Bord de Martin du groupe de Heisenberg pour la mesure Nord-est

Axel Péneau

22 septembre 2021

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de stage, Sébastien Gouëzel pour m'avoir expliqué de manière très claire tous les outils mathématiques avec lesquels je n'étais pas familier et pour s'être rendu très disponible malgré la situation difficile. Il a su me remettre les idées en place quand j'avais du mal à comprendre ce que je faisais.

Je tiens aussi à remercier tous les doctorants de l'IRMAR et autres membres du laboratoire qui m'ont bien accueilli pendant ce stage, et particulièrement Victor, Lucien et Titouan pour m'avoir invité à parler de marches aléatoires dans les groupes au séminaire des doctorants.

Je remercie aussi mes parents chez qui j'ai travaillé pendant une bonne partie de mon stage.

Enfin je remercie l'équipe administrative et les professeurs de l'ENS de Lyon qui ont été très patients malgré le fait que je n'envoyais jamais les bons papiers au bon moment.

1 Introduction

1.1 La marche Nord-Est dans le groupe de Heisenberg

Soit Γ le groupe de Heisenberg discret en dimension 3, c'est à dire le groupe des matrices triangulaires supérieures à coefficients entiers et à diagonale unitaire

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{Z} \right\} = N(\mathbb{Z}^3)$$

Le but de ce travail est de décrire le Bord de Martin de Γ pour la mesure Nord-est qui charge uniformément a et b avec :

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier les notations, on notera

$$\gamma = (x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma) := \begin{pmatrix} 1 & x_\gamma & z_\gamma \\ 0 & 1 & y_\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On sait d'après [1] que les fonctions harmoniques minimales finies de Γ pour la mesure nord-est sont d'une des trois formes suivantes :

1. h est un caractère harmonique $h(x, y, z) = r^x s^y$ avec $r + s = 1$.
2. h est de la forme $h(\gamma) = p'(\gamma_0 \gamma^{-1})$ avec $\gamma_0 \in \Gamma$.
3. h est de la forme $h(\gamma) = p' \circ I(\gamma_0 \gamma^{-1})$ avec $\gamma_0 \in \Gamma$.

où $I(x, y, z) = (y, x, xy - z)$ et $p'(x, y, z) = p_y(z)$ dénombre le nombre de partition de z comme somme de y entiers positifs.

1.2 Bord de Martin

On commence par définir le Bord de Martin pour un ensemble dénombrable X avec une chaîne de Markov irréductible p. Pour ça, on commence par définir la compactification de Martin en envoyant le groupe G dans l'ensemble des fonctions sur-harmoniques à l'aide des fonctions de Green.

Définition 1.1 (Noyau de Green)**.** Soit $x, y \in X$, soit $(x_n) \in X$ une marche aléatoire qui suit p et telle que $x_0 = x$, on définit le noyau de Green $\mathcal{G} : X^2 \to [0, +\infty]$

$$\mathcal{G}(x, y) := \mathbb{E}(Card\{n \in \mathbb{N}; x_n = y\})$$

Définition 1.2 (Fonction de Green)**.** On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction de Green si il existe $y \in X$ et $\lambda > 0$ tels que $f(x) = \lambda G(x, y)$, on appelle y le point base de f.

Dans le cas où la chaîne de Markov p est irréductible on a le Lemme suivant qui nous garanti que l'on peut compactifier l'ensemble des fonctions de Green :

Lemme 1.3. *Si la chaîne de Markov p est irréductible alors toute fonction p-sur-harmonique positive h vérifie : $\forall x, y \in X, h(y)\mathcal{G}(x, y) \leqslant h(x)\mathcal{G}(y, y)$*

Corollaire 1.4. *L'ensemble des fonctions sur-harmoniques qui valent* 1 *en un point fixe $x_0 \in X$ est compact et intersecte toutes les classes de proportionnalité de fonctions sur-harmoniques positives, sauf la classe nulle.*

On définit ensuite la compactification de Martin de (X, p) relativement au point x_0 comme suit :

Définition 1.5 (Bord de Martin)**.** On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}^+$ est dans le bord de Martin de X si f est une limite simple de fonctions de Green qui valent 1 en x_0 et si f n'est pas elle-même un noyau de Green, on note alors $f \in \partial X$.

Proposition 1.6. *Les fonctions du bord de Martin sont p-harmoniques, c'est à dire que si $f \in \partial\Gamma$ alors pour tout $x \in X$, on a :*

$$f(x) = \sum_{y \in X} p(x, y) f(y).$$

Le Théorème de représentation de Martin tel qu'il est énoncé dans [5] (page 14) nous dit que si p est transiente et irréductible alors toute fonction harmonique h est une moyenne de fonctions du bord de Martin pour une certaine mesure ν_h sur ∂X. En particulier les fonctions harmoniques minimales sont dans le bord de Martin, et on appelle bord de Martin minimal l'ensemble des fonctions harmoniques minimales. On dit qu'une fonction harmonique positive h est minimale si toute fonction harmonique $0 \leqslant h' \leqslant h$ est proportionnelle à h.

Le premier problème qu'on rencontre avec l'étude de la marche Nord-Est dans le groupe de Heisenberg est que la marche n'est pas irréductible, la définition même de la compactification de Martin n'est alors plus une compactification car l'ensemble des fonctions super-harmoniques qui valent 1 en x_0 n'est pas compact.

On a donc besoin d'une définition alternative de la compactification de Martin qui prend en compte les marches non irréductibles La définition du bord de martin proposée dans ce rapport se base sur le fait que la classe de proportionnalité d'une fonction positive $f : X \to \mathbb{R}_+$ ne dépend que du support de f ; $\mathbf{Supp}(f) := \{x \in X, f(x) \neq 0\}$ et du rapport $\frac{f(y)}{f(x)}$ pour $x, y \in \mathbf{Supp}(f)$, on peut alors compactifier l'ensemble des fonctions sur-harmoniques pour la topologie de convergence simple dans $[0, +\infty]^{X^2}$, on appelle quasi-fonctions les limites de classes d'équivalence de fonctions positives. Ces quasi-fonctions super-harmoniques nous permettent de définir le bord de Martin dans le cas général d'une chaîne de Markov non irréductible.

1.3 Résultats et conjectures

Le premier résultat que l'on montre est qu'avec la définition en terme de quasi-fonctions, le Bord de Martin minimal est bien inclu dans le bord de Martin, ce qui garanti qu'on a une définition cohérente

En utilisant la loi des grands nombres, on décrit ensuite le bord de Martin du groupe $\mathbb{Z}^2$ pour une marche non irréductible, on rappelle que le théorème de Choquet-Deny nous dit que toute fonction harmonique extrémale dans un groupe Abélien est un caractère. Ici, on rajoute les quasi-fonctions infinies et on démontre une version alternative du théorème de Choquet-Deny :

Theorem 1.7 (Choquet-Deny)**.** *Le Bord de Martin de $\mathbb{Z}^2$ pour la mesure Nord-Est est composé des caractères harmoniques, c'est à dire les quasi-fonctions de type*

$$\chi_r : (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto r^{x_{\gamma_2} - x_{\gamma_1}} (2 - r)^{y_{\gamma_2} - y_{\gamma_1}}$$

des semi-caractères, c'est-à-dire χ_0 restreint à un support de type $[\![-\infty, x_0]\!] \times \mathbb{Z}$ et χ_2 restreint à un support de type $\mathbb{Z} \times [\![-\infty, y_0]\!]$, et enfin de la quasi-fonction nulle (c'est-à-dire à support vide).

On donne ensuite une description complète du bord de Martin du groupe de Heisenberg pour la mesure Nord-Est.

Theorem 1.8. *Le bord de Martin du groupe de Heisenberg pour la mesure Nord-Est est égal à son bord de Martin minimal.*

La preuve est incomplète car on admet sans preuve la log-concavité de la fonction de partition.

Ce théorème est inattendu car le bord de Martin du groupe de Heisenberg continu décrit dans [3] est homéomorphe à un disque de dimension 2 dont le bord de dimension 1 est le bord de Martin Minimal. En effet, les noyaux de Green ne sont pas log-concaves partout. On pourrait continuer ce travail en utilisant les outils développés dans [2] pour démontrer la conjecture suivante :

Conjecture 1.9. Soit μ une mesure sur Γ dont le support fini S engendre Γ, alors le bord de Martin de Γ pour la mesure μ est égal au bord de Martin minimal si et seulement si le cône engendré par S dans $\mathbb{R}^2$ est différent de $\mathbb{R}^2$.

On définit le cône engendré par S comme l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs d'éléments de $\{(x_s, y_s) | s \in S\}$. L'intuition de ce résultat vient de la vision des points du bord de martin comme les solution d'un problème de minimisation d'entropie.

2 Notion de quasi-fonction

Dans cette section, X désigne un ensemble dénombrable muni de la topologie discrète. On commence par construire une compactification de l'ensemble des classes de proportionnalité de fonctions réelles positives d'un espace X par la relation de proportionnalité. La stratégie adoptée dans cette partie sera de voire les classes de proportionnalité comme des éléments de $[0, +\infty]^{X^2}$ et de prendre leur adhérence. On utilisera la notion de produit usuel sur $[0, +\infty[$ en ajoutant les conventions suivantes :

1. Soit $x \in]0, +\infty]$, on pose $+\infty \times x = +\infty$
2. On dit qu'un produit fini est une forme indéterminée si 0 et ∞ apparaissent au moins une fois chacun dans ses facteurs.

Pour rendre l'intervalle $[0, +\infty]$ compact, on utilisera la distance d qui est le tiré en arrière de la distance usuelle sur $[0, 1]$ par la fonction tangente hyperbolique : $d(x, y) := \tanh(x) - \tanh(y)$.

2.1 L'ensemble des quasi-fonctions

Définition 2.1 (espace des quasi-fonctions)**.** Soit X un ensemble au plus dénombrable. On note E l'ensemble des quasi fonctions réelles positives sur X définit comme suit :

$$E \subset [0, +\infty]^{X^2} \times \mathcal{P}(X)$$

Pour tout $f = (Q, S) \in, [0, +\infty]^{X^2} \times \mathcal{P}(X)$, $f \in E$ si et seulement si f vérifie les relations suivantes :

1. Annulation hors du support : si $x \notin S$ ou $y \notin S$, alors $Q(x, y) = 0$
2. transitivité : $\forall x, y, z \in S$ la quantité $Q(x, y)Q(y, z)Q(z, x)$ est soit égale à 1 soit une forme indéterminée.

Soit μ une loi de probabilité à support total sur X, on définit une métrique sur E de la manière suivante : Soit $F, G \in E$, on note :

$$d(F, G) = \sum_{x,y \in X} |\tanh(F(x, y)) - \tanh(G(x, y))|\mu(x)\mu(y)$$

Si $F = (Q, S) \in E$ on notera $\mathbf{Supp}(F) = S$ et $\forall x \in S$, $Q(x, y) = F_x(y) = F(x, y)$, on dit que F est finie si Q ne prend jamais la valeur $+\infty$.

Proposition 2.2. *L'espace des quasi-fonctions ainsi défini est compact.*

L'ensemble E est fermé dans $[0, +\infty]^{X^2}$.

Démonstration. □

Remarque 2.3. On peut définir E comme une partie de $\mathcal{C}^0(X^2, [0, +\infty])$ car S est tout simplement l'ensemble des points tels que $Q(x, x) = 1$. Cependant il est important de distinguer les fonctions ayant un niveau nul de celles ayant un niveau minimal non nul.

On peut bien sûr composer les quasi-fonctions à droite par des fonctions.

Définition 2.4 (Composition)**.** Soit F une quasi-fonction sur X et $\phi : Y \to X$ une application continue, on note pour tout $x, y \in y$ $F \circ \phi(x, y) = F(\phi(x), \phi(y))$

La proposition suivante ne sera pas très utile dans la suite mais elle nous assure que l'on a bien la bonne définition de quasi-fonction, on pourrait se contenter de définir une notion de suite de Cauchy sur les classes de proportionnalité et compactifier.

Proposition 2.5. *Soit $f \in \mathbb{R}_+^X$, on note $\mathcal{I}(f) = (Q, S) \in E$ la quasi fonction définie par $S = \{x \in X; f(x) > 0\}$ et pour tout $x, y \in S$, $Q(x, y) = \frac{f(y)}{f(x)}$ si $x \in S$ et $Q(x, y) = 0$ si $x \notin S$. La fonction $\mathcal{I} : \mathbb{R}_+^X \to E$ a pour fibre les classes d'équivalence pour la relation de proportionnalité et son image est dense.*

Remarque 2.6. Pour toute quasi-fonction $F \in im(\mathcal{I})$, F est finie et pour tout $x \in \mathbf{Supp}(F)$, F_x est dans la fibre $\mathcal{I}^{-1}(F)$.

Affin de prouver la proposition 2.5, on va avoir besoin du lemme suivant qui permet de découper X en niveaux sur lesquels F peut être vue comme une fonction réelle finie.

Définition 2.7 (niveau)**.** Soit $F \in E$, et $x, y \in X$ on note $x \leqslant_F y$ si $F(x, y) > 0$ ou si $x \notin \mathbf{Supp}(F)$, cette relation est transitive et totale et on note $x \sim_F y$ si $x \leqslant_F y$ et $y \leqslant_F x$. On appelle les classes d'équivalence de $\sim_F$ les niveaux de F, on appelle niveau nul le niveau $X \backslash \mathbf{Supp}(F)$. Soit $x \in X$, on note $N^F(x) = \{y \in X | 0 < F(y, x) < \infty\}$ le niveau de x poyr ^{F}, on note ensuite $M^F(x) = \{y \in X | F(x, y) = \infty\}$ l'amont de x et $V^F(x) = \{y \in X, F(x, y) = 0\}$ l'aval de x.

Lemme 2.8. *Pour toute quasi-fonction $F \in E$, il existe une application strictement croissante pour $\leqslant_F$ que l'on note $\alpha : X \to]0, 1[$.*

Démonstration. Comme X est dénombrable, il n'y a qu'un ensemble dénombrable de niveaux, on peut donc créer α par récurrence, on suppose qu'on a défini α sur un ensemble $K \in X$ qui est une union finie de niveaux, on veut définir α sur un niveau $N = N^F(z)$ de F qui n'est pas dans K, $\alpha(K)$ est une partie finie de $]0, 1[$, on note k son cardinal et on numérote ses éléments $\alpha(K) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ avec $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k < 1 = \alpha_{k+1}$, on note ensuite $0 \leqslant n \leqslant k + 1$ le plus grand entier tel que $\alpha^{-1}(\alpha_n) \subset V^F(z)$ on note ensuite $\forall z' \in N(z), \alpha(z') := \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2}$. □

Preuve de 2.5. Soit $f, f' \in \mathbb{R}_+^X$ deux fonctions proportionnelles, c'est-à-dire qu'il existe une constante $0 < \lambda < \infty$ telle que $f' = \lambda f$ alors f' et f s'annulent sur le même ensemble et pour tout couple x, y on a $\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{f'(x)}{f'(y)}$ donc $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(f')$.
On suppose maintenant seulement $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(f') = (Q, S)$, montrons que f et f' sont proportionnelles, si f et f' ne sont pas toutes les deux nulles. Soit $x \in S$ alors $f(x) \neq 0$ et $f'(x) \neq 0$, on note $\lambda = \frac{f'(x)}{f(x)}$ alors pour tout y, on a

$f'(y) = Q(x,y)f'(x) = f(y)\lambda$ donc $f' = \lambda f$.
Montrons maintenant que l'image de I est dense, Soit $F \in E$, on cherche une suite de fonctions f_n telle que $f_n \to F$. On prend $\alpha : X \to [0,1]$ croissante pour $\leqslant_F$ (α existe d'après 2.8) et on utilise une projection $r : X \to X$ qui pour chaque niveau de F choisit un représentant, autrement dit $r^*(=) =\sim_F$ et $r \circ r = r$. On définit ensuite :

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\mathbf{Supp}(F)} n^{\alpha(x)} F(r(x), x).$$

On a alors $\mathbf{Supp}(f_n) = \mathbf{Supp}(f)$ et pour $x, y \in \mathbf{Supp}(F)$, si $0 < F(x,y) < \infty$ alors on a $\forall n, F(x,y) = \frac{f_n(y)}{f_n(x)}$, si $F(x,y) = 0$ alors $\alpha(y) > \alpha(x)$ et donc :

$$\frac{f_n(x)}{f_n(y)} = F(r(x), x)F(y, r(y))n^{\alpha(x)-\alpha(y)} \to 0$$

si $F(x,y) = \infty$, c'est pareil en échangeant x et y. □

2.2 Structure convexe de l'ensemble des quasi-fonctions

Le principal problème que l'on rencontre avec les quasi-fonctions est que E ne peut pas être vu comme une partie d'un espace vectoriel, par contre l'ensemble des quasi-fonctions finies peut être vu comme une partie de l'espace des demi-droites $\mathbb{R}_+^X / \mathbb{R}_+^*$, sur lequel on a une notion de segment et d'enveloppe convexe bien définie, la proposition 2.11 nous garanti que cette notion passe bien à la limite et nous donne la définition de segment suivante :

Définition 2.9 (Segment)**.** Soit $G, H \in E$, on dit que $F \in E$ est dans le segment $[G, H]$, et on note $F \in [G, H]$ si $F = G$, si $F = H$ ou si toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathbf{Supp}(F) = \mathbf{Supp}(H) \cup \mathbf{Supp}(G)$
2. Pour tout $x \in \mathbf{Supp}(H) \cap \mathbf{Supp}(G)$, on est dans un des trois cas suivants

$$\begin{cases} \exists t_x \in]0,1[, F_x = t_x G_x + (1-t_x) H_x \\ F_x \geqslant G_x \text{ et } F_x(y) = G_x(y) \text{ quand } H_x(y) < \infty \\ F_x \geqslant H_x \text{ et } F_x(y) = H_x(y) \text{ quand } G_x(y) < \infty \end{cases}$$

3. $\forall x, y \in \mathbf{Supp}(H) \backslash \mathbf{Supp}(G), F_x(y) = H_x(y)$
4. $\forall x \in \mathbf{Supp}(H) \backslash \mathbf{Supp}(G), F_x \geqslant H_x$
5. $\forall x, y \in \mathbf{Supp}(G) \backslash \mathbf{Supp}(H), F_x(y) = G_x(y)$
6. $\forall x \in \mathbf{Supp}(G) \backslash \mathbf{Supp}(H), F_x \geqslant G_x$

Cette définition peut être exprimée de manière beaucoup plus simple en disant que l'ensemble :

$$\mathcal{R}_E := \left\{ (F, G, H) \in E^3 \middle| F \in [G, H] \right\}$$

est défini comme $\mathcal{R}_E = adh(\mathcal{I}(\mathcal{R}))$ où $\mathcal{R} \subset (\mathbb{R}_+^X)^3$ est défini comme :

$$\mathcal{R} := \left\{ (tg + (1-t)h, g, h) \middle| t \in [0,1], g, h \in \mathbb{R}_+^X \right\}$$

Remarque 2.10. Le segment $[G, H]$ n'est pas toujours homéomorphe à l'intervalle $[0, 1]$, par exemple pour toute quasi-fonction non nulle G, on a $[0, G] = \{0, G\}$, si G et H on un nombre fini de niveaux, $[G, H]$ est homéomorphe à un CW-complexe de dimension finie, en général c'est un CW-complexe.

Proposition 2.11. *Soit $F, G, H \in E$ toutes différentes et telles que $F \in [G, H]$ alors il existe trois suites de quasi-fonctions finies $(f_n), (g_n), (h_n)$ telles que $f_n = h_n + g_n$ et $h_n \neq f_n \neq g_n$ et $\mathcal{I}(f_n) \to F$, $\mathcal{I}(g_n) \to G$, $\mathcal{I}(h_n) \to H$.*
Réciproquement, la relation $\{F, G, H | F \in [G, H]\}$ est fermée dans E^3 et si f, g, h sont des fonctions réelles finies, et que $f \in [g, h]$ pour la définition classique dans les espaces vectoriels, alors $\mathcal{I}(f) \in [\mathcal{I}(g), \mathcal{I}(h)]$.

Démonstration. On commence par montrer que la relation est fermée, on remarque directement que les conditions 2. 3. 4. et 5. sont fermées, ensuite il suffit de remarquer que les cas 2 et 3 de la condition 2. ainsi que les cas d'égalité $F = G$ et $F = H$ correspondent aux limites $t_x \to 0$ et $t_x \to 1$.
Montrons maintenant la densité des fonctions finies.
Soit $F \in [G, H]$, on veut créer une application $\alpha : X \to \mathbb{R}$ invariante par $\sim_H$ et croissante pour $\leqslant_H$ avec une projection $r_H : X \to X$ qui désigne un représentant pour chaque niveau de H et une famille de réels $A : X/\sim_H \to]0, +\infty[$ ainsi qu'une application $\xi : X \to \mathbb{R}$ $\sim_H$-invariante et strictement croissante sur les fibres de α et on pose

$$h_n(x) := \mathbb{1}_{\mathbf{Supp}(H)} A(x) H(r_H(x), x) n^{\alpha(x)} log(n)^{\xi(x)} \underset{n\to\infty}{\to} H$$

ainsi que $\beta : X \to \mathbb{R}$ invariante par $\sim_G$ et strictement croissante pour $\leqslant_G$, $r_G : X \to X$, $B : X \to]0, \infty[$ qui vérifient les mêmes propriétés pour G, et alors :

$$g_n(x) := \mathbb{1}_{\mathbf{Supp}(G)} (B(x) G(r_G(x), x) n^{\beta(x)} \underset{n\to\infty}{\to} G$$

On veut choisir α, β, A, B de manière à ce que $f_n := g_n + h_n$ converge vers F dans E.
Soit $N \subset X$ un niveau non nul de G, $\leqslant_H$ est une relation transitive totale sur N. on note

$$N'_+ = \left\{x \in N, F_x =_{(G_x < \infty)} H_x\right\}; N'_- = \left\{x \in N, F_x =_{(H_x < \infty)} G_x\right\}$$

$$N'_0 = \{x \in N, \exists t \in]0, 1[, F_x = tG_x + (1 - t)H_x\}$$

On a supposé $F \in [G, H]$ donc $N = N'_+ \cup N'_- \cup N'_0$. On veut créer une partition de N de la forme $N = N_+ \cup N_- \cup N_0$ avec $N_+ \subset N'_+$, $N_0 \subset N'_0$ et $N_- \subset N'_-$ et pour tout $x \in N_+, y \in N_0, z \in N_-$, on a $x >_H y >_H z$, on note $N_+ >_H N_0 >_H N_-$.

On remarque d'abord que pour tout $x, y \in N$ si $y \leqslant_H x$ et $x \in N'_-$ alors $y \in N'_-$; en effet, $H_x(y) < \infty$ donc $F_x(y) = G_x(y) \in]0, +\infty[$ donc $F_y =_{(H_x < \infty)} G_y$ et $(H_y < \infty) \subset (H_x < \infty)$ et si $x \in N'_0$ et $y <_H x$ alors $y \in N'_-$, en effet $F_x(y) = tG_x(y)$ et $(H_x > 0) \subset (H_y = \infty)$ donc $F_y =_{(H_y < \infty)} G_y$ enfin, si $x \in N'_0$

et $y \sim_H x$ alors $F_y = t'G_y + (1-t')H_y$ avec $t' := \frac{tG_x(y)}{tG_x(y)+(1-t)H_x(y)}$.

On remarque ensuite que N'_+, N'_0 et N'_- sont disjoints hors de leur intersection commune :

$$N'_+ \cap N'_0 \cap N'_- = \left\{x \in N; G_x =_{(H_x<\infty, G_x<\infty)} H_x\right\}$$

Soit $y, x \in N$, on suppose $y \leqslant_H x$ et $x \in N'_+ \cap N'_0 \cap N'_-$ alors, comme $x, y \in N$ on a $0 < G_x(y) < \infty$ donc

$$G_y = \frac{G_x}{G_x(y)} =_{(H_x<\infty, G_x<\infty)} \frac{H_x}{H_x(y)} = H_y.$$

Et on remarque $y \leqslant_H X$ et $y \leqslant_G x$, donc l'évènement $(H_x < \infty, G_x < \infty)$ contient $(H_y < \infty, G_y < \infty)$, on en conclut que $y \in N'_+ \cap N'_0 \cap N'_-$.

Si l'union $N = N'_+ \sqcup N'_- \sqcup N'_0$ est disjointe alors on a bien $N'_+ >_H N'_0 >_H N'_-$, sinon on a $N = N'_+ \cup N'_0$, et on note $N_- = \varnothing, N_0 = N'_0, N_+ = N'_+ \backslash N'_0$ on dit alors que le niveau N est impropre, si de plus $N_+ = \varnothing$ alors on dit que le niveau N est totalement dégénéré, dans le cas disjoint, on dit que N est impropre si $N = N_+$ ou $N = N_-$.

Soit N un niveau propre de G et L un niveau de H, on dit que L est au dessus de N si il existe $M \leqslant_H L$ tel que $L \cap N \subset N_+ \cup N_0$ et on dit que L est en dessous de N si il existe $M \geqslant_H L$ tel que $L \cap N \subset N_- \cup N_0$, si N est impropre, on dit que L est au dessus de N si il existe $M \leqslant_H L$ tel que $L \cap N \subset N_+$.

Soit $\beta : X \to [0,1]$ strictement croissante pour $\leqslant_G$ Soit N un niveau propre de G, si $N_0 \neq \varnothing$ alors il existe un unique niveau M de H tel que $N_0 = N \cap M$, on dit que M est le niveau voisin de N soit $x \in N_0$ un point base arbitraire on prend $0 < t < 1$ tel que $F_x = tG_x + (1-t)H_x$, on a alors

$$F_x = tG_{r_G(x)}G(r_G(x), x) + (1-t)H_{r_H(x)}H(r_H(x), x)$$

On pose alors $\alpha(x) = \beta(x)$, $B(x) = tG(r_G(x), x)$ et $A(x) = (1-t)H(r_H(x), x)$, si $y \sim_H (x)$ on note $A(y) = A(x)$ et pour tout $y \in N$, on note $B(y) = B(x)$.
Si y est dans un niveau de G impropre ou si N_0 est vide, on note $B(x) = 1$, de même si le niveau de y pour H n'a pas de voisin alors on pose $A(y) = 1$.
On doit maintenant vérifier les trois propriétés suivantes :

1. Chaque niveau de H est voisin d'au maximum un niveau propre de G. En effet si M est voisin des niveaux propres N et P de G alors soit $x \in M \cap N$ et $y \in M \cap P$, on dispose de $0 < t, t' < 1$ tels que

$$F(x,y) = tG(x,y) + (1-t)H(x,y)$$
$$\text{et } F(y,x) = t'G(y,x) + (1-t')H(y,x)$$

en particulier, si $G(x,y) = 0$ alors $F(x,y) = (1-t)H(x,y)$ et $G(y,x) = \infty$ donc $F(y,x) = \infty = \frac{H(y,x)}{1-t}$, ce qui est absurde donc $N = P$. Cela nous garanti que A et B sont définis de manière unique.

2. Sur son domaine de définition α est strictement croissante. En effet, si $x <_H y$ et si on dispose de $0 < t, t' < 1$ tels que

$$F_x = tG_x + (1 - t)H_x$$

$$\text{et } F_y = t'G_y + (1 - t')H_y$$

alors $F(x, y) = \infty$ donc $F(y, x) = 0$ et donc $G(y, x) = 0$ donc $\alpha(x) = \beta(x) < \beta(y) = \alpha(y)$

3. Si un niveau M de H est au dessus d'un niveau N de G alors $\alpha(M) > \beta(N)$

On veut maintenant définir α sur les niveaux de H qui ne sont pas voisins d'un niveau propre de G. Soit $\theta : X \to [0, 1]$ strictement croissante pour $\leqslant_H$, pour tout niveau M qui est au dessus de tous les niveaux de G, on pose $\alpha(M) = 2 + \theta(M)$ et pour tout niveau L qui est en dessous de tous les niveaux non nuls de G, on pose $\alpha(L) = \theta(L) - 2$.
Si M n'est dans aucun des cas précédents, alors, on note

$$\alpha(M) = \sup\{\beta(N); N \in X/\sim_G, M \text{ est au dessus de } N\}$$

si il existe N un niveau en dessous de M tel que $\alpha(M) = \beta(N)$ alors on note $\xi(M) = 1 + \theta(M)$, si N est au dessus de M, on note $\xi(M) = \theta(M) - 2$ sinon on note $\xi(M) = \theta(M)$.
On vérifie bien que $f_n = h_n + g_n$ converge vers F. □

Définition 2.12 (Enveloppe convexe)**.** Soit A une partie de E, on note $C(A)$ son enveloppe convexe, définie comme la plus petite partie de E telle que $A \subset C(A)$ et

$$\forall F \in E, \forall G, H \in C(A), F \in [G, H] \Rightarrow F \in C(A).$$

On note $\bar{C}(A)$ l'adhérence de $C(A)$, qu'on appelle adhérence convexe de A

Définition 2.13 (Points minimaux)**.** Soit A une partie fermée et convexe de E, on dit que $F \in A$ est minimale si pour tout segment $F \in [G, H] \subset A$ on a $G = F$ ou $H = F$. On note $\delta(A)$ l'ensemble des points minimaux de A.

D'après le théorème de Krein-Milman, on sait déjà que dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, pour tout convexe compact A (pour la topologie de convergence simple), l'application affine :

$$\Psi : Prob(\bar{\delta}(A)) \to A; \nu \mapsto \int_{x \in \bar{\delta}(A)} x d\nu(x)$$

est surjective et continue pour la topologie faible-* sur $Prob(\bar{\delta}(A))$.

On aimerait aussi voir les fonctions de l'adhérence convexe de A comme des barycentres de points de A, cependant A n'a pas de structure affine, on est donc obligés de définir la famille de poids relativement à chaque point de X, on utilisera la définition suivante :

Définition 2.14 (Mesures positives)**.** Soit (K, d) un espace métrique compact, on appelle mesure positive une application $\alpha : \mathcal{B}(K) \to [0, +\infty]$ simplement additive et telle que pour toute famille disjointe $(A_i) \in \mathbb{B}(K)^I$, l'ensemble $\{i \in I, \alpha(A_i) \neq 0\}$ est dénombrable, on demande de plus à ce que toutes les fonctions continues sur K soient intégrables pour α c'est-à-dire que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0_+(K), \sup_{\substack{F=\sum F_i \mathbb{1}_{U_i} \\ F \leqslant f}} \sum F_i \alpha(U_i) = \inf_{\substack{G=\sum G_i \mathbb{1}_{V_i} \\ f \leqslant G}} \sum G_i \alpha(V_i) =: \int f d\alpha$$

où $\mathcal{C}_+(K)$ désigne l'ensemble des applications continues positives sur K et les sommes sont finies.
On note $D(K)$ l'ensemble des mesures positives quotienté par la relation

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}^0_+(K), \int f d\alpha = \int f d\beta.$$

Remarque 2.15. L'ensemble $D(K)$ est stable par combinaison linéaire à coefficients dans $[0, +\infty]$ et contient les mesures de Dirac.

Définition 2.16 (Topologie)**.** On muni $D(K)$ de la topologie de la convergence faible sur les fonctions continues, c'est à dire qu'une suite de mesures (α_n) tend vers une mesure α si et seulement si pour toute fonction continue positive $f : K \to \mathbb{R}_+$, on a :

$$\tanh\left(\int_{x\in K} f(x) d\alpha_n(x)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tanh\left(\int_{x\in K} f(x) d\alpha(x)\right)$$

Cette topologie rend $D(K)$ compact.

Démonstration. On définit la fonction suivante :

$$\mu \overset{\phi}{\mapsto} \left(f \mapsto \int_{x\in K} f(x) d\mu(x)\right).$$

Il suffit de montrer que $\phi(D(K))$ est fermé dans $[0, +\infty]^{\mathcal{C}^0_+(K)}$. Soit une application $\psi : \mathcal{C}_+(K) \to [0, +\infty]$, il existe une mesure positive μ_ψ telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0_+(K), \psi(f) = \int f d\mu_\psi$$

si et seulement si ψ vérifie les conditions suivantes :

1. ψ est linéaire, c'est-à-dire : $\forall \lambda > 0, \forall f \in \mathcal{C}_+(K), \psi(\lambda f) = \lambda \psi(f)$
2. ψ est additive, c'est-à-dire que pour toutes fonctions f, g continues, on a $\psi(f + g) = \psi(f) + \psi(g)$

Ces relations sont toutes deux fermées pour la topologie de convergence faible car elles ont définies comme des intersections de relations fermées. $\square$

Remarque 2.17. Soit d_E la distance définie à 2.1, on rappelle que :

$$d_E(F,G) = \sum_{x,y\in X} |\tanh(F(x,y)) - \tanh(G(x,y))| w(x)w(y)$$

avec w une mesure de probabilité à support total dans X. $D(E)$ ainsi construit est compact et l'application $\alpha \mapsto \alpha(E)$ est continue.

Définition 2.18 (mesure cohérente)**.** Une famille $(\nu_{x,y})_{x,y\in X}$ de meures positives sur E est dite cohérente si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $\forall x \in X$, on a soit $\nu_{x,x}(E) = 1$ et on dit que $x \in \mathbf{Supp}_X(\nu)$ et sinon $\forall y \in X, \nu_{x,y} = \nu_{y,x} = 0$ et on dit que $x \notin \mathbf{Supp}(\nu)$.
2. Pour tout $x, y \in X$
$$\nu_{x,y}(\{G \in E; y \notin \mathbf{Supp}(G)\}) = 0$$
3. Pour tout $x, y, z \in X$, on a
$$\forall G \in E, 0 < G(y,z) < \infty \Rightarrow d\nu_{x,z}(G) = G(y,z) d\nu_{x,y}(G)$$
$$\forall A \subset \{G \in E; G(y,z) = \infty\}; \nu_{x,y}(A) > 0 \Rightarrow \nu_{x,z}(A) = \infty$$
4. Soit $x, y \in \mathbf{Supp}_X(\nu)$ tels que $\nu_{y,x}(E) = 0$, alors $d\nu_{x,y}(E) = \infty$.
5. Pour tous $x, y, z \in X$ et tout $A \in \mathcal{B}(E)$:
$$\nu_{x,y}(A)\nu_{y,z}(A)\nu_{z,x}(A) = \nu_{x,x}(A)\nu_{y,y}(A)\nu_{z,z}(A)$$
ou alors le produit de gauche est une forme indéterminée.

Remarque 2.19. Soit $(\nu_x)_{x\in X}$, une famille de mesures cohérente, l'application :

$$F : (x,y) \mapsto \nu_{x,y}(E)$$

est une quasi-fonction de support $\mathbf{Supp}(\nu)$.

Remarque 2.20. La condition 3 nous garanti que si $\mathbf{Supp}(\nu) = \{F\}$ alors $F(x,y) = \nu_{x,y}(E)$.

Remarque 2.21. Soit A une partie fermée de E, l'ensemble des mesures cohérentes à support dans A est fermé dans $D(A)^{X\times X}$ et donc est compact.

Démonstration. Il suffit de montrer que les conditions 1, 2, 3, 4 et 5 sont fermées dans $D(A)^{X\times X}$. 1 la condition $\nu_{x,x}(E) = 1$ est fermée, en effet, l'application $\nu \mapsto \nu(E)$ est Lipschitzienne, et donc la condition $\nu_{x,x}(E) \neq 1 \Rightarrow \forall y, \nu_{x,y}(E) = 0$ est elle aussi fermée.
Montrons que 2 est une condition fermée, soit $y \in X$, on pose $\varepsilon := \frac{1}{2}\mu(y)\tanh(1)$ et on a alors $d_E(\{G(y,y) = 1\}, \{G(y,y) = 0\}) \geqslant 2\varepsilon$ et donc $\{G(y,y) = 0\}$ est fermé et donc l'ensemble des mesures nulles sur $\{G(y,y) = 0\}$ est bien un fermé.

Soit ν une mesure qui ne vérifie pas 3 pour un triplet x, y, z, alors soit il existe $A \subset E$ tel que on a

$$\nu_{x,z}(A \cap \{0 < G(y,z) < \infty\}) \neq \int_{\cap\{0<G(y,z)<\infty\}} G(y,z) d\nu_{x,y}(G)$$

ou $\nu_{x,y}(A \cap \{G(y,z) = \infty\}) > 0$ et $\nu_{x,z}(A \cap \{G(y,z) = \infty\}) < \infty$. De plus comme la tribut est engendrée par les boules, on peut supposer que A est une boule ; $A = B(x,r)$. Et alors comme le volume des boules est continu à gauche, il existe un intervalle $I = [r - \delta, r]$ de tel que $\forall r \in I, B(x,r)$ vérifie les mêmes propriétés que A, et alors il existe un voisinage V de ν dans lequel $A' := B(x, r - \delta/2)$ vérifie les mêmes propriétés que A pour tout $\nu' \in V$.
De la même manière, on prouve que 4 et 5 forment une condition fermée.

□

On pose maintenant un lemme intermédiaire qui donne une définition analytique de l'adhérence convexe des fermés.

Lemme 2.22. *Soit A une partie fermée de E, L'adhérence convexe de A est l'ensemble des quasi-fonctions :*

$$F : (x,y) \mapsto \nu_{x,y}(A)$$

Pour lesquelles la famille cohérente de mesures $(\nu_{x,y})$ est à support dans A, c'est-à-dire

$$\forall x \in X, \nu_{x,y}(E \backslash A) = 0.$$

Démonstration. On note $K(A)$ l'ensemble des fonctions qui sont définies comme l'intégrale d'une mesure cohérente à support dans A. On commence par montrer que $K(A) \subset \bar{C}(A)$, par construction $K(A)$ est compact, montrons qu'il est convexe. Soit $F_1, F_2 \in K(A)$ et $F \in [F_1, F_2]$, on note $F_1(x,y) = \nu^1_{x,y}(A)$ et $F_2(x,y) = \nu^2_{x,y}(A)$ et alors pour tout $x \in \mathbf{Supp}(F_1) \cap \mathbf{Supp}(F_2)$ tel qu'il existe t tel que $\forall y \in X, F(x,y) = tF_1(x,y) + (1-t)F_2(x,y)$, on pose alors $\forall y \in X, \nu_{x,y} := t\nu^1_{x,y} + (1-t)\nu^2_{x,y}$, et pour tout point x tel que $F(x,y) = F_i(x,y)$ on pose $\nu_{x,y} = \nu_i x, y$ et on vérifie que ν est bien une mesure cohérente, on remarque de plus que $\mathbf{Supp}(\nu) = \mathbf{Supp}(\nu^1) \cup \mathbf{Supp}(\nu^2)$. Soit maintenant $G_0 \in A$, la mesure $\nu_{x,y} = G_0(x,y)\delta_{G_0}$ est une mesure cohérente et vérifie $\nu_{x,y}(A) = G_0(x,y)$ donc $A \subset K(A)$. Ensuite $K(A)$ est minimal car l'ensemble des mesures cohérentes à support fini est dense. □

La définition suivante justifie d'appeler "minimales" les fonctions minimales.

Définition 2.23 (Comparaison)**.** Soit $F, G \in E$, si il existe $H \neq F$ tel que $F \in [G, H]$, on dit que F domine G et on note $F \geqslant G$.

Remarque 2.24. La relation de domination est transitive et fermée et si $f \geqslant g$ au sens usuel des fonctions alors $\mathcal{I}(f) \geqslant \mathcal{I}(g)$.

Démonstration. On montre la transitivité. Soit $F \geqslant G \geqslant H$, et soit M, N deux quasi-fonctions telles que $F \in [M, G]$ et $G \in [H, N]$, alors il existe $L \in [M, N]$ telle que $F \in [H, L]$. C'est vrai si F, G, H sont des fonctions finies au sens classique du terme (F, G, H sont alors les éléments d'un espace affine), en effet, si il existe $t, t' \in [0, 1]$ tels que $F = tG + (1-t)M$ et $G = t'H + (1-t')N$ et donc $F = tt'H + (1-t)M + (t - tt')N$, on note alors $L = \frac{1-t}{1-tt'}M + \frac{t-tt'}{1-tt'}N$, et on a $F = tt'H + (1-tt')L$.
Si maintenant F, G, H sont quelconques, alors il suffit de prendre des suites de fonctions finies $(f_n), (g_n), (h_n)$ qui approchent F, G, H et on a alors une suite (l_n) telle que $f_n \in [h_n, l_n]$ de plus on peut extraire une sous suite convergente de (l_n), soit L sa limite, on a alors $F \in [H, L]$ d'après 2.11. □

On Déduit du lemme précédent un résultat très utile pour la définition du bord de Martin minimal.

Lemme 2.25. *Soit A une partie fermée de E, les points minimaux de l'adhérence convexe $\bar{C}(A)$ sont dans A.*

Démonstration. Soit $F \in C\bar{(}A)$, il existe $(\nu_{x,y}) \in D(A)^{X \times X}$ cohérente et telle que $F(x, y) = \nu_{x,y}(A)$, on suppose que $\mathbf{Supp}(\nu)$ n'est pas réduit à un point, alors on peut décomposer $\mathbf{Supp}(\nu)$ en deux Boréliens disjoints C et B, on restreint ν à C de la manière suivante :

$$d\nu_{x,y}^{|C} = \begin{cases} 0 \text{ si } \nu_{x,x}(C) = 0 \\ \frac{\mathbb{1}_C}{\nu_{x,x}(C)} d\nu_{x,y} \text{ sinon} \end{cases}$$

$\nu^{|C}$ est une mesure cohérente non nulle et $\nu^{|B}$ aussi donc on a deux fonctions $F^{|C} = \nu^{|C}(A)$ et $F^{|B}$ non nulles et telles que $F \in \left[F^{|C}, F^{|B}\right]$ donc F n'est pas minimale. □

Theorem 2.26 (Krein-Milman)**.** *Soit A une partie fermée convexe de E, A est l'adhérence convexe de ses points minimaux.*

Démonstration. Pour la preuve, on fait comme dans le cas des convexes compacts classiques, on veut définir A avec une collection de fonction affines :

$$A = \bigcap_{\phi \in \Phi} \{\phi(a) \leqslant \sup_A(\phi)\}$$

On utilisera la définition suivante :

Définition 2.27. Une fonction $\phi : E \to [-\infty, +\infty]$ est dite affine si ϕ est de la forme :

$$\phi(F) = \psi(F_x)$$

où $x \in X$ et ψ est une forme affine continue sur $\mathbb{R}^X$. On note Φ l'ensemble des fonctions affines.

On voit facilement que $\{F \in E|\psi(F) \leqslant S\}$ est convexe, en effet si $F \in [G,H]$ alors par définition, $F_x \in [G_x, H_x]$.
Montrons maintenant :

$$A = \bigcap_{\phi\in\Phi} \{a|\phi(a) \leqslant \sup_A(\phi)\}$$

Soit $F \notin A$, montrons qu'il existe une application affine ψ telle que $\psi(F) > \sup_A(\psi)$, c'est à dire qu'il existe un point $x \in X$ tel que $F_x \notin \bar{C}(\{a_x|a \in A\})$ on remarque que $\{a_x|a \in A\}$ est convexe donc si on a pour tout x $F_x = a_x$ pour un certain $a \in A$ qui dépend de x alors comme F est une quasi-fonction, a ne dépend que du niveau de x pour F et de plus, si on note $a^x \in A$ le point de A tel que $a^x_x = F_x$ alors pour tous $x, y \in x$, a $x <_F y \Rightarrow a^x(x,y) = \infty, a^y(y,x) = 0$ Donc $F \in C(\{a^x|x \in X\})$ ce qui est absurde.
On passe maintenant à la preuve du théorème de Krein-Milman, soit $a \in A\backslash\bar{C}(\delta(A))$ il existe une fonction affine ψ telle que $\psi(a) > \sup_{\delta(A)} \psi$, de plus l'ensemble $K = \{b \in A|b = \sup_A \psi\}$ est convexe compact et minimal dans A, c'est à dire que pour tout $F \in [G,H]$ si $F \in K$ alors $G \in K$ ou $H \in K$, donc d'après le lemme de Zorn, K contient un point minimal de A, ce qui est absurde. □

2.3 Exemples de quasi-fonctions

La première utilité de la notion de quasi fonction est dé définir la limite d'une suite de fonctions exponentielles dont le rapport tend vers 0 ou $+\infty$.

Définition 2.28. Soit $X = \mathbb{Z}$ et $r \in [0, +\infty]$, on note r^x la quasi-fonction qui à $(x, x+k)$ associe r^k.

Définition 2.29 (Produit de quasi-fonctions)**.** Soit F, G deux quasi-fonctions, on dit que le produit $F \times G$ est bien défini si pour tout couple x, y, le produit $F(x,y)G(x,y)$ n'est pas une forme indéterminée et on note alors $F * G(x,y) = F(x,y)G(x,y)$. Si H est une quasi-fonction telle que $H(x,y) = F(x,y)G(x,y)$ pour tout couple x, y tel que le produit n'est pas une forme indéterminée alors on dit que H est un produit de F et G et on note $F \times G$ l'ensemble des produits de F et G.

Définition 2.30 (Caractère de groupe)**.** Soit (Γ, e) un groupe, on dit qu'une quasi-fonction χ sur Γ est un caractère si $\mathbf{Supp}(\chi) = \Gamma$ et si

$$\forall x, y \in \Gamma, \chi(x,y) = \chi(\gamma x, \gamma y).$$

Remarque 2.31. Un caractère fini est un morphisme de groupe, par contre un caractère n'est pas toujours une limite de morphismes de groupes.

Proposition 2.32. *Soit χ un caractère de Γ, l'action de Γ à gauche est strictement croissante pour $\leqslant_\chi$ et le niveau de e (noté $N(e)$) est un sous groupe de Γ. De plus, pour tout $x \in [N(e), N(e)]$, $\chi(e,x) = 1$ et pour tous $x, y \in \Gamma$, si $x \geqslant_\chi y \geqslant_\chi e$ et $x >_\chi e$, alors $[x,y] <_\chi x$.*

Démonstration. Soit $g, h \in N(e)$, on a $\chi(e, gh) = \chi(e, g)\chi(g, gh) = \chi(e, g)\chi(e, h)$ est fini, et $\chi(e, h^{-1}) = \chi(h, e)$ est fini aussi donc $N(e)$ est stable par composition interne et par inverse. Soit maintenant $x, y \in \Gamma$ tels que $x \geqslant_\chi y \geqslant_\chi e$ alors on a

$$\chi(x, [x, y]) = \chi(x, xyx^{-1}y^{-1}) = \chi(e, yx^{-1}y^{-1}) = \chi(y^{-1}, x^{-1})\chi(e, y^{-1}) = 0$$

□

3 Bord de Martin et bord de Martin minimal

3.1 Chaînes de Markov et fonctions harmoniques

Définition 3.1 (Chaîne de Markov à temps discret)**.** Soit X un ensemble dénombrable, on appelle chaîne de Markov une application $p : X \times X \to [0, 1]$ telle que $p(x, \cdot)$ soit une mesure de probabilité sur X, pour une partie A de X, on note par abus $p(x, A) = \sum_{y \in A} p(x, y)$. On dit que (X, p) est un espace Markovien.

Définition 3.2. Soit (X, p) un espace Markovien, on dit que p est à support fini si pour tout x, il existe un ensemble fini $A_x \subset X$ tel que $p(x, A_x) = 1$.

Définition 3.3 (Chaîne de Markov induite par un groupe)**.** Soit $X \leftharpoondown G$ une action de groupe sans noyau et μ une mesure de probabilité sur G, on note p_μ ou simplement μ la chaîne de Markov sur X définie par :

$$\forall x, y \in X, p_\mu(x, y) := \mu(\{g \in G; xg = y\})$$

Pour la suite on supposera toujours que (X, p) est un espace Markovien dénombrable et que p est à support fini

Définition 3.4 (Produit de chaînes de Markov)**.** Soit p et q deux chaînes de Markov, on note $p * q$ leur produit définit par :

$$p * q : (x, A) \mapsto \sum_{y \in X} q(y, A)p(x, y)$$

Définition 3.5. Une chaîne de Markov est dite irréductible si pour tout $x \in X$ et pour tout ouvert $U \subset X$, il existe un entier naturel n tel que $p^n(x, B) > 0$.

Définition 3.6 (Poussé en avant d'une mesure)**.** Soit ν une mesure sur X, on note $\nu * p$ la mesure sur X définie par :

$$\nu * p(A) = \sum_{x \in X} p(x, A) d\nu(x)$$

Définition 3.7 (fonction harmonique)**.** On dit qu'une fonction $h : X \to [, +\infty]$ est p-harmonique si

$$\forall x \in X, h(x) = \sum_{y \in X} p(x, y)h(y) =: p_* h(x)$$

on dit que f est sur-harmonique si $h \geqslant p_* h$ et que h est sub-harmonique si $h \leqslant p_* h$. On dit qu'une quasi-fonction H est p-harmonique si pour tout $x \in$ $\mathbf{Supp}(H)$, H_x est p-harmonique, pareil pour super ou sub-harmonique.

Définition 3.8 (Laplacien)**.** Soit p une chaîne de markov sur X, on désigne son Laplacien (noté Δ_p ou Δ quand il n'y a pas d'ambiguïté) comme l'opérateur linéaire $\Delta : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$ qui à une fonction f associe :

$$\Delta_p f : x \mapsto \sum_{y \in X} p(x, y) f(y)$$

Proposition 3.9. *L'ensemble des fonctions harmonique est le noyau du Laplacien.*

Lemme 3.10. *Soit p et q deux chaînes de Markov et H une quasi-fonction. Si H est p-(sur-)harmonique et q-(sur-)harmonique alors H est $p * q$-(sur-)harmonique.*

Démonstration. Soit H une quasi-fonction harmonique pour p et q soit $x \notin$ $\mathbf{Supp} H$, on a pour tout $y \notin \mathbf{Supp}(H)$, $p(x, \mathbf{Supp}(H)) = q(y, \mathbf{Supp}(H))$ donc :

$$p * q(x, \mathbf{Supp}(H) = \sum_{y \in X} q(y, \mathbf{Supp}(H)) p(x, y)$$

$$= \sum_{y \in X \setminus \mathbf{Supp}(H)} q(y, \mathbf{Supp}(H)) p(x, y) = 0$$

Soit maintenant $x \in \mathbf{Supp}(H)$, on a

$$\sum_{z \in X} H(x, z) p * q(x, z) = \sum_{y, z \in X} H(x, z) q(y, z) p(x, y)$$

De plus on sait que $\int H(x, y) dp(x, y)$ est finie et pour tout $y \in \mathbf{Supp}(H)$, on sait que $\int H(y, z) dq(y, z) = 1$ donc on peut factoriser l'intégrale et on trouve :

$$\sum_{z \in X} H(x, z) dp * q(x, z) = \sum H(x, y) dp(x, y) \sum H(y, z) dq(y, z) = 1$$

Donc H est bien $p * q$-harmonique. Si on remplace les égalités par des inégalités on a la même chose pour les fonctions sur-harmoniques. $\square$

Proposition 3.11. *L'ensemble des fonctions harmoniques est convexe. Et si de plus $p(x, \cdot)$ est à support fini pour tout x alors l'ensemble des fonctions harmoniques est compact.*

Démonstration. Si $p(x, \cdot)$ est à support fini alors la fonction $F \mapsto \sum F(x, y) p(x, y)$ est continue sur E donc l'ensemble des fonctions harmoniques est fermé et donc compact.
Soit maintenant $G, H \in E$ deux quasi-fonctions harmoniques et $F \in [G, H]$, soit

$x \in \mathbf{Supp}(F)$, comme G et H sont harmoniques, on a $p(x, G_x = \infty) = p(x, H_x = \infty) = 0$, de plus il existe $t \in [0,1]$ tel que $F_x =_{G_x, H_x < \infty} tG_x + (1-t)H_x$ et donc

$$\sum F(x,y)p(x,y) = t\sum G(x,y)p(x,y) + (1-t)\sum H(x,y)dp(x,y) = 1.$$

□

Définition 3.12 (H-process)**.** Soit H une quasi-fonction p-harmonique sur X, on note p^H la chaîne de Markov définie par :

$$p^H(x,y) = H(x,y)p(x,y)$$

Définition 3.13. On dit qu'une quasi-fonction p-harmonique H est harmonique naturelle si H est limite de fonctions sur-harmoniques finies, sinon on dit que H est une fonction harmonique exotique.
On note $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble des fonctions harmoniques positives finies sur X, $\hat{\mathcal{H}}(X)$ l'ensemble des quasi-fonctions harmoniques naturelles et $\mathcal{H}^+(X)$ l'ensemble des fonctions sur-harmoniques.

Remarque 3.14. L'ensemble des fonctions harmoniques naturelles est fermé par définition et donc compact, de plus, c'est l'adhérence d'un convexe, donc il est aussi convexe.

Proposition 3.15. *Si* $\boldsymbol{Supp}(H) = X$ *et si* H *est finie, alors on a une bijection entre l'ensemble des fonctions p-harmoniques et l'ensemble des fonctions* p^H*-harmoniques. À chaque fonction p-harmonique* F*, on associe*

$$F^H : (x,y) \mapsto F(x,y)H(y,x).$$

Définition 3.16 (Uniformité)**.** Soit $\Gamma \curvearrowright X$ une action de groupe, on dit que la chaîne de Markov p est Γ-uniforme si pour tout $x \in X, A \in B, \gamma \in \Gamma$ on a $p(x,A) = p(\gamma x, \gamma A)$.

Définition 3.17. Soit μ une mesure sur un groupe Γ qui agit sur X, on dit que p est la chaîne de Markov associée à μ si :

$$\forall x \in X, A \in B, p(x,A) = \mu(\{\gamma \in \Gamma; \gamma x \in A\}).$$

Alors p est uniforme.

Définition 3.18 (Caractère Harmonique)**.** Soit Γ un groupe et p une chaîne de Markov associée à la mesure μ, On dit qu'un caractère χ de Γ est Harmonique si :

$$\int_{x \in X} \chi(e,x)d\mu(x) = 1.$$

Proposition 3.19. *Un caractère harmonique est une fonction harmonique naturelle.*

Theorem 3.20. *Si p est irréductible et soit* H *une quasi-fonction p-harmonique naturelle non nulle* $\boldsymbol{Supp}(H) = X$ *et* H *est finie.*

Démonstration. Soit $x, y \in X$, on note $c(x,y) = \max_{n\in\mathbb{N}} p^n(x,y)$, comme p est récurrente, $\forall x, y, c(x,y) > 0$ et de plus on a pour toute fonction harmonique h et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h(x) = \sum_{y\in X} p^n(x,y)h(y) \geqslant c(x,y)h(y)$$

donc en particulier $h(x) = 0 \Rightarrow H = 0$ et pour tout couple x, y :

$$c(y,x) \leqslant \mathcal{I}(h)(x,y) \leqslant \frac{1}{c(x,y)}$$

de plus $\mathcal{I}(\mathcal{H}(X))$ est dense dans $\hat{\mathcal{H}}(X)$, donc pour toute quasi-fonction harmonique H on a :

$$c(y,x) \leqslant H(x,y) \leqslant \frac{1}{c(x,y)}$$

et donc H n'a qu'un seul niveau. □

3.2 Compactification de Martin

Dans cette partie, on prendra pour contexte X un espace discret dénombrable, p peut alors être vu comme une fonction $p : X \times X \to [0,1]$.

Définition 3.21 (Marche aléatoire)**.** Soit $(x_n) \in X$ une suite de variables aléatoires, on dit que (x_n) est une marcha aléatoire qui suit p si

$$\mathbb{P}(x_{n+1} \in A | x_n) = p(x_n, A).$$

Dans ce cas, la loi de (x_n) ne dépend que de P et de la loi de x_0, et si x_0 suit ν alors x_n suit $\nu * p^n$

Définition 3.22 (Noyau de Green)**.** Soit $x, y \in$, soit (x_n) une marche aléatoire qui suit p avec $x_0 = x$, on note $\mathcal{G}(x,y)$ la fonction de Green définie par :

$$\mathcal{G}(x,y) = \mathbb{E}\left(\#\{n; X_n = y\}\right) = \sum_n p^n(x,y).$$

Si $\mathcal{G}$ est finie, alors on dit que p est transciente, si $\mathcal{G}$ ne s'annule jamais, on dit que p est irréductible.

Proposition 3.23 (Inégalité triangulaire)**.** *Soit $x, y, x \in X$, on a :*

$$\mathcal{G}(x,y)\mathcal{G}(y,z) \leqslant \mathcal{G}(x,z)\mathcal{G}(y,y).$$

Démonstration. On commence par supposer $\mathcal{G}(x,y)\mathcal{G}(y,z) > 0$, sinon l'inégalité est évidente.
Soit $(X_n(\omega))$ la marche aléatoire qui part de x et qui suit p, on note $C(y) = \#\{n; X_n = y\}$ et $C(z) = \#\{n; X_n = z\}$, on a alors par définition de G :

$$\mathbb{E}(C(y)) = \mathcal{G}(x,y); \mathbb{E}(C(z)) = \mathcal{G}(x,z)$$

On note n_0 le premier indice tel que $X_{n_0} = y$, on a éventuellement $n_0 = \infty$, on note ensuite $C(y,z) = \#\{n \geqslant n_0; X_n = z\}$, on a bien sûr $C(y,z) \leqslant C(z)$ et on remarque que (X_{n-n_0}) restreinte à l'évènement non négligeable $(n_0 < \infty)$ est une marche aléatoire qui part de y et qui suit p donc :

$$\mathbb{E}(C(y,z)|n_0 < \infty) = \mathcal{G}(y,z)$$

et $(n_0 = \infty) \Rightarrow (C(y,z) = 0)$ donc :

$$\mathbb{E}(C(y,z)) = \mathbb{P}(n_0 < \infty)\mathcal{G}(y,z)$$

On remarque aussi $C(y) = \#\{n \geqslant n_0; X_n = y\}$ donc

$$\mathbb{E}(C(y)) = \mathbb{P}(n_0 < \infty)\mathcal{G}(y,y)$$

On multiplie les deux égalités avec $\mathbb{P}(n_0 < \infty) > 0$ et on trouve :

$$\mathbb{E}(C(y))\mathcal{G}(y,z) = \mathcal{G}(y,y)\mathbb{E}(C(y,z))$$

donc en remplaçant les espérances par leurs valeurs, on a

$$\mathcal{G}(x,y)\mathcal{G}(y,z) \leqslant \mathcal{G}(x,z)\mathcal{G}(y,y).$$

Si $\mathbb{P}(n_0 < \infty) = 0$ alors $\mathcal{G}(x,y) = 0$ et donc on a directement l'inégalité. □

Pour pouvoir compactifier X, on va l'envoyer dans $\hat{\mathcal{H}}^+(X) = adh(\mathcal{I}(\mathcal{H}^+(X)$ par la fonction suivante :

$$y \mapsto (G^y : x \mapsto \mathcal{G}(x,y))$$

Cette application composée avec $\mathcal{I}$ est injective car $\Delta G^y = \mathbb{1}_{\{y\}}$. On dit que G^y est la fonction de Green basée en y.

Définition 3.24 (Bord de Martin)**.** On appelle compactification de Martin de (X,p) l'adhérence de l'ensemble $\mathcal{I}(G(X)) := \{\mathcal{I}(G^y); y \in X\}$ et on appelle bord de Martin de X l'ensemble

$$\partial_p X := \bar{X} \backslash \mathcal{I}(G(X)).$$

3.3 Bord de Martin minimal

On définit le bord de Martin minimal comme l'ensemble des fonctions harmoniques naturelles minimales, on verra que c'est une partie du bord de Martin et qu'il correspond aux comportements typiques d'une marche aléatoire.

Définition 3.25 (Fonction harmonique minimale)**.** Soit H une quasi-fonction harmonique naturelle, on dit que H est harmonique minimale si H est un point extrémal de l'ensemble des fonctions harmoniques naturelles.

Dans la suite, on suppose que l'espace Markovien (X,p) vérifie la propriété suivante :

$$\forall y \in X, \forall \varepsilon > 0, |\{x \in X; \mathcal{G}(x,y) \geqslant \varepsilon\}| < \infty \quad \text{(L)}$$

Lemme 3.26. *Soit f une fonction sur-harmonique, il existe une unique fonction harmonique $h : X \to \mathbb{R}$ et une unique fonction $k : X \to \mathbb{R}_+$ tels que*

$$f(x) = h(x) + \sum_{y \in X} k(y)\mathcal{G}(x,y)$$

On dit que h est la partie harmonique de f.

Démonstration. On note Δ le Laplacien de (X,p), défini à 3.8 et dont on rappelle la formule :

$$\Delta f(x) = f(x) - \sum_{y \in X} p(x,y)f(y)$$

Δ est continu pour la topologie de la convergence simple car p est à support fini. On rappelle aussi que $\ker(\Delta) = \mathcal{H}(X)$ et que $\Delta(x \mapsto \mathcal{G}(x,y)) = \delta_y$. Soit f une fonction sur-harmonique positive, on note

$$\tilde{f}(x) = \sum_{y \in X} \mathcal{G}(x,y)\Delta f(y)$$

Montrons $\tilde{f} \leqslant f$, soit $y \in X$, la fonctions $f_y := f - \mathcal{G}(\cdot,y)\Delta f(y)$ est sur-harmonique et $\Delta f_y = \Delta f \mathbb{1}_{X \setminus \{y\}}$, de plus f_y est positive, en effet, si il existe $x \in X$ tel que $f_y(x) < 0$ alors comme f est sur-harmonique, f n'a pas de minimum, donc il existe un ensemble infini $X' \subset X$ tel que $\forall x' \in X', f_y(x') \leqslant f_y(x)$, et donc $\mathcal{G}(x',y) \leqslant -f_y(x)$ ce qui contredit l'hypothèse (L).
On peut donc voire $f - \tilde{f}$ comme la limite simple d'une suite décroissante de fonctions positives, on définit (f^n) par récurrence :

$$f^{n+1} := f^n_{y_n} \text{ où } (y_n) : \mathbb{N} \to X \text{ est surjective}$$

donc $\tilde{f}$ est bien définie et $\tilde{f} \leqslant f$, de plus $\Delta(\tilde{f}) = \Delta(f)$ donc $f - \tilde{f}$ est une fonction harmonique. ☐

Remarque 3.27. Soit f une fonction sur-harmonique positive qui vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, Card\{x \in X; f(x) \geqslant \varepsilon\} < \infty$$

alors la partie harmonique de f est nulle.

Démonstration. Si f vérifie 3.27 alors sa partie harmonique h aussi et donc par principe du maximum $h = 0$. ☐

On peut maintenant prouver le théorème suivant, on rappelle que (X,p) est un espace Markovien dénombrable qui vérifie (L), on suppose de plus que la marche aléatoire est transciente. Et on demande aussi que à ce que pour tout $y \in X$ la fonction $\mathcal{G}(\cdot,y)$ ait un maximum stricte en y. En terme de marche aléatoire, ça revient à dire que la marche aléatoire (X_n) qui suit p et part de $x_0 \in X$ va avec probabilité 1 sortir de toute partie finie, pour tout $y \in X$ la marche na va jamais passer en y avec probabilité non nulle et pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble des $y \in X$ tels que la marche passe en y avec une probabilité supérieure à ε est fini.

Theorem 3.28 (Représentation de Martin [5])**.** *L'ensemble des quasi-fonctions harmoniques naturelles $\hat{\mathcal{H}}(X)$ est l'adhérence convexe du bord de Martin $\partial(X)$, en particulier les fonctions harmoniques minimales sont dans le bord de Martin.*

Pour prouver ce théorème, on va approcher les quasi-fonctions harmoniques naturelles par des fonctions sur-harmoniques de partie harmonique nulle

Lemme 3.29. *Soit h une fonction harmonique et K une partie finie de X, il existe une fonction sur-harmonique h_K de partie harmonique nulle et telle que pour tout $k \in K$ on ait $\Delta h_K(k) = 0$ et $h_K(k) = h(k)$.*

Démonstration. Soit h harmonique et $K \subset X$ finie, on définit K' comme le plus petit ensemble tel que $\forall x \in K, p(x, K') = 1$, on a alors $\Delta(h\mathbb{1}_{K\cup K'}) = 0$ sur K et $\Delta(h\nvDash_{K\cup K'}) \geqslant 0$ sur K'.
Soit maintenant f une fonction qui vérifie $f = h$ sur la frontière $F := K'\backslash K$ et $\Delta(f) = 0$ sur K, montrons $f = h$ sur K. On suppose par l'absurde $f \neq g$ sur K, alors on pose $g = f - h$ ou $g = h - f$ de manière à ne pas avoir $g \leqslant 0$, on que sait $g = 0$ sur F, on prend $x \in K$ tel que $g(x) = \max_{x\in K'} g(x)$, de plus $\delta g(x) = 0$ donc $g(x) = \sum_{y\in X} p(x, y)g(y)$ or pour tout y successeur de x, on a $g(y) \leqslant g(x)$ et donc $g(y) = g(x)$ et donc y maximise g, donc par récurrence, $g(y) = g(x)$ pour tous les états y atteignables par x, donc l'ensemble des états atteignables par x ne rencontre pas F et donc la marche aléatoire partant de x ne sort pas de K, ce qui contredit la condition de transcience.
On veut maintenant créer f sur-harmonique telle que $f = h$ sur F, $\Delta f = 0$ sur K et f n'a pas de partie harmonique. On note $g := \sum_{y\in K} \mathcal{G}(\cdot, y)h(y)$. On note $f_0 = h$, f_0 est sur-harmonique sur K' et est sub-harmonique partout ailleurs, pour tout $n \geqslant 0$, on note

$$\forall x \notin K', f_{n+1}(x) := \sum_{y\in X} p(x, y)f(y), \forall x \in K', f_{n+1}(x) := f_n(x)$$

Si on suppose que $f_n \leqslant \min(h, g)$, f_n est sub-harmonique sur $X\backslash K'$ et $f_n \geqslant f_{n-1}$ alors on a les mêmes propriétés pour f_{n+1}, en particulier f_n converge vers une fonction limite f et f vérifie pour tout $x \notin K'$ la relation limite $f(x) = \sum p(x, y)f(y)$ et comme $f = h$ sur K' et $f \leqslant h$ alors pour $x \in K$, $f(x) \geqslant \sum p(x, y)f(y)$ et pour $x \in K$, $f(x) = \sum p(x, y)f(y)$ donc f est sur-harmonique et Δf est à support dans F, de plus, $f \leqslant g$ donc f vérifie les conditions de 3.27 donc il existe une famille $(k_y)_{y\in F}$ telle que

$$f = \sum_{y\in F} k(y)\mathcal{G}(\cdot, y)$$

en particulier $\mathcal{I}(f)$ est dans l'adhérence convexe $\partial(K)$ de l'ensemble des fonctions de Green ayant leur point de base hors de K, donc en passant à la limite $K \to X$, on a $f \to h$ et $\partial(X) = \bigcap_{K \subset X} \partial(K)$ et donc $h \in \bar{C}(\partial X)$ ce qui conclut la preuve. □

Pour prouver 3.28, on approche la quasi-fonction harmonique H par une suite h_n de fonctions super-harmonique de partie harmonique nulle, qui sont harmoniques sur un ensemble fini K_n avec $X = \liminf K_n$ il existe alors une mesure cohérente ν^n sur l'ensemble des fonctions de Green avec point base hors de K_n par compacité de l'ensemble de mesures cohérentes, quitte à extraire une sous suite, ν^n converge vers une mesure ν sur le bord de Martin ∂X, ce qui prouve le théorème.

3.4 Vision en terme de H-process

On rappelle la définition du H-process pour H une quais-fonction harmonique :

Définition 3.30. Soit H une quasi-fonction p-harmonique, on appelle H-process et on note p^H la chaîne de Marfov définie par :

$$p^H(x, y) = H(x, y)p(x, y).$$

On remarque que l'on peut définir quelque chose de similaire au H-process dans le cas où H est une fonction de Green.

Définition 3.31. Soit $z \in X$, on note p^z la chaîne de Markov sur $\{x \in X | \mathcal{G}(x, z) > 0\}$ par :

$$p^z(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = y = z \\ \frac{\mathcal{G}(y,z)}{\mathcal{G}(x,z)} \text{ si } x \neq z \\ 0 \text{ si } z = x \neq y \end{cases} .$$

p^z est bien une chaîne de Markov, elle correspond à la loi de la marche aléatoire conditionnée à s'arrêter en z. On remarque aussi que si (X_n) est une marche aléatoire transiente alors pour tout $x \in X$:

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathcal{G}(x, X_n)}{\mathcal{G}(X_n, X_n)}\right) \to 1$$

en effet, la quantité $\mathbb{E}\left(\frac{\mathcal{G}(x,X_n)}{\mathcal{G}(X_n,X_n)}\right)$ est croissante, inférieure à 1 et super-harmonique en x et converge vers une limite harmonique car $\mathbb{P}(X_n = x) \to 0$, on note h la limite ainsi construite, on a $h \leqslant 1$ et $h(X_0) = 1$ donc h est constante.
On en déduite que si on note (X_n^H) la marche aléatoire qui suit le H-process p^H alors :

$$\mathbb{E}(\mathcal{G}(\cdot, X_n)) \to H$$

au sens des quasi-fonctions donc si H est dans le bord de Martin minimal, on a pour tout évènement aléatoire $\Omega_n \in \mathcal{F}_n$ (avec $\mathcal{F}_n$ filtration associée à (X_n)) tel que la suite :

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathcal{G}(x, X_n)}{\mathcal{G}(X_n, X_n)}\middle|\Omega_n\right) \to H'$$

alors le suite :

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathcal{G}(x,X_n)}{\mathcal{G}(X_n,X_n)}\middle|\Omega_n^c)\right)\right) \to H''$$

et $H \in [H', H'']$, donc en particulier si H est dans le bord de Martin minimal de X alors $\mathcal{G}(\cdot, X_n^H)$ converge presque sûrement vers H. On peut alors voire (X_n^H) comme la marche aléatoire conditionnée à arriver en $H \in \partial X$.

Si par contre on a une suite δ_n qui converge vers un point H du bord de Martin non minimal, alors le H-process ne converge pas vers H dans le bord de Martin mais vers un point du bord de Martin minimal et la limite du H-process suit la loi ν_{X_0,X_0} où ν est la mesure cohérente sur $\partial_m X$ qui vérifie $\nu_{x,y}(\partial_m X) = H(x,y)$. Ça veut dire qu'une réalisation de la marche aléatoire conditionnée à s'arrêter en δ_n pour n grand ressemble au début à une marche aléatoire conditionnée à partire vers un point du bord de Martin minimal.

4 Le groupe de Heisenberg

On commence par rappeler le définition du groupe de Heisenberg donnée en introduction.

Définition 4.1. On définit le groupe de Heisenberg discret comme le groupe des matrices triangulaires supérieures à diagonale unitaire, de dimension 3 et à coefficients dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire :

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; x, y, z \in \mathbb{Z} \right\} < GL_3(\mathbb{Z})$$

à un élement $\gamma \in \Gamma$ on associe les coordonnées $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma) \in \mathbb{Z}^3$ telles que

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & x_\gamma & z_\gamma \\ 0 & 1 & y_\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on notera par abus $\gamma = (x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$ et donc on verra Γ comme l'ensemble $\mathbb{Z}^3$ muni de la structure de groupe

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + x_1 y_2)$$

On note $\mathcal{Z} := \{(0,0,z); z \in \mathbb{Z}\}$ le centre de Γ et on a une projection canonique :

$$\pi_{\mathcal{Z}} : \Gamma \to \Gamma/\mathcal{Z} = \mathbb{Z}^2; \gamma \mapsto (x_\gamma, y_\gamma).$$

Comme on voit Γ comme l'ensemble $\mathbb{Z}^3$ avec une structure de groupe différente on notera 0 le neutre de Γ même si Γ n'est pas Abélien.
Soit $\delta \in \Gamma$, on note $t^\delta : \Gamma \to \Gamma$ la translation à gauche :

$$t^\delta : \gamma \mapsto \delta\gamma$$

Et on note $I : \Gamma \to \Gamma$ l'automorphisme :

$$I : (x, y, z) \mapsto (y, x, xy - z)$$

Proposition 4.2 (Présentation du groupe de Heisenberg)**.** *Le groupe de Heisenberg admet la présentation finie suivante, soit* $a := (1, 0, 0) \in \Gamma$ *et* $b := (0, 1, 0) \in \Gamma$, *on a :*

$$\Gamma = \langle a, b | [[a, b], a], [[a, b], b] \rangle.$$

4.1 Fonction de partition

Définition 4.3. Soit $\mathbb{F}_{a,b}$ le groupe libre engendré par a et b et $\mathbb{F}^+_{a,b} = \Sigma(\{a, b\})$ le semi-groupe libre engendré par a et b, on note $\pi : \mathbb{F}_{a,b} \to \Gamma$ la projection induite par la présentation de Γ.
Soit $\gamma \in \Gamma$, on note

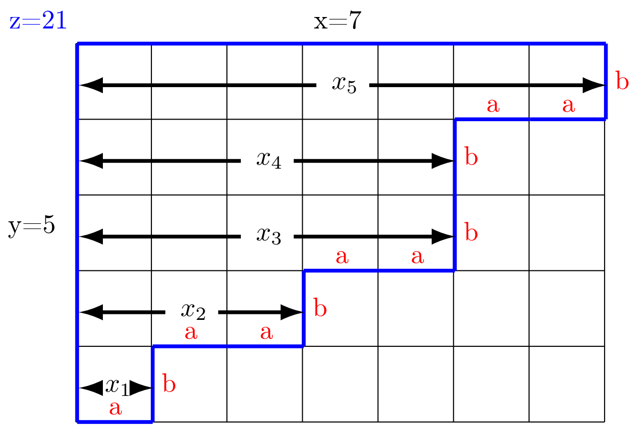
$$p(\gamma) := \#\pi^{-1}(\gamma) \cap \mathbb{F}^+_{a,b}$$

et $p'(\gamma) := \lim_n p(\gamma a^n)$ et $p''(z) := p(z, z, z)$.

Lemme 4.4. $p(x, y, z)$ *est égal au nombre de partitions de* z *en somme de* y *entiers naturels inférieurs à* x*, donc en particulier* $p''(z)$ *compte les partitions de* z*, et* $p'(x, y, z)$ *est égal au nombre de partitions de* z *en somme de* y *entiers positifs, de plus* p' *vérifie*

$$\forall \gamma \in \Gamma \backslash \{0\}, p'(\gamma) = p'(a^{-1}\gamma) + p'(b^{-1}\gamma)$$

Pour la preuve, on considère de dessin suivant :



Dessin représentant $\pi(aba^2ba^2b^2a^2b) = (7, 5, 21)$ et $21 = 1 + 3 + 5 + 5 + 7$.

Démonstration. à tout mot $\omega \in \Sigma(a, b)$ on peut associer un chemin dans le rectangle de largeur $x_{\pi(\omega)}$ et de hauteur $y_{\pi(\omega)}$ ce chemin va du coin en bas à gauche eu coin en haut à droite et quand on lui ajoute le côté haut et le côté gauche on obtient un lacet qui englobe une aire $z_{\pi(\omega)}$ on a alors une correspondance entre les chemins $\omega \in \pi^{-1}(x, y, z)$ et les familles croissantes au sens large $(x_i)_{i \in [\![1,y]\!]} \in [\![0, x]\!]^y$ qui vérifient $\sum_{i=1}^{y} x_i = z$, ensuite la formule

$$p(x, y, z) = p(x - 1, y, z - y) + p(x, y - 1, z)$$

traduit le fait que qu'on a la disjonction de cas suivante : soit la colonne de gauche est entièrement entourée par le lacet ; soit la ligne du bas ne rencontre pas le lacet. □

Le théorème limite ratio, démontré dans [1] nous dit que p ne dépend relativement pas trop de z quand z est grand :

Lemme 4.5 (Théorème limite-ratio)**.** *La quantité* $\frac{p(x,y,z+1)}{p(x,y,z)}$ *tend vers* 1 *uniformément quand* z *et* $xy - z$ *tendent vers l'infini.*

Démonstration. On définit pour un mot $\omega \in \mathbb{F}_{a,b}^{+}$ les fonctions de comptage $f(\omega)$ qui compte le nombre d'occurrences du facteur ba dans ω et f' qui compte le nombre d'occurrences du facteur ab dans ω. Soit $\omega \in \pi^{-1}(x,y,z)$ et $\omega' \in \pi^{-1}(x,y,z+1)$, on dit que ω est voisin de ω' et on note $\omega v \omega'$ si il existe un préfixe $r \in \mathbb{F}_{a,b}^{+}$ et un suffixe $s \in \mathbb{F}_{a,b}^{+}$ tels que $\omega = rbas$ et $\omega' = rabs$, on remarque que ω a $f(\omega)$ voisins et ω' a $f'(\omega')$ voisins et de plus si $\omega v \omega'$ alors $|f(\omega) - f'(\omega')| \leqslant 2$.
On a ensuite :

$$p(x,y,z) = \sum_{\omega \in \pi^{-1}(x,y,z)} 1 = \sum_{\omega v \omega'} \frac{1}{f(\omega)}$$

et de la même manière :

$$p(x,y,z+1) = \sum_{\omega v \omega'} \frac{1}{f'(\omega')}$$

Dans le cas où $x, y \to \infty$, il suffit de montrer que la contribution des mots ω tels que $f(\omega)$ reste borné est négligeable dans le calcul de $p(x,y,z)$, c'est vrai car pour tout A, on a au maximum $\min\{(x+y)^A, (z+1)^A\}$ mots $\omega \in \pi^{-1}(x,y,z)$ tels que $f(\omega) \leqslant A$ et et dans le cas où x ou y reste borné, il suffit de montrer que la contribution des mots tels que $f(\omega) \neq f'(\omega)$ est négligeable

□

4.2 Mesure Nord-Est

Définition 4.6 (Mesure Nord-Est)**.** On note μ la mesure Nord-Est définie sur Γ comme :

$$\mu := \frac{\delta_a + \delta_b}{2}$$

où δ désigne la mesure de Dirac. On lui associe le noyau de transition q sur Γ défini par :

$$q(\gamma_1, \gamma_2) := \mu(\gamma_1^{-1}\gamma_2)$$

c'est-à-dire que $g(\gamma, \gamma a) = g(\gamma, \gamma b) = \frac{1}{2}$.

On commence par vérifier que (Γ, q) est bien un espace Markovien transcient qui vérifie la propriété (L).

Proposition 4.7. *Le noyau de Green associé à μ est défini comme :*

$$\mathcal{G}(\gamma, \delta) = p(\gamma^{-1}\delta)2^{x_\gamma - x_\delta + y_\gamma - y_\delta}$$

Lemme 4.8. *Le noyau de Green engendré par μ vérifie la propriété (L).*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer que l'ensemble des éléments $\delta \in \Gamma$ tels que $p(\delta) \geqslant \varepsilon 2^{x_\delta + y_\delta}$ est fini, Soit un point $\delta \in \Gamma$ tel que $p(\delta) \geqslant \varepsilon 2^{x_\delta + y_\delta}$. Comme $p(\delta) \leqslant \binom{x_\delta}{x_\delta + y_\delta}$, on a $\binom{x_\delta}{x_\delta + y_\delta} \geqslant \varepsilon 2^{x_\delta + y_\delta}$ or d'après la loi forte des grands nombres, il existe une constante C indépendante de N telle que $\binom{x_\delta}{x_\delta + y_\delta} \leqslant C\sqrt{\frac{1}{x_\delta + y_\delta}} 2^{x_\delta + y_\delta}$, en particulier, l'ensemble des points δ tels que $\mathcal{G}(0, \delta) \geqslant \varepsilon$ est de Cardinal inférieur à $\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^8$. □

Pour l'étude des fonctions harmoniques, on admettra le résultat suivant sans preuve :

Lemme 4.9 (Log-concavité)**.** *Pour tous x, y, z entiers, la quantité $p(x, y, z)^2 - p(x-1, y, z)p(x+1, y, z)$ est positive.*

Démonstration. On le vérifie numériquement pour x, y allant de de 0 à 200, on l'admet pour la suite car je n'ai trouvé de preuve nulle part. □

4.3 Cas Abélien

Dans cette partie, on définit μ' comme la mesure sur $\mathbb{Z}^2$ qui vaut $\frac{1}{2}$ en $a := (1, 0)$ et en $b := (0, 1)$, c'est la mesure image de μ par le morphisme surjectif :

$$(x, y) : \Gamma \to \Gamma/\mathcal{Z} = \mathbb{Z}^2$$

On dit qu'une quasi-fonction H est μ'-harmonique si pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ on a :

$$H((x, y), (x+1, y)) + H((x, y), (x, y+1)) = 2.$$

On reconnaît la formule du triangle de Pascal, en effet, le noyau de Green associé à μ' est :

$$\mathcal{G} : (x, y), (x', y') \mapsto \binom{x' - x + y - y}{x' - x}.$$

On veut montrer que le bord de Martin minimal de μ est l'ensemble des caractères harmoniques.

Commençons par faire un peu de statistiques, soit $X_1, \dots, X_n$ des variables de Bernouilli indépendantes de paramètre p, Soit $k, m \leqslant_n$ on s'intéresse à la loi conjointe des $X_1, \dots, X_k$ avec la condition $\bar{X} := X_1 + \cdots + X_n = m$

Lemme 4.10. *La loi de X_1 sachant $\bar{X} = m$ est une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{m}{n}$ et si le rapport $\frac{k}{n} \to 0$ et $\frac{m}{n} \to l \in [0,1]$ alors la loi de $(X_1, \dots, X_k)$ sachant $\bar{X} = m$ a pour limite la loi de k variables de Bernouilli indépendantes de paramètre l.*

Démonstration. On commence par remarquer que $\bar{X}$ et la loi conjointe des X_i ne dépendent pas de l'ordre des X_i, donc la loi de $X_i' := X_{i|(\bar{X}=m)}$ ne dépend pas de i non plus, et donc $n\mathbb{E}(X_1) = m$. On a bien montré que $\forall i, X_i' \sim \mathcal{B}\left(\frac{m}{n}\right)$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$, soit $k \leqslant \varepsilon n$ et A un événement aléatoire qui ne dépend que de $X_1, \dots, X_{k-1}$, alors

$$\mathbb{P}((X_k' = 1)|A) = \sum_{b=0}^{k-1} \mathbb{P}\left(X_k = 1 \middle| \sum_{j=k}^{n} X_j = m - b\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k-1} X_i = b \middle| A\right)$$

Donc $\frac{l-\varepsilon}{1-\varepsilon} \leqslant \mathbb{P}(X_k = 1|(\bar{X} = m) \cap A) \leqslant \frac{l+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, et ε ne dépend pas de A, ce qui conclut la preuve. On peut aussi calculer explicitement la covariance $Cov(X_i', X_j') = -\frac{m}{n^2}$. $\square$

Ce lemme nous dit simplement que le fait d'imposer la moyenne d'un grand échantillon de variables aléatoires indépendantes laisse les sous échantillons de taille négligeable presque indépendants, c'est ce qui permet de faire des statistiques. Dans le cas de la mesure Nord-Est sur $\mathbb{Z}^2$, on peut ensuite démontrer le théorème de Choquet-Deny à partir du lemme 4.10 :

Theorem 4.11 (Choquet-Deny)**.** *Le Bord de Martin de $\mathbb{Z}^2$ pour la mesure Nord-Est est composé des caractères harmoniques, c'est à dire les quasi-fonctions de type*

$$\chi_r : (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto r^{x_{\gamma_2} - x_{\gamma_1}} (2-r)^{y_{\gamma_2} - y_{\gamma_1}}$$

des semi-caractères, c'est à dire χ_0 restreint à un support de type $[\![-\infty, x_0]\!] \times \mathbb{Z}$ et χ_2 restreint à un support de type $\mathbb{Z} \times [\![-\infty, y_0]\!]$, et enfin de la quasi-fonction nulle (c'est-à-dire à support vide).

Avant de passer à la preuve, on remarque qu'aucune de ces quasi-fonctions ne peut s'écrire comme combinaison convexe des autres, et on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 4.12. *Le bord de Martin de $\mathbb{Z}^2$ pour la mesure Nord-Est est égal au bord de Martin minimal*

Démonstration. Soit (x_n, y_n) une suite dans $\mathbb{Z}^2$ non bornée, alors quitte à extraire une sous suite on est dans un des quatre cas suivants :

1. $\forall n, y_n = y_0$ et $x_n \to +\infty$
2. $\forall n, x_n = x_0$ et $y_n \to +\infty$
3. $x_n, y_n \to +\infty$ et $\frac{x_n}{x_n + y_n} \to p \in [0,1]$
4. x_n ou y_n tend vers $-\infty$.

Dans le cas (3), soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x, y \geqslant 0$, on a par définition :

$$\frac{\mathcal{G}((x,y),(x_n,y_n))}{\mathcal{G}((0,0),(x_n,y_n))} = 2^k \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = x | X_1 + \ldots X_N = x_n).$$

On note $k = x + y$, $N = x_n + y_n$, $p = \frac{x_n}{x_n+y_n}$, et on définit

$$\Omega' = \{a,b\}^N ; \Omega = \{\omega \in \{a,b\}^N, \omega_1 + \cdots + \omega_N = (x_n, y_n)\}$$

On a alors $\mathcal{G}((0,0),(x_n,y_n)) = \frac{card(\Omega)}{card(\Omega')}$ Si on munit Ω' de la loi de probabilité uniforme et qu'on note $X'_i(\omega') = \mathbb{1}(\omega_i = a)$ alors les X'_i sont des variables de Bernouilli indépendantes de probabilité $\frac{1}{2}$ et donc d'après 4.10, si on note $X_i = X'_{i|\Omega}$, les X_i sont des variables de Bernouilli de paramètre p et de covariance $-\frac{p}{N}$. Donc comme $N \to \infty$ on a :

$$\frac{\mathcal{G}((x,y),(x_n,y_n))}{\mathcal{G}(0,(x_n,y_n))} \to (2p)^x(2-2p)^y$$

de plus si on ajoute une constante $(-x', -y')$ à (x_n, y_n) alors on a encore $\frac{x_n - x'}{x_n + y_n - x' - y'} \to p$ et donc en reprenant le même raisonnement, on a :

$$\frac{\mathcal{G}((x,y),(x_n,y_n))}{\mathcal{G}((x',y'),(x_n,y_n))} \to (2p)^{x-x'}(2-2p)^{y-y'}$$

, si $x \geqslant x'$ et $y \geqslant y'$, et pour tout couple de points $(x, y), (x'', y'')$ il existe un point (x', y') tel que $x' = \min(x, x'')$ et $y' = \min(y, y'')$ et donc

$$\frac{\mathcal{G}((x,y),(x_n,y_n))}{\mathcal{G}((x'',y''),(x_n,y_n))} \to (2p)^{x-x''}(2-2p)^{y-y''}$$

donc on a bien $\mathcal{G}(\cdot, (x_n, y_n)) \to \chi_{2p}$. Si $x_n = x_0$ on a $\frac{x_n}{x_n+y_n} \to 0$ et donc pour le raisonnement précédent nous donne aussi $\mathcal{G}(\cdot, (x_n, y_n)) \to \chi_0$ par contre on doit supposer que $x \leqslant x_0$ sinon $\mathcal{G}((x,y),(x_n,y_n))$ est nul pour tout n. Avec le même raisonnement, si $y_n = y_0$ alors la limite des fonctions de Green sera χ_2 avec $\{y \leqslant y_0\}$ comme support. Si maintenant, x_n ou y_n tend vers $-\infty$, aucun point de départ ne permet d'atteindre (x_n, y_n) pour tout n donc $\mathbf{Supp}(\mathcal{G}(\cdot, (x_n, y_n)) \to \varnothing$. □

4.4 Les comportements finis

Soit H une quasi-fonction harmonique naturelle, on dit que le H-process a un comportement fini si pour tout point de départ γ_0, le H-process (γ_n) qui suit q^H a un comportement déterministe à partir d'un certain rang n, c'est à dire que pour n assez grand, on a avec probabilité 1 : $p^h(\gamma_n, \gamma_{n+1}) = 1$, la valeur minimale de n peut dépendre du point de départ γ_0.

Pour détecter les fonctions harmoniques du bord de Martin qui induisent des H-process finis on commence par définir les formes discriminantes de (Γ, μ), on a trois types de formes discriminantes :

1. Les coordonnées $\gamma \mapsto x_\gamma$ et $\gamma \mapsto y_\gamma$.
2. les fonctions du type $\gamma \mapsto z_\gamma + ky_\gamma$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
3. les fonctions du type $\gamma \mapsto (y_\gamma - k)x_\gamma - z_\gamma$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Lemme 4.13. *Soit $\delta_n \in \Gamma$ une suite dont une des formes discriminantes reste bornée, alors quitte à extraire une sous suite, la fonction de green $\mathcal{G}(\cdot, \delta_n)$ converge vers une quasi-fonction $H \in \partial\Gamma$ et le H-process a un comportement fini.*

Démonstration. On va prouver le lemme en faisant une Disjonction de cas.

Soit $\delta_n \in \Gamma$ qui tend vers une limite $H \in \partial\Gamma$. On suppose d'abord que y_{δ_n} reste borné, alors quitte à extraire une sous suite, on a $x_{\delta_{k_0}^{-1}\delta_{k_n}} = 0$ et $\delta_{k_0}^{-1}\delta_n \to H \circ t^{\delta_{k_0}}$, on note $\delta'_n := \delta_{k_0}^{-1}\delta_{k_n}$ et $H' := H \circ t^{\delta_{k_0}}$, comme $y_{\delta'_n} = 0$, on a $\mathcal{G}(\gamma, \delta'_n) = 0$ dès que $y_\gamma > 0$, en particulier, si γ_n suit le H'-process et que $y_{\gamma_0} = 0$ alors $\gamma_n^{-1}\gamma_{n-1} = a$ à chaque étape donc on a un comportement fini, sinon, pour γ qui vérifie $y_\gamma < 0$, on a :

$$\gamma^{-1}\delta'_n = (x_{\delta_n} - x_\gamma, -y_\gamma, z_{\delta'_n} - z_\gamma + x_\gamma y_\gamma)$$

donc si $z_{\delta'_n}$ reste borné, alors

$$p(\gamma^{-1}\delta'_n) = p_{-y_\gamma}(z_{\delta'_n} - z_\gamma + x_\gamma y_\gamma)$$

à partir d'un certain rang n. En particulier, cette quantité est finie, donc on a un nombre fini de réalisation du H'-process partant de γ qui finissent toutes sur une a-orbite à droite donc la marche devient déterministe en un temps fini qui ne dépend que du point de départ γ et pas de la réalisation du H'-process.
Si par contre $z_{\delta'_n} \to \infty$ alors on montre que $\frac{p(a^{-1}\gamma^{-1}\delta'_n)}{p(\gamma^{-1}\delta'_n)} \to 1$, en effet d'après 4.5 H ne dépend pas de z donc c'est .
Si maintenant $x_{delta_n}, y_{\delta_n}$ sont non bornés mais qu'une des formes discriminantes l'est, alors quitte à composer par I et extraire une sous suite, il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $z_{\gamma_0^{-1}\delta_{k_n}} = 0$, on note $H' = H \circ t^{\gamma_0}$ et $\delta'_n = \gamma_0^{-1}\delta_{k_n}$ on a alors pour γ tel que $x_\gamma > 0$, $p(\gamma^{-1}\delta'_n) = 0$ à partir d'un certain rang donc $\gamma \notin \mathbf{Supp}(H')$. Si maintenant $x_\gamma = 0$ alors, on a $p(\gamma^{-1}\delta'_n) = p''(x_\gamma y_\gamma - z_\gamma)$ en particulier si $x_\gamma y_\gamma - z_\gamma < 0$ alors $\gamma \notin \mathbf{Supp}(H')$, toutes ces subtilités ne se voient pas dans le H'-process car le seul état atteignable est $b\gamma$ (car $a\gamma$ n'est pas dans le support) donc on a un comportement déterministe du H'-process. Dans le cas où $x_\gamma < 0$, $a\gamma$ peut être dans le support mais on va montrer que la probabilité d'y passer en suivant le H'-process est nulle. déjà, on remarque que si $x_\gamma < 0$ alors

$$p(\gamma^{-1}\delta'_n) = p(x_{\delta'_n} - x\gamma, y_{\delta'_n} - y_\gamma, -y_{\delta'_n}x_\gamma - z_\gamma + x_\gamma y_\gamma)) \to \infty$$

donc $H'_{|\{x_\gamma<0\}}$ est harmonique, de plus d'après le théorème limite-ratio 4.5 H' ne dépend pas de z_γ si $x_\gamma < 0$ donc d'après 4.11, H' est un semi-caractère dont les niveaux sont les $\{x_\gamma = -k\}$ pour $k \geqslant 1$ donc le H'-process est déterministe $\square$

Theorem 4.14 (Classification des comportements finis)**.** *Soit $\delta_n \in \Gamma$, telle que $\mathcal{I}(\mathcal{G}(\cdot, \delta_n))$ converge vers un point $H \in \partial\Gamma$ du bord de Martin de Γ, alors $x_{\delta_n} + y_{\delta_n} \to +\infty$ et les fonctions discriminantes qui restent bornées sont constantes et on a :*

1. *Si y_{δ_n} et z_{δ_n} restent bornés alors $H = \mathcal{I}(\gamma \mapsto p'(\gamma^{-1}\delta_n)2^{x_\gamma + y_\gamma})$ pour tout n à partir d'un certain rang.*
2. *Si x_{δ_n} et $x_{\delta_n}y_{\delta_n} - z_{\delta_n}$ restent bornés alors $H = \mathcal{I}(\gamma \mapsto p' \circ I(\gamma^{-1}\delta_n)2^{x_\gamma + y_\gamma})$ pour tout n à partir d'un certain rang.*
3. *si z_{δ_n} reste borné et $y_{\delta_n} \to \infty$ alors :*

$$\boldsymbol{Supp}(H) = \{\gamma \in \Gamma | x_\gamma < 0\} \cup \{\gamma \in \Gamma | x_\gamma = 0, z_\gamma \leqslant z_{\delta_n}\}$$

   et pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \{x_\gamma = 0, z_\gamma \leqslant z_{\delta_n}\}$, on a :

$$H(\gamma_1, \gamma_2) = 2^{y_{\gamma_2} - y_{\gamma_1}} \frac{p''(z_{\delta_n} - z_{\gamma_2})}{p''(z_{\delta_n} - z_{\gamma_1})}$$

   et pour tout autre couple $\gamma_1, \gamma_2 \in \boldsymbol{Supp}(H)$

$$H(\gamma_1, \gamma_2) = 2^{y_{\gamma_2} - y_{\gamma_1}} 0^{x_{\gamma_2} - x_{\gamma_1}}$$

4. *si $x_{\delta_n}y_{\delta_n} - z_{\delta_n}$ reste borné et $x_{\delta_n} \to \infty$ alors :*

$$\boldsymbol{Supp}(H) = \{\gamma \in \Gamma | y_\gamma < 0\} \cup \{\gamma \in \Gamma | y_\gamma = 0, x_\gamma y_\gamma - z_\gamma \leqslant x_{\delta_n}y_{\delta_n} - z_{\delta_n}\}$$

   et pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \{y_\gamma = 0\} \cap \boldsymbol{Supp}(H)$, on a :

$$H(\gamma_1, \gamma_2) = 2^{x_{\gamma_2} - x_{\gamma_1}} \frac{p''(x_{\delta_n}y_{\delta_n} - x_{\gamma_2}y_{\gamma_2} - z_{\delta_n} + z_{\gamma_2})}{p''(x_{\delta_n}y_{\delta_n} - x_{\gamma_1}y_{\gamma_1} - z_{\delta_n} + z_{\gamma_1})}$$

   et pour tout autre couple $\gamma_1, \gamma_2 \in \boldsymbol{Supp}(H)$

$$H(\gamma_1, \gamma_2) = 2^{x_{\gamma_2} - x_{\gamma_1}} 0^{y_{\gamma_2} - y_{\gamma_1}}$$

4.5 Quand aucune coordonnée n'est bornée

Il suffit maintenant de traiter le cas dans lequel aucune des coordonnées ni aucune forme discriminante n'est bornée.

Lemme 4.15. *soit ν une mesure de probabilité sur un intervalle I, soit f et g deux fonctions croissantes sur I, alors*

$$\int f d\nu \int g d\nu \leqslant \int f g d\nu$$

avec égalité si et seulement si f ou g est constante sur le support de ν.

Démonstration. On commence par exprimer la quantité :

$$\Delta := \int_I fgd\nu - \int_I fd\nu \int_I gd\nu$$

comme une seule intégrale :

$$\Delta = \int_{x,y\in I^2} \frac{f(x)g(x) + f(y)g(y) - 2f(x)g(y)}{2} d\nu(x)d\nu(y)$$

$$\Delta = \int_{x,y\in I^2} \frac{1}{2} \left(f(x) - f(y)\right)\left(g(x) - g(y)\right)$$

Comme f et g ont le même sens de variation, la quantité $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$ est toujours positive, est est nulle si et seulement si $f(x) = f(y)$ ou $g(x) = g(y)$, donc $\Delta \geqslant 0$ et $\Delta = 0$ si et seulement si f ou g est constante sur le support de ν. □

Theorem 4.16. *Soit* (δ_n) *une suite d'éléments de* Γ *telle que la suite* $K_{\delta_n} : \gamma \mapsto \frac{p(\delta_n\gamma^{-1})}{p(\delta_n)}$ *converge vers une fonction harmonique* $h \in \partial\Gamma$*. Si de plus* x_{δ_n}*,* y_{δ_n}*,* z_{δ_n} *et* $x_{\delta_n}y_{\delta_n} - z_{\delta_n}$ *tendent vers l'infini alors* h *est un caractère harmonique.*

Démonstration. Premièrement, on remarque d'après 4.5 que h ne dépend pas de z. En effet, la quantité $\frac{K_{\delta_n}(\gamma)}{K_{\delta_n}(c\gamma)}$ tend vers 1. On sait alors d'après le théorème de Choquet-Deny (voire [1]) qu'il existe une mesure ν sur $[0,1]$ telle que

$$h = \int_0^1 \chi_{r,1-r} d\nu(r)$$

On note $f(\gamma) = \frac{h(a\gamma)}{h(\gamma)}$, on a alors

$$f(\gamma) = \frac{\int_0^1 r\chi_{r,1-r}(\gamma)d\nu(r)}{\int_0^1 \chi_{r,1-r}(\gamma)d\nu(r)}$$

On suppose par l'absurde que la support de ν n'est pas réduit à un point. D'après 4.9 h est log-convexe, c'est à dire que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a :

$$h(a\gamma)^2 \geqslant h(a^2\gamma)h(a\gamma)$$

Si on note $\nu_\gamma := \chi_{r,1-r}(\gamma)d\nu$, on a :

$$\int_0^1 rd\nu_\gamma(r) \times \int_0^1 rd\nu_\gamma(r) \geqslant \int_0^1 1d\nu_\gamma(r) \times \int_0^1 r^2 d\nu_\gamma(r)$$

comme la fonction $r \mapsto r$ est strictement croissante, ν_γ est atomique d'après 4.15. □

4.6 Méthode heuristique d'estimation de p

La fonction de partition p n'a pas de formule explicite mais peut on peut en estimer une asymptote avec une méthode combinatoire comme dans [4] on voit que l'étude des marches aléatoires permet de retrouver une estimation de $\log(p)$.
Si on admet la log-concavité de p en les variables x et y ainsi qu'une certaine régularité en z. On devine le théorème suivant :

Theorem 4.17. *Soit $x, y, z > 0$ tels que $x + y = 1$ et $z < xy$, soit une suite $(\delta_N)_{N>1}$ telle que $\frac{x_{\delta_N}}{N} \to x$, $y_{\delta_N} + x_{\delta_N} = N$ et $\frac{z_{\delta_N}}{N^2} \to z$, on note $(\gamma_n)_{0\leqslant n \leqslant N}$ la marche aléatoire qui suit μ et part de $\gamma_0 = e_\Gamma$ et conditionnée à arriver en $\delta_N = \gamma_N$, alors la fonction :*

$$g_N : [0,1] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto \left(\frac{x_{\gamma_{\lfloor Nt \rfloor}}}{N}, \frac{y_{\gamma_{\lfloor Nt \rfloor}}}{N}\right)$$

converge en probabilité et dans H^1 vers une fonction g lisse qui vérifie $g(0) = (0,0)$, $g(1) = (x,y)$, $\frac{dg}{dt} \in \mathbb{R}_+^2$, $\int_0^1 g_1(t)\frac{dg_2(t)}{dt}dt = z$ et qui minimise l'entropie :

$$E(g) := \int_{t=0}^1 \frac{dg_2(t)}{dt}\log\left(\frac{dg_2(t)}{dt}\right) + \frac{dg_1(t)}{dt}\log\left(\frac{dg_1(t)}{dt}\right)dt.$$

On a de plus $\frac{\log(p(\delta_N))}{N} \to C^{te}E(g)$.

La preuve de ce théorème que je ne ferais pas dans ce rapport car mon étude de la fonction de partition manque encore trop de résultats se décompose en deux parties, la première consiste à utiliser la log-concavité de la fonction de partition pour démontrer la monotonie de $\mathbb{P}(\gamma_{k+1} = \gamma_k a)$ qui nous garanti que la limite a une dérivé faible et aussi des théorèmes de régularisation qui garantissent l'unicité de la limite.

Ensuite, on remarque que les ω limites doivent maximiser f défini à 4.5 et Justement, l'entropie correspond à un équivalent de $\log(f)$.

Finalement on remarque deux choses :

1. à grande échelle la composante en z des facteurs est négligeable
2. Une marche aléatoire conditionnée à arriver en un point ressemble à grande échelle à un chemin qui maximise une entropie.

Proposition 4.18. *Si S engendre un cône propre où un demi plan alors pour tout point $\gamma_1 \in N(\mathbb{R}^3)$ tel que $\gamma \in adh\left\{\left(\frac{x_\gamma}{\lambda}, \frac{y_\gamma}{\lambda}, \frac{z_\gamma}{\lambda^2}\right) \middle| \mathcal{G}(e,\gamma) > 0, \lambda > 0\right\}$ il existe un unique chemin $(\gamma(t))_{t\in[0,1]}$ de e_Γ vers γ_1 qui maximise l'entropie :*

$$E(\gamma) = \int_0^1 e\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)dt$$

où $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ est la dérivée à droite, c'est à dire :

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} := \lim_{\varepsilon\to 0}$$

et où l'entropie locale e est définie comme :

$$e(x,y) = \sup_{\sum \alpha_s (x_s, y_s) = (x,y)} \sum -\alpha_s \log(\alpha_s)$$

avec $\alpha_s = H(e,s)\mu(s)$ pour une fonction μ-harmonique H.

À partir de cette observation, on déduit le théorème suivant :

Conjecture 4.19. Soit μ une mesure sur Γ dont le support fini S engendre Γ, alors le bord de Martin de Γ pour la mesure μ est égal au bord de Martin minimal si et seulement si le cône engendré par S dans $\mathbb{R}^2$ est différent de $\mathbb{R}^2$.

La preuve de cette conjecture demanderai une étude des marches aléatoires en utilisant une version "quasi-fonction" des outils introduits dans [2] plutôt que des astuces combinatoires utilisant la symétrie , on observerait notamment des comportements nouveaux (qui ressemblent à ceux de la marcha aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$ au bord du cône si il existe des éléments centraux non triviaux atteignables par la marche aléatoire, par exemple si μ charge a, b, c alors on aurait toujours le segment « horizontal » dans le bord de Martin mais aussi des segments « verticaux » au dessus des comportements finis décris dans 4.14

Références

[1] Yves Benoist. Positive Harmonic Functions on the Heisenberg group I. working paper or preprint, December 2019.

[2] Yves Benoist. Positive harmonic functions on the Heisenberg group II. working paper or preprint, December 2019.

[3] H. Hueber and D. Miller. Asymptotics for some green kernels on the heisenberg group and the martin boundary. *Matematische Analen*, 283 :97 – 119, 1989.

[4] Stephen Melczer, Greta Panova, and Robin Pemantle. Counting partitions inside a rectangle, 2019.

[5] Stanley Sawyer. Martin boundaries and random walks. *1991 Mathematics Subject Classification*, 206, 01 1997.