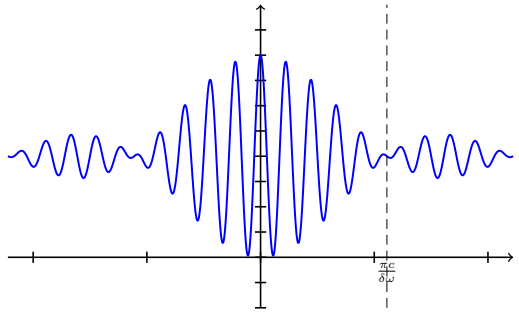
$$\underline{\Psi}(x,t) = \int_0^\infty \underline{A}(\omega) \exp\left[i\left(\omega t - k(\omega)x\right)\right] \mathrm{d}\omega$$

2.a Exemples de paquets d'ondes

Exemple : ***Profil rectangulaire***

On peut choisir un paquet composé de toutes les pulsations comprises entre $\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}$ et $\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}$ et de même amplitude $\frac{A_0}{\delta\omega}$.





$$\psi(x,t) = \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega t - kx)\,\mathrm{d}\omega = \int_{\omega_0-\frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\delta\omega}{2}} \frac{A_0}{\delta\omega}\cos(\omega t - kx)\,\mathrm{d}\omega$$

Savoir démontrer №2 : Paquet d'onde à profil rectangulaire

En l'absence de dispersion, on vérifie la relation de dispersion

$$\omega = kc$$

Pour un paquet rectangulaire, on trouve

$$\psi = A_0 \mathrm{sinc}\left[\frac{\delta\omega}{2}\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\cos\left[\omega_0\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]$$

L'enveloppe et le signal se déplacent à la même vitesse.

$$\boxed{v_\varphi = v_g}$$

2.b Vitesse de groupe dans un milieu dispersif

Savoir démontrer №3 :

- ✗ Soit
$$\underline{\psi}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(\omega)\exp i(\omega t - kx)\,\mathrm{d}\omega$$
- ✗ Si ω est proche de ω_0, alors $k(\omega) \simeq k(\omega_0) + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}(\omega-\omega_0)$
- ✗ On trouve
$$\underline{\psi}(x,t) = \exp i(\omega_0 t - k_0 x)\, f\left(t - x\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)$$

Application 1 : Ondes sur une cymbale - Centrale PC 2010

Les cymbales sont des plateaux circulaires en métal que l'on frappe pour obtenir un son. Contrairement aux lames de clavier, elles ne produisent pas un son de hauteur bien définie. Ces cymbales constituent un milieu dispersif pour les ondes sonores. La vitesse des ondes de longueur d'onde λ_1 est **supérieure** à celle des ondes de longueur d'onde λ_2.

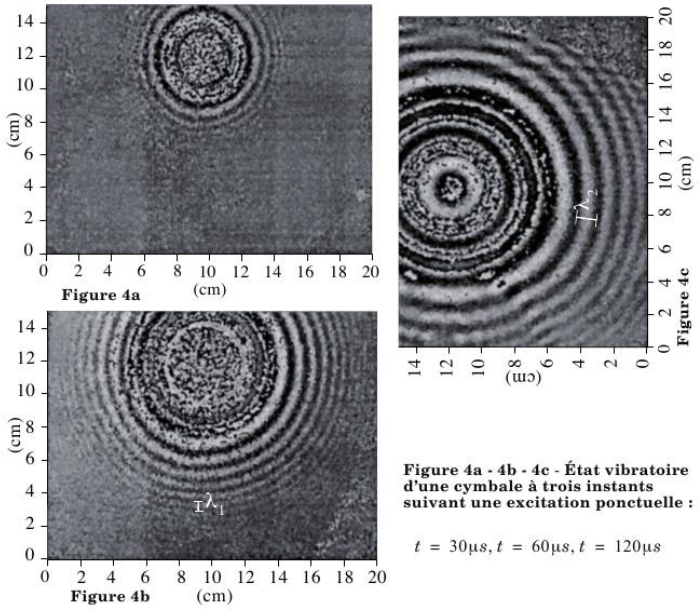
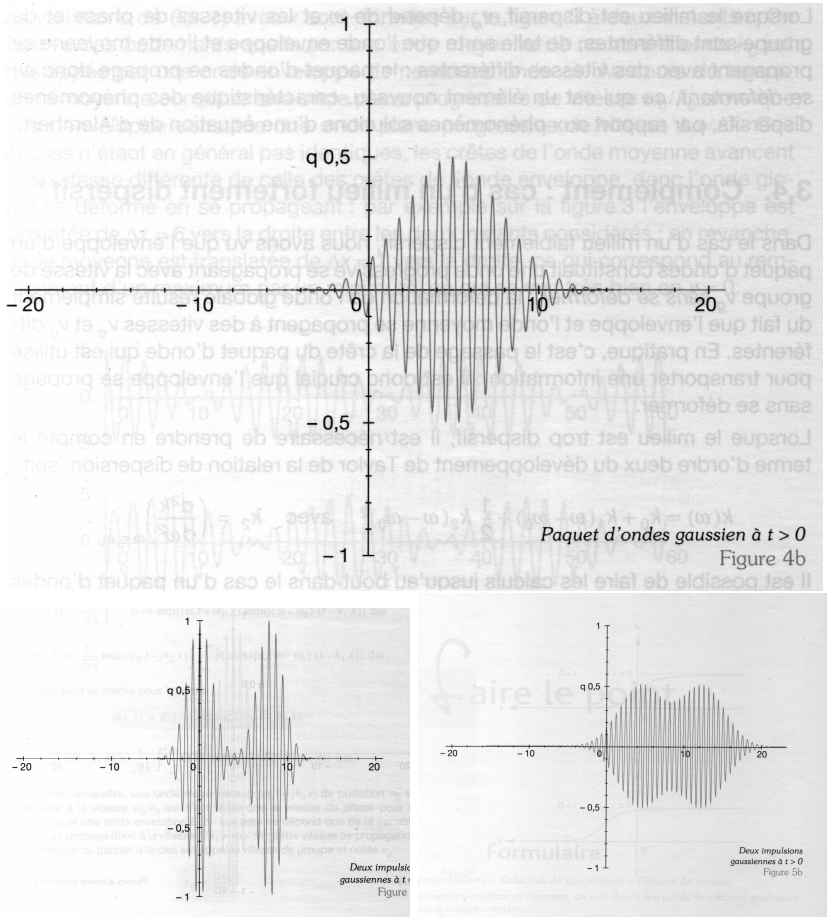


Figure 4a - 4b - 4c - État vibratoire d'une cymbale à trois instants suivant une excitation ponctuelle :

$t = 30\mu s, t = 60\mu s, t = 120\mu s$

3 Etalement d'un paquet dans un milieu dispersif



L'étalement du paquet va **limiter le débit d'information** sur une ligne de longueur donnée.

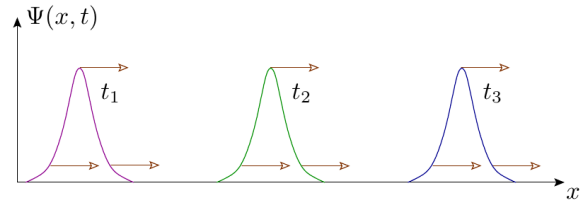
4 Déformations du paquet d'ondes

Un paquet d'ondes n'a pas le même type d'évolution suivant les caractères de dispersion, d'absorption et de linéarité du phénomène propagatif étudié.

Voici quelques exemples (qu'on peut imaginer représenter le profil d'une vague) à trois instants successifs et pour lesquels les flèches représentent des **vitesses locales**.

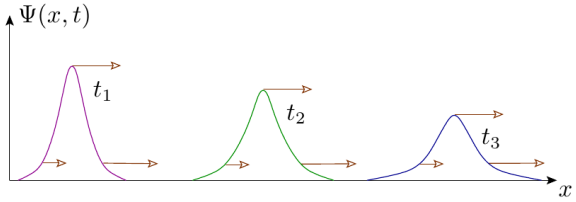
Pas de dispersion
Pas d'absorption
Linéarité

L'onde est progressive à c_0 (pas d'étalement, ni de perte d'énergie).



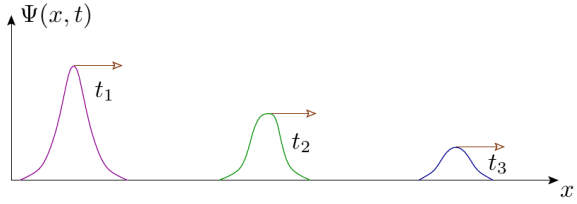
Dispersion
Pas d'absorption
Linéarité

Étalement[11] du paquet d'ondes (mais pas de perte d'énergie).



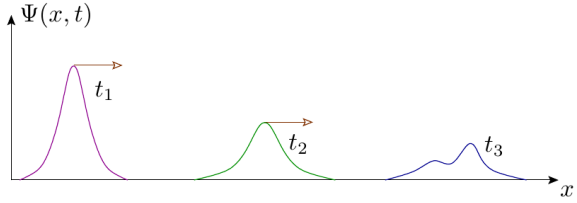
Pas de dispersion
Absorption
Linéarité

Atténuation du paquet d'ondes (perte d'énergie et segmentation du paquet possible).



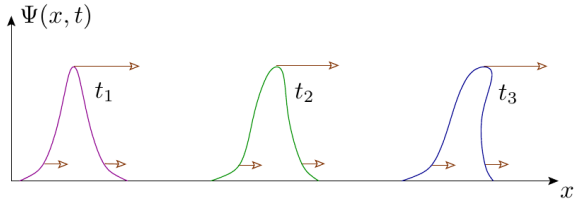
Dispersion
Absorption
Linéarité

Étalement avec atténuation du paquet d'ondes (perte d'énergie et segmentation du paquet possible).



Non Linéaire

Évolution complexe (possibilité de « déferlement » comme représenté ci-contre, mais pas seulement...).



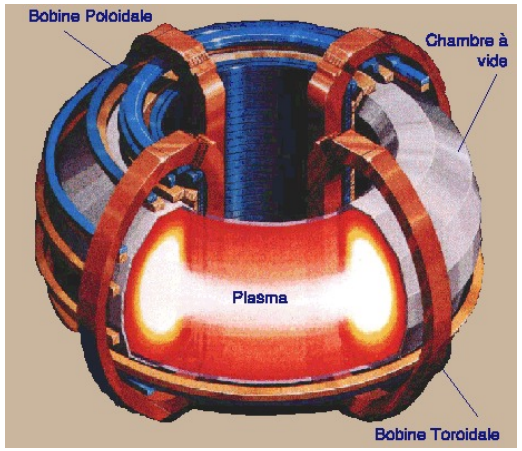
Chapitre G4 : Plasma

Malus (1717 - 1783)

PARTIE G : ONDES
G-1 : Ondes sonores dans un fluide
G-2 : Ondes e.m. dans le vide
G-3 : Propagation dans un milieu dispersif
G-4 : Plasma
G-5 : Métaux
G-6 : Polarisation

Bewster (1717 - 1783)

I Modélisation d'un plasma



Le plasma est parfois nommé ***quatrième état de la matière*** : c'est en fait un gaz partiellement ou totalement ionisé.

Il est donc constitué de :
— cations de charge $+q = p|e|$, de masse m_i, de densité n_i et de vitesse $\overrightarrow{v}_i$
— d'électrons de charges $-e$ et de masse m_e, de densité n_e et de vitesse $\overrightarrow{v}_e$.

On envisage le plasma le plus simple selon les hypothèses suivantes

✗ On considère un milieu **dilué** dans lequel on néglige les interactions entre les particules chargées le constituant ; ces particules ne sont soumises qu'au champ électromagnétique.

✗ En l'absence d'onde électromagnétique, le milieu est **localement neutre**, de sorte que les densités volumiques d'ions n_i et d'électrons n_e vérifient : $en_e = qn_i$, soit $n_e = n_i = n_0$ pour des ions qui portent une seule charge.

✗ on fera en outre l'hypothèse d'un plasma non relativiste, ainsi $v_e \ll c$.

II Oscillations de plasma

Dans toute cette partie $p = 1$, c'est à dire que les cations portent la charge $+e$.

La neutralité au repos s'écrit donc

$$n_i e - n_e e = 0$$

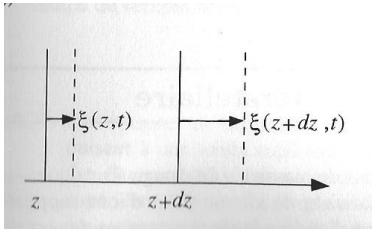
On notera $n = n_i$.

1 Modèle à 1D

Le plasma gazeux comprend dans ce modèle des ions supposés fixes, on note $\xi(z,t)$ un petit déplacement d'ensemble des électrons du plasma suivant l'axe (Oz)

Savoir démontrer №1 : Modèle à 1D

1. En raisonnant sur une tranche de taille $\mathrm{d}z$, en supposant que $\frac{\partial \xi}{\partial z} \ll 1$, on trouve



$$n_e \simeq n_i \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)$$

2. La densité volumique de charge est donc :

$$\rho = ne\frac{\partial \xi}{\partial z}$$

3. On en déduit le champ électrique :

$$\overrightarrow{E} = \frac{ne}{\varepsilon_0}\xi \overrightarrow{u}_z$$

4. La relation fondamentale appliquée à la "tranche d'électrons" donne :

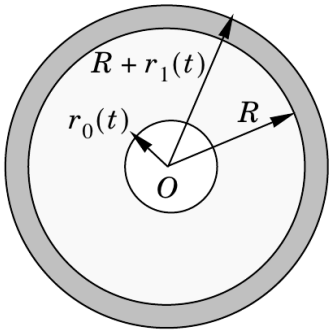
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\xi$$

les électrons oscillent à la pulsation plasma :

$$\boxed{\omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}}$$

2 Modèle à 3D

Application 1 : Modèle à 3D - Centrale PSI 2004



A $t = 0$, la répartition des électrons et des ions est uniforme. Dans tout le problème les densités volumiques sont uniformes.
A une date t quelconque, les électrons se trouvent entre r_0 et $R + r_1$, $r_1 \ll R$.

1. En utilisant l'incompressibilité montrer que

$$r_0^3 = (R + r_1)^3 - R_1^3 \simeq 3 r_1 R^2$$

2. On se place à une distance r du centre, montrer que le champ électrique est

$$\overrightarrow{E}(r) = \frac{n_0 e r_1 R^2}{\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}_r$$

.

3. Un électron évoluant à une distance r a une vitesse $\overrightarrow{v} = v(r,t)\,\overrightarrow{u}_r$. On a $v(R) = \dot{r}_1$. En utilisant l'incompressibilité de l'écoulement, montrer que :

$$v r^2 = \dot{r}_1 R^2$$

4. En appliquant la RFD à un électron situé en r, montrer que

$$\ddot{r}_1 = -\frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0} r_1$$

les électrons oscillent à la pulsation plasma :

$$\boxed{\omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}}$$

III Equation d'onde

1 Propriétés

Savoir démontrer №2 : Structure

On considère une onde électrique **transverse** se propageant selon $\overrightarrow{u}_x$

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp\left[i\left(\omega t - \underline{k}x\right)\right]$$

On a donc

$$\underline{\overrightarrow{E_0}}.\overrightarrow{u}_x = 0$$

- ✗ $\text{div}\,\overrightarrow{E} = 0 \rightarrow \rho = 0$: le milieu est bien neutre.
- ✗ On montre que

$$\overrightarrow{B} = \frac{\underline{\overrightarrow{k}} \wedge \overrightarrow{E}_0}{\omega} \exp i\left(\omega t - \underline{k}x\right)$$

Savoir démontrer №3 : Conductivité imaginaire d'un plasma

- ✗ On évalue le rapport de la force magnétique sur la force électrique pour un électron :

$$\frac{f_m}{f_e} \simeq \frac{v}{v_\varphi} \ll 1$$

On peut donc **négliger la force magnétique devant la force électrique**.

- ✗ Les forces que subissent les ions et les électrons sont identiques au signe près, donc $m_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} \simeq m_e \frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}$, finalement

$$\frac{v_i}{v_e} \simeq \frac{m_e}{m_i} \ll 1$$

On peut **négliger le mouvement des ions**.

- ✗ Le vecteur densité de courant est $\overrightarrow{j} = n_i q \overrightarrow{v}_i + n_e(-e)\overrightarrow{v}_e \simeq -en_e\overrightarrow{v}_e$. Soit $\overrightarrow{j} = \underline{\gamma}\overrightarrow{E}$. On trouve

$$\boxed{\underline{\gamma} = -i\frac{n_0 e^2}{m_e \omega}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\gamma = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}}$$

Dans un plasma la **conductivité est imaginaire pure**.

2 Equation

Application 2 : Equations de Maxwell dans un milieu conducteur localement neutre

Soit un milieu conducteur localement neutre avec pour seuls porteurs de charges mobiles des électrons, écrire les équations de Maxwell caractérisant le champ électromagnétique dans un tel milieu.

Savoir démontrer №4 : Equation d'onde vérifiée par le champ électrique dans le plasma

En posant

$$\boxed{\omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}}$$

homogène à une pulsation et appelée **pulsation plasma**, on montre que

$$\boxed{\triangle \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega_P^2}{c^2}\vec{E}}$$

Le champ électrique vérifie une équation d'onde linéaire qui n'est pas une équation de d'Alembert

Savoir démontrer №5 : Structure de l'onde

- ✗ $\text{div}\,\vec{E} = 0 \rightarrow$ transverse électrique.
- ✗ $\text{div}\,\vec{B} = 0 \rightarrow$ transverse magnétique.
- ✗ On trouve la relation de dispersion

$$\boxed{c^2k^2 = \omega^2 - \omega_p^2}$$

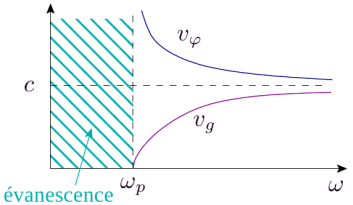
- ✗ Une telle relation est dite de Klein-Gordon où la pulsation plasma joue un rôle particulier (pulsation de coupure).

3 Vitesses de phase et de groupe

Savoir démontrer №6 : Etude de la propagation d'une onde transverse dans un plasma

1. La propagation n'est possible que si $\omega > \omega_P$ ($\vec{k}$ est réel et égal à $\vec{k}$)
   - ✗ La vitesse de phase est

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2}}$$



   - ✗ le milieu est donc **dispersif**.
   - ✗ La vitesse de groupe est

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

   - ✗ On constate que $v_\varphi > c$ et $v_g < c$
- ✗ Pour le plasma

$$\boxed{v_\varphi v_g = c^2}$$

2. Si $\omega < \omega_P$, la propagation est impossible : on observe alors une **onde évanescente** au sein du plasma et l'onde incidente est **réfléchie**.

4 Indice de réflexion

Définition :

On peut définir l'indice n tel que

$$k = nk_0 = n\frac{\omega}{c}$$

k_0 est le vecteur d'onde dans le vide.

Savoir démontrer №7 : Indice pour un plasma

$$\boxed{n^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

Savoir démontrer №8 : Trois cas particuliers :

1. Si $\omega < \omega_p$ alors $n \in (i\,\mathbb{R}) \rightarrow$ **onde évanescente**
2. Si $\omega > \omega_p$ alors $n \in \mathbb{R} \rightarrow$ **onde progressive**
   On trouve donc $n < 1$ ce qui est relié au fait que $v_\varphi > c$ (mais $v_g < 1$).
3. Si $\omega \rightarrow \infty$ alors $n \rightarrow 1$

5 Etude énergétique

Application 3 : Etude énergétique d'un plasma peu dense

On considère un champ électrique incident de la forme

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{E}_0 \exp\left[i\left(\omega t - \underline{k}x\right)\right] \overrightarrow{u}_x$$

se propageant dans un plasma peu dense occupant le demi-espace $x > 0$.
On notera n_0 la densité volumique des porteurs de charges du milieu (les électrons) de masse m_e.

1. On se place dans le cas $\omega > \omega_p$:
   (a) Caractériser l'onde obtenue (champs, structure, vitesses de phase et de groupe, vecteur de Poynting moyen et valeur moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique $\langle u_{em}\rangle$).
   (b) Déterminer également la valeur moyenne temporelle d'énergie mécanique $\langle u_M\rangle$ des électrons. En déduire la valeur moyenne temporelle d'énergie totale $\langle u\rangle$.
   (c) A partir d'une relation simple entre $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle$ et $\langle u\rangle$, montrer que l'énergie moyenne se propage à la vitesse de groupe v_g.
2. On se place dans le cas $\omega < \omega_p$:
   Caractériser aussi l'onde obtenue (champs, structure, vitesses de phase et de groupe, vecteur de Poynting moyen).

Etude énergétique du plasma :

1. $\boxed{\omega > \omega_p}$:

$$k^2c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 > 0 \rightarrow k \text{ réel}$$

On pose $k = \sqrt{\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}} = \frac{\omega}{v_\varphi}$

(a) la relation de structure permet de trouver $\overrightarrow{B}$:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega}$$

On en déduit :

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{E_0}{v_\varphi} \exp\left[i\left(\omega t - kx\right)\right] \overrightarrow{u}_y}$$

(b) Vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2}}$$

(c) Vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

(d) Expression de l'énergie électromagnétique :

$$\langle u_e\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \text{ et } \langle u_m\rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0 v_\varphi^2}$$

Le rapport de ces deux énergies est : $\frac{\langle u_e\rangle}{\langle u_m\rangle} = \frac{v_\varphi^2}{c^2} > 1$

(e) Expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting :

$$\langle\overrightarrow{\pi}\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(\frac{E_0^2 k}{2\mu_0\omega}\right)\overrightarrow{u}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0 v_\varphi}\overrightarrow{u}_z$$

(f) Expression de la vitesse :
RFD sur un électron :

$$\underline{\overrightarrow{v}} = -\frac{ie}{m\omega}\overrightarrow{E}$$

On calcule l'énergie cinétique moyenne :

$$\langle e_c\rangle = n\frac{1}{2}\left(\frac{e}{m\omega}\right)^2\frac{E_0^2}{2} = \frac{ne^2E_0^2}{4m\omega^2}$$

(g) Energie totale : $u = e_c + u_e + u_m$:

$$\boxed{\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}}$$

(h) Vitesse de propagation de l'énergie est v_g :

$$\boxed{\langle \pi \rangle = \langle u \rangle \, v_g \, \overrightarrow{u}_z}$$

2. $\boxed{\omega < \omega_p}$:

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 < 0 \rightarrow k \text{ imaginaire pur}$$

On pose $k = \frac{i}{\delta}$, avec $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$

$$\overrightarrow{E} = E_0 \exp i\,(\omega t)\, e^{-x\frac{x}{\delta}} \overrightarrow{u}_x$$

(a) La relation de structure donne $\overrightarrow{B}$:

$$\overrightarrow{B} = \frac{i E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)}{\delta} e^{i\omega t} \overrightarrow{u}_y$$

$\overrightarrow{B} = \frac{i E_0}{\delta} \exp i\,(\omega t)\, e^{-\frac{x}{\delta}} \overrightarrow{u}_y$

Il y a donc un déphasage de $\pi/2$ entre $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{E}$.

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{i E_0}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}} \exp i\,(\omega t)\, \overrightarrow{u}_y}$$

(b) Moyenne du vecteur de POYNTING :

$$\boxed{\langle \overrightarrow{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{\delta} \mathcal{R}e\,(i)\, \overrightarrow{u}_z = \overrightarrow{0}}$$

Pas de propagation d'énergie pour une onde evanecente stationnaire.

IV Réflexion d'une onde sur un plasma

On considère le dioptre $z = 0$ qui sépare le vide ($z < 0$) et un plasma ($z > 0$).

On considère une onde plane progressive harmonique incidente se propageant dans le vide à la pulsation ω.

On suppose que $\overrightarrow{j}_S = 0$ sur le dioptre, ainsi $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont continus.

1 Coefficient de réflexion en amplitude

Savoir démontrer №9 : Exemple avec une polarisation rectiligne

Pour $\omega > \omega_p$,

$$r_E = \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \qquad t_E = \frac{2\omega}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

Pour $\omega < \omega_p$

$$r_E = \frac{\omega - i\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega + i\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} \qquad t_E = \frac{2\omega}{\omega + i\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

2 Coefficient de réflexion en puissance

Savoir démontrer №10 : Exemple avec une polarisation rectiligne

Pour $\omega > \omega_p$,

$$R = \left(\frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \right)^2$$

Pour $\omega < \omega_p$,

$$R = 1$$

Chapitre G5 : Ondes dans les métaux

Malus (1717 - 1783)

PARTIE G : ONDES
G-1 : Ondes sonores dans un fluide
G-2 : Ondes e.m. dans le vide
G-3 : Propagation dans un milieu dispersif
G-4 : Plasma
G-5 : Métaux
G-6 : Polarisation

Bewster (1717 - 1783)

I Conductivité d'un métal

1 Electroneutralité

Savoir démontrer №1 : Equation vérifiée par ρ

1. Montrer que ρ vérifie l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma \rho}{\epsilon_0} = 0$$

2. Montrer qu'au bout d'un temps τ, le milieu est neutre.
3. Sachant que $\tau \simeq 10^{-14}$ s, commentez.

2 Conductivité en régime sinusoïdal

Savoir démontrer №2 : Conductivité complexe

En statique , la conductivité d'un conducteur ohmique est $\gamma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}$.
En régime sinusoïdal forcé (régime transitoire négligé car court) , le PFD sur un électron s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\overrightarrow{v}}{\tau} - \frac{e\overrightarrow{E}}{m}$$

On en déduit la conductivité :

$$\boxed{\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\tau\omega}}$$

Remarque :

- ✗ Pour $\omega\tau \ll 1$ = ARQS , on retrouve la loi d'Ohm locale.
- ✗ On retrouve la suite : frottement, déphasage, partie imaginaire, absorption.
- ✗ Pour $\omega\tau \gg 1$, on retrouve un plasma.

3 Equation des champs

Savoir démontrer №3 : Equation de diffusion vérifiée par le champ électrique

$$\triangle\overrightarrow{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} + \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$$

4 Equation de diffusion vérifiée par les champs ARQS magnétique

Savoir démontrer №4 : Equation de diffusion vérifiée par le champ électrique

Le champ électrique, se propageant dans un conducteur ohmique dans le domaine basses fréquences, pour lequel l'ARQS et l'hypothèse d'électroneutralité sont vérifiées, satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\triangle \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Cette équation constitue une **équation de diffusion**.

Remarque :

Par application de la loi d'Ohm, on obtient de même en ARQS

$$\triangle \vec{j} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

et en calculant $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})$

$$\triangle \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Savoir démontrer №5 : Relation de dispersion cas général

En cherchant une solution en OPHH*, on trouve la **relation de dispersion** :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\gamma_0 \mu_0 \omega}{1 + i\omega\tau}\right)$$

Savoir démontrer №6 : Relation de dispersion dans l'ARQS

Dans l'ARQS, on a $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, la relation de dispersion se simplifie :

$$\underline{k}^2 = \simeq -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

Dans la suite, on se place dans l'ARQS.

II Effet de peau dans le conducteur ARQS

1 Détermination du champ dans le conducteur

Définition :

On appelle **épaisseur (ou profondeur) de peau** la quantité

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

homogène à une longueur.

Savoir démontrer №7 : Expression du champ électrique dans le conducteur ohmique, en régime variable

On écrit le champ réel :

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

Application 1 : Epaisseur de peau dans le cuivre

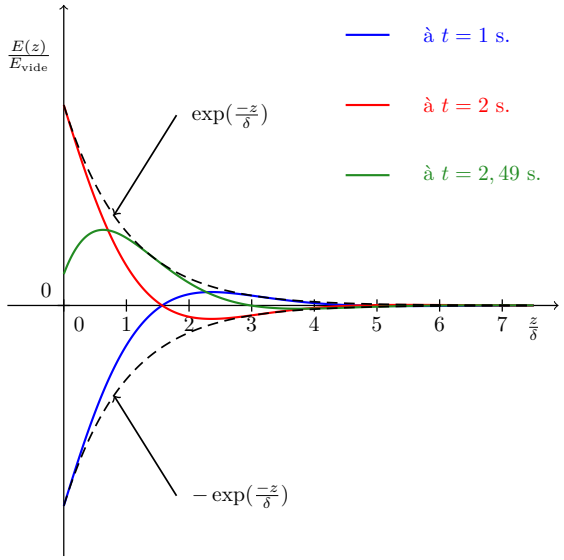
D'après la définition de l'épaisseur de peau, celle-ci dépend de la fréquence ($\omega = 2\pi f$). On donne pour le cuivre $\gamma_0 = 5,9.10^7$ S.m^{-1} et on rappelle que $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$Hm.

f	100 Hz	1 kHz	100 kHz	10 MHz	1 GHz
δ (en μm)	$6,55.10^3$	$2,07.10^3$	207	20,7	2,07

Dans le domaine hyperfréquence

f en MHz	200	300	500	1200	4000	10000
δ (en μm)	4,6	3,8	2,9	1,9	1,0	0,65

2 Discussion de l'effet de peau électromagnétique



L'amplitude du champ électrique $\overrightarrow{E}$ diminue lors de sa progression dans le conducteur.
La distance caractéristique de cette décroissance est $\delta(\omega)$.

Définition :

On appelle **effet de peau** l'aptitude d'un conducteur à s'opposer à la pénétration d'un champ électromagnétique variable en son sein.
le champ électromagnétique se trouve réparti au voisinnage de la surface sur une profondeur qui vaut quelque fois l'épaisseur de peau $\delta(\omega)$.

Influence de la fréquence et de la conductivité :

Lorsque $\omega \nearrow$, $\delta(\omega) \searrow$;
et lorsque $\gamma_0 \nearrow$, $\delta(\omega) \searrow$ donc l'effet de peau est plus marqué.

Répartition (quasi-)surfacique du courant dans le conducteur :

D'après la loi d'Ohm (et analogie équation diffusion), on a

$$\overrightarrow{j} = j_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \overrightarrow{u}_x$$

avec $j_0 = \gamma_0 E_0$.

Il pourra être intéressant d'écrire une distribution surfacique des courants modélisée par

$$\overrightarrow{j}_S = \int_0^{+\infty} \overrightarrow{j}\, \mathrm{d}z$$

Application 2 : Calcul d'un vecteur densité de courants surfaciques

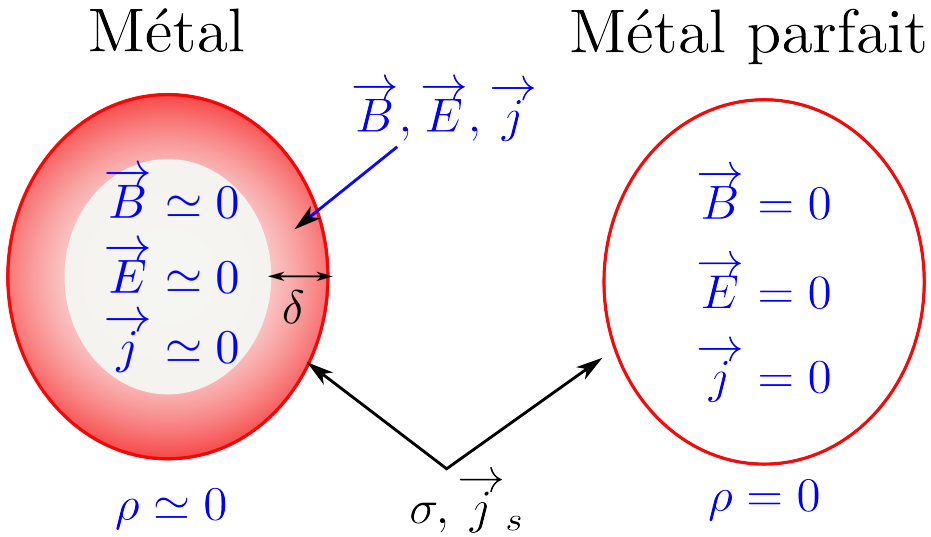
En reprenant les résultats obtenus pour le champ électrique, montrer que

$$\overrightarrow{j}_S = \frac{j_0 \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Pertinence du modèle du conducteur semi-infini :

L'exemple du conducteur semi-infini modélisera un problème physique réel dans le cas où le conducteur

- est une plaque d'épaisseur $d \gg \delta$;
- présente un rayon de courbure grand devant la profondeur de peau.



3 Vitesse de phase

Savoir démontrer №8 : Vitesse de phase

On recherche $\underline{k}$ sous la forme : $\underline{k} = k_1 + ik_2$. La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{|k_1|}$

III Réflexion des ondes sur un métal dans l'ARQS

On considère un conducteur réel de conductivité γ situé dans l'espace $z > 0$, on se place à basse fréquence donc dans l'ARQS.

La relation de dispersion s'écrit :

$$\underline{k}^2 \simeq -i\mu_0\gamma_0\omega$$

Une onde incidente $\overrightarrow{E}_i = E_0 \exp i(\omega t - kz)\,\overrightarrow{u}_x$ se propage dans le vide et atteint le plan $z = 0$.

Savoir démontrer №9 : Coefficient de transmission et de réflexion

Montrer que l'onde transmise a la forme :

$$\overrightarrow{E}_t = \underline{t}E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\overrightarrow{u}_x$$

$$\underline{t} = \frac{2}{1 + \frac{kc}{\omega}} \qquad \underline{r} = \frac{1 - i - \frac{\omega\delta}{c}}{1 - i + \frac{\omega\delta}{c}}$$

Réponse :

Le champ électrique, se propageant dans un conducteur ohmique dans le domaine basses fréquences, pour lequel l'ARQS et l'hypothèse d'électroneutralité sont vérifiées, satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\triangle\overrightarrow{E} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Cela donne la relation de dispersion $\underline{k}^2 = -i\omega\mu_0\gamma_0$

En conséquence, $\overrightarrow{\underline{k}} = \pm\frac{1-i}{\delta}\overrightarrow{u}_z$. *On choisit le signe + pour une propagation suivant les z croissants,* $\boxed{\overrightarrow{\underline{k}} = \frac{1-i}{\delta}\overrightarrow{u}_z}$

On trouve donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{E}}_t = E_{t0}e^{-\frac{z}{\delta}} \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\overrightarrow{u}_x}$$

On peut calculer le champ magnétique, en écrivant la relation de structure en notation complexe :

$$\overrightarrow{\underline{B}}_t = \frac{\underline{k} \wedge \overrightarrow{\underline{E}}_t}{\omega} = \overrightarrow{\underline{B}}_t = E_{t0}\frac{\underline{k}}{\omega}e^{-\frac{z}{\delta}} \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\overrightarrow{u}_y$$

Pour évaluer $E_{t0} = tE_0$, *il faudrait étudier la continuité de* $\overrightarrow{E}$ *et* $\overrightarrow{B}$ *en* $z = 0$ *(pas de courant surfacique, les courants sont volumiques).*

$$E_i(0) + E_r(0) = E_t(0) \qquad 1 + \underline{r} = \underline{t}$$

$$B_i(0) + B_r(0) = B_t(0) \qquad \frac{1}{c} - \frac{\underline{r}}{c} = \frac{\underline{k}}{\omega}\underline{t}$$

On en déduit

$$\boxed{\underline{t} = \frac{2}{1 + \frac{kc}{\omega}}}$$

Savoir démontrer №10 : Puissance

On trouve

$$\left\langle \overrightarrow{\Pi} = \right\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)\overrightarrow{u}_z$$

Chapitre G6 : Polarisation des ondes électromagnétiques

Malus (1717 - 1783)

PARTIE G : ONDES
G-1 : Ondes sonores dans un fluide
G-2 : Ondes e.m. dans le vide
G-3 : Propagation dans un milieu dispersif
G-4 : Plasma
G-5 : Métaux
G-6 : Polarisation

Bewster (1717 - 1783)

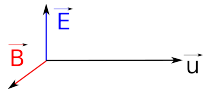
I Description du phénomène

1 Définition

DÉFINITION :

On s'interesse à une OPPH électromagnétique.

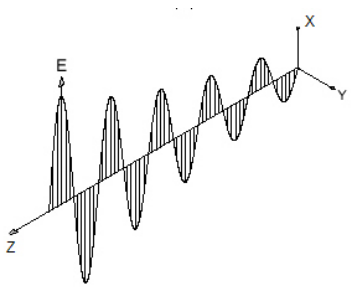
- ✗ $\left(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B}\right)$ est un **trièdre orthonormé direct.**
- ✗ Le plan qui contient $\vec{E}$ et $\vec{B}$ est le plan d'onde.
- ✗ La **polarisation** d'une onde plane progressive est la direction du champ électrique dans le plan d'onde.
- ✗ On note $I = K\left\langle E^2 \right\rangle$ l'intensité de l'onde lumineuse.
- ✗ Le champ électrique peut s'écrire :

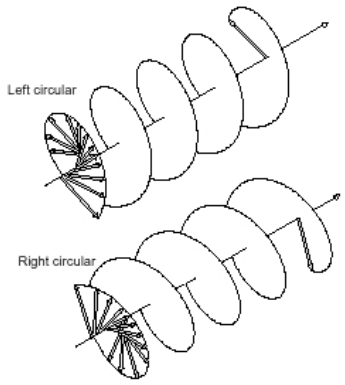


$$\vec{E}\begin{vmatrix} E_x &=& E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_y &=& E_{0y}\cos(\omega t - kz - \varphi) \\ E_z &=& 0 \end{vmatrix}$$

On suppose que $E_{0x} > 0$ et $E_{0y} > 0$.

φ	Type de polarisation
$\varphi = 0, \pi, 2\pi$ où $E_{0x}E_{0y} = 0$	**rectiligne**
$\varphi \in]0, \pi[$	**elliptique gauche**
$\varphi \in]\pi, 2\pi[$	**elliptique droite**
$\varphi(t)$ aléatoire et $E_{0y}(t)$	une lumière **non polarisée (naturelle)**

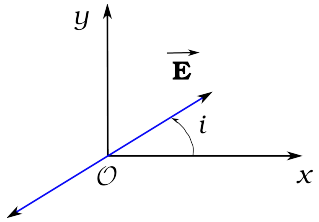




2 Polarisation rectiligne

- ✗ Pour une polarisation rectiligne, E_{0y} est proportionnel à E_{0x}. On peut écrire le champ sous la forme :

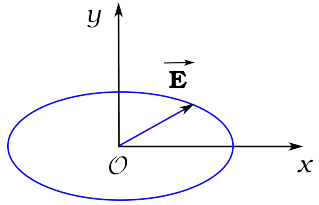
$$\vec{E}\begin{vmatrix} E_0\cos(i)\cos(\omega t - k.z) \\ E_0\sin(i)\ \cos(\omega t - k.z) \\ 0 \end{vmatrix}$$



- ✗ i donne l'angle de la polarisation avec l'axe des x

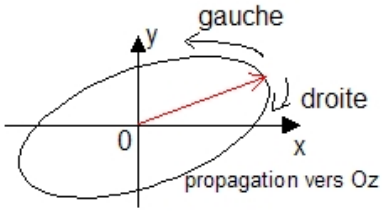
3 Polarisation elliptique

- — Lorsque $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, on obtient une elliptique avec **les axes sur (Ox) et (Oy)**
- — On a une **circulaire droite** pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $E_{0x} = E_{0y}$.
- — On a une **circulaire gauche** pour $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ et $E_{0x} = E_{0y}$.



Elliptique droite ou gauche ?

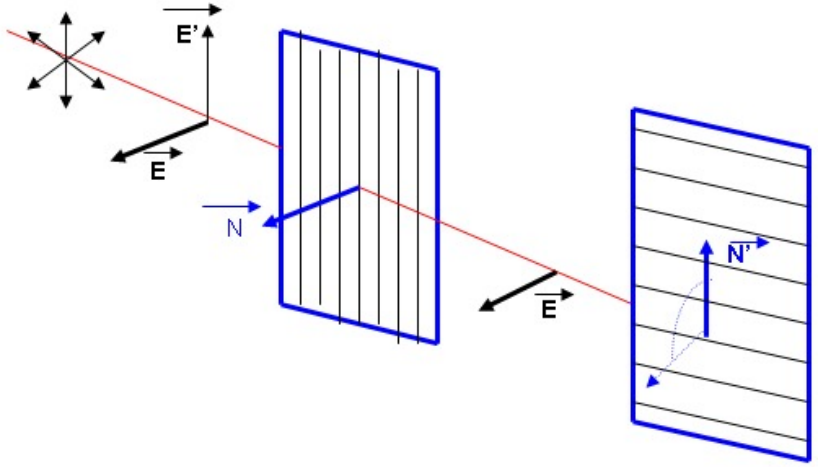
- ✗ On choisit d'avoir la direction de propagation vers nous (dans l'oeil !).
- ✗ On place le vecteur $\vec{E}$ à $t = 0$
- ✗ On place le vecteur $\vec{E}$ à $t = 0^+$
- ✗ Si la rotation de $\vec{E}$ se fait dans le **sens trigonométrique**, la polarisation est **elliptique gauche**.
- ✗ Si la rotation de $\vec{E}$ se fait dans le **sens horaire**, la polarisation est **elliptique droite**.



4 Produire une polarisation rectiligne : polariseurs

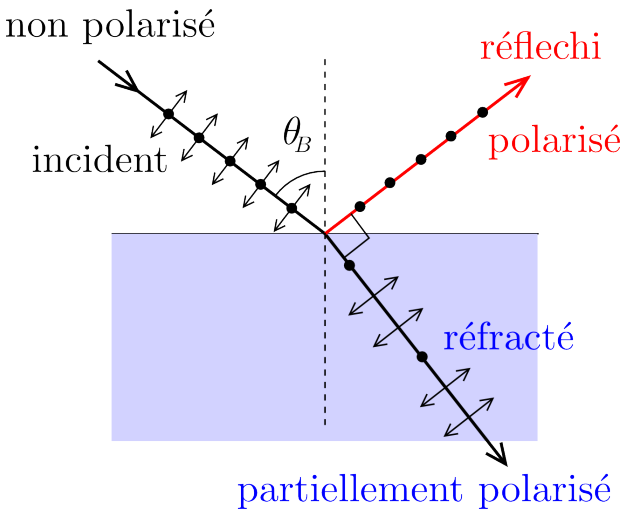
Définition :

- ✗ Quelle que soit la polarisation de la lumière incidente, la lumière **émergente ressort toujours polarisée dans la direction de l'axe du polariseur**.
- ✗ On produit donc une lumière **polarisée rectilignement** quelle que soit la polarisation initiale.
- ✗ Lorsque la lumière traverse successivement deux polariseurs, le premier s'appelle le **Polariseur**, le second est l'**Analyseur**.



Autres modes de polarisation

- ✗ Rayonnement : la lumière rayonnée est polarisée.
- ✗ Polarisation par reflexion : on polarise la lumière réfléchie si on arrive avec l'angle de Brewster : θ_B.



Savoir démontrer №1 : Angle de Brewster

A l'angle de Brewster :

1. le rayon réfracté est orthogonal au rayon réfléchi
2. pas de réflexion pour un champ polarisé dans le plan d'incidence.
3. polarisation partielle du rayon réfracté
4. l'angle de Brewster vérifie :

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

On note I_0 l'intensité incidente et $I_{\text{ém}}$ l'intensité émergente après le polariseur.

4.a Action d'un polariseur sur une polarisation rectiligne

5 Analyse d'une lumière polarisée

Savoir démontrer №2 : Loi de Malus

Soit une lumière incidente polarisée rectilignement grace à un polariseur P. L'intensité à la sortie du polariseur est I_0.
On place un second polariseur, appelé analyseur A , soit α l'angle entre le polariseur et l'analyseur.
L'intensité lumineuse après un analyseur idéal est

$$\boxed{I_{\text{ém}} = I_0 \cos^2 \alpha}$$

C'est la loi de Malus

Savoir démontrer №3 : Axes de l'ellipse

En faisant tourner un analyseur devant une lumière polarisée elliptiquement, on observe un maximum d'intensité = **direction du grand axe de l'ellipse** et un minimum = **petit axe de l'ellipse**.

6 Polarisation et interférences

Lorsque l'on étudie la polarisation de la lumière, l'approximation scalaire n'est plus valable.

On reprend l'étude des interférences sur chaque direction de polarisation.

II Biréfringence

1 Définition

DÉFINITION :

✗ Un matériau est biréfringent s'il présente une **anisotropie optique** sur la célérité des ondes électromagnétiques qui le traversent.
✗ Le **quartz, le ruban adhésif** sont des matériaux **biréfringents**.
✗ Dans un matériau biréfringent, il existe deux directions particulières = **les lignes neutres** que l'on notera (OX) et (OY)
✗ Si une OPPH polarisée suivant $\vec{u}_x$ se propage dans un cristal biréfringent, la vitesse de phase est $c_x = \frac{c}{n_x}$
✗ Si une OPPH polarisée suivant $\vec{u}_y$ se propage dans un cristal biréfringent, la vitesse de phase est $c_y = \frac{c}{n_y}$
✗ si $n_y < n_x$ alors $c_x < c_y$, (OY) est l'**axe rapide** et (Ox) est l'**axe lent**.

Soit $\vec{E}_i$ le champ à l'entrée de la lame $(z = 0)$, $\vec{E}_t$ le champ après (en $z = e$) :

$$\vec{E}_i = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \varphi) \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{E}_t = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - n_x k_0 e) \\ E_{0y}\cos(\omega t - n_y k_0 e - \varphi) \\ 0 \end{vmatrix}$$

On pose

$$\boxed{\phi = n_x k_0 e - n_y k_0 e = \frac{2\pi (n_x - n_y) e}{\lambda_0}}$$

On fait un changement d'origine des temps, on retient :

$$\vec{E}_i = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \varphi) \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{E}_t = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \varphi + \phi) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Savoir démontrer №4 : Déphasage et axe lent

Pour une lame quelconque φ, l'amplitude suivant l'axe **lent va sortir en retard** par rapport à l'axe rapide.
Une lame ajoute un Déphasage de $+\phi > 0$ sur l'axe rapide

$$\vec{E}_i = \begin{vmatrix} E_0\cos(\omega t) \\ E_1\cos(\omega t + \Psi) \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{E}_t = \begin{vmatrix} E_{\text{lent}} = E_0\cos(\omega t) \\ E_{\text{rapide}} = E_1\cos(\omega t + \Psi + \phi) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Propriété à connaître

2 Lames à retard de phase

Nom de la lame	Déphasage	Différence de marche induite
Lame **biréfringente**	$\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$	δ
Lame **demi-onde**	$\phi = \pi$	$\delta = \frac{\lambda_0}{2} + p\lambda$
Lame **quart-onde**	$\phi = \frac{\pi}{2}$	$\delta = \frac{\lambda_0}{4} + p\lambda$

⚠ ATTENTION...

Les lames ne sont opérationnelles que pour une longueur d'onde donnée (et quasi-opérationnelles dans un petit domaine centré sur cette valeur).

3 Lame demi-onde

Une lame demi-onde retarde la composante du champ électrique selon l'axe lent de π par rapport à celle de l'axe rapide.

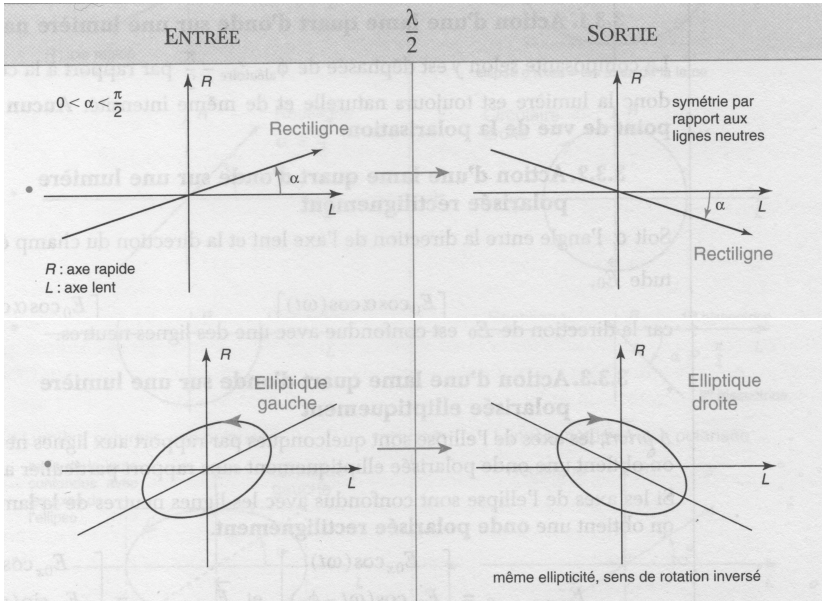
✗ Action sur une lumière polarisée elliptiquement :

$$\vec{E}_i = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \varphi) \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{E}_t = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t) \\ -E_{0y}\cos(\omega t - \varphi) \\ 0 \end{vmatrix}$$

✗ Action sur une lumière polarisée rectilignement :

$$\vec{E}_i = \begin{vmatrix} E_0\cos i\cos(\omega t) \\ E_0\sin i\cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{E}_t = \begin{vmatrix} E_0\cos i\cos(\omega t) \\ -E_0\sin i\cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

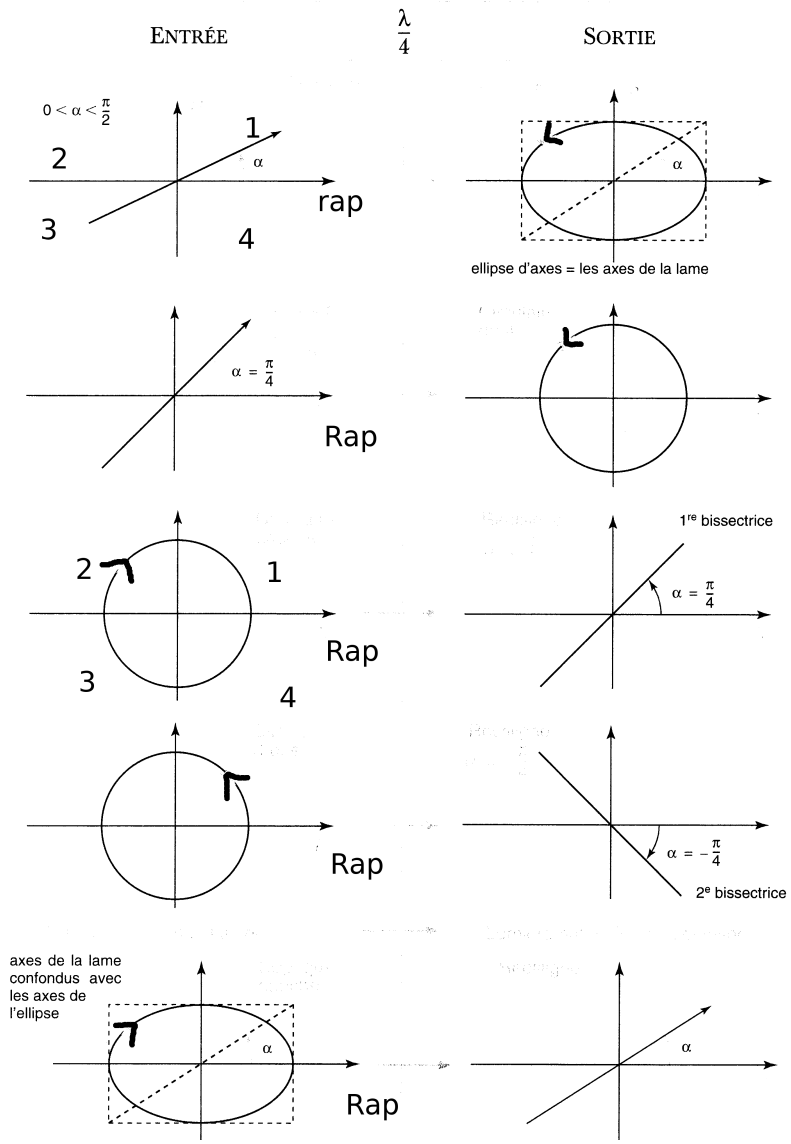
Lame $\lambda/2$		
Non Polarisée	$\rightarrow$	Non polarisée
Rectiligne	$\rightarrow$	Rectiligne symétrique
Elliptique Gauche	$\rightarrow$	Elliptique Droite



4 Lame quart d'onde

Lame $\lambda/4$		
Non Polarisée	$\rightarrow$	Non polarisée
Rectiligne $\alpha \in]0, \pi/2[$	$\rightarrow$	Elliptique Droite
Rectiligne $\alpha = \pi/4$	$\rightarrow$	Circulaire Droite
Rectiligne $\alpha \in]-\pi/2, 0[$	$\rightarrow$	Elliptique Gauche
Rectiligne $\alpha = \pi/4$	$\rightarrow$	Circulaire Gauche
Elliptique	$\rightarrow$	Rectiligne

Tableau récapitulatif lame quart d'onde



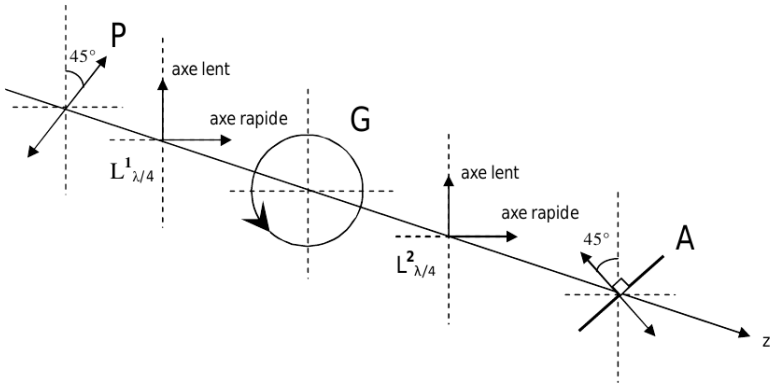
DÉFINITION :

On choisit un repère **orthonormé** $Oxyz$ ou z est la direction de propagation de la lumière.
On nomme les cadrans $1, 2, 3$ et 4 dans le repère Oxy.

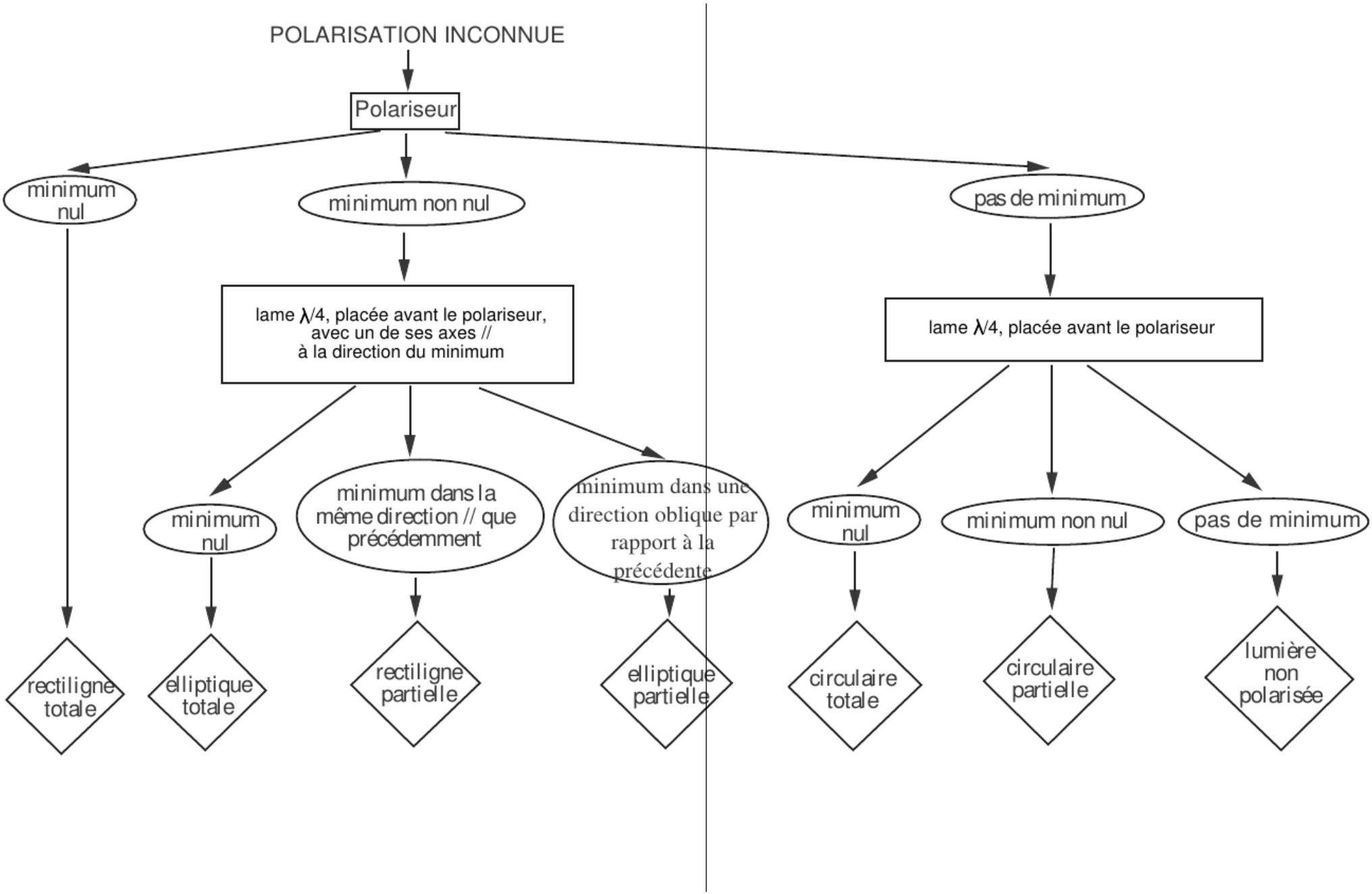
Savoir démontrer №5 : Lame lambda / 4

$$\text{Pol 1-3 à 45} \ + \frac{\lambda}{2} \rightarrow \text{CG} \qquad \text{CG} \ + \frac{\lambda}{2} \rightarrow \text{Pol 2-4 à 45}$$

$$\text{Pol 2-4 à 45} \ + \frac{\lambda}{2} \rightarrow \text{CD} \qquad \text{CD} \ + \frac{\lambda}{2} \rightarrow \text{Pol 1-3 à 45}$$



III Analyse de la polarisation


POLARISATION INCONNUE
Polariseur
minimum nul
minimum non nul
pas de minimum
lame λ/4, placée avant le polariseur, avec un de ses axes // à la direction du minimum
lame λ/4, placée avant le polariseur
minimum nul
minimum dans la même direction // que précédemment
minimum dans une direction oblique par rapport à la précédente
minimum nul
minimum non nul
pas de minimum
rectiligne totale
elliptique totale
rectiligne partielle
elliptique partielle
circulaire totale
circulaire partielle
lumière non polarisée

Chapitre G7 : Pression de radiation

I Pression de radiation dans un métal

On considère un conducteur réel de conductivité γ situé dans l'espace $z > 0$, on se place dans l'ARQS.

Une onde incidente $\overrightarrow{E}_i = E_0 \exp i(\omega t - kz)\,\overrightarrow{u}_x$ se propage dans le vide et atteint le plan $z = 0$.

1. Montrer que l'onde transmise a la forme :

$$\overrightarrow{E}_t = \underline{t} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\overrightarrow{u}_x$$

$$\underline{t} = \frac{2}{1 + \frac{kc}{\omega}}$$

2. Calculer la moyenne temporelle de la force de LAPLACE exercée sur le conducteur.
3. Par définition la pression de radiation est la moyenne de la norme de cette force par unité de surface. Donner la pression de radiation, on supposera que $\underline{t} \simeq \frac{2\omega}{\underline{k}c}$.

Réponse :

1. *Le champ électrique, se propageant dans un conducteur ohmique dans le domaine basses fréquences, pour lequel l'ARQS et l'hypothèse d'électroneutralité sont vérifiées, satisfait l'équation aux dérivées partielles*

$$\triangle \overrightarrow{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Cette équation constitue une ***équation de diffusion****.*

Remarque :

*Par application de la loi d'*OHM*, on obtient de même*

$$\triangle \overrightarrow{j} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t}$$

et une équation analogue pour le champ magnétique, en calculant $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}\right)$

$$\triangle \overrightarrow{B} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

Cela donne la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = -i\omega\mu_0\gamma_0$$

On appelle ***épaisseur (ou profondeur) de peau*** *la quantité*

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$$

homogène à une longueur.

En conséquence, $\overrightarrow{\underline{k}} = \pm\frac{1-i}{\delta}\overrightarrow{u}_z$*. On choisit le signe + pour une propagation suivant les z croissants.*

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{k}} = \frac{1-i}{\delta}\overrightarrow{u}_z}$$

On trouve donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{E}}_t = E_{t0} e^{-\frac{z}{\delta}} \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\overrightarrow{u}_x}$$

On peut calculer le champ magnétique, en écrivant la relation de structure en notation complexe :

$$\overrightarrow{\underline{B}}_t = \frac{\underline{k} \wedge \overrightarrow{\underline{E}}_t}{\omega}$$

On trouve donc

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{B}}_t = E_{t0}\frac{\underline{k}}{\omega} e^{-\frac{z}{\delta}} \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\overrightarrow{u}_y}$$

Pour évaluer $E_{t0} = tE_0$*, il faudrait étudier la continuité de* $\overrightarrow{E}$ *et* $\overrightarrow{B}$ *en* $z = 0$ *(pas de courant surfacique, les courants sont volumiques).*

$$E_i(0) + E_r(0) = E_t(0) \qquad 1 + \underline{r} = \underline{t}$$

$$B_i(0) + B_r(0) = B_t(0) \qquad \frac{1}{c} - \frac{\underline{r}}{c} = \frac{\underline{k}}{\omega}\underline{t}$$

On en déduit

$$\boxed{\underline{t} = \frac{2}{1 + \frac{kc}{\omega}}}$$

2. *Dans le conducteur on peut calculer la densité volumique de courant avec la loi d'Ohm locale*

$$\overrightarrow{j} = \gamma_0 \overrightarrow{E}$$

Soit :

$$\overrightarrow{j} = \gamma_0 E_{t0} e^{-\frac{z}{\delta}} \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \overrightarrow{u}_x$$

La force de Laplace *sur un volume* $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}S\mathrm{d}z$ *est* $\mathrm{d}^3\overrightarrow{F} = \overrightarrow{f}_v \mathrm{d}\tau = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}\mathrm{d}\tau$.

⚠ Attention… *Terme non linéaire, il faut donc revenir aux écritures réelles ou évaluer uniquement la puissance moyenne.*

$$\left\langle \overrightarrow{f}_v \right\rangle = \frac{1}{2} Re\left(\overrightarrow{j} \wedge \left(\overrightarrow{B}\right)^*\right) = \frac{\gamma_0 E_0^2 \underline{t}\underline{t}^*}{2\omega} Re\left(\underline{k}\right) e^{-2\frac{z}{\delta}} \overrightarrow{u}_z$$

On intègre sur z pour avoir la force totale sur la surface $\mathrm{d}S$ *:*

$$\left\langle \mathrm{d}^2\overrightarrow{F} \right\rangle = \int_0^\infty \left\langle \overrightarrow{f}_v \right\rangle \mathrm{d}z\mathrm{d}S$$

On remarque que $\int_0^\infty e^{-2\frac{z}{\delta}} = \frac{\delta}{2}$ *et* $Re\left(\underline{k}\right) = \frac{1}{\delta}$*, donc*

$$\left\langle \mathrm{d}^2\overrightarrow{F} \right\rangle = \frac{\mathrm{d}S\gamma_0 \left|\underline{t}^2\right|}{4\omega} E_0^2 \overrightarrow{u}_z$$

3. *On constate que la force calculée est normale au métal, elle peut être considéré comme une force surfacique.*

La pression de radiation est $P_r = \frac{\langle \mathrm{d}^2 F \rangle}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}S\gamma_0 \left|\underline{t}^2\right|}{4\omega} E_0^2$
On a $\underline{t} \simeq \frac{2\omega}{\underline{k}c}$ *et* $\left|\underline{k}^2\right| = \frac{2}{\delta^2}$ *, on a* $\left|\underline{t}^2\right| = \frac{2\omega^2\delta^2}{c^2}$.
On trouve en remplaçant :

$$\boxed{P_r = \epsilon_0 E_0^2}$$

Pour une OPPH, $\left\langle \overrightarrow{\Pi}_i . \overrightarrow{u}_z \right\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c}$

On note $\mathcal{P}_{surf} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c}$ *la puissance incidente.*
La pression de radiation est proportionnelle à la puissance surfacique de l'OPPH incidente.

$$\boxed{P_r = \frac{2\mathcal{P}_{surf}}{c}}$$

II Pression de radiation dans un métal parfait

Dans le métal parfait, le courant est surfacique.

1. On considère une onde incidente, $\overrightarrow{E}_i = E_0 \overrightarrow{u}_x \exp i\left(\omega t - kz\right)$ sur un métal parfait placé en $z = 0$.
La continuité de la composante tangentielle du champ implique que l'onde réfléchie est :

$$\overrightarrow{E}_r = -E_0 \overrightarrow{u}_x \exp i\left(\omega t + kz\right)$$

2. On trouve, par application des relations de structure

$$\overrightarrow{B}_i = \frac{E_0}{c} \exp i\left(\omega t - kz\right) \overrightarrow{u}_y \qquad \overrightarrow{B}_r = \frac{E_0}{c} \exp i\left(\omega t + kz\right) \overrightarrow{u}_y$$

3. Les relations de passage en $z = 0$ donnent le courant surfacique :

$$\overrightarrow{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \exp i(\omega t) \overrightarrow{u}_x$$

4. Un élément $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ de la surface en $z = 0$ reçoit la force Laplace :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{j}_s \wedge \overrightarrow{B}\left(0\right) \mathrm{d}S$$

⚠ Attention… Terme non linéaire, il faut revenir à la notation réelle

⚠ Attention… Faut-il prendre $B\left(0^+\right)$ ou $B\left(O^-\right)$? On peut montrer qu'il faut en fait prendre la valeur moyenne !!
La démonstration vient de l'étude des forces sur une la surface dont il faut enlever la partie sur laquelle la force est calculée.

Donc

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2\left(\omega t\right) \ \mathrm{d}S\overrightarrow{u}_z \rightarrow \left\langle \mathrm{d}\overrightarrow{F} \right\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \ \mathrm{d}S\overrightarrow{u}_z$$

C'est une force dirigée suivant $\overrightarrow{u}_z$, c'est une force pressante.

5. On peut définir la pression de radiation : $P_r = \frac{\langle \mathrm{d}F \rangle}{\mathrm{d}S}$. On a donc

$$P_r = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0 E_0^2$$

6. D'autre part, la puissance surfacique incidente est $\mathcal{P}_{\text{surf}} = \left\langle \overrightarrow{\Pi}_i . \overrightarrow{u}_z \right\rangle$

   Pour une OPPH, $\left\langle \overrightarrow{\Pi}_i . \overrightarrow{u}_z \right\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \epsilon_0 E_0^2$

   On trouve donc la relation

$$\boxed{P_r = \frac{2\mathcal{P}_{\text{surf}}}{c}}$$

III Pression de radiation comme choc de photons

On peut voir la pression de radiation, comme une succession de chocs provoqués par les photons incidents sur le métal.

Chaque photon transporte de la quantité de mouvement et la cède au milieu (s'il est abosrbé). Par conservation de la quantité de mouvement, le milieu reçoit donc une force proportionnelle à la surface exposée. La force par unité de surface est la **pression de radiation**.

Cette pression est à la base du principe de déplacement des voiles solaires.

1. Pour le photon, particule sans masse, de fréquence ν, son énergie E et sa quantité de mouvement p vérifié :

$$\boxed{E = h\nu} \text{ et } \boxed{p = \hbar k = \frac{h\nu}{c}}$$

   On peut donc exprimer la relation simple entre l'énergie et la quantité de mouvement :

$$\boxed{E = pc}$$

2. Soit ϕ, le flux de photons par unité de surface : c'est le nombre de photons qui arrivent par unité de temps et de surface, ϕ s'exprime en $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$.

   Pendant $\text{d}t$, l'énergie qui arrive sur une surface $\text{d}S$ est $\text{d}E = \phi h\nu \ \text{d}S\text{d}t$.

   La puissance qui arrive sur la surface S est donc

$$\text{d}\mathcal{P} = \frac{\text{d}E}{\text{d}t} = \phi h\nu \ \text{d}S$$

   On peut donc définir la puissance surfacique incidente :

$$\mathcal{P}_{\text{surf}} = \phi h\nu$$

3. La quantité de mouvement qui arrive sur la surface $\text{d}S$ pendant $\text{d}t$ est $\text{d}p = \phi\hbar k \ \text{d}S\text{d}t$

   La force reçue par la plaque est donc :

$$\text{d}F = \frac{\text{d}p}{\text{d}t} = \phi\hbar k \ \text{d}S = \phi\frac{h\nu}{c} \ \text{d}S$$

4. La pression de radiation est donc :

$$P_r = \frac{\text{d}F}{\text{d}S} = \phi\frac{h\nu}{c}k$$

   On a donc :

$$P_r = \frac{\mathcal{P}_{\text{surf}}}{c}$$

   $\mathcal{P}_{\text{surf}}$ est la puissance surfacique reçue par la plaque.

5. Si le photon est absorbé par la plaque alors cette formule est valable.

$$\boxed{P_{r-\text{absorbé}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{surf}}}{c}}$$

   Si le photon est réfléchi le transfert de quantité de mouvement est double, et l'on trouve

$$\boxed{P_{r-\text{réfléchi}} = 2\frac{\mathcal{P}_{\text{surf}}}{c}}$$

   Si l'incidence se fait avec un angle i (et photon absorbé), alors

$$\boxed{P_{r-\text{réfléchi}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{surf}}\cos^2 i}{c}}$$

   En effet le flux est multiplié par $\cos i$ et la quantité de mouvement est également multipliée par $\cos i$.

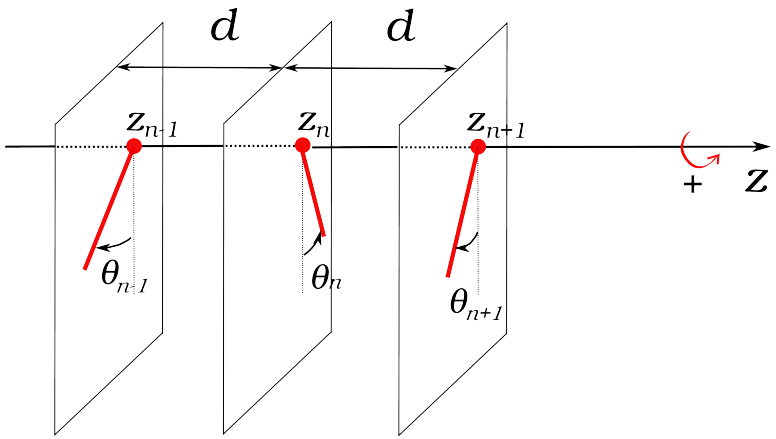
IV Lévitation

Pour que la sphère lévite, il faut équilibre le poids avec la pression de radiation multipliée par la surface.

Chapitre G8 : Compléments

I Exemple de la chaine de pendules

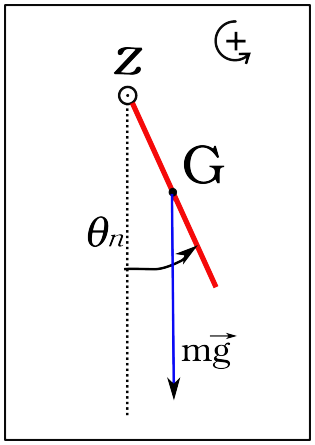
1 Présentation



- ✗ On considère n pendules de torsion couplés, distants de d : $z_n = nd$. Soit ℓ la longueur des pendules.
- ✗ Chaque pendule est une barre pesante de masse m, de centre de gravité G et de moment d'inertie J par rapport à l'axe (Oz)
- ✗ On note C la raideur des fils de torsion tel que le couple de rappel élastique du pendule $n+1$ sur le pendule n est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{n+1\to n} = C\left(\theta_{n+1} - \theta_n\right)\overrightarrow{u}_z$$

- ✗ On tient compte d'un moment de frottement $\overrightarrow{\mathcal{M}_n} = -\alpha\dot{\theta}_n\overrightarrow{u}_z$. α dépend des caractéristiques de la barre.
- ✗ α est le coefficient de frottement et C est la constante de torsion.
- ✗ On suppose que le poids est appliqué au centre de gravité de la barre G.



2 Equation différentielle

Savoir démontrer №1 : Théorème du moment cinétique

On applique le TMC sur le pendule n situé en $z_n = nd$, on trouve

$$J\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = C\left(\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}\right) - \frac{1}{2}mg\ell\sin\theta_n - \alpha\dot{\theta}_n$$

Savoir démontrer №2 : Equation de propagation d'une onde de torsion

Dans le cadre de **l'approximation des petits angles**

$$\sin\theta_n \simeq \theta_n \quad \text{on rappelle que} \quad \cos\theta_n \simeq 1 - \frac{\theta_n^2}{2}$$

et de **l'approximation des milieux continus**, on introduit $\theta(z,t)$, une fonction $\mathscr{C}_2$ telle que

$$\forall n, \forall t, \theta(nd,t) = \theta_n(t)$$

En utilisant un développement de Taylor de la fonction $\theta(z,t)$:

$$\theta((n-1)d) = \theta(nd) - d\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{nd} + \frac{d^2}{2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)_{nd}$$

$$\theta((n+1)d) = \theta(nd) + d\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{nd} + \frac{d^2}{2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)_{nd}$$

on trouve alors l'équation :

$$\boxed{J\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - Cd^2\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = -\frac{1}{2}mg\ell\theta - \alpha\frac{\partial\theta}{\partial t}}$$

3 Solution en OPPH*, relation de dispersion

Savoir démontrer №3 : Relation de dispersion

Soit une pseudo-OPPH, notée OPPH* telle que

$$\underline{\theta} = \underline{\theta_0} \exp\left[i\left(\omega t - \underline{k} z\right)\right]$$

Avec

$$\boxed{\underline{k} \in \mathbb{C}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega \in \mathbb{R}^+}$$

On trouve la relation de **dispersion** :

$$\underline{k}^2 = \frac{J}{Cd^2}\omega^2 - \frac{mg\ell}{2Cd^2} - i\omega\frac{\alpha}{Cd^2}$$

On pose :

$$\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega)$$

4 Absorption

Savoir démontrer №4 : Facteur k"

✗ La solution s'écrit donc sous la forme

$$\theta(z,t) = A\exp\left(k'' z\right)\cos\left(\omega t - k' z\right)$$

✗ Le terme $\exp\left(k'' z\right)$ traduit **l'amortissement** si $k'' < 0$
✗ Le terme $\exp\left(k'' z\right)$ traduit l'**amplification** si $k'' > 0$
✗ En cas d'amortissement, on pose

$$\boxed{\delta = -\frac{1}{k''}}$$

C'est la **distance caractéristique de l'amortissement** (**épaisseur de pénétration des ondes**).

5 Milieu dispersif

Définitions :

✗ Soit v_φ, la **vitesse de phase**,

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k'}}$$

✗ Lorsque v_φ dépend de ω, le milieu est **dispersif** :

$$\boxed{v_\varphi(\omega) \rightarrow \text{milieu dispersif}}$$

6 Etude des cas limites

6.a Haute fréquence

Savoir démontrer №5 : Cas haute fréquence

✗ Si on ne conserve que le terme en ω^2, on retrouve une équation de d'Alembert
✗ Un DL au premier ordre permet d'obtenir la relation suivante :

$$\underline{k} = \omega\sqrt{\frac{J}{Cd^2}}\left(1 - i\frac{\alpha}{2J\omega}\right)$$

— $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{Cd^2}{J}} = \text{Cte}$, donc le milieu est **non dispersif**.
— $k'' < 0$, le milieu est **absorbant**.

6.b Frottements négligeables

Savoir démontrer №6 : Sans frottement

✗ Si on néglige les frottements, on trouve l'équation de Klein-Gordon

$$\boxed{\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = -\omega_c^2\theta}$$

avec $c = \sqrt{\frac{Cd^2}{J}}$ et $\omega_c = \sqrt{\frac{mg\ell}{2J}}$

✗ La relation de dispersion est alors

$$k^2c^2 = \omega^2 - \omega_c^2$$

Savoir démontrer №7 : Cas limites

✗ Pour $\omega > \omega_c$ alors

1. $v_\varphi = f(\omega)$, donc le milieu est **dispersif**.
2. $k \in \mathbb{R}$ donc **non absorbant**.

✗ Pour $\omega < \omega_c$ alors $k = ik''$

1. v_φ ne peut pas être définie = pas de propagation.
2. $k = \pm\sqrt{\frac{\omega_c^2-\omega^2}{c^2}}$ donc

$$\theta = A\exp(k''z)\cos\omega t$$

C'est une onde **stationnaire évanecente**.

Chapitre G9 : Bilan - Ondes

I Structure des Ondes

1 Ondes longitudinales et transversales

✗ **Ondes longitudinales** : ondes sonores, ondes de compression sur une chaine de ressorts.

✗ **Ondes transversales** : ondes mécaniques sur une corde, à la surface de l'eau, ondes électromagnétiques dans le vide, dans un milieu LHI.

2 Ondes progressives et stationnaires

L'équation de D'ALEMBERT admet deux types de solutions :

$$\psi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \Leftrightarrow \quad \text{Ondes progressives}$$

$$\psi(x,t) = A\cos(kx+\varphi_x)\cos(\omega t+\varphi_t) \Leftrightarrow \quad \text{Ondes stationnaires}$$

L'amplitude des ondes stationnaires dépend des conditions aux limites : pour certaindes valeurs de ω, on peut observer une résonace des ondes stationnaires.

3 Structure d'une OPPH - Impédance

On écrit les grandeurs sous la forme

$$\psi = A\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \varphi\right)$$

Lors de la propagation d'une onde, différentes quantité se propagent (v, p, μ pour les ondes sonores, E, B pour les OEM).

L'impédance est un coefficient, noté $\underline{Z}$, caractéristique du milieu et qui relie deux de ces grandeurs. L'impédance est en général complexe, indiquant ainsi le **déphasage entre les grandeurs**.

	Corde	Ondes sonores	OEM vide	OEM diélectrique
Relation OPP	$T_y = Z\dot{y}$	$\underline{p} = \underline{Z}v$	$\overrightarrow{B} = \frac{Z}{c}\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{E}$	$\overrightarrow{B} = \frac{Z}{c}\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{E}$
Célérité	$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_s}}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$	$v_\varphi = \frac{c}{\mathcal{R}e(n)}$
Valeur Z	$Z = \sqrt{\mu T}$	$\underline{Z} = \pm\mu_0 c$	$Z = 1$	$\underline{Z} = \underline{n}$

4 Equations des ondes

Sonores	**Emag Vide**	**Ohmique ARQS**
$\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{v}_1}{\partial t} \simeq -\overrightarrow{\text{grad}}\,p_1$	$\text{div}\,\overrightarrow{E} = 0$	$\text{div}\,\overrightarrow{E} = 0$
$\frac{\partial\mu_1}{\partial t} + \mu_0\text{div}\,(\overrightarrow{v}_1) \simeq 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$
$\mu_1 = \mu_0\chi_s p_1$	$\text{div}\,\overrightarrow{B} = 0$	$\text{div}\,\overrightarrow{B} = 0$
	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\gamma\overrightarrow{E}$
$\triangle p_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$	$\overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$	$\overrightarrow{\triangle}E = \mu_0\gamma\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$
$\omega = \pm kc$	$\omega = \pm kc$	$k^2 = -i\omega\gamma\mu_0$

Plasma	**Dielectrique** $\underline{n}$	**Coaxial**
$\text{div}\,\overrightarrow{E} = 0$	$\text{div}\,\varepsilon_0\underline{\varepsilon_r}\overrightarrow{E} = 0$	$\Lambda\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}$
$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$	$\Gamma\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}$
$\text{div}\,\overrightarrow{B} = 0$	$\text{div}\,\overrightarrow{B} = 0$	
$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\underline{\gamma}\overrightarrow{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varepsilon_r\overrightarrow{E}}{\partial t}$	
$\overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \mu_0\underline{\gamma}\overrightarrow{E}$	$\overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{E} - \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$	$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$
$k^2c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$	$k^2c^2 = \underline{n}^2\omega^2$	$k^2c^2 = \omega^2$

II Coefficient de reflexion en amplitude et en puissance

1 Amplitudes

On étudie la propagation d'une onde plane incidente, scalaire, progressive l'amplitude s'écrit $A_i = \underline{A_{i0}} \exp j\,(\omega t - kx)$

L'onde réfléchie a l'expression $A_r = \underline{A_{r0}} \exp j\,(\omega t + kx)$

L'onde transmise a l'expression $A_t = \underline{A_{t0}} \exp j\,(\omega t - kx)$

Les amplitudes $\underline{A_{i0}}, \underline{A_{i0}}$ et $\underline{A_{i0}}$ sont des nombres complexes, si on tient compte d'un éventuel déphasage entre elles.

2 Conditions aux limites

✗ **Obstacle fixe en $x = a$**

1. Corde vibrante : Point où la corde est attachée : $\rightarrow \forall t,\ y(a,t) = 0$
2. Onde sonore : Mur immobile : $\rightarrow \forall t,\ \overrightarrow{v}(a,t) = \overrightarrow{0}$
3. Ondes EM : Métal parfait : $\rightarrow \forall t,\ \overrightarrow{E}(a,t) = \overrightarrow{0}$
4. Ondes EM : Métal : Conditions de passage pour $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$.

✗ **Extrémité libre en $x = a$**

1. Corde vibrante : la corde est libre : $\rightarrow \forall t,\ \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{a,t} = 0$
2. Onde sonore : tube ouvert : $\rightarrow \forall t,\ p_1(a,t) = 0$

✗ **Changement de milieu en $x = a$**

1. Corde vibrante : passage d'un milieu de tension T_1 à un milieu de tension T_2.
   On a la continuité de y :
   $$\boxed{y_1(a^-) = y_2\left(a^+\right)}$$
   RFD sur une tranche de taille dx, de masse nulle
   $$\boxed{T_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} = T_2 \left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{a,t}}$$
2. Onde sonore : passage d'un fluide d'impédance Z_1 à un fluide Z_2.
   Continuité du débit :
   $$\boxed{v_1 S_1 = v_2 S_2 \rightarrow v_1 = v_2 \ \text{ si } S_1 = S_2}$$
   RFD sur une tranche de masse nulle, donne
   $$p_1 S_1 = p_2 S_2$$
3. Ondes EM : Passage d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2
   Continuité des champs électromagnétiques :
   $$\boxed{\overrightarrow{E}_1 = \overrightarrow{E}_2} \quad \boxed{\overrightarrow{B}_1 = \overrightarrow{B}_2}$$

3 Energie et Puissance

3.a Densité volumique d'énergie

On nomme e, la densité volumique d'énergie ; elle se décompose en deux termes comme le montre le tableau suivant :

e	Ondes sonores		OEM vide	
	d'énergie cinétique	$\frac{1}{2}\mu v^2$	d'énergie électrique	$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$
	d'énergie potentielle	$\frac{1}{2}\chi_s p^2$	d'énergie magnétique	$\frac{1}{2\mu_0} B^2$
	$e = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}\chi_s p^2$		$e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$	

3.b Vecteur densité surfacique de puissance

Pour les ondes, on peut définir le vecteur $\overrightarrow{\Pi}$: le flux de $\overrightarrow{\Pi}$ à travers une surface S représente la puissance qui traverse S.

$\overrightarrow{\Pi}$	Ondes sonores	OEM vide
	$\overrightarrow{\Pi} = p\overrightarrow{v}$	$\overrightarrow{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\left(\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}\right)$

Pour les OEM, $\overrightarrow{\Pi}$ est le vecteur de Poynting.

Pour le calcul de la puissance, il faut exprimer les différents champs avec la notation réelle.

3.c Puissance moyenne

Les fréquences des ondes sont en général très grandes, on calcule alors la puissance moyenne de l'onde (moyenne temporelle) :

$$\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \overrightarrow{\Pi}.dt$$

Il est intéressant de noter que l'on peut garder la notation complexe pour le calcul de la puissance moyenne :

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(p\vec{v}^*\right) \quad \text{et} \quad \left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathcal{R}e\left(\vec{E}\wedge\vec{B}^*\right)$$

où $\vec{v}^*$ est le complexe conjugué de $\vec{v}$.

4 Coefficient de réflexion et transmission en amplitude

Pour une OPP, se réfléchissant sur une surface, en $x = 0$, séparant deux milieux d'impédance Z et Z'. L'onde incidente se propage du milieu Z vers le milieu Z'.

Par définition

$$\boxed{\underline{r} = \frac{\underline{A_{r0}}}{\underline{A_{i0}}} = \frac{Z - Z'}{Z + Z'}}$$

De même

$$\boxed{\underline{t} = \frac{\underline{A_{t0}}}{\underline{A_{i0}}} = \frac{2Z}{Z + Z'}}$$

4.a Coefficient de réflexion et transmission en puissance

Par définition pour une onde incidente suivant $\vec{u}_x$:

$$R = \frac{\left\langle \vec{\Pi}_r.\left(-\vec{u}_x\right)\right\rangle}{\left\langle \vec{\Pi}_i.\left(\vec{u}_x\right)\right\rangle} = |r|^2$$

De même

$$T = \frac{\left\langle \vec{\Pi}_t.\left(\vec{u}_x\right)\right\rangle}{\left\langle \vec{\Pi}_i.\left(\vec{u}_x\right)\right\rangle} = |\underline{t}|^2\,\frac{\mathcal{R}e\left(Z'\right)}{\mathcal{R}e\left(Z\right)}$$

5 Transmission d'un milieu

Le coefficient de transmision en amplitude t, est en général, une fonction de la pulsation ω.

On retrouve donc le comportement décrit en électronique :

- pour $\omega > \omega_0$, $t(\omega) \simeq 0$ et $\omega < \omega_0$, $t(\omega) \simeq t_0 \to$ le système est un filtre passe-bas
- pour $\omega > \omega_0$, $t(\omega) \simeq t_0$ et $\omega < \omega_0$, $t(\omega) \simeq 0 \to$ le système est un filtre passe-haut.
- pour $\omega \notin [\omega_1, \omega_2]$, $t(\omega) \simeq 0 \to$ le système est un filtre passe-bande.

On peut également le gain en décibel

$$G_{dB} = 20\log|t|$$

On remarque que pour $Z = Z'$, $G_{dB} = 10\log T$

La pulsation de coupure ω_c à -3 dB correspond à

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dB-Max} - 3 \Leftrightarrow |t(\omega)| = \frac{|t(\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

III Ondes, ondes planes et OPPH

1 Définition

Définition :

- ✗ Une **onde plane est une solution de l'équation de d'Alembert telle qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ unitaire tel que l'amplitude du champ soit uniforme dans tout plan perpendiculaire à $\vec{u}$ à tout instant.**
- ✗ La surface d'onde est le plan perpendiculaire à $\vec{u}$. L'amplitude du champ doit être constante dans ce plan.
- ✗ Une onde est progressive si $\vec{r}$ et t apparaissent sous la forme $\vec{k}.\vec{r} \pm \omega t$.

- ✗ $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - k.z)$ est une onde plane.
- ✗ $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha x}\cos(\omega t - k.z)$ n'est pas une onde plane.

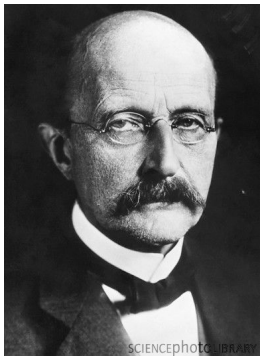
Propriété à connaître

2 OPP et OPPH

Champ	$\vec{E} = \vec{E}_+(t - z/c)$	$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kz)}$	$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}z)}$
$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{\partial}{\partial t}$	$j\omega.$	$j\omega.$
$\vec{\nabla}.$	$\vec{\nabla}. = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{u}_x}{\partial t}$	$\vec{\nabla}. = -j\vec{k}.$	$\vec{\nabla}. = -j\vec{\underline{k}}.$
Rel Stru	$\vec{B} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}$	$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$	$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$
Poynting	$\vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{u}_x = u_{em}c\vec{u}_x$		

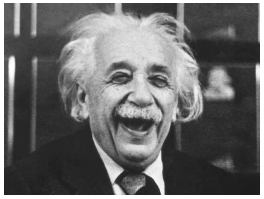
Partie H : Laser

Chapitre H1 : Oscillateur Optique



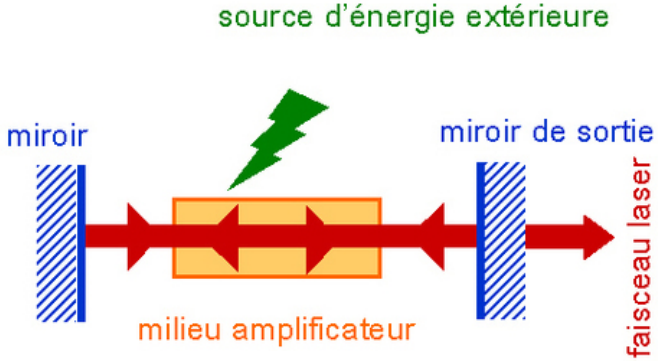
(1858 - 1947)

PARTIE H : LASER
H-1 : Oscillateur
H-2 : Faisceau Laser



Einstein (1879-1955)

LASER : **L**ight **A**mplifier by **S**timulated **E**mission or **R**adiation



I Interaction Lumière-matière

PLANCK ET EINSTEIN

- ✗ Max Planck : quantification des échanges $h = 6,62.10^{-34}$ J.s
- ✗ Einstein : quantification de l'énergie (et pas uniquement des échanges).

Relation d'Einstein pour un sytème à deux niveaux d'énergie non dégénérés.

$$E_2 - E_1 = h\nu_0$$

1 Energie

L'énergie atomique s'exprime en électronVolt avec 1 eV $= 1,6.10^{-19}$J

On peut retenir pour un photon

$$E_{\text{eV}} = \frac{1,24}{\lambda_{\mu\text{m}}}$$

DÉFINITION :

- ✗ Soit $u_\nu(\nu)$ la densité **spectrale en fréquence de l'énergie volumique du champ électromagnétique**.
- ✗ Si cette énergie est produite par un système à l'équilibre thermique, la loi de PLANCK donne :

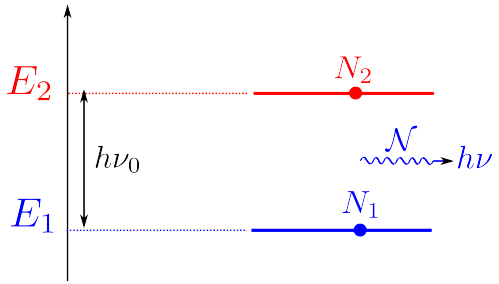
$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

2 Population sur les différents niveaux

DÉFINITION :

- ✗ Soit N la densité volumique d'atomes. Chaque atome est un système à deux niveaux. $[N] = L^{-3}$
- ✗ Soit N_1 la **population** du niveau 1, 'est la desnité volumique d'atomes dans le niveau 1.

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}$$



- ✗ On note $\mathcal{N}$ la densité volumique de photons.
- ✗ Un niveau énergétique est dit dégénéré lorsque plusieurs états d'un même système possèdent la même énergie tout en différant les uns des autres par d'autres caractères. Ici on considère des niveaux non dégénérés.

Savoir démontrer №1 : Régime stationnaire et équilibre thermodynamique

En régime stationnaire $\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = 0$
A l'équilibre thermodynamique, le rapport des populations est donné par loi de Maxwell-Boltzman

$$\frac{N_1}{N_2} = \exp\frac{E_2 - E_1}{k_B T}$$

Application 1 : Ordre de grandeur

λ	T en K	$\frac{N_1}{N_2}$	Niveau prédominant
600 nm	$T = 300$ K	$\simeq 10^{-36}$	Fondamental = 1
70 μm	$T = 300$ K	$\simeq 1$	1=2
7 μm	$T = 3000$ K	thermique	Fondamental

3 Probabilité de transition

Définition :

Pour un système à deux niveaux, on peut définir

- ✗ N_i la population d'atomes dans un niveau considéré
- ✗ $p_{i\to j}$ la probabilité de transition par unité de temps de i vers j
- ✗ $\mathrm{d}p_{i\to j} = p_{i\to j}\mathrm{d}t$ la probabilité de transition pendant $\mathrm{d}t$
- ✗ Soit $\mathrm{d}N_{i\to j}$ le nombre d'atomes qui passent de i vers j pendant $\mathrm{d}t$.

On a pour un processus donné

$$\boxed{\mathrm{d}N_{i\to j} = \pm\, N_i\, \mathrm{d}p_{i\to j} = \pm\, N_i\, p_{i\to j}\, \mathrm{d}t}$$

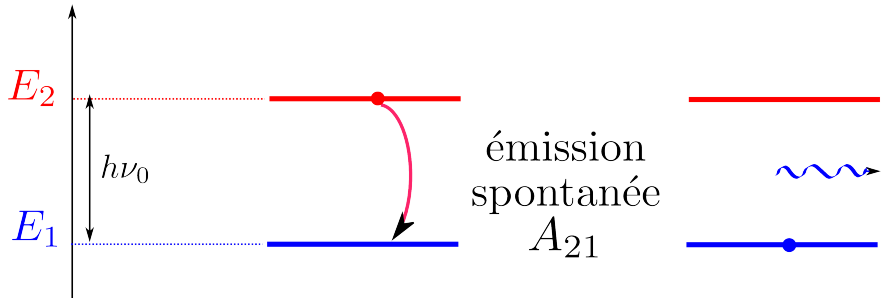
II Coefficients d'Einstein

Coefficients d'Einstein

Dans un des ses célèbres articles intitulé "De la nature quantique du rayonnement" publié en 1917, Einstein fut le premier à éclaircir un certain nombre de questions obscures pour l'époque concernant l'interaction entre matière et rayonnement. l'introduction comporte une phrase qu'on peut traduire comme suit : " À partir d'hypothèses sur l'absorption et l'émission de rayonnement par les molécules, j'ai pu montrer que les molécules ayant une distribution quantique d'états en équilibre thermique, sont en équilibre avec un rayonnement de Planck ; de cette façon, la formule de Planck peut être obtenue de manière extrêmement simple et générale."

1 Emission spontanée dans un système à deux niveaux

Définition :



— Un atome sur le niveau le plus énergétique peut se désexciter en emettant un photon d'énergie $h\nu$: c'est **l'émission spontanée**.
— La probabilité de cet évenement par unité de temps est

$$\boxed{p_{\text{sp}} = A_{21}} \quad \rightarrow \quad [A_{21}] = \text{s}^{-1}$$

$$\frac{\text{d}N_2}{\text{d}t} = -A_{21}\ N_2$$

✗ direction aléatoire → **source isotrope**
✗ fréquences ν distribuées autour de ν_0 → **polychromatique**
✗ polarisation aléatoire → source **non polarisée** (lumière naturelle)
✗ phase aléatoire → 2 sources seront **incohérentes**

Propriétés à connaître

Savoir démontrer №2 : Durée de vie de l'état excité

Soit $N_2(t)$ la population de l'état 2, on suppose que $N_2(0) = N$
On a

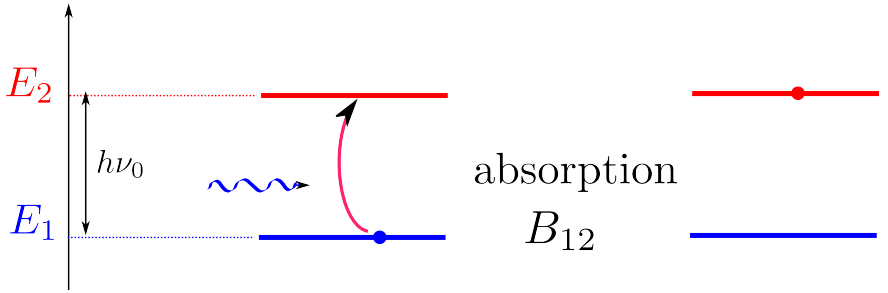
$$N_2 = Ne^{-A_{21}t}$$
$$N_1 = N\left(1 - e^{-A_{21}t}\right)$$

La durée de vie de l'état excité dans ce modèle est

$$\boxed{\tau = \frac{1}{A_{21}}}$$

2 Absorption dans un système à deux niveaux

Définition :



✗ Un atome sur le fondamental peut absorber un photon pour passer dans l'état excité : c'est **l'absorption**
✗ La probabilité de cet évenement par unité de temps est

$$\boxed{p_{\text{abs}} = u_\nu(\nu_0)\ B_{12}} \quad \rightarrow \quad [B_{12}] = \text{J}^{-1}\text{L}^3\text{s}^{-2}$$

$$\frac{\text{d}N_2}{\text{d}t} = u_\nu B_{12}\ N_1$$

Application 2 : Un autre mécanisme ...

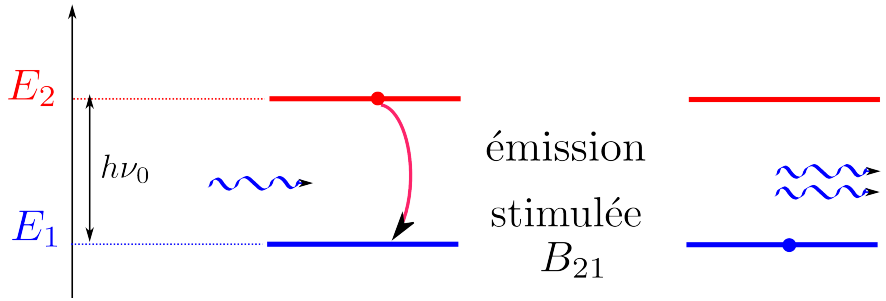
Si on ne tient compte que de l'émission spontanée et de l'absorption, et que l'on se place à l'équilibre (stationnaire) $\frac{\text{d}N_1}{\text{d}t} = 0$:

$$\frac{N_1^{\text{eq}}}{N_2^{\text{eq}}} = \frac{A_{21}}{u_\nu B_{12}}$$

Cette relation n'est pas compatible avec la loi de Maxwell-Boltzman ; il faut un autre mécanisme ; c'est l'idée d'Einstein.

3 Emission stimulée dans un système à deux niveaux

Définition :



— Un atome excité peut se désexciter en présence d'un photon résonant : c'est l'émission **stimulée ou induite**
— Il repart deux photons "jumeaux" : même longueur d'onde, en phase, même polarisation et même impulsion.
— La probabilité de cet évenement par unité de temps est

$$\boxed{p_{\rm sp} = B_{12}\ u_\nu\,(\nu_0)} \quad \rightarrow \quad [B_{12}] = \mathrm{J^{-1}L^3s^{-2}} \rightarrow \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -u_\nu B_{21}\ N_2$$

Les deux photons émis ont
✗ des directions identiques → **source directionnelle**
✗ des fréquences identiques ν_0 → **monochromatique**
✗ la même polarisation
✗ la même phase → source **cohérente**

Propriétés à connaître

4 Bilans de population

✗ Les coefficients d'Einstein sont indépendants de u ils apparaissent lors de l'interaction d'un champ avec un atome.
✗ Le passage du fondamental vers le niveau excité se fait par le seul phénomène de l'absorption :

$$\left[\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right]_{1\to 2} = u_\nu\ B_{12}\ N_1$$

Propriété à connaître

✗ Le passage du niveau excité vers le fondamental se fait par deux phénomènes :

$$\left[\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right]_{2\to 1} = A_{21}\ N_2 + u_\nu\ B_{21}\ N_2$$

Savoir démontrer №3 : Bilans sur les populations

En tenant compte des trois phénomènes, on a :

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -A_{21}\ N_2 - u_\nu\ B_{21}N_2 + u_\nu\ B_{12}N_1$$

Ce sont les "rate equations".

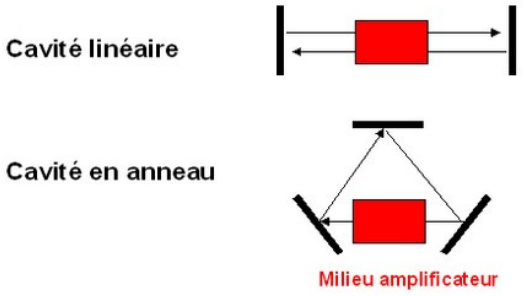
Savoir démontrer №4 : Equilibre thermodynamique

Pour un système en régime permanent et à l'équilibre thermodynamique, on a On en déduit que

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega_0^3}{2\pi^2c^3} \qquad B_{12} = B_{21}$$

III Principe du LASER

1 Cavité laser



Savoir démontrer №5 : Modes propres d'une cavité laser

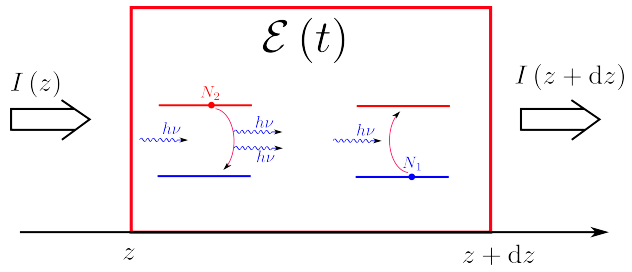
On étudie un milieu optique d'indice n limité par deux miroirs constitués de métaux parfaits. Soit L la longueur de la cavité.
Les modes propres de la cavité sont donnés par

$$L = p\frac{\lambda}{2} \rightarrow \nu_p = p\frac{c}{2nL}$$

Les fréquences propres sont séparées de $\Delta\nu_c = \frac{c}{2nL}$

2 Bilan sur les photons

- ✗ Bilan d'énergie sur les photons d'un cylindre élémentaire $(S, \mathrm{d}z)$ dans le milieu amplificateur.
- ✗ Soit $\mathrm{d}\mathcal{E}(t) = uS\mathrm{d}z$ l'énergie des photons.
- ✗ Soit π_{pertes} la puissance volumique des pertes de photons. Ce terme tient compte de toutes les pertes sauf l'absorption.
- ✗ Le flux de lumière incident est $I(z) = \langle \Pi(z) \rangle$, le flux sortant est $I(z + \mathrm{d}z) = \langle \Pi(z + \mathrm{d}z) \rangle$. Si c est la vitesse de groupe $I = cu$.
- ✗ On néglige l'émission spontanée, on admet $B_{12} = B_{21}$.



Savoir démontrer №6 : Bilan d'énergie

1. L'énergie $\mathcal{E}$ des photons est liée à la densité volumique d'énergie : $\mathcal{E} = uS\mathrm{d}x$
   Si c est la vitesse de groupe $I = cu$, soit
   $$\mathrm{d}\mathcal{E} = \frac{I}{c}S\mathrm{d}z$$
2. L'énergie qui entre pendant $\mathrm{d}t$ est $I(z)\,S\mathrm{d}t$, l'énergie sortante est $I(z + \mathrm{d}z)\,S\mathrm{d}t$
3. L'énergie créée par émission stimulée et absorption pendant $\mathrm{d}t$ est
   $$\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{créee}} = B_{21}(N_2 - N_1)\,u_\nu \hbar\omega S\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$
   On suppose une largeur spectrale des photons de $\Delta\nu$, on a donc $u \simeq u_\nu\,\Delta\nu$, $\Delta\nu \ll \nu$.

Le bilan s'écrit au final

$$\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} = \gamma I - \pi_{\text{pertes}}$$

Avec $\gamma = B_{21}(N_2 - N_1)\frac{\hbar\omega}{c\Delta\nu}$

3 Necessité d'une inversion de population

Savoir démontrer №7 : Inversion de population

En régime stationnaire, à l'équilibre thermodynamique $N_2 < N_1$, donc

$$\frac{\partial I}{\partial z} < 0$$

Le milieu est amplificateur si il doit y avoir une inversion de la population : $N_2 > N_1$.

Pompage optique

Un procédé souvent utilisé est le **pompage optique** inventé par A. Kastler pour lequel il a reçu le prix nobel de Physique en 1966. Il faut utiliser des atomes à 3 niveaux, faire absorber jusqu'à une niveau 3 plus énergétique avec un taux de peuplement supérieur au taux de désexcitation du niveau 2.
Une méthode plus classique est de faire passer une décharge électrique dans le gaz pour porter les atomes dans le niveau 3.

4 Condition d'accrochage

Savoir démontrer №8 : Condition d'accrochage ou demarrage

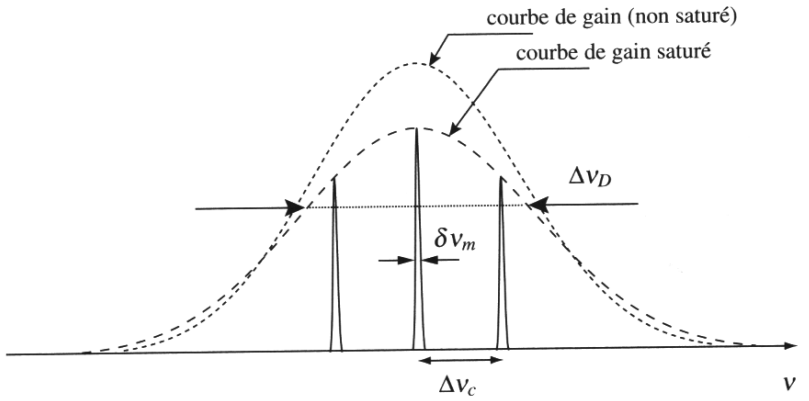
On intègre le bilan d'énergie sur z entre le début et la fin de la cavité : $I(0) = I(L)$, donc
On pose $I_m = \frac{1}{L}\int_0^L I\mathrm{d}z$ et $\pi_m = \frac{1}{L}\int_0^L \pi_{\text{pertes}}\mathrm{d}z$
On suppose que les pertes moyennes sont liées à I_m : $\pi_m L = \alpha I_m$

$$\frac{L}{c}\frac{\mathrm{d}I_m}{\mathrm{d}t} = (\gamma L - \alpha) I_m$$

- ✗ Démarrage des oscillations : $\gamma L > \alpha$ + condition initiale (émission spontanée).
- ✗ En fonctionnement saturation du gain : $\gamma_s L = \alpha$

Propriétés à connaître

5 Etude spectrale



Sur ce schéma trois modes sont possibles.

1. $\Delta\nu_D \simeq$ GHz largeur de la courbe de gain, fixée par l'effet Doppler
2. $\Delta\nu_c \simeq 500$ MHz pour $L = 30$ cm.
3. $\delta\nu_m \simeq 8$ MHz dépend du facteur de qualité de la cavité voir Fabbry-Perrot.

6 Puissance

Définition :

On choisit le modèle suivant :
- ✗ Relaxation par émission spontanée du niveau 1 avec τ_1, du niveau 2 avec τ_2.
- ✗ Pompage vers le niveau 2 avec un taux de pompage S_2.
- ✗ Absorbtion et emission stimulée entre 1 et 2.

Savoir démontrer №9 : Evolution de l'inversion de population

On trouve les équations d'évolutions :

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = S_2 - \frac{1}{\tau_2}N_2 - (N_2 - N_1)\,B_{21}u_\nu$$
$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau_1}N_1 + (N_2 - N_1)\,B_{21}u_\nu$$

En régime permanent, on trouve

$$\Delta N = N_2 - N_1 = S_2\,\frac{\tau_2 - \tau_1}{1 + (\tau_2 + \tau_1)\,\frac{B_{21}}{c\Delta\nu}I}$$

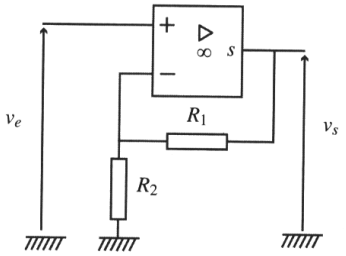
Pour S_2 donné ΔN et donc γ diminuent si I augmente.

Propriété à connaître

IV Analogie avec l'oscillateur électronique

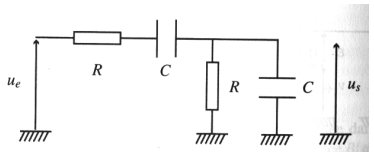
1 Oscillateur à pont de Wien

Savoir démontrer №10 : Amplification



La fonction de transfert est $G = 1 + \frac{R_1}{R_2}$

Savoir démontrer №11 : Filtrage

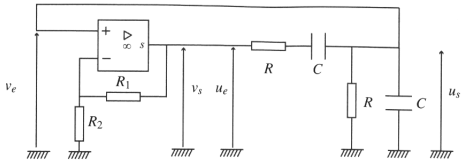


Pour le filtre de Wien

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Avec $H_0 = \frac{1}{3}$, $Q = \frac{1}{3}$ et $x = RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0}$

Savoir démontrer №12 : Condition d'oscillation du système bouclé



On compare l'entrée à la sortie du système : les signaux doivent être égaux en amplitude et phase.

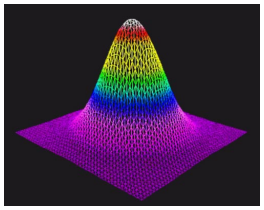
$$G_0\underline{H} = 1$$
$$x = 1 \qquad G_0 H_0 = 1$$

2 Analogies

Propriété	Wien	Laser
C. Initiale	Fluctuation élec.	emission spontanée
Gain	AO Non inverseur	emission stimulée
Filtrage	Filtre Wien	gain + cavité
Saturation	Entenson dans AO	baisse de inversion population
Condition Oscillation	$G\underline{H} = 1$ $\omega = \omega_0$	$\gamma_s L = \alpha$, $\nu = p\Delta\nu_c$

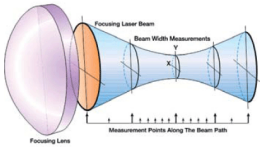
Dans tous les cas la saturation est due à un effet non linéaire.

Chapitre H2 : Faisceau laser



Profil gaussien

Partie H : Laser
H-1 : Oscillateur
H-2 : Faisceau Laser



waist laser

- ✗ Une source laser présente par rapport aux autre sources de lumière une forte **monochromaticité**, donc une grande cohérence temporelle (typiquement $\ell_c \simeq 30$ cm)
- ✗ une forte **directivité**, donc une grande cohérence spatiale
- ✗ et une forte **puissance** (typiquement de $1000 W.m^{-2}$), comparable au rayonnement solaire sur Terre.

Propriétés à connaître

I Mode fondamental Gaussien

1 Solution à l'équation d'Helmholtz

Savoir démontrer №1 : Solution

Coordonnées cylindriques d'axe (Oz), l'amplitude de l'onde électromagnétique s doit vérifier :
On a

$$\triangle s = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

On cherche s sous la forme

$$s(M,t) = \underline{a}(M)\, e^{i\omega t}$$

On pose $k = n\frac{\omega}{c}$, $\underline{a}$ vérifie l'équation de Helmholtz :

$$\triangle \underline{a} + k^2 \underline{a} = 0$$

La solution est le faisceau **gaussien** :

$$s = a_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}\right) \exp i(\omega t + \varphi(z))$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

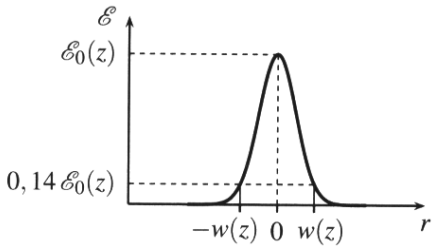
- ✗ w_0 est le rayon de pincement (ou de ceinture) du faisceau : c'est le **waist**.
- ✗ $\boxed{z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}}$ est la **longueur de Rayleigh**.

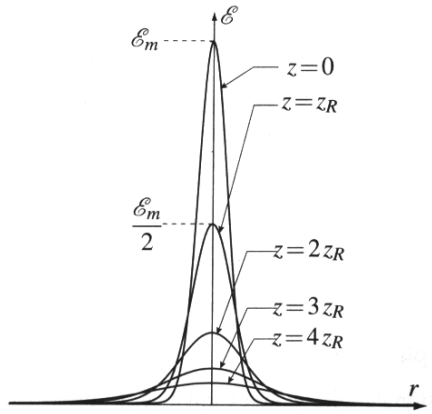
2 Intensité

Savoir démontrer №2 : Intensité du faisceau gaussien

$$I = I_0 \left[\frac{w_0}{w(z)}\right]^2 \exp\left(-2\frac{r^2}{w(z)^2}\right)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \text{ et } z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

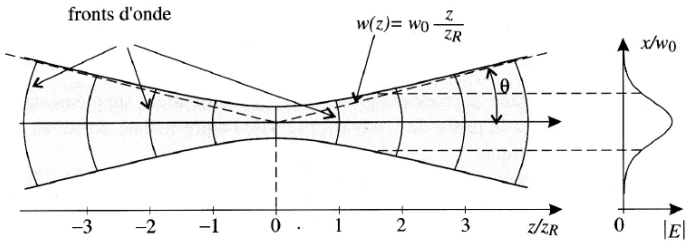


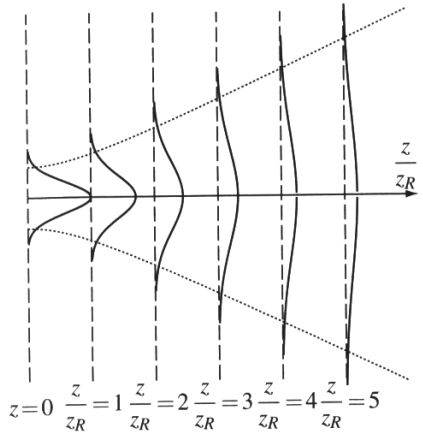


A retenir :

- ✗ **L'intensité est contenue principalement dans le waist.**
- ✗ **l'intensité au centre diminue rapidement avec la distance**

3 Profil longitudinal - divergence





Savoir démontrer №3 : Col ou waist

La fonction $w(z)$ est une hyperbole car

$$\left(\frac{w}{w_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_R}\right)^2 = 1$$

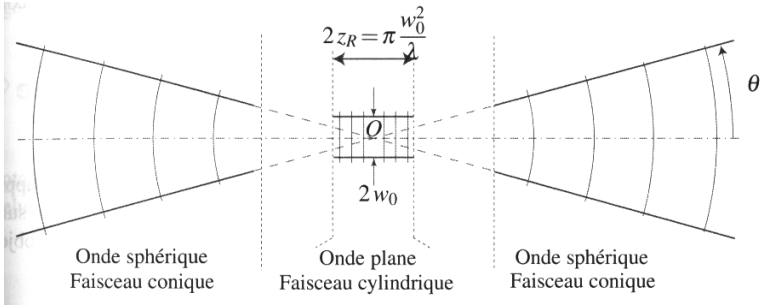
Le rayon w est minimal en 0, c'est le col (waist).

Savoir démontrer №4 : Cas limites

- ✗ Si $|z| \ll z_R \to w \simeq w_0$ **faisceau parallèle = cylindrique**
- ✗ $w(z_R) = \sqrt{2} w_0$
- ✗ Si $|z| \gg z_R \to w \simeq w_0 \frac{z}{z_R}$ **faisceau conique de sommet O**

$$\tan\theta \simeq \theta = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

$\theta_{\text{Diffraction}} = 0,61\frac{\lambda}{a}$. Dans ce cas, on peut considérer que la lumière laser est "auto-diffractée" par une fente de taille $a \simeq 0,61\pi w_0$



4 Longueur de Rayleigh

Savoir démontrer №5 : Faisceau divergent

Dans le cas, $|z| \gg z_R, \theta = \simeq \frac{\lambda}{\pi w_0}$

$$\boxed{z_R \simeq \frac{\lambda}{\pi\theta^2}}$$

Le faisceau est d'autant plus divergent que z_R est petit.

Application 1 : Ordre de grandeur

Laser	λ	θ	w_0	z_R
He-Ne	633 nm	$\theta \simeq 1,5$mrad	140 μm	90 mm
Pointeur laser	700 nm	$\theta \simeq 0,2$mrad	1 mm	4,5 m

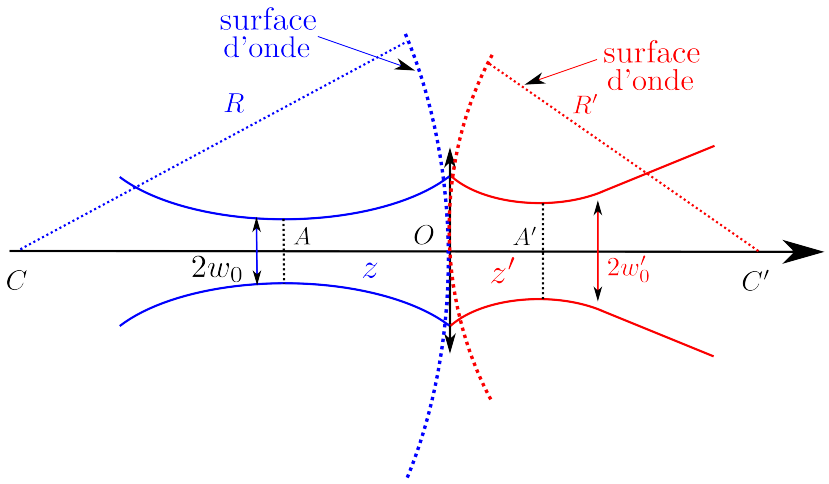
5 HP - Phase du faisceau gaussien

$$\varphi = -kz - k\frac{r^2}{2R(z)} - \Phi(z) \quad \text{avec} \quad R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$$

1. $\varphi_1 = -kz$ retard de phase du à la propagation (onde plane)
2. $\varphi_1 = -k\frac{r^2}{2\left(z+\frac{z_R^2}{z}\right)}$ **courbure de la surface d'onde.**
3. Φ : phase de Gouy écart à l'onde plane et sphérique.

II Image d'un faisceau gaussien par une lentille

1 Relation de conjugaison



Définitions :

- Soit O le **centre** de la lentille.
- On note $z = \overline{OA}$ et $z' = \overline{OA'}$ la position du **waist objet** et du **waist image**.
- Soit $R = \overline{CO}$ le rayon de courbure de la surface d'onde incidente au niveau de la lentille et $R' = \overline{C'O}$ le rayon de courbure de la surface d'onde émergente au niveau de la lentille.
- w_0 et w_0' les waist objet et image.

$$\boxed{-\frac{1}{R'} + \frac{1}{R} = \frac{1}{f'}}$$

Savoir démontrer №6 : Relation de conjugaison - HP

$$R = -\left(z + \frac{z_R^2}{z}\right) \qquad R' = -\left(z' + \frac{z_R'^2}{z'}\right)$$

On trouve donc la relation :

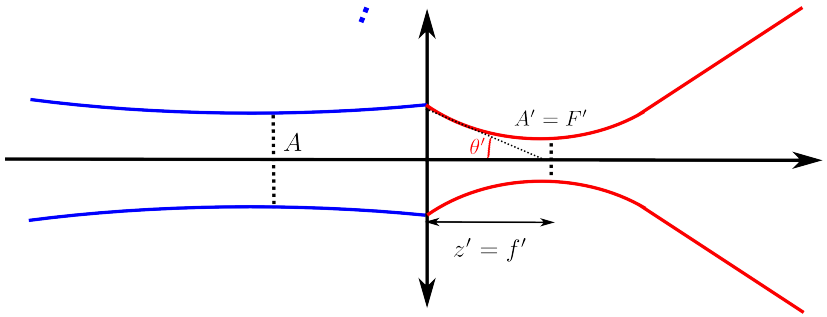
$$z' = f'\frac{z(f'+z) + z_R^2}{(f'+z)^2 + z_R^2} \qquad \frac{w_0'}{w_0} = \frac{f'}{\sqrt{(f'+z)^2 + z_R^2}}$$

Remarque :

- le waist image n'est pas l'image géométrique du waist objet.
- Les centres de courbure des ondes incidentes et émergentes sont conjugués.
- Les lois de l'optique géométrique doivent être appliquées pour la lumière diffusée par un objet éclairé par un laser.

2 Onde plane

Onde quasi-plane → waist approx. au foyer image



Savoir démontrer №7 : Convergence d'un faisceau

Dans la situation $(z, f' \ll z_R)$, on trouve le **résultat approché**

$$\boxed{z' = f'} \text{ et } \boxed{w'_0 = \frac{\lambda f'}{\pi w_0}}$$

Réponse :

Cette "démonstration" est au programme.

1. *Faisceau incident converge vers le foyer → onde conique émergente.*
2. *Loi du retour inverse permet d'utiliser le résultat :* $\theta' = \frac{\lambda}{\pi w'_0}$.
3. *D'autre part* $\theta' \simeq \tan\theta' \simeq \frac{\omega_0}{f'}$

On en déduit

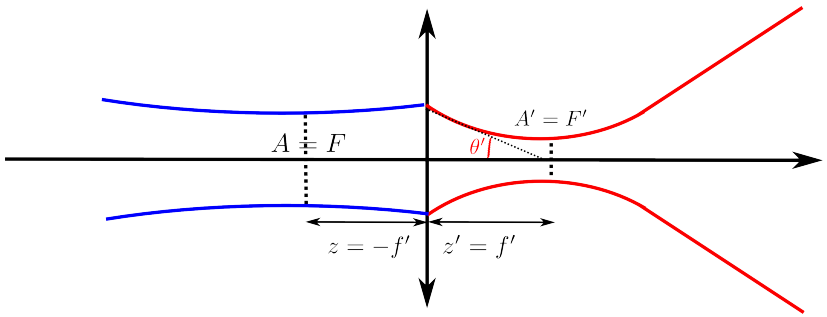
$$\boxed{w'_0 = \frac{\lambda f'}{\pi w_0}}$$

Application 2 : Rayon minimal

L'ordre de grandeur du rayon minimal que l'on peut obtenir est $w'_0 \simeq \lambda$

3 waist dans le plan focal

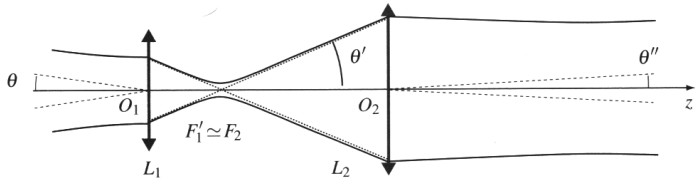
waist au foyer objet → waist au foyer image



Si $f' \gg z_R$ (faisceau incident divergent) , ce système permet d'agrandir le faisceau.

4 Système afocal

Savoir démontrer №8 : Grossissement



On utilise le montage afocal suivant : deux lentilles convergentes telles que $F'_1 = F_2$.
Optique classique :

1. Elargisseur de faisceau : $\frac{R_2}{R_1} = \frac{f'_2}{f'_1}$.
2. Grossissement : $G = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{f'_1}{f'_2}$

Optique Gaussienne :

1. Rapport des waist : $\frac{w''_0}{w_0} == \frac{f'_2}{f'_1}$.
2. On trouve

$$\boxed{G = \frac{\theta''}{\theta} = \frac{f'_1}{f'_2}}$$

Sur le schéma ce montage permet de **réduire l'ouverture d'un faisceau**.

Partie I : Quantique

Chapitre 11 : Effet Tunnel

Schrödinger (1887 - 1961)

PARTIE I : QUANTIQUE

I-1 : Introduction

I-2 : Equation de Schrödinger

I-3 : Effet Tunnel

Heisenberg (1901-1976)

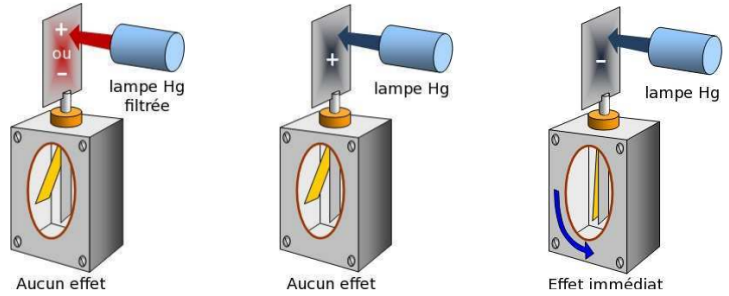
I Dualité onde-particule

1 Lumière

INTERFÉRENCES OPTIQUES : ONDE

Young - Fresnel (1822) interférence, diffraction, polarisation : la lumière est une onde électromagnétique transverse

Application 1 : Effet Photoélectrique : particule



DÉFINITION :

✗ L'énergie d'un photon est

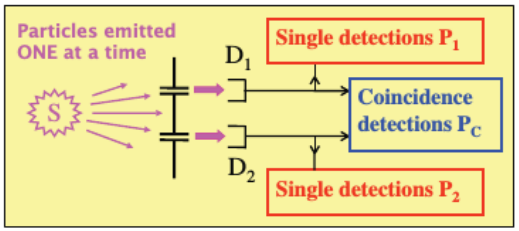
$$E = h\nu = \hbar\omega$$

✗ On peut définir la quantité de mouvement d'un photon :

$$p_{\text{photon}} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

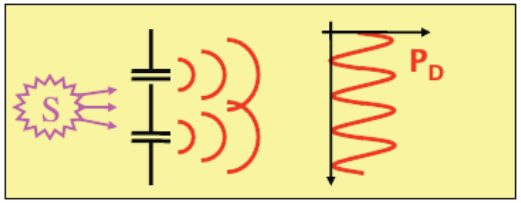
Première expérience

Comportement **corpusculaire**: photon unique passe soit par T_1 soit par T_2.



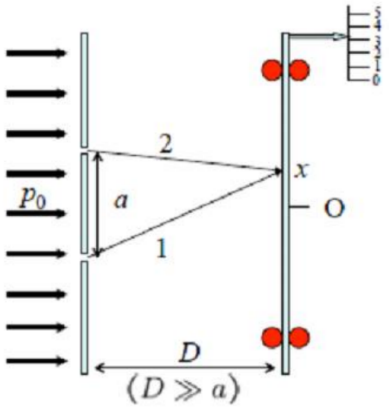
Deuxième expérience

Comportement **ondulatoire**: photon unique passe par les deux trous simultanément.



Application 2 : Détecter l'origine des particules ?

On réalise l'expérience des fentes d'Young avec des particules incidentes de quantité de mouvement $\overrightarrow{p}_0$. On souhaite observer des franges et essayer de déterminer si les particules (quantons) sont passées par la fente supérieure ou inférieure. Pour cela on mesure la quantité de mouvement verticale laissée par les quantons sur l'écran. En effet un quanton issu de la fente du bas (fente 1) va donner la quantité de mouvement verticale



$$p_{1x} = p_0 \sin\theta_1 = p_0 \frac{x + \frac{1}{2}a}{D}$$

alors qu'un photon issu de la fente du haut (fente 2) va céder :

$$p_{2x} = p_0 \sin\theta_2 = p_0 \frac{x - \frac{1}{2}a}{D}$$

Montrer que cette mesure provoque un brouillage de la figure d'interférences.

Réponse :

Les quantons ont une quantité de mouvement p_0, on peut donc leur associer la longueur d'onde de De Broglie *: $\lambda = \frac{h}{p_0}$.*

Il faut un appareil de mesure qui soit capable de mesurer la quantité de mouvement avec une grande précision, en particulier il doit faire la différence entre p_{1x} et p_{2x}, il doit donc pouvoir mesurer des impulsions inférieures à $\Delta p_x = p_{1x} - p_{2x} = \frac{p_0 a}{D}$.

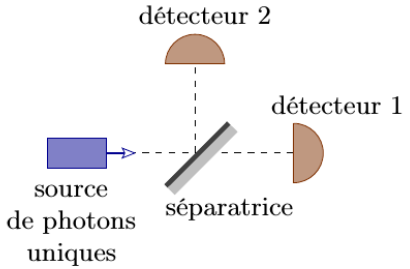
En vertu du principe d'incertitude d'Heisenberg*, cela donne une incertitude sur la mesure de la position :*

$$\Delta x \simeq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{\hbar D}{2p_0 a} = \frac{\lambda \hbar D}{2ha} = \pi \frac{\lambda D}{a}$$

L'incertitude est supérieure à l'interfrange $i = \frac{\lambda D}{a}$, il y a brouillage.

Confirmation de la nécessité du photon 1977

L'expérience de Kimble, Dagenais et Mandel (1977) repose sur le principe suivant : une source émet des photons un à un (séparément !) en direction d'une lame semi-réfléchissante (séparatrice) et des détecteurs ultra-sensibles sont chargés de relever des signaux dans les directions des faisceaux transmis et réfléchi.



Un détecteur de coïncidences (relié aux deux détecteurs précédents) montre que les impulsions n'arrivent jamais simultanément sur les détecteurs 1 et 2 (même en jouant raisonnablement sur la différence des chemins optiques). Ceci est en désaccord avec l'aspect ondulatoire de la lumière.

2 Matière

Définition :

- ✗ On dit qu'une particule est placée dans le potentiel $V(M)$, si son énergie potentielle est $V(M)$.
- ✗ L'énergie d'une particule dans le potentiel $V(M)$ est

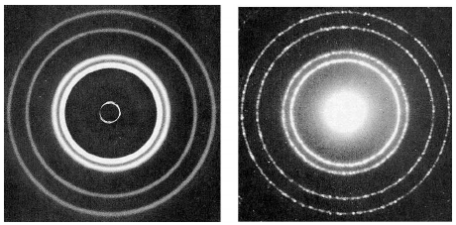
$$\boxed{E = \frac{p^2}{2m} + V}$$

- ✗ On peut définir la longueur d'onde de De Broglie d'une particule :

$$\boxed{\lambda_{DB} = \frac{h}{p}}$$

Application 3 : Diffraction de la matière

1. Peut-on observer la diffraction de grains de poussière de masse $m = 10^{-15}$ kg et de vitesse 1 mm.s^{-1} ?
2. Peut-on observer la diffraction d'électrons accélérés par le une différence de potentiel V ?



La figure de gauche montre la diffraction par des rayons X , à droite diffraction par des électrons sur la même feuille d'aluminium. Pour les rayons X la zone centrale trop brillante a été masquée.

Réponse :

1. *On calcule la logueur d'onde de* De Broglie, $\lambda_{DB} = \frac{h}{mv} = 7.10^{-7} m = 0,7$ *fm.*

   Cette distance est inférieure à la taille d'un nucléon, pas de diffraction observable !

2. *Le théorème de l'énergie cinétique donne :*

$$E_c = \frac{p^2}{2m} = eV$$

. $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}} \simeq \frac{1,23}{\sqrt{V}}$ *(en nm pour* λ *et en Volts pour* V *)*

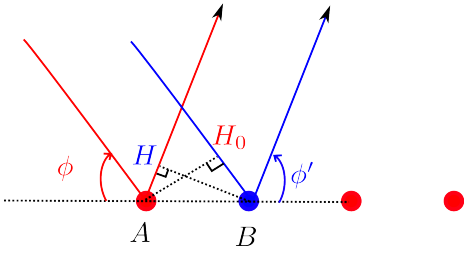
Pour $V \simeq 100\,V$ *on trouve* $\lambda = 0,1$ nm *taille caractéristique des réseaux crsitallins : donc on observe de la diffraction d'électrons par des cristaux.*

Savoir démontrer №1 : Expérience de Davisson et Germer 1927

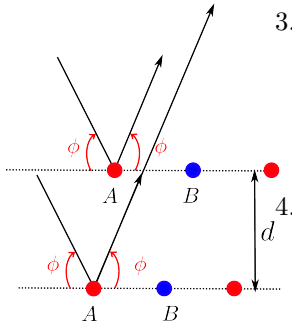
Un faisceau d'électrons accélérés sous $V = 54$ V arrive avec une incidence ϕ sur les plans d'un réseau cristallin de Nickel placé dans le vide. Un détecteur mesure l'intensité diffractée $I(\theta)$.
Après diffusion sur le plan le rayon repart avec un angle ϕ'

1. Le déphasage entre le rayon incident sur B et le rayon incident sur A est

$$\Delta\varphi = \left(\vec{k}_i - \vec{k}\right).\overrightarrow{AB} = BH_0 - AH$$



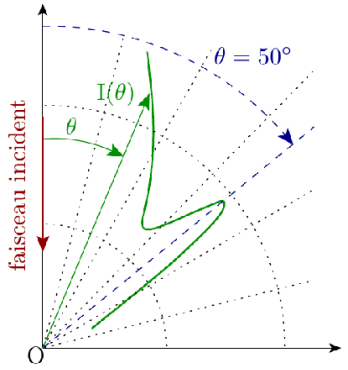
2. Ce déphasage est nul (interférences constructives) pour la réflexion spéculaire ; $\phi = \phi'$. On se place dans cette situation dans la suite.



3. Soit d la distance entre deux plans succéssifs. La relation de Bragg donne la condition d'interférences constructives entre les plans successifs :

$$n\lambda = 2d\sin\phi$$

4. On observe un maximum pour $\theta = 50°$



1. Bragg : $\lambda = 0,16$ nm
2. De Broglie : $\lambda = 0,16$ nm.

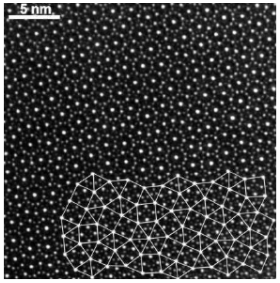
Application 4 : Microscope électronique

Les électrons sont relativistes, leur énergie est donnée par la relation :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = e^2U^2$$

On en déduit

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{\sqrt{\frac{e^2U^2}{c^2} + 2m_e eU}} = 1,6.10^{-12} \text{ m}$$



La résolution typique d'un microscope électronique (ouverture numérique $n \sin\alpha = 5.10^{-3}$) est

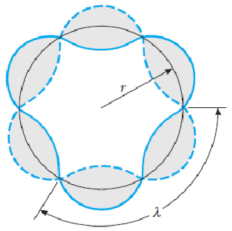
$$d_m = 0,61\frac{\lambda}{n\sin\alpha} = 0,2 \text{ nm}$$

3 Atome

Application 5 : Modèle de Bohr de l'atome d'Hydrogène

Dans le modèle semi-classique de Bohr, on suppose une trajectoire planétaire pour l'électron autour du proton et comme sur une corde, le périmètre est un multiple de λ_{DB} soit

$$2\pi r_n = n\lambda_{DB}$$



cela amène la quantification du moment cinétique de l'électron :

$$L = mrv = n\hbar$$

1. On trouve la quantification du rayon : $r_n = \frac{n^2h^2\varepsilon_0}{me^2\pi} = n^2a_0$
2. Quantification de l'énergie $E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{E_1}{n^2}$
3. L'écart entre les niveaux d'énergie $j \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ d'un atome d'hydrogène est

$$\Delta E = E_j - E_n = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{j^2}\right)$$

$R_H = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3c}$ est la constante de Rydberg, $a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{me^2\pi} = 0,5$ A est le rayon de Bohr.

II Fonction d'onde

1 Probabilité de présence

Définition :

La description de l'état dynamique d'une particule quantique, de masse m, se fait au moyen d'une fonction d'onde $\Psi(M,t)$ qui représente l'amplitude de probabilité de présence. Ainsi $|\Psi|^2$ représente une **densité de probabilité de présence.**
La probabilité de présence de la particule à l'instant t entre x et $x + \mathrm{d}x$ est

$$\mathrm{d}P(x,t) = \Psi\Psi^*\mathrm{d}x = |\Psi|^2\,\mathrm{d}x$$

Propriétés à connaître

- ✗ La fonction est d'onde est normalisée sur le domaine d'étude $\mathcal{D}$

$$\int_{\mathcal{D}} |\Psi(x)|^2\,\mathrm{d}x = 1$$

- ✗ La fonction $\Psi(x,t)$ est **continue, univoque et bornée**.
- ✗ Les dérivées premières spatiales et temporelles sont définies et continues en tous les points où V est continue.

2 Interprétation statistique

- ✗ L'interprétation statistique est due au physicien Born (1926). Une particule quantique est **délocalisée**, elle a une probabilité $|\Psi(x)|^2$ de se trouver à une certaine position.
- ✗ Si on effectue des mesures successives de la position de la particule, on forme la fonction $|\Psi(x)|^2$.

3 Equation de Schrödinger

Définition :

✗ L'équation d'évolution de la fonction d'onde est l'équation de SCHRÖDINGER :

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi + V\Psi}$$

✗ Premier ordre en temps : si on connait $\Psi(M, t=0)$, on peut connaitre $\Psi(M,t)$
✗ L'équation est **linéaire** : on peut utiliser le principe de superposition et **complexe** (i apparait)

Savoir démontrer №2 : Bilan d'énergie - HP

L'équation de SCHRÖDINGER est en fait une écriture de la définition de l'énergie mécanique :

$$E = E_c + E_p = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

On associe les opérateurs suivants :
- $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\times$ est associé à E
- $-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\times$ est associé à E_c
- $V\times$ est associé à E_p

On trouve l'équation de SCHRÖDINGER en multipliant par Ψ la valeur de l'énergie.

4 Equation de Schrödinger stationnaire 1D

DÉFINITION :

✗ On s'interesse à un problème à 1D, donc $\Psi(x,t)$
✗ **Etat stationnaire** : Etat pour lequel la fonction d'onde se met sous la forme

$$\Psi(M,t) = \phi(x)\, g(t)$$

✗ C'est une onde stationnaire.

Savoir démontrer №3 : Condition de normalisation

La condition de normalisation donne la relation :

$$|g(t)|^2 \int_{\mathcal{D}} |\phi(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1$$

✗ Donc $|g(t)|$ est indépendant du temps.
✗ Séparation des variables donc

$$g(t) = g(0)\, e^{-iEt/\hbar}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + V\phi = E\phi$$

C'est l'équation de SCHRÖDINGER **indépendante du temps**.
✗ Finalement $\boxed{\Psi = \phi(x)\, e^{-iEt/\hbar}}$

5 Remarques sur la solution stationnaire

Remarque :

- Physique : Etat stationnaire = indépendant du temps.
- Ondes : $\Psi = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \varphi_x)$
- Quantique : $\Psi = \phi(x)\, e^{-iEt/\hbar}$ et $|\Psi(x,t)|$ est indépendant du temps.

ATTENTION...

Pour une particule libre, on trouve

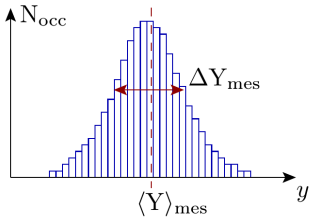
$$\Psi = Ae^{i(px - Et/\hbar)}$$

Ce qui représente une onde progressive du point de vue des ondes (beau piège !).

III Inégalités de Heisenberg

1 Notion d'incertitude sur une mesure

Définition :



✗ L'indétermination ΔY sur une variable Y est associée au fait qu'une mesure de cette variable ne donne pas un résultat certain mais un résultat aléatoire suivant une certaine loi de probabilité. Elle correspond à l'écart type :

$$\Delta Y = \sqrt{\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2}$$

✗ Si on effectue par la pensée une série de mesures de la variable Y , ΔY est l'écart type de la distribution.

✗ Pour une situation discrète, on a

$$\langle Y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i \qquad \Delta Y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [y_i - \langle Y \rangle]^2}$$

✗ Pour une distribution continue , la moyenne se fait sur le domaine $\mathcal{D}_Y$ des valeurs possibles de Y de probabilité $\mathrm{d}P(Y)$:

$$\langle f(Y) \rangle = \int_{\mathcal{D}_Y} f(Y)\, \mathrm{d}P(Y)$$

2 Inégalités d'Heisenberg

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

On trouve parfois

⚠ Attention... $\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar$ $\Delta y \Delta p_y \gtrsim \hbar$ $\Delta z \Delta p_z \gtrsim \hbar$

L'inégalité temps-énergie s'écrit :

$$\Delta t\ \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Savoir démontrer №4 : Energie minimale de confinement

Une particule matérielle **confinée** dans un domaine spatial de taille L_x à une énergie cinétique minimale

$$E_c \geq \frac{\hbar^2}{8mL_x^2}$$

Savoir démontrer №5 : Largeur Naturele

La largeur naturelle d'un photon est la largeur spectrale du photon émis du au principe d'incertitude d'Heinsenberg.

$$\Delta\nu \geq \frac{\tau}{4\pi}$$

3 Exemple de l'oscillateur harmonique

Savoir démontrer №6 : Energie minimale de l'oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique d'énergie à 1D

$$\mathcal{E}_m = \left\langle \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right\rangle$$

On a $\langle x \rangle = 0, \langle p_x \rangle = 0$. Son énergie vérifie

$$\mathcal{E}_m \geq E_m = \frac{\hbar^2}{8mu} + \frac{1}{2}m\omega^2 u$$

La valeur minimale de E_m est atteinte pour $u = \frac{\hbar}{2m\omega}$

$$E_m \geq \frac{\hbar\omega}{2} > 0$$

IV Quantique ou classique ?

1 Action

Définition :

En physique une **action** est homogène au produit énergie $\times$ temps.

$$\begin{aligned}
[\text{action}] &= E \times T \\
[\text{action}] &= p \times L \\
[\text{action}]^2 &= E \times M \times L^2 \\
[\text{action}] &= [\hbar] \\
[\text{action}] &= \left[\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}\right]
\end{aligned}$$

2 Critères

Définition :

Pour savoir si le comportement d'une particule doit être étudié par la mécanique quantique, il faut valider l'un des deux critères :

1. L'action du système :

$$[\text{Action}] \simeq \hbar \rightarrow \text{QUANTIQUE}$$

2. La longueur d'onde de De Broglie :

$$\lambda_{DB} \simeq L \rightarrow \text{QUANTIQUE}$$

3 Principe de correspondance de Bohr

Dans les conditions où les résultats classiques et quantiques doivent concorder, la théorie quantique doit se ramener au résultat classique.

On passe à la limite classique en choisissant $n \rightarrow \infty$

Chapitre I2 : Equation de Schrödinger

De Broglie (1892 - 1987)

Partie I : Quantique
I-1 : Introduction
I-2 : Equation de Schrödinger
I-3 : Effet Tunnel

Niels Bohr (1885-1962)

I Particule libre

1 Etats stationnaires d'une particule libre

Définition :

- ✗ Une particule est **libre** si elle évolue dans le **vide sans interaction** .
- ✗ Cela revient donc à imposer $V(x) = 0$

Savoir démontrer №1 : Equation de Schrödinger indépendante du temps

On cherche une solution stationnaire, donc $\Psi = \varphi e^{-iEt/\hbar}$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = E\varphi$$

1. Si $E < 0$ impossible car divergence.
2. Si $E = 0 \rightarrow \varphi = Ax + B$, impossible.
3. Si $E > 0$, on pose $p = \sqrt{2mE}$

$$\varphi = Ae^{ipx/\hbar} + Be^{-ipx\hbar}$$

Finalement

$$\boxed{\Psi = Ae^{i[px-Et]/\hbar} + Be^{i[-px-Et]/\hbar}}$$

Savoir démontrer №2 : Vitesse de phase et de groupe

La relation de dispersion est

$$p = \sqrt{2mE}$$

La vitesse de phase de cette onde est

$$v_\varphi = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m}$$

La vitesse de groupe est

$$v_g = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} = \frac{p}{m}$$

2 Paquet d'ondes

Savoir démontrer №3 : Paquet d'ondes

Soit

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(p)\, e^{i(px-Et)/\hbar} \mathrm{d}p \quad \text{avec } E(p) = \frac{p^2}{2m}$$

Ce paquet se déplace à la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{p}{m}$$

On retrouve la vitesse du corpuscule : la correspondance est assurée.

3 Vecteur densité de probabilité

Définition :

- ✗ Soit un état stationnaire $\psi(x,t)$ relatif à une particule **non localisée d'impulsion** $\overrightarrow{p}$.
- ✗ Dans ce cas particulier, le vecteur densité de courant de probabilité est $\overrightarrow{J}$ tel que

$$\boxed{\overrightarrow{J}(M) = |\Psi|^2 \frac{\overrightarrow{p}}{m} = |\Psi|^2 \frac{\hbar \overrightarrow{k}}{m}}$$

- ✗ Cette relation , uniquement valable pour une particule non localisée, est un cas particulier de la formule générale (HP) donnée ci-dessous mais à connaître par analogie.

Attention...

La particule est non localisée : $\Delta x \to \infty$ donc $\Delta p \to 0$, la quantité de mouvement est parfaitement définie.

	vitesse	densité	densité de courant
Diffusion de particules	$\overrightarrow{v}$	n	$\overrightarrow{j} = n\overrightarrow{v}$
Conduction électrique	$\overrightarrow{v}$	$\rho = nq$	$\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{v}$
OemPPH	$\overrightarrow{v}_g$	$e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$	$\overrightarrow{\Pi} = e\overrightarrow{v}_g$
Mécanique quantique	$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{p}}{m}$	$\lvert\Psi\rvert^2$	$\lvert\Psi\rvert^2 \frac{\overrightarrow{p}}{m}$

Savoir démontrer №4 : Loi de conservation de la probabilité de présence - HP

En utilisant l'équation de Schrödinger et l'équation de Schrödinger* et en notant $\rho = |\Psi|^2$, on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \overrightarrow{J} = 0$$

Avec

$$\overrightarrow{J} = \frac{\hbar}{2im}\left(\Psi^* \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Psi - \Psi \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Psi^*\right) = \frac{\hbar}{m}\mathcal{I}m\left(\Psi^* \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Psi\right)$$

Savoir démontrer №5 : Cas particulier pour une particule non localisée

Pour une particule d'impulsion $\overrightarrow{p} = \hbar\overrightarrow{k}$, la solution stationnaire s'écrit : $\Psi(x,t) = \Psi_0 e^{i(px-Et)/\hbar}$, la relation $\overrightarrow{J} = \frac{\hbar}{m}\mathcal{I}m\left(\Psi^* \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Psi\right)$ permet de trouver

$$\boxed{\overrightarrow{J}(M) = |\Psi|^2 \frac{\overrightarrow{p}}{m}}$$

4 Continuité

Définition :

✗ Soit r le coefficient de réflexion et t le coefficient de transmission des fonctions de probabilité.

✗ Par définition , on note

$$\boxed{R = \left|\frac{J_r}{J_i}\right|} \text{ et } \boxed{T = \left|\frac{J_t}{J_i}\right|}$$

✗ On va utiliser la **continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée spatiale lorsque V reste borné**.

II Marche de potentiel

DÉFINITION :

Soit le potentiel tel que :

1. $x \leq 0 \rightarrow V(x) = 0$
2. $x > 0 \rightarrow V(x) = V_0 > 0$
3. Le potentiel V est discontinu en 0 mais reste borné, on a **donc la continuité de la dérivée de φ en 0**.

1 Energie supérieure à la marche : $E > V_0$

Savoir démontrer №6 : Comportement classique

En mécanique classique, le système est conservatif. La particule passe la marche mais voit sa vitesse diminuée.

$$v(x<0) = \sqrt{\frac{2E}{m}} \qquad v(x>0) = \sqrt{\frac{2}{m}(E-V_0)}$$

Savoir démontrer №7 : Réflexion et transmission

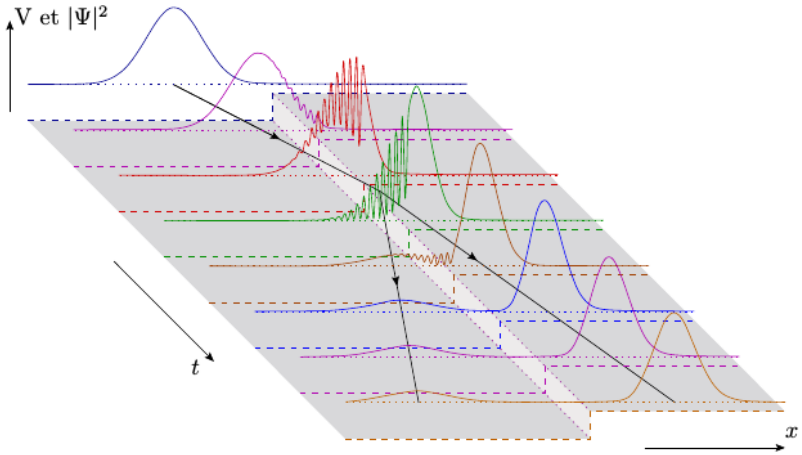
On recherche un état stationnaire pour la fonction, on trouve :

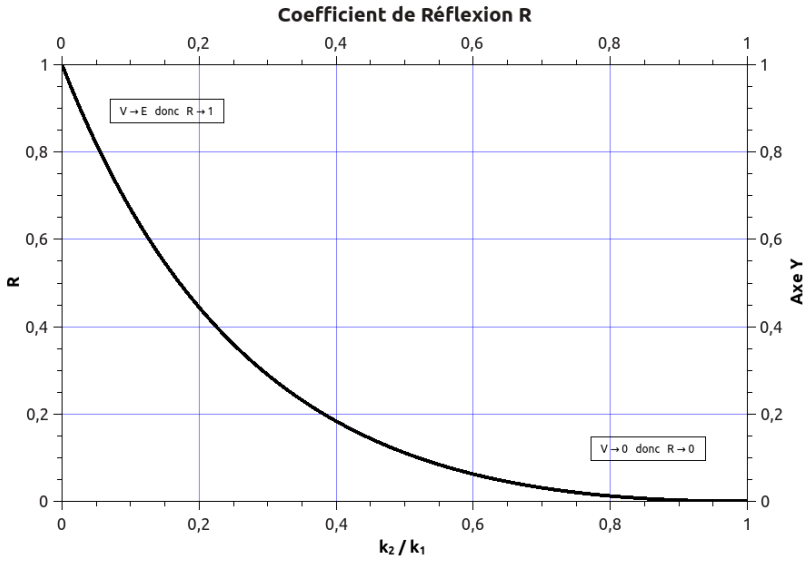
$$\varphi(x<0) = A_1 e^{ik_1 x} + rA_1 e^{-ik_1 x} \text{ et } \varphi(x>0) = tA_1 e^{k_2 x}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}$$

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \qquad t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$$R = |r|^2 = \left[\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right]^2 \qquad T = \frac{k_2}{k_1}|t|^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$





2 Energie inférieure à la marche : $E < V_0$

Savoir démontrer №8 : Comportement classique

En mécanique classique, le système est conservatif. La particule est réfléchie par la marche, elle n'a pas l'énergie suffisante pour franchir l'obstacle.

$$v\,(x<0) = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Savoir démontrer №9 : Réflexion totale

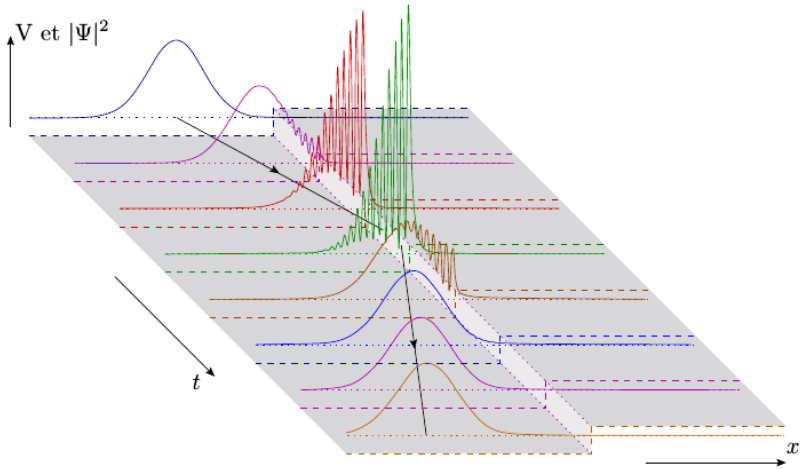
On recherche un état stationnaire pour la fonction, on trouve :

$$\varphi\,(x<0) = A_1 e^{ik_1 x} + rA_1 e^{-ik_1 x} \text{ et } \varphi\,(x>0) = tA_1 e^{-\mu_2 x}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad \mu_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\,(V_0 - E)}$$

$$r = \frac{k_1 - i\mu_2}{k_1 + i\mu_2} \qquad t = \frac{2k_1}{k_1 + i\mu_2}$$

$$R = 1 \qquad T = 1 - R = 0$$



Application 1 : Ordre de grandeur

Pour une poussière dans une marche d'énergie potentielle égale à $2E_c$.

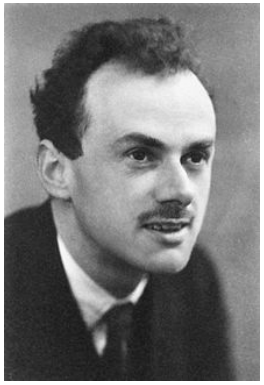
- ✗ $\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}} \simeq 10^{-16}$ m
- ✗ On ne peut donc pas considérer que la poussière entre dans la matière !
- ✗ Analogie avec optique : réflexion totale.

Savoir démontrer №10 : Cas de la marche infinie

Pour une marche infinie, $\mu_2 \to \infty, t \to 0, r \to -1$.

$$\varphi_\infty(x<0) = 2iA_1 \sin(k_1 x) \text{ et } \varphi_\infty(x>0) = 0$$

Chapitre 13 : Effet Tunnel



Dirac (1902 - 1984)

Born (1882-1970)

PARTIE I : QUANTIQUE
I-1 : Introduction
I-2 : Equation de Schrödinger
I-3 : Effet Tunnel

I Puits de potentiel - Quantification

DÉFINITION :

✗ On dit qu'un état est **lié** si la fonction d'onde spatiale correspondante est **normalisable**. Dans la cas contraire, on parle d'un état de **diffusion ou libre ou non lié**.
✗ On admet que le spectre des **états stationnaires liés** est **discret**. Cette **quantification** vient des conditions aux limites.
✗ On nomme **puits de potentiel** une zone de l'espace dans laquelle la valeur du potentiel est localement minimale.
✗ On nomme **barrière de potentiel** une zone de l'espace dans laquelle la valeur du potentiel est localement maximale.

1 Puits infini

DÉFINITION :

✗ Un puits de potentiel infini rectangulaire de largeur L correspond à une énergie potentielle

$$\begin{array}{ll} x \in [0, L] & V(x) = 0 \\ x < 0 \ \text{ et } \ x > L & V(x) \to \infty \end{array}$$

✗ La fonction $\varphi(x)$ est continue donc $\varphi(x) = 0$ et $\varphi(L) = 0$
✗ Le potentiel n'est pas borné donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ n'est **pas nécéssairement continue** en $x = 0$ et $x = L$.

Savoir démontrer №1 : Quantification

La résolution de l'équation de SCHRÖDINGER stationnaire donne

$$\varphi(x) = A \sin(kx) \quad \text{avec } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Les niveaux d'énergie sont **discrets** : c'est la **quantification** :

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}} \text{ et } \boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}$$

La condition de normalisation donne la constante A :

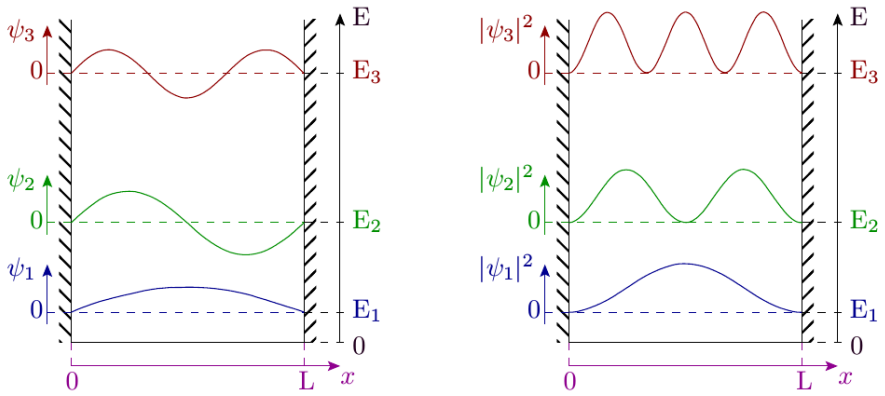
$$\boxed{\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{kn\pi x}{L}\right)}$$

Propriétés à connaître

✗ Les niveaux ne sont pas dégénérés : une seule fonction d'onde pour une valeur de E.
✗ $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est discontinue en $x = 0$ et $x = L$.
✗ On a $|\varphi|^2$ symétrique par rapport à $L/2$ (et non pas φ).
✗ Analogie avec la corde vibrante fixée à des deux extrémités.

Analogies - Puits quantique

	Corde vibrante	Puits infini
Conditions aux limites	$y(0) = y(L) = 0$	$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$
Fonction d'onde spatiale	$y = A \sin\left(\frac{kn\pi x}{L}\right)$	$\varphi = A \sin\left(\frac{kn\pi x}{L}\right)$
Pulsation spatiale	$k_n = \frac{n\pi}{L}$	$k_n = \frac{n\pi}{L}$



Différences Corde vibrante -Puits quantique		
	Corde vibrante	Puits infini
Equation d'évolution	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$	$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = E\varphi$
Pulsations des états propres	$\omega_n = k_n c$	$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$
Partie temporelles	en $\cos(\omega t)$ régime forcé	$e^{-i(Et/\hbar)}$
Fonctions	$y(x,t)$ est observable	Seule $\lvert\Psi(x,t)\rvert^2$ a un sens

Savoir démontrer №2 : Principe de correspondance de Bohr

Pour $n \to \infty$, on trouve que

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} \simeq \frac{2}{n} \to 0$$

Pour n grand les niveaux d'énergie sont continus on retrouve **la mécanique classique.**

Savoir démontrer №3 : Evolution temporelle d'un paquet d'ondes

On peut décomposer une fonction d'onde sur la base des fonctions d'ondes stationnaires :

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n e^{-iEt/\hbar}$$

Avec $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1$

2 Puits fini

Définition :

✗ Un puits de potentiel fini rectangulaire de largeur L correspond à une énergie potentielle

$x < -\frac{L}{2}$	$V(x) = V_0 > 0$	Zone ①
$x \in \left[-\frac{L}{2}, -\frac{L}{2}\right]$	$V(x) = 0$	Zone ②
$x > -\frac{L}{2}$	$V(x) = V_0 > 0$	Zone ③

✗ La fonction $\varphi(x)$ est continue en $x = -\frac{L}{2}$ et $\frac{L}{2}$.

✗ Le potentiel est borné donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est **continue** en $x = -\frac{L}{2}$ et $\frac{L}{2}$

✗ C'est une modélisation simple d'un noyau atomique : un nucléon est piégé dans une boite de taille L, capteurs CCD

Application 1 : Conditions aux limites

On pose $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $K = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$
La résolution de l'équation de SCHRÖDINGER stationnaire donne pour $E < V_0$:

$$\varphi_{①}(x) = A_{①}e^{(Kx)} \quad \text{et} \quad \varphi_{③}(x) = B_{③}e^{-(Kx)}$$

Dans la partie centrale, on trouve

$$\varphi_{②}(x) = A_{②}\cos(kx) + B_{②}\sin(kx)$$

$$\begin{aligned}
A_{①}\ e^{-KL/2} &= A_{②}\ \cos(kL/2) - B_{②}\sin(kL/2)\\
B_{③}\ e^{-KL/2} &= A_{②}\ \cos(kL/2) + B_{②}\ \sin(kL/2)\\
A_{①}\ Ke^{-KL/2} &= A_{②}\ k\sin(kL/2) + B_{②}\ k\cos(kL/2)\\
-B_{③}\ Ke^{-KL/2} &= -A_{②}\ k\sin(kL/2) + B_{②}\ k\sin(kL/2)
\end{aligned}$$

3 Puits fini - Solutions symétriques

Application 2 : Etats stationnaires symétriques

On recherche des solutions stationnaires qui soient symétriques : la fonction $\varphi(x)$ est **paire**. On en déduit :

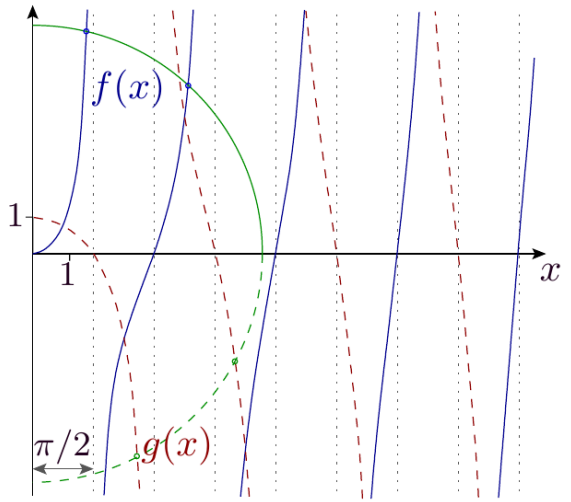
$$\begin{aligned}
A_{①} &= B_{③}\\
B_{②} &= 0\\
\frac{KL}{2} &= \frac{kL}{2}\tan\frac{kL}{2}\\
K^2 + k^2 &= \frac{2mV_0}{\hbar^2}
\end{aligned}$$

C'est une équation transcendante dont on peut trouver la solution graphiquement ou numériquement.

Savoir démontrer №4 : Résolution graphique

1. On se place dans le plan x, y avec $x = \frac{kL}{2}$ et $y = \frac{KL}{2}$. La zone intéressante est le premier quadrant car $k > 0$ et $K > 0$.
2. On trace le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \frac{mL^2V_0}{2\hbar^2}$
3. On trace la courbe d'équation $f(x) = x\tan x$ (représentée en bleu)
4. Les intersections dans le cadran 1 donnent les différentes valeurs de l'énergie (ici uniquement 2 valeurs).

Les niveaux sont quantifiés, il y a un nombre fini de solutions.



4 Puits fini - Solutions antisymétriques

Application 3 : Etats stationnaires antisymétriques

On recherche des solutions stationnaires qui soient antisymétriques : la fonction $\varphi(x)$ est **impaire**. On en déduit :

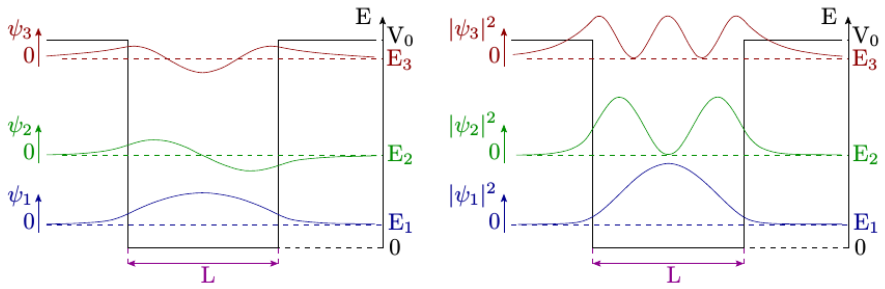
$$A_{①} = -B_{③}$$
$$A_{②} = 0$$
$$\frac{KL}{2} = -\frac{kL}{2}\text{cotan}\frac{kL}{2}$$
$$K^2 + k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

Application 4 : Résolution graphique

1. On se place dans le plan x, y avec $x = \frac{kL}{2}$ et $y = \frac{KL}{2}$. La zone intéressante est le 4ème quadrant car $k > 0$ et $K > 0$.
2. On trace le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \frac{mL^2V_0}{2\hbar^2}$
3. On trace la courbe d'équation $g(x) = x\text{cotan}x$ (représentée en rouge)
4. Les intersections dans le cadran 4 donnent les différentes valeurs de l'énergie (ici uniquement 2 valeurs).

Propriétés à connaître

- ✗ Alternance en énergie d'une solution symétrique et antisymétrique.
- ✗ Le nombre de niveaux d'énergie est $E\left[\frac{\sqrt{2ma^2V_0}}{\pi\hbar}\right]$, il augmente avec V_0.
- ✗ Une solution quelconque sera la somme de solutions symétriques et antisymétriques.



5 Profondeur de pénétration

Application 5 : Pénétration d'une particule quantique

Une particule quantique d'énergie $E < V_0$ peut pénétrer dans la zone exclue par la mécanique classique.
La distance caractéristique est

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

II Effet Tunnel

1 Barrière de potentiel

DÉFINITION :

- ✗ Une barrière de potentiel rectangulaire de largeur a correspond à une énergie potentielle

$x < -\frac{a}{2}$	$V(x) = 0$	Zone ①
$x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$	$V(x) = V_0 > 0$	Zone ②
$x > \frac{a}{2}$	$V(x) = 0$	Zone ③

- ✗ La fonction $\varphi(x)$ est continue en $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$.
- ✗ Le potentiel est borné donc $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ est **continue** en $x = -\frac{a}{2}$ et $x = \frac{a}{2}$.
- ✗ On s'interesse à la situation où $E < V_0$

2 Particule classique

Savoir démontrer №5 : Particule classique

Une particule classique d'énergie $E > V_0$ va ralentir au moment du passage de la barrière puis retrouver son énergie cinétique après le passage.

$$v_{①} = v_{③} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad \text{et} \quad v_{②} = \sqrt{\frac{2\left(E - V_0\right)}{m}}$$

3 Particule quantique

Savoir démontrer №6 : Expression de la fonction d'onde

On pose $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $\mu = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$
La résolution de l'équation de SCHRÖDINGER stationnaire donne :

$$\begin{aligned}
\varphi_{①}\left(x\right) &= A_1\ e^{(ikx)} + B_1\ e^{(-ikx)} \\
\varphi_{②}\left(x\right) &= A_2\ \mathrm{ch}\left(\mu x\right) + B_2\ \mathrm{sh}(\mu x) \\
\varphi_{①}\left(x\right) &= A_3\ e^{(ikx)}
\end{aligned}$$

Savoir démontrer №7 : Conditions aux limites

Les conditions aux limites permettent de trouver :

$$\begin{aligned}
A_1\ e^{-ika/2} + B_1\ e^{ika/2} &= A_2\ \mathrm{ch}\left(\frac{\mu a}{2}\right) + B_2\ \mathrm{sh}\left(\frac{\mu a}{2}\right) \\
A_3\ e^{ika/2} &= A_2\ \mathrm{ch}\left(\frac{\mu a}{2}\right) + B_2\ \mathrm{sh}\left(\frac{\mu a}{2}\right) \\
ikA_1\ e^{-ika/2} - ikB_1\ e^{ika/2} &= -\mu A_2\ \mathrm{sh}\left(\frac{\mu a}{2}\right) + \mu B_2\ \mathrm{ch}\left(\frac{\mu a}{2}\right) \\
ikA_3\ e^{ika/2} &= \mu A_2\ \mathrm{sh}\left(\frac{\mu a}{2}\right) + \mu B_2\ \mathrm{ch}\left(\frac{\mu a}{2}\right)
\end{aligned}$$

Savoir démontrer №8 : Probabilité de transmission

On peut définir les flux incidents réfléchis et transmis par l'ensemble de la barrière :

$$\overrightarrow{J}_i = |A_1|^2\ \frac{\hbar k}{m}\overrightarrow{u}_x \qquad \overrightarrow{J}_r = -\,|B_1|^2\ \frac{\hbar k}{m}\overrightarrow{u}_x \qquad \overrightarrow{J}_t = |A_3|^2\ \frac{\hbar k}{m}\overrightarrow{u}_x$$

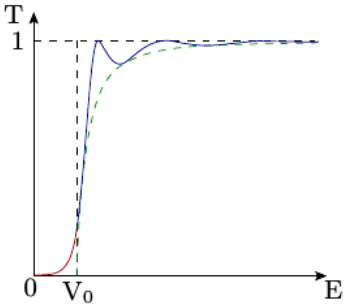
On trouve (après un long calcul) :

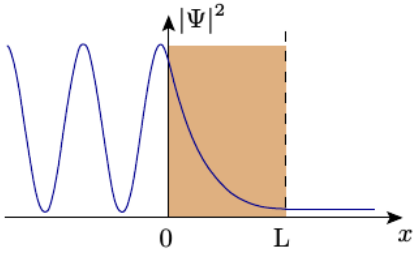
$$R = \frac{\gamma \mathrm{sh}^2\left(\mu a\right)}{1 + \gamma \mathrm{sh}^2\left(\mu a\right)} \qquad T = \frac{1}{1 + \gamma \mathrm{sh}^2\left(\mu a\right)}$$

Avec $\gamma = \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}$

- ✗ $R + T =$ conservation de la probabilité de présence.
- ✗ $T \neq 0$: **effet tunnel**

Propriétés à connaître





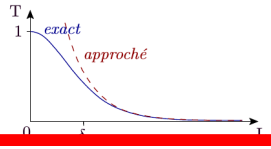
4 Approximation de la barrière épaisse

DÉFINITION :

On dit que la barrière est **épaisse si**

$$a \gg \delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\left(V_0 - E\right)}}$$

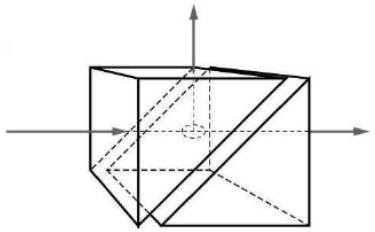
Savoir démontrer №9 : Valeur approchée de T



Dans le cas de la barrière épaisse

$$T \simeq \frac{16\,(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right)$$

Analogie avec l'effet optique :



TECHNICITE : *** INITIATIVE : *

MOTS-CLES : vecteur courant de probabilité, ondes évanescentes, coefficient de transmission.

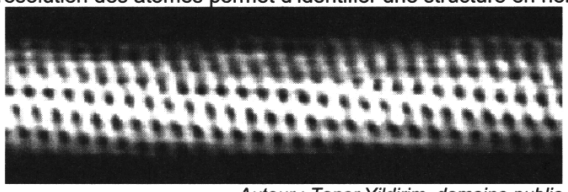
Le microscope à effet tunnel (*STM* : *scanning tunneling microscope*) a été inventé dans les années 80 par Binnig et Rohrer (qui reçurent le prix Nobel de physique en 1986 pour cette réalisation). Cette technique d'imagerie a pu aboutir suite au progrès réalisés d'une part dans l'électronique de contrôle (déplacement de la pointe par effet piézoélectrique) et d'autre part dans la mesure de courants très faibles (intensité de l'ordre du nanoampère, voire inférieure). Ce problème propose d'étudier le principe de fonctionnement du microscope, de faire apparaître les paramètres physiques entrant en jeu et de comprendre ce que le *STM* mesure exactement.

Données numériques :
Charge et masse d'un électron : $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C et $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg.
Constante de Planck réduite $\hbar = 1{,}05.10^{-34}$ J.s.

Le principe du *STM* est le suivant : une fine pointe métallique (terminée par un atome unique) est placée juste au dessus de l'échantillon à une distance très faible (de l'ordre du nm). En imposant une différence de potentiel entre la pointe et l'échantillon, on permet à des électrons de transiter de l'un à l'autre par effet tunnel. L'intensité du courant étant très sensible vis-à-vis de la distance à traverser, la mesure de cette intensité permet d'obtenir une image de la surface de l'échantillon grâce à un balayage de la pointe. La résolution latérale d'un *STM* peut atteindre 0,1 nm et sa résolution en profondeur peut descendre à moins de 0,01 nm. Il existe deux modes de balayage possibles de la surface :

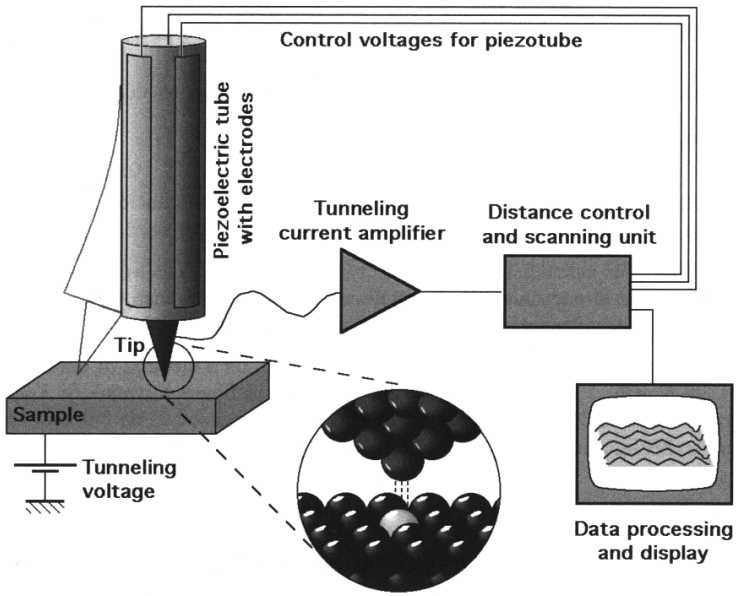
- le mode à hauteur constante, où l'on mesure le courant tunnel en fonction de la position en fixant la hauteur de la pointe.
- le mode à courant constant, dans lequel un système d'asservissement fait varier la hauteur de la pointe lors du balayage afin de maintenir constant le courant tunnel.

Nanotube de carbone vu sous *STM*
La résolution des atomes permet d'identifier une structure en hélice



Auteur : Taner Yildirim, domaine public

Schéma de principe d'un *STM*



Auteur : Michael Schmid, licence CC

Avant d'étudier l'effet tunnel, on étudie dans un premier temps le comportement d'un électron en incidence sur une marche de potentiel de hauteur V_0. On se place dans un problème unidimensionnel dans lequel les grandeurs ne dépendent que de l'abscisse x. Plus précisément, le potentiel $V(x)$ vaut 0 pour $x < 0$ et $V_0 > 0$ pour $x > 0$. L'électron, de masse m et de charge $-e$, possède une énergie E comprise entre 0 et V_0 et arrive depuis le demi-espace $x < 0$ en incidence normale sur la marche de potentiel. On rappelle que la fonction d'onde d'un état stationnaire d'énergie E s'écrit $\psi(x,t) = \phi(x)\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$, où $\phi(x)$ vérifie l'équation de Schrödinger :

$$E\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi(x)$$

La partie spatiale de la fonction d'onde de l'onde incidente décrivant l'électron est de la forme $\phi_i(x) = A_i \exp(+ikx)$.

1) Déterminer l'expression de k en fonction de E, m et $\hbar$. Vérifier la cohérence avec la relation de de Broglie.

2) De même, comment s'écrit $\phi_r(x)$, la partie spatiale de la fonction d'onde de l'onde réfléchie ?

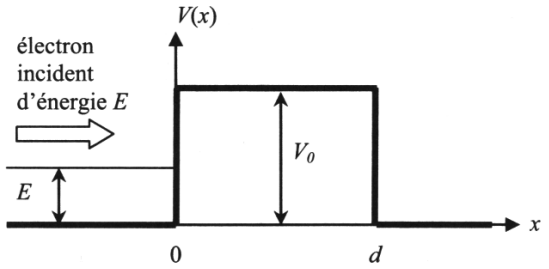
3) Indiquer la forme de $\phi_t(x)$, partie spatiale de la fonction d'onde de l'onde transmise. On posera $K = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$. Comment s'appelle ce type d'onde ?

4) En admettant que la fonction d'onde *totale*, ainsi que sa dérivée, doit être une fonction continue de x, montrer que $\frac{\phi_r(0)}{\phi_i(0)} = \frac{k - iK}{k + iK}$.

5) Définir et donner l'expression du courant de probabilité associé à l'onde incidente, puis à l'onde réfléchie.

6) Définir puis calculer le coefficient de réflexion R de l'électron sur la marche de potentiel. Que vaut le coefficient de transmission ? Quelle différence faîtes-vous entre ce que prévoient la mécanique classique et la mécanique quantique ?

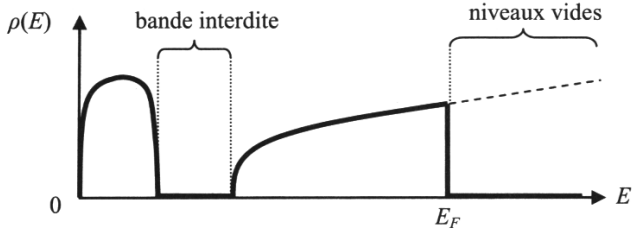
On étudie maintenant la possibilité de franchissement de l'électron d'une barrière de potentiel, de hauteur V_0 et de largeur d, représenté sur la figure suivante. Si $Kd >> 1$, on montre qu'il est possible de calculer le coefficient de transmission T_b de l'électron à travers la barrière en négligeant les réflexions multiples à l'intérieur de celle-ci.



7) Montrer que la dépendance du coefficient de transmission par rapport à la largeur de la barrière est de la forme $T_b = C\exp(-2Kd)$. On ne cherchera pas à établir une expression de la constante C.

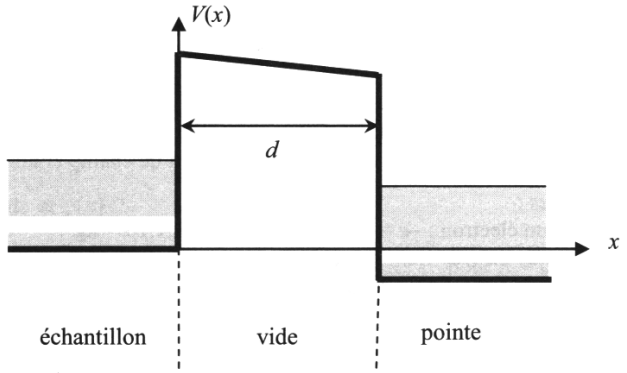
8) Comment peut-on justifier de manière qualitative que $T_b \neq 0$ malgré le résultat de la question 6 ?

On suppose que l'échantillon et la pointe sont de même nature : à l'intérieur de ces matériaux, les électrons, étant des fermions, doivent tous être dans des états quantiques différents les uns des autres (c'est le principe d'exclusion de Pauli). A température ambiante, on montre que les électrons vont approximativement remplir tous les états par ordre croissant d'énergie. La différence d'énergie entre l'état de plus basse énergie (premier niveau) et le dernier état occupé (appelé le niveau de Fermi) s'appelle l' « énergie de Fermi », notée E_F. On introduit la densité d'états (*LDOS* : *local density of states*), notée $\rho(E)$, définie telle que le nombre d'électrons par unité de volume dont l'énergie est comprise entre E et $E + dE$ vaut $dn = \rho(E)\,dE$. On donne l'allure de $\rho(E)$ pour un conducteur, en prenant pour origine de l'énergie celle du premier niveau :



Enfin, on appelle « travail de sortie », noté W_S, l'énergie qu'il faut fournir pour arracher un électron du niveau de Fermi en dehors du conducteur (échantillon ou pointe).

Dans le cas du *STM*, la barrière de potentiel a l'allure suivante, compte tenu de la tension U appliquée entre la pointe et l'échantillon, ces derniers étant séparés d'une distance d. Les zones grisées sont les énergies des états occupés par les électrons.



9) Compléter la figure en faisant apparaître l'énergie de Fermi E_F, le travail de sortie W_S ainsi que la quantité eU.

10) Indiquer l'intervalle d'énergie des électrons susceptibles de passer de l'échantillon à la pointe par effet tunnel.

Pour la suite, on raisonne avec les valeurs suivantes (cas de l'or) : $E_F = 5{,}5$ eV et $W_S = 5{,}1$ eV et l'on applique une tension $U = 100$ mV.

11) Compte tenu de ces valeurs et à l'aide de deux approximations que l'on explicitera, justifier que l'intensité I du courant tunnel est proportionnelle à la quantité $\rho(E_F)U\exp\left(-2\dfrac{\sqrt{2mW_S}}{\hbar}d\right)$.

12) En admettant que l'intensité puisse être mesurée avec une précision de 10 %, calculer la sensibilité verticale du microscope. Commenter.

13) Qu'est-ce qui limite la résolution latérale du microscope ?

14) Indiquer, selon vous, les avantages et les inconvénients des deux modes de balayage évoqués dans l'énoncé.

1) L'onde incidente, étant dans le demi-espace $x < 0$, se propage dans un potentiel nul. On injecte la fonction $\phi_i(x) = A_i \exp(+ikx)$ dans l'équation de Schrödinger, sachant que $V(x) = 0$:

$E\phi_i(x) = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\phi_i}{dx^2} = +\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}\phi_i(x)$, on en déduit $\boxed{k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}$. La relation de de Broglie relie la quantité de mouvement $\vec{p}$ de l'électron (dans une description corpusculaire) au vecteur d'onde $\vec{k}$ (dans une description ondulatoire de l'électron) : $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. L'énergie de l'électron vaut donc $E = \dfrac{p^2}{2m}$: on retrouve l'expression classique de l'énergie cinétique (le potentiel étant nul).

2) L'onde réfléchie se propage dans le même milieu que l'onde incidente, mais dans le sens opposé. D'où $\vec{k}_r = -\vec{k}$. Son amplitude, qui est une grandeur complexe, n'est pas forcément la même. On a donc $\boxed{\phi_r(x) = A_r \exp(-ikx)}$.

3) Dans le demi-espace $x > 0$, $V(x) = V_0$. La fonction $\phi_t(x)$ doit donc vérifier : $\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\phi}{dx^2} + (E - V_0)\phi(x) = 0$. Puisque $E < V_0$, on l'écrit $\dfrac{d^2\phi}{dx^2} - K^2\phi(x) = 0$. Les solutions générales sont $\phi_t(x) = A_t \exp(-Kx) + B_t \exp(+Kx)$. On élimine la solution divergente quand on s'éloigne de la marche ($x \to \infty$) qui n'a aucun sens physique (la densité de probabilité augmenterait indéfiniment après la traversée de la barrière). Au final, $\boxed{\phi_t(x) = A_t \exp(-Kx)}$. Il s'agit d'une onde évanescente.

4) Pour $x < 0$, il y a superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. La fonction d'onde totale s'écrit donc $\phi(x) = \phi_i(x) + \phi_r(x)$. Pour $x > 0$, il n'y a que l'onde transmise. La continuité de la fonction d'onde en $x = 0$ donne ainsi $\boxed{A_i + A_r = A_t}$. Pour $x < 0$, $\phi'(x) = ikA_i \exp(+ikx) - ikA_r \exp(-ikx)$. Pour $x > 0$, $\phi'(x) = -KA_t \exp(-Kx)$. La continuité de la dérivée en $x = 0$ s'écrit donc $\boxed{ik(A_i - A_r) = -KA_t}$. Les deux relations encadrées forment un système linéaire pour les inconnues A_r et A_t, que l'on résout facilement pour obtenir $\boxed{A_r = \dfrac{k - iK}{k + iK}A_i}$. On aboutit bien à la relation demandée.

5) En mécanique quantique, la localisation spatiale de l'électron (ou plus généralement d'une particule) est représentée (à 1D) par la densité linéique de probabilité égale à $\rho(x) = |\phi(x)|^2$. A l'image d'un corpuscule qui peut être en mouvement, la densité de probabilité de présence peut se déplacer dans l'espace. Pour une fonction d'onde plane progressive harmonique homogène (analogue d'une particule à vitesse constante $\vec{V}$), le vecteur densité de courant de probabilité vaut $\vec{J} = \rho\vec{V} = |\phi|^2\dfrac{\hbar\vec{k}}{m}$ par la relation de de

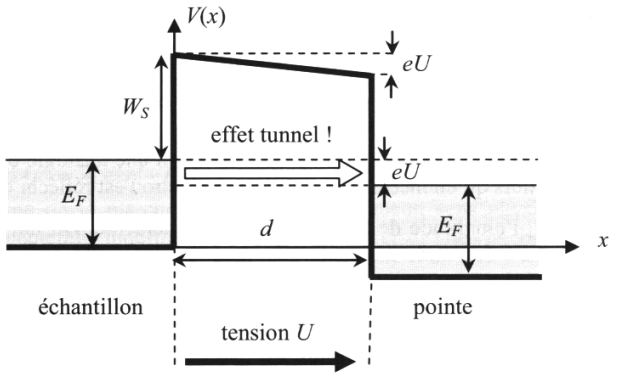
Broglie. Le sens de $\vec{J}$ donne le sens de déplacement de la probabilité et sa norme correspond à la probabilité traversant un plan $x = cste$ par unité de temps. Ici, $\boxed{\vec{J}_{incident} = |A_i|^2 \frac{\hbar k}{m} \vec{u}_x}$. Pour l'onde réfléchie, $\boxed{\vec{J}_{réfléchie} = -|A_r|^2 \frac{\hbar k}{m} \vec{u}_x}$. Puisque $\left|\frac{k - iK}{k + iK}\right| = 1$, on constate que $\vec{J}_{incident}$ et $\vec{J}_{réfléchie}$ sont égaux en norme (et de signes opposés ce qui est normal car l'électron réfléchi repart selon les x décroissants).

6) Par définition, le coefficient de réflexion R est le rapport du courant de probabilité de l'onde réfléchie sur celui de l'onde incidente $\boxed{R = \frac{|\vec{J}_{réfléchie}|}{|\vec{J}_{incident}|}}$. D'après la remarque précédente, il vient immédiatement $\boxed{R = 1}$. Cela signifie que l'électron en incidence sur la marche de potentiel est certain d'être réfléchi. Par conservation du flux de probabilité, le coefficient de transmission doit être nul $\boxed{T = 0}$. Que dit la mécanique classique ? l'énergie E de l'électron se conservant au cours du temps (la force qui crée la barrière est conservative car elle dérive du potentiel V), on doit avoir à tout instant $E_c + V = E = cste$. Puisque $E < V_0$ et que l'énergie cinétique est nécessairement positive, la zone $x > 0$ est inaccessible pour l'électron : il est donc forcément réfléchie (puisqu'il garde sa vitesse pour $x < 0$). Nous voyons donc que la mécanique quantique et la mécanique classique donnent la même conclusion dans *cette* situation. Il y a une différence notable cependant : la présence de l'onde évanescente de longueur caractéristique d'atténuation $1/K$ est lié au fait que l'électron pénètre dans la zone $x > 0$ sur une distance de l'ordre de $1/K$ avant d'être réfléchi (on pourra trouver dans la question 16 du problème 10.18 une analogie électromagnétique de ce phénomène) alors qu'en mécanique classique, l'électron est réfléchi en $x = 0$.

7) On note A_i l'amplitude de la fonction d'onde incidente. Du fait de la marche de potentiel située en $x = 0$, l'onde incidente crée pour $0 < x < d$ une onde évanescente telle que $\phi_t(x) = A_t \exp(-Kx)$, avec $A_t = \frac{2k}{k + iK} A_i$ d'après les calculs de la question 4. En $x = d$, il y a une nouvelle marche : sans refaire les calculs, on sait que l'amplitude de la fonction d'onde $\phi_b(x)$ de l'onde transmise après la barrière ($x > d$) va être proportionnelle à $\phi_t(d)$, le coefficient de proportionnalité ne faisant intervenir que k et K (comme pour A_t et A_i même si ce n'est pas le même coefficient). On en déduit que la dépendance de $\phi_b(x)$ vis-à-vis de la distance d est en $\exp(-Kd)$. Puisque les ondes possèdent le même vecteur d'onde avant et après la barrière, le coefficient de transmission de la barrière vaut $T_b = \frac{|\phi_b(x)|^2}{|\phi_i(x)|^2}$. $\boxed{\text{Sa dépendance en } d \text{ est bien en } \exp(-2Kd)}$.

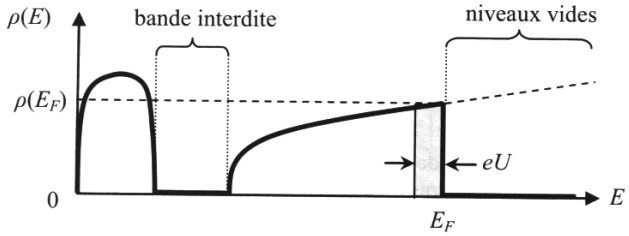
8) Une marche de potentiel peut être vue comme une barrière de largeur infinie. Si $d \to \infty$, T_b tend vers 0, ce qui est cohérent avec $T = 0$ de la question 6. Le résultat peut quand même surprendre dans une description corpusculaire : si l'électron était un corpuscule, il « verrait » la marche de potentiel avant de « s'apercevoir » qu'il s'agit en réalité d'une barrière. Il serait donc totalement réfléchi par la marche d'après la question 6. Or s'il peut passer la barrière, il peut passer la marche ! On voit donc bien qu'il faut abandonner l'idée d'une description corpusculaire pour expliquer l'effet tunnel. Dans une description ondulatoire, on montre (hors-programme) que le courant de probabilité d'une onde évanescente est nul. Ceci est en accord avec les résultats de la question 6, mais en total désaccord avec le fait que $T_b \neq 0$! En réalité, l'onde évanescente $\phi_t(x)$ se réfléchit en partie en $x = d$ en créant une seconde onde évanescente (de dépendance en $\exp(+Kx)$). C'est la combinaison de ces deux ondes évanescentes qui assure l'existence d'un courant de probabilité non nul à travers la barrière. Au bilan, l'électron a une probabilité (faible mais non nulle) de traverser la barrière alors qu'il n'a pas l'énergie nécessaire d'après la mécanique classique. D'un point de vue imagé, l'électron crée un « tunnel » dans la barrière d'où le terme employé.

9) La différence de potentiel imposée entre la pointe et l'échantillon donne naissance à un champ électrique $\vec{E}$ entre eux deux. Les électrons situés entre la pointe et l'échantillon subissent une force électrique $\vec{F} = -e\vec{E}$. Il y a donc une différence de potentiel (attention : d'énergie potentielle) entre la pointe et l'échantillon valant $V(x = 0^+) - V(x = d^-) = \int_0^d \vec{F}.d\vec{l} = -e\int_0^d \vec{E}.d\vec{l} = +eU$. D'où la figure complétée.



10) D'après le principe d'exclusion de Pauli, les électrons passant de l'échantillon vers la pointe ne peuvent pas être dans un niveau déjà occupé. On en déduit que seuls les électrons dans l'échantillon ayant une énergie entre $E_F - eU$ et E_F peuvent passer dans la pointe. Du fait du travail de sortie, ils peuvent franchir la barrière uniquement par effet tunnel (l'agitation thermique est totalement insuffisante).

11) Avec les données fournies, on a $eU << W_S$. On peut donc assimiler la barrière à une barrière rectangulaire de hauteur W_S. D'autre part, puisque $eU << E_F$, les électrons susceptibles de traverser la barrière par effet tunnel ont une énergie comprise dans une bande très étroite de sorte que leur nombre par unité de volume peut s'écrire $n_{bande} = \int_{E_F - eU}^{E_F} \rho(E)dE \approx \rho(E_F)eU$. On peut noter que la quantité n_{bande} correspond à l'aire de la partie grisée sur le graphe de la densité d'états (voir page suivante).



L'intensité du courant tunnel I est égale à la densité de courant tunnel j allant de l'échantillon vers la pointe multipliée par la section efficace S de la pointe. Les électrons susceptibles de passer par effet tunnel ayant à peu près tous la même énergie (car $eU << E_F$), ils possèdent tous à peu près la même vitesse v_F en norme. Seule une fraction f de ces électrons possède une vitesse dans la direction de la pointe. De ces électrons, seule une fraction T_b arrive à franchir la barrière par effet tunnel. D'après le cours d'électromagnétisme et de ce qui vient d'être dit, $j = f\ T_b\ e\ n_{bande}\ v_F$. Puisque T_b est proportionnel à $\exp(-2Kd)$ avec $K = \frac{\sqrt{2mW_S}}{\hbar}$ (barrière approximativement rectangulaire) et que $n_{bande} = \rho(E_F)eU$, on montre bien que l'intensité du courant tunnel est de la forme $\boxed{I = cste \times \rho(E_F)U \exp\left(-2\frac{\sqrt{2mW_S}}{\hbar}d\right)}$.

12) I est une fonction décroissante de d. Le dispositif est capable de détecter une variation δd de la distance d telle que $\frac{I(d)-I(d+\delta d)}{I(d)} = 0{,}1$, c'est-à-dire $\frac{I(d+\delta d)}{I(d)} = 0{,}9 = \exp\left(-2\frac{\sqrt{2mW_S}}{\hbar}\delta d\right)$ d'où $\boxed{\delta d = \frac{\hbar}{2\sqrt{2mW_S}}\ln\left(\frac{1}{0{,}9}\right)} = 5.10^{-12}$ m = 0,005 nm. On retrouve l'ordre de grandeur de la résolution en profondeur du microscope indiquée en début d'énoncé.

13) La résolution latérale est limitée par la taille de la pointe. Au mieux, il y a un seul atome à son extrémité, il est impossible de faire plus petit (rappelons que le terme « atome » vient du grec ancien *atomos* qui signifie « qui ne peut être divisé »). L'atome ayant une taille nanométrique, il ne pourra pas sélectionner une zone beaucoup plus petite que sa propre taille : 0,1 nm paraît une limite infranchissable avec cette technologie.

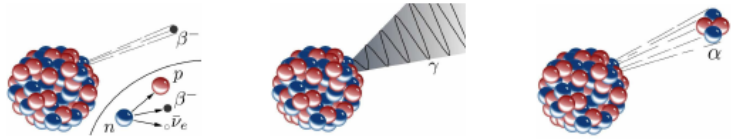
14) Le mode à hauteur constante a l'avantage de ne pas devoir déplacer verticalement la pointe lors du balayage, qui va donc pouvoir se faire plus rapidement. Son inconvénient est que, l'intensité variant très rapidement suivant la distance d, il ne sera pas possible de scanner des surfaces ayant des reliefs trop marqués (distance creux-bosse trop grande).

Pour le mode à courant constant, la pointe va pouvoir suivre le relief, qui peut donc être très prononcé. Le prix à payer est un balayage moins rapide de la surface, du fait du système d'asservissement en position verticale de la pointe.

15) L'énoncé soulève un point important. Il y a deux dépendances de l'intensité I du courant tunnel par rapport aux propriétés de la surface : sa *LDOS* à l'énergie de Fermi $\rho(E_F)$ d'une part, et son relief d'autre part (par la distance d). Il faut donc être vigilant sur

Annexe 2 : La radioactivité α

Les atomes possèdent un noyau constitué de neutrons et de protons et certains d'entre eux peuvent être l'objet d'un processus radioactif. On peut par exemple citer la radioactivité β^-, dans laquelle l'interaction faible permet la conversion d'un neutron en proton en éjectant un électron et un antineutrino, la radioactivité γ, où le noyau dans un état initialement excité se désexcite par un rayonnement γ et la désintégration α qui nous intéresse ici [28].



Radioactivité β^- *Radioactivité γ* *Radioactivité α*

La désintégration d'éléments radioactifs comme le radium, le thorium ou l'uranium avec émission de particules α (noyau d'hélium composé de deux protons et de deux neutrons) a été bien documentée dès 1900. Toutefois, certains aspects de cette désintégration sont restés un mystère jusqu'à ce que Gamow [29] propose en 1928 un modèle s'appuyant sur un effet quantique tout juste découvert : l'*effet tunnel*. Sa contribution élucide un aspect mystérieux de la radioactivité α...

G. Gamow (1904-1968)

Les particules α émises par diverses sources radioactives ont à peu près la même énergie cinétique E (gamme étroite de valeurs, d'environ 4 à 10 MeV). Cependant, les demi-vies (ou périodes) des sources (durée nécessaire pour que la moitié de leur matière soit désintégrée) varient sur une très large gamme de valeurs suivant l'élément en jeu (plus de 20 ordres de grandeur de magnitude !). On constate même de fortes variations des demi-vies pour des isotopes voisins [30].

Élément	Énergie α	Demi-vie
$^{212}_{84}$Po	8,95 MeV	$3,0.10^{-7}$ secondes
$^{240}_{96}$Cm	6,40 MeV	27 jours
$^{226}_{88}$Ra	4,90 MeV	$1,6.10^{3}$ années
$^{232}_{90}$Th	4,05 MeV	$1,4.10^{10}$ années

28. Il existe aussi la radioactivité β^+ pour laquelle un proton est converti en un neutron et conduit notamment à l'émission d'un positron.
29. Gurney et Condon ont proposé une approche similaire en 1929.
30. On observe aussi l'existence de diverses demi-vies pour un noyau père donné en raison de plusieurs noyaux fils possibles.

Élément	Énergie α	Demi-vie
$^{228}_{92}$U	6,59 MeV	9,3 minutes
$^{230}_{92}$U	5,60 MeV	21 jours
$^{232}_{92}$U	5,21 MeV	73 années
$^{234}_{92}$U	4,70 MeV	$2,4.10^5$ années
$^{236}_{92}$U	4,45 MeV	$2,3.10^7$ années
$^{238}_{92}$U	4,19 MeV	$4,4.10^9$ années

Dès 1911, Geiger et Nuttall proposent une loi empirique reliant les demi-vies $t_{1/2}$ aux énergies cinétiques E des particules α émises :

$$t_{1/2}(\mathrm{E}) = \mathrm{C}_1\, e^{\mathrm{C}_2/\sqrt{\mathrm{E}}}$$

avec des valeurs de C_1 et C_2 indépendantes de E mais dépendantes du numéro atomique Z du noyau restant après la désintégration (noyau fils).

Gamow propose une approche théorique visant à expliquer et à préciser cette loi. Pour cela, il suppose que préexiste au moins une particule α au sein du noyau de l'élément radioactif (noyau père) constituant la source, celle-ci pouvant s'échapper par effet tunnel à travers une barrière de potentiel [31]. Tant que la particule α est à l'intérieur du noyau père, elle est virtuellement libre mais tend à être confinée dans le puits de potentiel formé par l'interaction nucléaire. Une fois en dehors du noyau, elle subit uniquement [32] la force de répulsion coulombienne de la part du noyau fils.

La figure ci-contre précise le diagramme d'énergie potentielle associé à la particule α en fonction de sa distance r au centre du noyau. Le rayon nucléaire R d'un noyau père lourd est donné en bonne approximation par la loi $\mathrm{R} = r_0\,\mathrm{A}^{1/3}$ où $r_0 = 1,2$ fm et A est le nombre de masse (R est de l'ordre de 10 fm pour un noyau lourd). La particule α doit traverser la barrière de potentiel de $r = \mathrm{R}$ à $r = \mathrm{R}_e$ pour s'échapper de celui-ci et être détectée comme le produit d'une désintégration radioactive. L'énergie E_0 est typiquement de l'ordre de -40 MeV et la hauteur de barrière E_m de l'ordre de 30 MeV. Classiquement, même une particule α d'énergie $\mathrm{E} = 10$ MeV initialement liée au noyau a une énergie insuffisante pour franchir la barrière de potentiel coulombienne. Toutefois, grâce à son comportement ondulatoire, elle peut quand même s'échapper par effet tunnel. L'énergie totale E de la particule α dans le noyau père devient l'énergie cinétique observée pour la particule α une fois qu'elle s'est échappée.

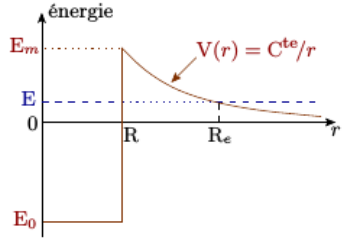


Diagramme énergétique modèle

C'est la grande sensibilité de la probabilité T(E) de transmission d'une particule α à travers la barrière en fonction de son énergie E qui explique la large gamme de valeurs de demi-vies observées pour les émetteurs α. On peut préciser concrètement ce point en recherchant l'expression de T(E) et en déduisant ensuite une loi théorique $t_{1/2}(\mathrm{E})$.

Une première méthode consiste à modéliser la barrière coulombienne par une barrière rectangulaire unidimensionnelle de largeur $\mathrm{R}_e - \mathrm{R}$ et de hauteur E_m. On en déduit alors le coefficient de transmission dont la décroissance avec E est essentiellement exponentielle [33] :

$$\mathrm{T}_0(\mathrm{E}) \simeq e^{-2\,\mathrm{K}\,(\mathrm{R}_e - \mathrm{R})} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{K} = \sqrt{\frac{2\,m_\alpha\,(\mathrm{E}_m - \mathrm{E})}{\hbar^2}}$$

où m_α est la masse de la particule α. Toutefois, ce modèle conduit à des résultats s'adaptant mal aux données expérimentales et doit être amélioré.

Gamow s'appuie sur une méthode approchée semi-classique de Wentzel, Kramers et Brillouin (WKB). Dans la région de la barrière, il pose une fonction d'onde spatiale de la forme

$$\varphi(r) = \mathrm{C}\,e^{-\gamma(r)} + \mathrm{D}\,e^{\gamma(r)}$$

et l'approximation WKB permet de supposer que $\varphi(r)$ varie suffisamment lentement pour que l'on puisse négliger le terme en $\mathrm{d}^2\gamma/\mathrm{d}r^2$ dans l'écriture de $\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}r^2$. Alors, l'écriture de l'équation de Schrödinger indépendante du temps unidimensionnelle conduit à l'expression intégrale de $\gamma(r)$ et on déduit le coefficient de transmission grâce à [34]

$$\mathrm{T}(\mathrm{E}) = \exp(-2\,[\gamma(\mathrm{R}_e) - \gamma(\mathrm{R})])$$

Ainsi,
$$\mathrm{T}(\mathrm{E}) = \exp\left[-2\int_{\mathrm{R}}^{\mathrm{R}_e} \sqrt{\frac{2\,m_\alpha\,(\mathrm{V}(r) - \mathrm{E})}{\hbar^2}}\,\mathrm{d}r\right]$$

La suite du raisonnement ne pose pas de difficulté de principe. Il s'agit d'un calcul supposant que $\mathrm{R} \ll \mathrm{R}_e$ et on aboutit à l'expression

$$\mathrm{T}(\mathrm{E}) = \exp\left[-4\pi\,\mathrm{Z}\sqrt{\frac{\mathrm{E}_\ell}{\mathrm{E}}} + 8\sqrt{\frac{\mathrm{Z\,R}}{r_\ell}}\right] \qquad \text{où} \qquad r_\ell = \frac{\varepsilon_0\,h^2}{\pi\,m_\alpha\,e^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_\ell = \frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0\,r_\ell}$$

31. Il a été prouvé depuis qu'un telle vision est erronée mais cela n'enlève pas l'intérêt au moins historique du modèle.
32. L'interaction nucléaire n'est plus à prendre en compte car sa portée est limitée à la taille du noyau.
33. Il y a en fait un facteur multiplicatif mais il n'est pas déterminant et pris unitaire. La même chose est pratiquée dans la suite.
34. Une autre approche, moins rigoureuse, consiste à découper l'hyperbole représentative de V en une succession de barrières rectangulaires pour lesquelles on cumule en produit les probabilités de transmission.

Maintenant que la loi T(E) est connue, on peut en déduire le taux de désintégration λ(E) (probabilité d'émission α par unité de temps, indépendante du temps). Il suffit pour cela de multiplier T(E) par le nombre de collisions par unité de temps de la particule α avec la barrière nucléaire dans le noyau père (en raison d'allers et retours sur des distances 2 R). Dans la plupart des cas, on peut estimer cette fréquence de collision à 10^{21} s^{-1}. Enfin, on passe à la loi de demi-vie par la relation

$$t_{1/2}(\mathrm{E}) = \frac{\ln 2}{\lambda(\mathrm{E})}$$

Un tel modèle permet bien de décrire la forte dépendance de la demi-vie avec l'énergie cinétique mesurée pour les particules α et est cohérent avec la loi empirique de Geiger-Nuttall déjà évoquée. De plus, il propose des dépendances de C_1 et C_2 avec le numéro atomique fils Z et conduit à des évaluations d'ordres de grandeurs de $t_{1/2}$ relativement raisonnables [35] compte-tenu de sa simplicité.

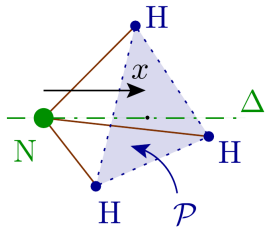
L'effet tunnel a été utilisé ici pour expliquer l'éjection de particules α du noyau. Cockcroft et Walton songèrent alors à exploiter l'effet en sens inverse : ils utilisèrent en 1932 un faisceau de protons pour bombarder du lithium $^7_3$Li et générer une réaction nucléaire. Ils réalisèrent ainsi la première transmutation artificielle en formant deux particules α et validèrent au passage la célèbre formule d'Einstein « $\mathrm{E} = mc^2$ ». Ce fut le début de l'étude de la physique nucléaire par les accélérateurs de particules (et cela leur valut le prix Nobel 1951).

L'effet tunnel est aussi à considérer pour expliquer la génération d'énergie dans le Soleil (et autres étoiles) qui repose sur une première étape de réaction de fusion de deux protons : cet effet permet aux protons de se rapprocher suffisamment pour autoriser la réaction, malgré la barrière de potentiel due à leur répulsion coulombienne...

35. La demi-vie calculable par ce modèle pour $^{232}_{90}$Th est par exemple tout à fait acceptable, mais cela est moins satisfaisant pour $^{212}_{84}$Po. Des modèles bien plus élaborés sont toujours à l'étude...

III Double barrière de potentiel symétrique

1 Position du problème



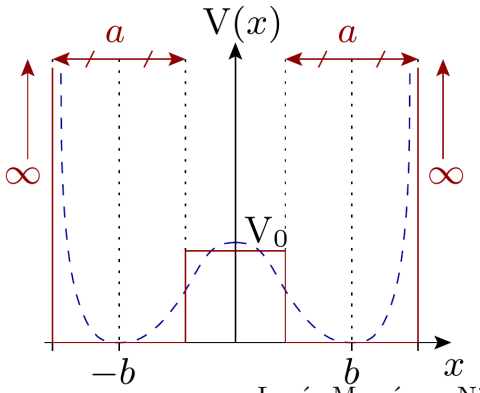
La molécule d'ammoniac NH_3 a la forme d'une pyramide. Les trois H forment un plan et l'atome d'azote peut passer d'un coté à l'autre de ce plan.

On suppose que N ne peut se déplacer que sur l'axe x et on étudie son énergie potentielle.

Il existe donc deux positions d'équilibre de l'atome N : $x = -b$ et $x = b$.

Le potentiel a l'allure en pointillé suvante et le modèle en traits pleins :

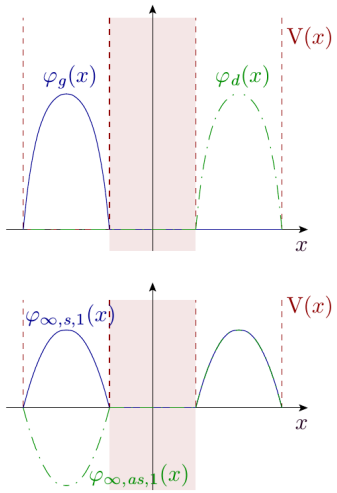
- ✗ On a un double puits de potentiel.
- ✗ Les centres sont placés sur les positions d'équilibre $\pm b$
- ✗ En $x = 0$, on a une **position d'équilibre instable**.
- ✗ On note V_0 la valeur du potentiel en $x = 0$
- ✗ On choisit le modèle des puits infinis pour $|x| > b + \frac{a}{2}$



2 Cas limite barrière infranchissable

Savoir démontrer №10 : Fonctions d'onde

On suppose ici que $V_0 \to \infty$.



Le fonction d'onde de s'écrit :

$$\varphi_g = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{n\pi\,(x+b)}{a}\right) \qquad \text{pour} \quad x \in \left[-b-\frac{a}{2}, -b+\frac{a}{2}\right]$$
$$\varphi_g = 0 \qquad \text{sinon}$$

La deuxième possibilité est :

$$\varphi_d = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{n\pi\,(x-b)}{a}\right) \qquad \text{pour} \quad x \in \left[b-\frac{a}{2}, b+\frac{a}{2}\right]$$
$$\varphi_d = 0 \qquad \text{sinon}$$

Savoir démontrer №11 : Niveaux dégénérés

On peut fabriquer une fonction d'onde symétrique dans le fondamental :

$$\varphi_{\infty,s,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_g + \varphi_d\right)$$

L'énergie associée au niveau fondamental est $E_\infty = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$
On peut fabriquer une fonction d'onde antisymétrique dans le fondamental :

$$\varphi_{\infty,as,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_g - \varphi_d\right)$$

L'énergie associée au niveau fondamental est la même $E_\infty = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$
On une **dégénérescence de 2** pour ce niveau.

3 Levée de la dégénérescence par couplage

Savoir démontrer №12 : Analyse des courbes

La relation entre k et E est donnée par la relation :

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$$

- ✗ plus la période spatiale de la fonction d'onde est petite, plus l'énergie associée est grande.
- ✗ plus le nombre de noeuds est grand plus l'énergie est grande .

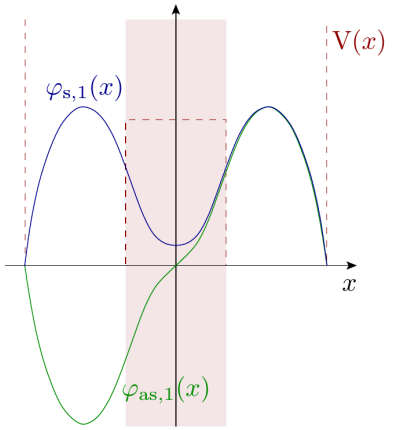
Savoir démontrer №13 : Puits fini

On a représenté (voir ci-dessous) les fonctions d'onde de l'état sysmétrique et antisymétrique du système avec le potentiel V_0 dans le fondamental.
L'analyse de ces courbes permet de déduire que

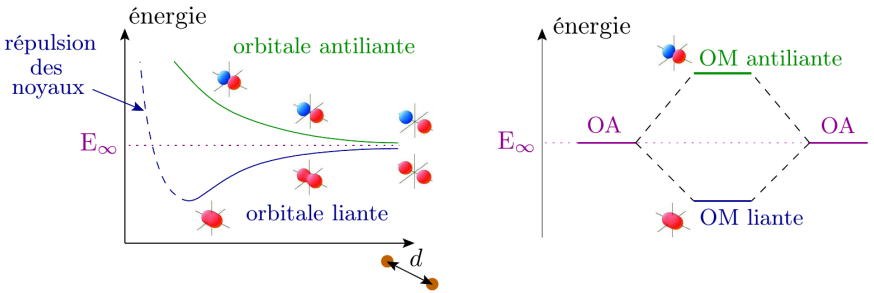
- ✗ les périodes spatiales sont plus grandes que pour le potentiel infini
- ✗ la fonction d'onde antisymétrique a un noeud de plus

$$\boxed{E_{s,1} < E_{as,1} < E_{\infty,1}}$$

La **dégénérescence est levée par le couplage**.



-



4 Oscillations de Bohr

Savoir démontrer №14 : Oscillations de Bohr

Soit une particule dans un système de 2 puits. On la place dans l'état initial dans le puits de gauche dans le fondamental. :

$$\Psi(x, t=0) = \varphi_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_s + \varphi_a)$$

A une date t, son état est

$$\Psi(x,t) = \frac{e^{-iE_s t/\hbar}}{\sqrt{2}}\left(\varphi_s - \varphi_a e^{-i(E_a - E_s)t/\hbar}\right)$$

On constante une oscillation de la probabilité de présence avec une fréquence

$$\boxed{f = \frac{E_a - E_s}{h}}$$