

LP 22 : Phénomènes de diffusion

Eléments imposés : diffusion de particules, thermique, de charges ; marche aléatoire

Niveau : L2

Pré-requis : - Electrocinétique : résistance, loi d'Ohm, flux de charges (L2)

- premier principe de la thermo (L1)
- analyse dimensionnelle (2nd aire)
- équation différentielles, grad (L1)

Biblio : - Hprépa thermodynamique MP/MP* ; PC/PC* ; PSI/PSI*;PT/PT*

- Physique expérimentale, Fruchart
- Grecias Tec et Doc BCPST 1 et BCPST 2

Intro péda :

Cours dans la partie phénomènes de transport, suivant un cours ou on aura parlé de la conduction électrique ainsi on pourra faire des analogies.

La diffusion de matière étant plus visuelle donc plus intuitive pour les élèves, on la traitera avant la diffusion thermique, ce qui nous permettra de faire des analogies entre les 2 pour comprendre les équations liées à la diffusion thermique.

On va déterminer l'équation de la chaleur donc il faudra que les élèves connaissent déjà le premier principe de la thermo vu en L1.

On utilisera également l'analyse dimensionnelle pour déterminer la dimension du coeff de diffusion et ainsi mieux comprendre son sens physique.

Obj : - Connaître les lois régissant les phénomènes de diffusion et les analogies

- Savoir résoudre les équations de diffusion en régime permanent (détermination de profil de température ou de concentration)

Difficultés : - Bien comprendre dans quel sens vont les phénomènes (schéma et explication de chaque équation déterminée)

- ne pas confondre énergie thermique, flux thermique et température (bien redire à quoi correspondent chacun)

TD : étude de cas basé sur ex vie courante, ex profil de température dans le sol + étude d'autres symétries (sphérique par ex)

TP : détermination de résistance thermique ; diffusion de l'ammoniac dans un tube → détermination coeff de diffusion

Intro :

Exp : goutte colorant dans eau → solution tend à s'homogénéiser = du à convection + diffusion

<https://www.youtube.com/watch?v=Mqi4KgR6PzE>

Diffusion thermique : <https://vimeo.com/66102392> → uniquement diffusion

Dans cette leçon on ne va s'intéresser qu'à la diffusion.

Diffusion : phénomène de transport de proche en proche, sans déplacement macroscopique de matière.

Comme on a pu le voir avec les exp qualitatives → phéno lent, des zones les plus concentrées/chaudes vers les moins concentrées/plus froides

I) Diffusion de matière

A) La loi de Fick

On va s'intéresser au nombre de particules traversant une surface dS pendant un temps dt (schéma au tableau).

Pour cela, on va avoir besoin de différentes grandeurs :

- $n^* = N/V$ (en m^{-3}) = densité particulaire (nombre de particules dans un volume V)
- $\delta^2 N = n^* \vec{v} \vec{dS} dt$ = densité de flux (nombre de particules traversant dS pendant) \rightarrow ajouter vdt sur schéma (endroit où se trouvent les molécules qui traverseront dS)
- et on peut définir le vecteur densité de courant de particules : $\vec{j}_N = n^{*etoile} \vec{v}$
- Flux de particule (analogie avec électrocinétique : $i = dq/dt$ ici on a le flux = dN/dt) = nombre de particules traversant S par unité de temps = $\Phi = \iint_S \vec{j}_N \vec{dS}$

En 1855, Adolf Fick (cf diapo) établit la loi phénoménologique de Fick :

$$\vec{j}_N = -D \overrightarrow{grad} n^* \quad \text{ou en 1D : } \vec{j}_N = -D \frac{\partial n^{*etoile}}{\partial x} \vec{e}_x$$

On a bien un signe moins en accord avec ce qui est observé : les particules vont de l'endroit le plus concentré vers les zones les moins concentrées.

Analyse dimensionnelle : vecteur densité de courant = $m^{-2}.s^{-1}$; et la dérivée partielle est en m^{-4} donc D est en $m^2.s^{-1}$: ça s'appelle la **diffusivité** (OdG, cf diapo)

On peut alors déterminer un temps caractéristique de diffusion : $\tau = L^2/D$

Tr : avec tous ces outils on peut faire un bilan sur une surface pour déterminer l'équation de diffusion de la matière

B) Equation de diffusion de la matière

(méthode cf diapo)

Cas unidimensionnel : on fait un bilan sur une tranche entre x et $x+dx$ (schéma au tableau)

$$dN = (n^*(x, t+dt) - n^*(x, t))Sdx = (j_N(x, t) - j_N(x+dx, t))Sdt$$

Si aucune particule formée ou consommée, on a la conservation de la matière qui se traduit par :

$$\rightarrow \frac{\partial n^{*etoile}}{\partial t} = -\frac{\partial j_N}{\partial x}$$

Avec la loi de Fick, on a
$$\frac{\partial n^{*etoile}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^{*etoile}}{\partial x^2}$$

Rq : - phénomène irréversible (dérivée impaire en temps)

- on peut définir une résistance à la diffusion de particules (analogie avec électrocinétique)

$$R_{diff} = \frac{n_A^* - n_B^*}{\Phi_p}$$

R_{diff} s'exprime en $m^{-3}.s$.

Tr : on a vu que les phénomènes de diffusion tendent à homogénéiser les concentrations mais c'est également le cas avec l'énergie thermique

II) Diffusion thermique

A) Analogies avec la diffusion de matière

Cette fois-ci, les grandeurs qui nous intéressent (schéma cf diapo) sont :

- Q : l'énergie thermique
- Φ_{th} : le flux thermique = $\delta Q/dt$
- j_{th} = vecteur densité de flux thermique

Loi équivalente à la loi de Fick = loi de Fourier (1822) : $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad} T$

En faisant bilan d'énergie thermique entre x et x+dx comme pour la diffusion de particule et on applique le premier principe (à détailler si le temps), on trouve l'équation de la chaleur (c = capacité thermique massique et lambda la conductivité thermique en W.m-1.K-1) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Par analogie, on peut définir la diffusivité thermique $D_{th} = \lambda/\rho c$ [m²/s] (OdG lambda cf diapo)

Tr : la résolution de cette équation comme ca n'est pas trivial, on va donc se placer dans le régime permanent

B) Profil de température et résistance thermique

En régime permanent, on n'a plus de dépendance en t $\rightarrow dT/dt = 0$

On a donc

$$0 = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Conditions limites : T(0) = T1 et T(L) = T2

$\rightarrow T = T1 + (T2-T1)/L * x$

Exp : profil de température barre de Cu calorifugé (Fruchart p. 394) \rightarrow tracer de T = f(x)

On peut aussi définir la résistance thermique, par analogie avec électrocinétique ($\Delta U = \Delta T$; $i = \Phi$) :

$R_{th} = \Delta T/\Phi = L/\lambda S$ (en K.W-1)

Données : <https://physique-pt-cluny.monsite-orange.fr/file/a016cc98ec2bb13e2494ea50256faf64.pdf>

Conclusion :

Bilan avec analogie cf diapo

Ouverture : la on a vu uniquement un transport par diffusion = sans mouvement macroscopique mais on verra dans un prochain cours la convection qui elle fait intervenir un mouvement macro de matière

Remarques :

- limites des lois phénoménologique = gradient pas trop important (c'est des DL)

Marche aléatoire :

Il s'agit d'un modèle. On se place sur un axe x séparé en multiples intervalles réguliers. On impose à une particule qu'elle passe à la position de gauche ou de droite, avec un même temps de durée τ , avec

18

une probabilité $\frac{1}{2}$. Pour N sauts, on s'intéresse à la probabilité de trouver la particule en $x_n = n \cdot a$ au bout de $N+1$ sauts.

$$p(x_n, t_{N+1}) = \frac{1}{2} \cdot p(x_{n-1}, t_N) + \frac{1}{2} \cdot p(x_{n+1}, t_N) \quad (7.5)$$

Ok très bien, mais on reste discret, ça ne nous intéresse pas : on va passer en continu, mais cela nécessite deux hypothèses

- τ très faible devant la variation temporelle caractéristique de $p(x, t)$
- test

$$p(x = a, t + \tau) = \frac{1}{2} \cdot p(x - a, t) + \frac{1}{2} \cdot p(x + a, t) \quad (7.6)$$

On effectue alors un développement de TAYLOR à l'ordre pour chaque terme, ce qui amène à

$$\tau \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (7.7)$$