Introduction

Concernant ma méthodologie : je faisais des «métaplans» (ce document est majoritairement constitué de ça), en environ 40 minutes. Le reste de la préparation était alloué à l'écriture du plan.
Quand on écrit un plan, il faut être le plus précis possible, et éviter les formulations vagues, du moins en premier lieu. Par exemple, quand on cherche des applications de la simplicité de $\mathfrak{A}_n$ ($n \neq 4$), il vaut mieux répondre «les dérangements (permutations sans point fixe) engendrent $\mathfrak{S}_n$» que «ça montre qu'on connaît bien les groupes symétriques», même si le second est aussi vrai. Cela demande beaucoup de réflexion et de recul.

Bonne préparation !

Table des matières

1 Topologie

1.0.1 203–Utilisation de la notion de compacité.

Motivation : La notion de compacité permet d'uniformiser des propriétés. Cela permet, souvent, d'avoir des résultats d'existence, par exemple de minima.

I–Compacité et continuité Rappel de la définition de la compacité (séparé + prop de Borel-Lebesgue). Théorème "de Weierstrass" : l'image d'un compact par une fonction continue à valeurs dans un séparé est compact. Application au cas qui arrive dans $\mathbf{R}$: existence d'extrema.
Cas métrique, équivalence avec Bolzano-Weierstrass (toute suite admet une va, etc). Théorème de Heine. Topologie induite sur les fonctions continues qui partent de K. C'est un espace complet (s)si l'arrivée est un espace complet. **dev :** théorème d'Ascoli ; convergence uniforme sur tout compact, théorème de Montel.
Une application : densité des fonctions continues à support compact, qui permet de montrer la continuité de la translation.

II–Compacité dans les espaces de dim finie

a) Sur la droite réelle Bolzano-Weierstrass, les intervalles sont des compacts de $\mathbf{R}$. Théorème de Rolle, et variantes Taylor. Quelques applications sur les racines de polynômes, etc.
Intégrale/sommes à paramètre : caractère C^∞ des fonctions Γ, ζ, etc.
Espace des fonctions tests ; une construction, distributions. Importance de l'espace de Schwartz.
Pour les EDO : lemme des bouts.
Théorème de Weierstrass polynômes et conséquences.

b) En dim ≥ 1 Par produit, la boule unité (pour la norme infinie) est compacte. Si $\|\cdot\|$ est une norme, on montre que c'est une fonction continue pour la norme infinie ; donc elle atteint ses bornes, et toutes les normes sont équivalentes.
Heine-Borel : compacts = fermés bornés. Application : $\mathcal{O}(n)$ est compact. Autre : en considérant un max de $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ sur la sphère unité (pour le produit scalaire), on montre que toute matrice symétrique A a une valeur propre, d'où le th spectral. **dev :** Tout sous-groupe compact de GL_n est conjugué à $\mathcal{O}(n)$.

III–Compacité en dim infinie (cadre hilbertien) Théorème de compacité de Riesz : la boule unité n'est jamais compact. Topologie faible ; définition, propriétés évidentes. Les convexes fermés forts contiennent les limites faibles. Utilisation d'une base hilbertienne pour la compacité faible de la boule unité. **dev** : minimisation d'une fonctionnelle convexe coercive sur un Hilbert, et EDP. Opérateurs compacts ; utilisation de la précompacité pour montrer que ça forme un ensemble fermé de $L(E, E)$. Un opérateur compact atteint sa norme d'opérateur. Définir $H^1(0, 1)$, et suite d'Ascoli : l'injection de Sobolev est compacte.

1.0.2 204–Connexité. Exemples et applications.

Motivation : Si la compacité assure l'existence de certains objets, c'est la connexité qui en assure l'unicité. Que ce soit pour montrer qu'un sous-ensemble est tout l'espace (unicité du sous-ensemble), pour montrer qu'une fonction est constante (unicité de la fonction)... Cet aspect est une sorte de passage local-global très intéressant.
Un autre aspect est la préservation de la connexité par image continue : le théorème des valeurs intermédiaires. Cela permet de réduire l'espace d'arrivée, ou de montrer des existences (cf TVI classique).

Plan

I–Espaces connexes

a) Montrer qu'un espace est connexe Propriétés générales de la connexité : union de connexes ayant un point commun, l'intersection de connexes n'est pas tjs convexe, caractérisations par les fonctions à valeurs dans un discret.
Implications dans un evn : convexe, étoilé, connexe par arcs, connexe (avec des contre-exemples).
Composante connexe ; écriture d'un espace comme union disjointe. Espace des fonctions localement constantes.

b) Connexes d'espaces classiques Connexes de $\mathbf{R}$, le théorème de Bolzano. Ouverts connexes d'un espace localement connexe par arcs : exemple des evn.

II–Théorème des valeurs intermédiaires, applications

1.0.3 205–Espaces complets : exemples et applications.

Plan

I–Exemples d'espaces complets $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$; (X, d) est un espace métrique.

Déf 1. — Une suite (x_n) à valeurs dans X est *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall p, q \geq N,\ d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$$

Cela revient à dire qu'à l'infini, les termes sont proches entre eux.

Rmq 2. — *C'est une notion métrique ; elle est préservée par image par une application uniformément continue.*

Prop 3. — *Toute suite de Cauchy est bornée. Toute suite convergente est de Cauchy.*

Ex 4. — *Dans $X = \mathbf{R}$, considérons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$, donc (H_n) n'est pas de Cauchy ; elle diverge.*

Prop 5. — *Si une suite de Cauchy a une valeur d'adhérence, elle converge.*

Déf 6. — On dit que X est complet si toute suite de Cauchy y converge. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Thm 7. — *$\mathbf{R}$ est complet ; donc $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$ aussi, pour n'importe quelle norme.*

Appli 8. — *Deux suites adjacentes dans $\mathbf{R}$ convergent vers la même limite. Par exemple, en prenant $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, on peut définir la moyenne arithmético-géométrique de a_0 et b_0.*

Ex 9. — *Dans $\mathbf{Q}$ (muni de la valeur absolue), la suite donnée par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ est de Cauchy mais ne converge pas (sa limite serait une racine de 2). Donc $\mathbf{Q}$ n'est pas complet.*

Prop 10. — *(des fermés emboîtés) Soit (F_n) une suite de fermés de X complet, vérifiant $F_{n+1} \subset F_n$ et diam$(F_n) \to 0$. Alors $\bigcap_{n\geq 0} F_n$ est un singleton.*

Prop 11. — *Soit $X \subset Y$, avec Y espace métrique complet. Alors X est complet ss'il est fermé.*

Rmq 12. — *Pour montrer la complétude d'un espace X, on peut le reconnaître comme un fermé d'un espace complet. Sinon, on considère une suite de Cauchy; par la complétude d'autres espaces (comme $\mathbf{R}$), on exhibe la limite possible, puis on montre que la convergence a bien lieu dans X.*

Déf 13. — Soit X quelconque et F métrique. On définit, pour deux fonctions bornées $X \to F$: $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d_F(f(x), g(x))$.

Prop 14. — *Si F est complet, $B(X,F) = \{f : X \to F$ bornées$\}$ est complet pour d_∞. En particulier, si X est compact, $C(X,F)$ est complet.*

Prop 15. — *Un evn E est de Banach ssi pour toute suite $(f_n) \in E^{\mathbf{N}}$, $\sum_{n\in\mathbf{N}} \|f_n\|$ converge (dans $\mathbf{R}$) $\implies$ $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n$ converge (dans X).*

Appli 16. — *La convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence uniforme.*

Prop 17. — *Si I est un intervalle compact contenant 0, alors $C^n(I,\mathbf{R})$, muni de la norme $\|f\| = \|f^{(n)}\|_\infty + |f(0)| + \ldots + |f^{(n-1)}(0)|$ est un espace de Banach.*

Prop 18. — *Si E est un evn, et F est un Banach, l'ensemble $L(E,F)$ des applications linéaires continues $E \to F$ est de Banach pour la norme d'opérateur.*

Appli 19. — *Si $u \in L(E,E)$ et $\|u\| < 1$, alors $Id - u$ est inversible dans $L(E,E)$, et $(Id-u)^{-1} = Id + u + u^2 + \ldots$.*

Ex 20. — *$E' = L(E,\mathbf{K})$ est toujours de Banach.*

Prop 21. — *Soit $p \in [1,+\infty[$; alors $\ell^p(\mathbf{N},\mathbf{K})$ est de Banach. Pour $p=\infty$, c'est aussi le cas par ce qui précède.*

Thm 22. — *(Riesz-Fischer) Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $p \in [1,+\infty[$; l'espace $L^p(\Omega) = L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ est de Banach*

II–Théorèmes fondamentaux

a) Point fixe

Déf 23. — Soit $f : X \to X$, on dit que f est contractante s'il existe $k < 1$ tel que :
$$\forall x,y \in X, d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$$

Thm 24. — *Si X est un espace complet, toute application contractante a un unique point fixe.*

Ex 25. — *Si $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est une fonction différentiable, telle que, pour une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^n$: $\|d_xF(h)\| \leq k\|h\|$ (pour un $k<1$, pour tout h). Alors l'équation $F(x) = x$ a une unique solution $x \in \mathbf{R}^n$.*

Ex 26. — *Si $u : \Omega \longrightarrow K$ est bornée par un $\ell \in]0,1[$, alors*
$$\forall g \in L^1(\Omega), \exists! f \in L^1(\Omega),\ f = g + \int_0^1 uf$$

Ex 27. — *Soit $b \in \mathbf{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rayon spectral ≤ 1. Alors, pour $0 < \rho < 1$, l'application $\mu \mapsto (1-\rho)A\mu + \rho b$ a un unique point fixe (algo de Page-Rank).*

Cor 28. — *Si f^p est contractante (pour un $p \geq 1$), alors f a un unique point fixe.*

Appli 29. — *Si $\varphi \in C([0,1],\mathbf{R})$, $K \in C([0,1]^2,\mathbf{R})$, l'équation*
$$\forall t \in [0,1], x(t) = \varphi(t) + \int_0^t K(s,t)\varphi(s)\mathrm{d}s$$
a une unique solution $x \in C([0,1],\mathbf{R})$.

Appli 30. — *Théorème de Cauchy-Lipschitz : si $f : I \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ est continue et localement lipschitzienne en la seconde variable, alors l'EDO*

$$\left|\begin{array}{rcl} y' & = & f(t,y) \\ y(0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

a une unique solution maximale

Cor 31. — *(point fixe à paramètre) Soit Λ un espace métrique, et $F : X \times \Lambda \to X$ telle que :*

$$\exists k < 1, \forall \lambda \in \Lambda, \forall x, y \in X, d(F(x,\lambda), F(y,\lambda)) \leq d(x,y)$$

Alors le point fixe $x(\lambda)$ de $F(\cdot,\lambda)$ dépend continuement de λ.

Appli 32. — *Continuité du flot d'une EDO en la condition initiale : si $f : I \times X \to X$ est localement lipschitzienne en la deuxième variable, alors l'application de flot $(t, t_0, y_0) \mapsto \Phi_{t,t_0}(y_0)$ est continue en (t_0, y_0).*

b) Prolongement d'applications

Thm 33. — *Soit E un espace métrique quelconque et F un espace complet. Soit D une partie dense et $f : D \to F$ une fonction uniformément continue. Alors f admet un prolongement $\overline{f} : E \to F$ uniformément continu.*

Rmq 34. — *Ce prolongement est alors unique.*

Ex 35. — *On définit ainsi la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, c'est une similitude.*

Ex 36. — *Soit $T \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)'$ une distribution. On suppose : $\exists C \geq 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n), |\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{L^2}$. Alors T se prolonge à une forme linéaire sur L^2.*

Ex 37. — *Soit $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ une sous-tribu. Si $X \in L^1(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, il existe une unique variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable et L^1, notée $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$, telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{E}\left(X \mathbf{1}_A\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\mathbf{1}_A\right)$$

Éventuellement : mettre des baireries ici.

III–Espaces de Hilbert

Déf 38. — Un espace préhilbertien (ou bien hermitien) complet pour la norme induite est appelé espace de Hilbert.

Ex 39. — *$\mathbf{R}^n$, $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{K})$, $L^2(\Omega, \mathbf{K})$ sont des espaces de Hilbert.*

Thm 40. — *(projection sur un convexe fermé) Soit H un espace de Hilbert, et $C \subset H$ un sous-ensemble convexe et fermé. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. Il est caractérisé par l'angle obtus : $\forall z \in C, Re(\langle x - y, z - y\rangle) < 0$.*
On le note $p(x)$; l'application p est 1-lipschitzienne.

Ex 41. — *Si C est un espace vectoriel, on montre que la projection est un projecteur linéaire.*

Cor 42. — *(th de représentation de Riesz) Si H est un espace de Hilbert, alors toute forme linéaire continue est de la forme $h \mapsto \langle u, h\rangle$, pour un $u \in H$. Donc $H \simeq H'$ isométriquement.*

Appli 43. — *Dans l'exemple 35, il existe une unique fonction $v \in L^2$ telle que : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n), \langle T, \varphi\rangle = \langle v, \varphi\rangle_{L^2}$. Cela permet de passer d'une distribution à une fonction.*

Prop 44. — *Soit $E \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors $(E^\perp)^\perp = E$ et $H = E \oplus E^\perp$.*

Prop 45. — *Soit T un opérateur continu. Alors, notant T^* l'adjoint de T (qui existe par th 42), on a : $\ker(T^*) = \overline{\mathrm{im} T}$*

DEVELOPPEMENT 1 Soit T un opérateur continu sur H. On suppose que $\|T\| \leq 1$. Soit p le projecteur orthogonal sur $\ker(T - I)$. Alors, pour tout $x \in H$, on a :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(x) \longrightarrow p(x)$$

En particulier, si $f \in L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ et $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, on a la convergence dans L^2 :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x + k\alpha) \longrightarrow \int_0^1 f$$

Déf 46. — L'application 42 permet de définir les distributions L^2 ; on définit l'espace $H^1(0,1) = \{f \in L^2(]0,1[), f' \in L^2(]0,1[)\}$.

Prop 47. — *$H^1(0,1)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :*

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle u', v'\rangle_{L^2}$$

Prop 48. — *Si $u \in H^1(0,1)$, il existe $\widetilde{u} \in C([0,1])$ tel que $\widetilde{u} = u$ pp. Cela définit une injection continue $H^1(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$ ("de Sobolev")*

Déf 49. — On définit $H_0^1(0,1) := \{u \in H^1(0,1),\ \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(1) = 0\}$. C'est un sous-espace fermé de $H^1(0,1)$.

Rmq 50. — *Cet espace permet de modéliser des problèmes aux conditions aux bords nulles.*

Appli 51. — *Si $f \in L^2$, il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tel que $-u'' + u = f$ au sens des distributions.*

Appli 52. — *(du théorème de point fixe) L'équation* $\begin{cases} -u'' + u & = \cos(u) \\ u(0) = u(1) & = 0 \end{cases}$ *a une unique solution $u \in H_0^1(0,1)$.*

Déf 53. — On dit que $\mathcal{F} \subset C(X, F)$ est équicontinue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists \eta > 0, \forall y \in X, d_X(x,y) \leq \eta \implies [\forall f \in \mathcal{F}, d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon]$$

DEVELOPPEMENT 2

Thm 54. — *(Ascoli) Soit F un espace complet, X un espace métrique compact. Soit $\mathcal{F}$ une famille dans $C(X,F)$ telle que :*

- *$\mathcal{F}$ est équicontinue*
- *$\forall x \in X, \overline{\mathcal{F}(x)} = \overline{\{f(x), f \in \mathcal{F}\}}$ est compact (dans F).*

Alors $\overline{\mathcal{F}}$ est compact dans $C(X,F)$ (muni de la distance uniforme).

Appli 55. — *L'image de la boule unité de $H^1(0,1)$ par l'injection dans $C([0,1])$ est compacte.*

1.0.4 208–Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

1.0.5 213–Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Motivation : En physique, on a souvent conservation ou diminution de l'énergie, qui s'écrit comme une intégrale de quelque chose au carré. Cela pousse à étudier les espaces comme $L^2(\mathbf{R})$ par exemple. Il s'avère que ces espaces sont des Banach, mais plus que ça, leur norme dérive d'un produit scalaire. Cette structure est très pratique, puisqu'elle permet de faire de la géométrie, et de parler d'orthogonal, de projection orthogonale, etc. C'est ce qu'on essaie de faire. Cela permet de faire beaucoup d'analogues entre les espaces de Hilbert et les espaces euclidiens de dim finie. On a notamment, en un sens plus faible mais intéressant, la compacité (faible) de la boule unité !

Plan

I–Espaces de Hilbert et projection sur un convexe

a) Définition et exemples (pas besoin de définir un produit scalaire) Espaces préhilbertiens. Trois exemples : $\mathbf{R}^n, \ell^2(\mathbf{N}), L^2(\Omega)$. Isométries, Théorème de Pythagore. Inégalité de Cauchy-Schwarz, conséquence : le ps induit une norme. Identité du parallélogramme. Espaces de Hilbert, cas où ça ne fonctionne pas : $C([0,1]) \subset L^2([0,1])$. Utilisation pour définir la transformée de Fourier sur L^2. L'exemple de $H^1(0,1)$.

b) Projection sur un convexe et variantes Théorème de la projection. Des petits "contre-exemples" pour l'importance de la complétude. Projection sur un sev fermé : espérance conditionnelle. Cas de la dimension finie.
Application : **dev** : théorème de Müntz. Procédé d'on de Gram-Schmidt.
Polynômes orthogonaux pour certains poids : Legendre pour $\mathbf{1}_{[-1,1]}$, Hermite pour $\mu(x) = e^{-x^2}\mathrm{d}x$, Tchebychev pour $\frac{\mathbf{1}_{[0,1]}}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$.

II–Corollaires de la projection sur un convexe

a) Géométrie Géométrie : $H = E \oplus E^\perp$ et $(E^\perp)^\perp = E$ pour E fermé de H. Critère pour qu'un espace soit dense. Théorème de représentation de Riesz donne la structure du dual. Exemple pour passer d'une distrib à une fonction. Définition de l'adjoint d'un opérateur, du gradient. Noyau-image pour l'adjoint. **dev :** Th de Von-Neumann. On peut évoquer le th de Lax-Milgram comme application du th de Riesz.

b) Bases hilbertiennes Bases hilbertiennes : critère pour en être une. Exemples : polynômes dans $L^2([0,1])$ (th de Weierstrass). Autre exemple : séries de Fourier. On peut évoquer des ondelettes.
Théorème de classification : il n'existe, à isométrie près, qu'un espace de Hilbert séparable.

III–Convergence faible dans un espace de Hilbert Définition de la convergence faible. Critères suffisants de convergence faible (cf Saint-Raymond, on utilise Banach-Steinhaus). Exemples, dans L^2, de convergences faibles non fortes. Les convexes fermés (forts) sont fermés faibles. Dans un Hilbert séparable, toute suite bornée a une valeur d'adhérence faible : utilisation des bases hilbertiennes. **dev :** Minimisation de fonctionnelle convexe coercive (et éventuellement : EDP associée).

2 Approx de fonctions

2.0.1 201–Espaces de fonctions. Exemples et applications.

I-Espaces de fonctions, convergences associées

a) Régularité Soit X un espace topologique, F un espace métrique, $B(X,F)$ l'ensemble des fonctions $X \longrightarrow F$ bornées.

Prop 1. — *La limite uniforme de fonctions continues est continue.*

Rmq 2. — *Cela est faux pour la convergence simple. (cf une figure avec $x \mapsto x^n$)*

Cor 3. — *L'ensemble $\mathcal{C}_b^0$ des fonctions $X \longrightarrow F$ continues bornées est fermé dans $B(X,F)$ muni de la distance uniforme.*

Rmq 4. — *Si K est compact, $\mathcal{C}^0(K,F) = \mathcal{C}_b^0(K,F)$.*

Prop 5. — *Si F est complet, $\mathcal{C}_b^0(K,F)$ est complet.*

Appli 6. — *(Cauchy-Lipschitz) : Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est localement lipschitzienne en la deuxième variable, alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale.*

Appli 7. — *Si F est un Banach et si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, alors $\sum f_n$ converge uniformément (donc est continue).*

Ex 8. —

- $x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.
- $x \longmapsto \sum\limits_{n\geqslant 1} a^n \cos(b^n x)$ *est continue dès que* $|a| < 1$.
- $\zeta : s \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ *est continue sur* $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$.

Prop 9. — *Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact et $k \geqslant 1$, alors $\mathcal{C}^k(K,\mathbb{R})$ muni de $\|f\| = \sum\limits_{i=0}^{k} \|f^{(i)}\|_\infty$ est complet.*

Ex 10. — *ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et*

$$\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\ln n)^k \frac{1}{n^s}$$

Déf 11. — Soit Ω un ouvert convexe non vide de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω.

Prop 12. — *$\mathcal{H}(\Omega)$ est un anneau intègre.*

Prop 13. — *Si (f_n) est une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ qui converge uniformément sur tout compact, alors sa limite est holomorphe et $f_n' \longrightarrow \lim f_n'$ uniformément sur tout compact.*

Ex 14. — *ζ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$.*

b) Espaces L^p, $p < +\infty$ Ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $1 \leqslant p < +\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Déf 15. — On considère L^p l'ensemble des classes de fonctions mesurables telles que $\int |f|^p < +\infty$ à égalité presque partout près.

Ex 16. — *$x \longmapsto \frac{1}{1+|x|} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$.*

Prop 17. — *Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors, on a*

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

Donc, si Ω est de masse finie, on a $L^q \subset L^p$ si $q \geqslant p$.

Thm 18. — *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|f\|_p = (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$.*

Appli 19. — *Si $u : \Omega \longrightarrow K$ est bornée par un $\ell \in]0,1[$, alors*

$$\forall g \in L^1(\Omega), \exists! f \in L^1(\Omega), f = g + \int_0^1 uf$$

Cor 20. — *$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Appli 21. — *Calcul de $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 \big(\cos(x) - (ax+b)\big)^2 \mathrm{d}x$.*

Cor 22. — *$L^2(\Omega)$ est isométrique à $\ell^2(\Omega)$.*

Thm 23. — *Si $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$g \in L^q(\Omega) \longmapsto \left(f \mapsto \int fg\right) \in \big(L^p(\Omega)\big)'$$

est une isométrie.

c) Fonctions tests

Déf 24. — On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Prop 25. — *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est non trivial (n'est pas l'espace nul).*

Déf 26. — Une distribution est une forme linéaire $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue au sens : pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, il existe $M \in \mathbb{N}$ et $C \geqslant 0$ tel que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans K, on a

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \max_{|\alpha| \leqslant M} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

On note $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions.

Ex 27. —

- *δ_0.*
- *δ_0' définie par $\langle \delta_0', \varphi\rangle = -\varphi'(0)$.*
- *Si $f \in L^1_{loc}$, on peut considérer $\langle f, \varphi\rangle = \int f\varphi$.*

Déf 28. — On définit l'espace de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, (1 + |x|^\alpha)\partial^\beta f(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

Ex 29. — $x \longmapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Déf 30. — Une distribution tempérée est une fomre linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ continue au sens suivant : il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C \geqslant 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \max_{|\alpha|, |\beta| \leqslant p} \|(1 + |x|^\alpha)\partial^\beta f(x)\|_\infty$$

II–Densité, compacité

Déf 31. — Si E est un espace normé, on dit que (f_α) est totale si $\overline{\mathrm{Vect}(f_\alpha)} = E$.

a) Densités intrinsèques

Prop 32. — *Toute fonction continue $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue.*

Cor 33. — *$\left\{\mathbf{1}_{[u,v]}, a \leqslant u < v \leqslant b\right\}$ est une famille totale de $\mathcal{C}^0([a,b])$.*

Prop 34. — *Si $p < +\infty$, alors si $(A_i)_{i\in I}$ engendre $\mathrm{Bor}(\Omega)$, la famille $(\mathbf{1}_{A_i})_{i\in I}$ est totale dans $L^p(\Omega)$ si $\mu(A_i) < +\infty$.*

Appli 35. — *Soit (u_n) une suite de $[0,1]$. On a équivalence entre :*

1. *Pour tout $a < b \in [0,1]$, on a $\frac{1}{n+1}\mathrm{Card}\big(\{k \leqslant n, u_k \in [a,b]\}\big) \longrightarrow b - a$.*
2. *Pour toute fonction continue de $[0,1]$, on a $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(u_k) \longrightarrow \int_0^1 f$.*

On dit que (u_n) est équirépartie.

b) Densités de certaines familles

Prop 36. — *Si $p < +\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Alors, $\mathcal{C}_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Appli 37. — *$\tau_a : f \in L^p \in \mathbb{R} \longmapsto \tau_a f$ définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$ est uniformément continue.*

Déf 38. — Soit $\rho_n : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. On dit que (ρ_n) est une approximation de l'unité si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n \geqslant 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_{|x|>\varepsilon} \rho_n \longrightarrow 0$.

Prop 39. — *Si f est uniformément continue, alors $(f*\rho_n)$ converge uniformément vers f si (ρ_n) est une approximation de l'unité.*

Prop 40. — *Il existe une approximation de l'unité (ρ_n) telle que $\rho_n \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Cor 41. — *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ si $p < +\infty$.*

Prop 42. — *$\rho_n = \frac{1}{c_n}(1-x^2)^n \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ où c_n est une constante de renormalisation est une approximation de l'unité.*

Cor 43. — *$(x \mapsto x^n)$ est une famille totale de $\mathcal{C}^0([a,b])$.*

Appli 44. — *Comme $\mathcal{C}^0([0,1]) \hookrightarrow L^2([0,1])$ est continue, si $f \in L^2([0,1])$ telle que $\forall n$, $\int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0$, alors $f = 0$.*

Appli 45. — *Si X est une variable aléatoire à densité à valeurs dans $[0,1]$, alors sa loi est déterminée par ses moments.*

Appli 46. — *Si f est continue sur $[0,1]$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k f(x^k) = \int_0^1 f$$

Cor 47. — *$(x \longmapsto e^{2i\pi px})_{p\in\mathbb{Z}}$ est une famille totale des fonctions continues et 1-périodiques sur $\mathbb{R}$.*

Appli 48. — *(u_n) est équirépartie si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi p u_k} \longrightarrow 0$.*

DEVELOPPEMENT 1

Thm 49. — *Soit (α_n) une suite strictement croissante de réels tels que $\alpha_0 = 0$ et $\lim_n \alpha_n \geqslant 1$. Alors, $(x \longmapsto x^{\alpha_n})_n$ est une famille totale dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ si, et seulement si, $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.*

Appli 50. — *$(x \mapsto x^{n\ln(n)})$ est totale, mais pas $(x \mapsto x^{n^2})$.*

c) Compacité

Déf 51. — On définit

$$H^1(]0,1[) = \left\{u \in L^2(]0,1[), u' \in L^2(]0,1[)\right\}$$

Rmq 52. —

- *Comme $\mathcal{D}(]0,1[)$ est dense dans $L^2(]0,1[)$, cela signifie que*

$$\exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[), |\langle u', \varphi\rangle| = |\langle u, \varphi'\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_{L^2}$$

- *$H^1(]0,1[)$ muni de la norme $\langle u,v\rangle_{H^1} = \langle u,v\rangle_{L^2} + \langle u',v'\rangle_{L^2}$ est un espace de Hilbert.*

Prop 53. — *Tout élément $u \in H^1(]0,1[)$ a un unique représentant continu. Cela induit une injection de Sobolev : $H^1(]0,1[) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0,1])$ qui est continue.*

DEVELOPPEMENT 2

Thm 54. — *(Ascoli) Soit F un espace métrique complet, X un espace métrique compact. Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{C}^0(X,F)$. On suppose que*

- *$\mathcal{F}$ est équicontinue :*

$$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x,y\in X, \forall f\in\mathcal{F}, d(x,y)\leqslant\alpha \Longrightarrow d(f(x),f(y))\leqslant\varepsilon$$

- *Pour tout $x\in X, \mathcal{F}(x):=\{f(x), f\in\mathcal{F}\}$ est d'adhérence compacte (dans F).*

Alors, $\mathcal{F}$ est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^0(X,F)$.

Appli 55. — *L'injection $H^1(]0,1[)\hookrightarrow\mathcal{C}^0([0,1])$ est compacte.*

Cor 56. — *Si (u_n) est une suite bornée de $H^1(]0,1[)$, on peut extraire une suite $(u_{\varphi(n)})$ telle que $u_{\varphi(n)}\longrightarrow u$ et $u'_{\varphi(n)}\rightharpoonup u'$ pour un $u\in H^1(]0,1[)$.*

Appli 57. — *Si $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^d$ est continue, alors le problème de Cauchy à $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ admet une solution maximale (non nécessairement unique).*

Thm 58. — *(Montel) Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ telle que*

$$\forall N\in\mathbb{N}, \sup_{\tau\in B(0,N)}|f_n(\tau)|<+\infty$$

Alors, on peut extraire une suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

III–Applications : Fourier, EDP

Prop 59. — *Si $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors sa transformée de Fourier définie par*

$$\widehat{f}:\xi\in\mathbb{R}^d\longmapsto\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}x$$

est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Rmq 60. — *Si $f\in\mathcal{D}(\Omega)$ et $\widehat{f}\in\mathcal{D}(\Omega)$, alors $f=0$.*

Prop 61. — *Si $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\|\widehat{f}\|_2=\frac{1}{(2\pi)^d}\|f\|_2$.*

Cor 62. — *Cela définit, par densité $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\subset L^2(\mathbb{R}^d)$, un unique opérateur $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^d)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Prop 63. — *Pour tout $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f=\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f=f$$

avec

$$\overline{\mathcal{F}}g=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}g(\xi)e^{-i\langle\xi,x\rangle}\mathrm{d}\xi$$

Cor 64. — *Pour tout $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f=\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f=f$$

Appli 65. — $\mathcal{F}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=\pi\mathbf{1}_{[-1,1]}$.

Déf 66. — On définit

$$H_0^1(]0,1[)=\left\{u\in H^1(]0,1[), u(0)=u(1)=0\right\}$$

Prop 67. — *C'est un sous-espace de Hilbert de $H^1(]0,1[)$.*

Appli 68. — *Si $f\in L^2$, alors le problème de Dirichlet $\left\{\begin{array}{lcl}-u''+u & = & f\\ u(0)=u(1) & = & 0\end{array}\right.$ admet une unique solution $u\in H_0^1$.*

Appli 69. — *Le problème $\left\{\begin{array}{lcl}-u''+u & = & \cos(u)\\ u(0)=u(1) & = & 0\end{array}\right.$ admet une unique solution $u\in H_0^1(]0,1[)$.*

2.0.2 207–Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

I–Continuité

a) Prolongement ponctuel Exemple de cas où il y a existence ($\frac{\sin x}{x}$, fonction plateau), de cas où il n'y a pas existence ($\cos(1/x)$). Un autre exemple de cas où on peut prolonger : les séries entières/de Dirichlet : par transformée d'Abel. Exemples : séries pour $\frac{\pi}{4}$, $\log 2$, $\lim_0 \eta$.
Dév : calcul de l'intégrale de Dirichlet par prolongement de sa transformée de Laplace en 0.
On peut parler de théorème taubérien.

b) Prolongement par densité, formes linéaires Unicité du prolongement par densité. Application : endomorphismes de groupe $(\mathbf{R}, +)$.
Théorème, importance de la complétude. Application : **dev** : théorème d'Ascoli-Sobolev (attention à l'introduction de l'espace $H^1(0,1)$). Autre application : Fourier L^2, espérance conditionnelle.
On peut parler de Hann-Banach (pas fan).

II–Régularité réelle Théorème de la limite de la dérivée/de la différentielle. Application : construction de fonctions plateaux. Contre exemple de prolongement non régulier.
Équations différentielles : solution maximale, globale. Cauchy-Peano, Cauchy-Lipschitz, lemme de sortie de tout compact.

III–Holomorphie Holomorphe=analytique. Théorème des zéros isolés. Principe du prolongement analytique. Applications : unicité de fonctions vérifiant telle condition. Théorème d'holomorphie sous intégrale : conséquences pour la vérification d'identités, calcul du TF de la gaussienne (on veut faire $x' = x + i\xi$, c'est possible si ξ est imaginaire pur). Prolongement de TF à des parties du plan complexe. Application : si f et $\widehat{f}$ sont à supports compacts, $f = 0$.
Autre méthode : prolongement par "équation fonctionnelle" : **dev** : prolongement de transformée de Mellin, fonction ζ. Prolongement de la fonction Γ. On peut aussi donner la "vraie" équation fonctionnelle de ζ.

2.0.3 209–Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

I–Approximations explicites élémentaires On peut parler de Taylor. Weierstrass par les polynômes de Bernstein, une estimation de la vitesse de cv. Interprétation probabiliste, loi des grands nombres associée.

II–Convolution Cas des fonctions C^0, C^∞, L^p : cela permet de montrer la densité des fonctions test dans L^p (application : continuité de l'opérateur de translation), de montrer la densité des fonctions tests dans les fonctions continues à support compact.

III–Dans les espaces préhilbertiens, tout va bien Principe d'approximation. Exemples de bases polynomiales : polynômes de Hermite, de Tchebychev...
Séries de Fourier. Se ramener à une convolution. Th de Fejer.
Déterminants de Gram. Utilisation d'injection de Sobolev. **dev** : théorème de Müntz.

IV–Quelques applications Une application "élémentaire" : **dev** : théorème taubérien de Littlewood. Applications aux distrib : passer d'une distrib "L^2" à une fonction de L^2 n'est possible que grâce à la densité des fonctions lisses. Application à Fourier : montrer que c'est une isométrie sur L^2. Avantage de l'espace de Schwartz : il est stable sous TF. Cela permet de bien travailler avec les distrib tempérées.

3 EDO-EDP

3.0.1 220-Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

Motivation : Les équations différentielles régissent la plupart des lois physiques, ou les évolutions en biologie, etc. Après avoir précisé les notions de solutions, on présente quelques méthodes de résolution exacte. Hors de ces rares cas, on peut tout de même faire des commentaires de nature qualitatifs : on peut montrer l'existence de solution, puis faire des commentaires; ainsi, on peut approcher la solution, soit par du linéaire, ce qui permet d'avoir des renseignements sur la stabilité, soit par un schéma d'Euler, ce qui permet de montrer des existences, et d'avoir une valeur approchée de la solution.

Plan Références : Berthelin, Demailly

0–EDO, solutions Qu'est-ce qu'une EDO, ordre, autonomie. Exemples : équations linéaires, équation du pendule, de Bernoulli, d'Euler, de Riccati, équation logistique.
En dim 2 : courbe de la poursuite du chien Solution, maximalité, globalité.
Existence du prolongement maximal (théorique).

I–Résolutions exactes Le théorème de Cauchy-Lipschitz. Un "contre-exemple" : $y' = 2\sqrt{|y|}$.
Cas linéaire à coefs constants : d'abord homogène avec l'équation caractéristique. Méthode pour trouver une solution particulière : chercher une solution "de la même forme" (ex : exponentielle, puissance), chercher sous forme d'un DSE, méthode de la variation de la constante. Formule de Duhamel. Exemples : $y'' + ay' + b = \cos(\omega t)$, $y' + y = te^t$.
Cas où on se ramène au cas linéaire à coeffs constants : équations d'Euler, de Bernoulli... Application : calcul de la tf d'une gaussienne par EDO.

Résolution explicite dans le cas autonome, et où la fonction ne s'annule pas. Exemple de $y' = y^2$, de $y' = 1 + y^2$.

II–Étude qualitative

a) Explosion, caractère borné Lemme de Gronwall. Corollaire : sortie de tout compact. Applications : Cauchy-Lipschitz linéaire, existence du flot d'un champ de vecteur sur une surface compacte. Quelques autres outils en utilisant les résolutions exactes : si $f'(t) + f(t) \longrightarrow \ell$ en $t \longrightarrow +\infty$, alors $f(t) \longrightarrow \ell$ (et plus généralement avec n'importe quel polynôme à racines de partie réelle < 0. Utilisation de sur-solutions : si $f(0) = g(0)$ et $f' \leq g'$, alors $f \leq g$. Une jolie application : l'étude des caractéristiques pour l'équation de transport.
Définitions de la stabilité (faible et forte). Exemples en dimension 1 à coeffs constants, la gaussienne.

b) Linéarisation Système linéarisé au voisinage d'un point critique. Exemple du cas du pendule simple, du pendule amorti.
dev 1 Stabilité asymptotique par linéarisation.
Tracé des portraits de phases possibles en *annexe*.

c) Approximation Méthodes pour approximer une solution : principe de schéma. Schéma d'Euler explicite, implicite.
dev 2 : un sys dyn discret et son analogue continu. Une application : théorème d'existence de Cauchy-Peano Consistance, stabilité et convergence d'un schéma.

(à connaître : ordre d'un schéma : Euler est d'ordre 2, Taylor jusqu'à p est d'ordre $p + 1$, 4 pour RK 4).

3.0.2 221-Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Motivation : dev 1 : Linéarisation et stabilité
dev 2 : Zéros de l'EDO de Sturm-Liouville **Plan** Préliminaire : un rappel sur le théorème de Cauchy-Lipschitz général. **I-Solutions, structure II-Méthodes de résolution** *a)Équations homogènes b) Solution particulière* **III-Comportement qualitatif**

3.0.3 222-Exemples d'études d'équations différentielles linéaires et d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Motivation : Les problèmes de modélisation font souvent intervenir des équations différentielles (circuits électriques, mécanique, dynamique des populations) et des EDP (transport, chaleur, diffusion, électromag, méca Q, dynamique des fluides). Certaines de ces équations ont la bonne idée d'être (ou au moins, de ressembler) à des équations linéaires : cela signifie que les solutions de l'équation (quand elles existeront) formeront un espace affine (ou vectoriel) ; cela a une interprétation physique (principe de superposition des sol). L'objectif de cette leçon est de mettre en œuvre des techniques pour essayer d'avoir des renseignements sur les fonctions.

Plan

I-Définitions préliminaires et exemples Qu'est-ce qu'une EDO/EDP linéaire, homogénéité, ordre. Transformer une équation $y^{(n)} = \dots$ en $Y' = AY$. Linéarisation par changement de variable.

II-Résolution explicite directe Pour les EDL à coeff constants : par l'exponentielle, puis tricks (intuition, séries entières) ou méthode de variation de la constante. Pour les EDP de transport à coeff constants, méthode des caractéristiques. En gal, trouver des caractéristiques qui "arrivent" revient à résoudre une EDO (pas forcément linéaire). Ex : $-u'' + u = f$ par variation de la constante. **dev 1** : Solution de l'EDP de Burgers.

III-Existence et unicité de solutions Cas des EDO : Cauchy-Lipschitz linéaire (pas besoin de parler de Gronwall etc). Pour les EDP : Espaces de Sobolev en dim 1, notion de solution faible. Théorème de Riesz, théorème de Lax-Milgram (**dev 2**). Une manière d'avoir de la coercivité : inég de Poincaré.

Principe du maximum, sur/sous-solution, unicité.

IV-Solutions élémentaires Séries de Fourier TF Calcul au sens des distributions, fonction de Green.

4 Séries de fonctions

4.0.1 241-Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

Motivation : L'ensemble des fonctions polynomiales forme une algèbre. En revanche, celle-ci est rarement suffisante pour faire de l'analyse. Ainsi, on a besoin de "compléter" cet ensemble avec d'autres fonctions, obtenues comme somme infinie de polynômes : les séries entières. De même, en physique linéaire, on peut avoir envie de considérer la superposition infinie de certains signaux.
L'idée de la leçon est de voir comment et dans quelle mesure des propriétés habituelles d'analyse (régularité, intégrabilité, etc) "passent" à la "limite" pour une suite de fonctions. La première partie est destinée aux théorèmes généraux pour des séries de fonctions. Les deux suivantes visent à donner des exemples d'utilisations dans deux cadres fondamentaux : séries entières et séries de Fourier.

Plan

I-Suites et séries : le cas général Un fil rouge possible : la fonction ζ, la fonction η. Déf habituelles; convergences : L^1 (permet de calcul de $\frac{\pi}{4} = \sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$), simple ($t \mapsto t^n$), unif, normale, sur les compacts... Théorème d'Ascoli (**dev**). Règles de dérivation, d'holomorphie. Passage de la convexité à la cv simple. Approximations du Dirac, convergence au sens des distrib. Séries de Dirichlet (cas très gal). Fonctions multiplicatives, fonctions L. Utilisation de la densité de certaines familles, théorèmes de Weierstrass-(polynômes et trigo), théorème de Müntz.

II-Séries entières Déf, rayon de convergence, règles pour leur calculs, pdt de Cauchy, dérivation terme à terme. Application au dénombrement. Lien avec les fonctions holomorphes. Dvp classiques, séries génératrices : app : **dév Poisson**. Autre dév possible : théorème de Tauber (et plus ?).

III-Séries de Fourier Déf, prop élém, convergence, th de Dirichlet et de Féjer, structure euclidienne. Formule de Poisson. Application : équation fonctionnelle de ζ et prolongement méromorphe. Autre **dev : calcul de la somme quadratique de Gauss.**

4.0.2 243-Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Motivation : Les fonctions polynomiales sont intéressantes, mais elles sont rarement suffisantes pour faire de l'analyse (par exemple, elles ne permettent pas de résoudre des EDO comme $y' = y$). Néanmoins, elles présentent l'avantage d'être assez facilement manipulables. Dans cette optique, on introduit les séries entières, sommes infinies de monômes. Il y a d'abord des problèmes de convergence, et la fonction résultante va être (au moins) définie sur un disque ouvert, dont le rayon est le rayon de convergence. Une première partie porte sur ces problèmes de convergence. Pour la deuxième partie, on énonce des liens entre fonctions holomorphes et fonctions analytiques. Dans la troisième partie, on applique ce qui a été développé à des calculs de séries, de la combinatoire et des probas.

I–Problématiques de convergence Définitions et caractérisations équivalentes du rayon de convergence. Il est invariant par multiplication polynomiale.
Dans le disque (ouvert) de convergence, tout se passe "bien" : continuité, dérivabilité, holomorphie : application calcul de solutions d'EDO en séries entières, séries de Taylor, somme de certaines séries; intégrabilité à l'intérieur du disque, application au calcul des termes de la suite de départ. Une autre appli : les suites déf par une rel de récurrence linéaire.

II–Analyticité et holomorphie Une fonction entière est analytique sur son disque de convergence. Fonctions analytique, ex de fonction qui ne l'est pas. Principe des zéros isolés pour une fct analytique. Formule de Cauchy, équivalence analytique et holomorphe, rayon de convergence des fonctions holomorphes en fonction de la structure de l'ouvert.

III–Applications : calculs de séries, combinatoire et probas Pour le calcul de séries : deux techniques 1-produit de Cauchy avec une autre série 2-EDO de la série entière associée. Combinatoire : **dev 1?**. Probas : série génératrice d'une variable entière, rayon de convergence, des calculs, application à la loi de Poisson. Indéc de la loi de Poisson **dev 2**.

4.0.3 245-Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Motivation : Lorsque l'on définit des fonctions, il est naturel d'essayer de les étendre à une variable la plus large possible. Il s'avère que, malgré sa topologie plus compliquée que la droite réelle (cf les ouverts de $\mathbf{R}$), le plan complexe simplifie souvent l'étude des fonctions. Ainsi, par exemple, son utilisation pour les polynômes permet de scinder le polynôme, et donc de simplifier les problèmes. De même, l'usage des séries entières de la variable complexe donne son sens au rayon de convergence, et on a des formules d'intégration sur les chemins permettant de retrouver les coeffs.
L'idée de la leçon est de présenter, de manière très accélérée (et sans aucune preuve) la théorie derrière les fonctions holomorphes, en lien avec d'autres classes usuelles : fonctions polynomiales, séries entières, fonctions analytiques. On va voir que, par rapport à la condtion de dérivabilité sur $\mathbf{R}$, l'holomorphie est une condition qui a des conséquences très fortes : elle implique l'analyticité ! On montrera des applications pratiques de cette implication : en probas, en transformée de Fourier, etc.

Plan U désigne une partie ouverte non vide de $\mathbf{C}$. Étant donnée une fonction $f : U \to \mathbf{C}$, on peut l'identifier à $\widetilde{f} : \widetilde{U} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ en identifiant $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$.

I–Utilisation d'une variable complexe, analyticité

Déf 1. — La somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$, de rayon de convergence infini, est l'exponentielle de z, notée e^z. La fonction exponentielle est un morphisme $\mathbf{C} \to \mathbf{C}^\times$ surjectif, de noyau $2i\pi\mathbf{Z}$.

Déf 2. — Pour $z \in \mathbf{C}$, on pose $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

Ex 3. —

$$1 + \cos(x) + \ldots + \cos((n-1)x) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Thm 4. — *(d'Alembert-Gauss)* $\mathbf{C}$ *est algébriquement clos*

Prop 5. — *Si $\rho > 0$, alors on a :* $\int_0^{2\pi} \log|1-\rho e^{i\theta}|\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \log\rho & \text{si } \rho \geq 1 \\ 0 & \text{si } \rho < 1 \end{cases}$

Prop 6. — *(Jensen) Si $P \in \mathbf{C}[X]$ ne s'annule pas en 0, notant $\mathbf{N}(t)$ le nombre de racines de P de module $\leq t$ comptées avec multiplicité, on a, pour $r > 0$:*

$$\int_0^r \frac{N(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(\frac{|P(re^{i\theta})|}{|P(0)|}\right)\mathrm{d}\theta$$

Cor 7. — *Si P est un polynôme ne s'annulant pas en 0, alors pour $r > 0$:*

$$|P(0)| \leq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta\right) \leq \sup_{|z|=r} |P(z)|$$

et l'égalité (de tous les membres) est réalisée ssi P est constant (principe du maximum).

Prop 8. — *Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors pour $r \in]0, R[$: $a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$*

Appli 9. — *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière avec un rayon de convergence > 1. Alors :*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{|z|=1} |f(z)|$$

En particulier, si f est nulle sur le cercle $\{|z| = 1\}$, alors $f = 0$.

Déf 10. — On dit que f est analytique en un point si elle coïncide avec une série entière de rayon de convergence non nul autour de ce point. On dit que f est analytique sur U si elle est analytique en tout point de U. On note $\mathcal{A}(U)$ l'espace vectoriel des fonctions analytiques sur U (c'est même un anneau).

Prop 11. — *Si f est développable en série entière, et si D est le disque ouvert de convergence de la série, alors f est analytique sur D.*

Ex 12. — *L'exponentielle, le cosinus et le sinus sont analytiques sur* $\mathbf{C}$.

Prop 13. — *(principe du maximum) Si* f *est analytique sur* U *et* $z_0 \in U$, *alors* z_0 *n'est pas un extremum local de* $|f|$.

Prop 14. — *(zéros isolés) Soit* $f \in \mathcal{A}(U)$ *non nulle, avec* U *connexe.* $S = \{z \in U, f(z) = 0\}$ *est une partie localement finie de* U, *i.e. : pour tout compact* $K \subset U$, $S \cap K$ *est fini.*

II–Holomorphie et formule de Cauchy

A) Holomorphie

Déf 15. — On dit que $f : U \to \mathbf{C}$ est holomorphe en $z_0 \in U$ si $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ a une limite quand $h \to 0$ dans $\mathbf{C}$, que l'on note $f'(z_0)$. On dit que f est holomorphe sur U (noté $f \in \mathcal{H}(U)$) si f est holomorphe en tout point de U.

Ex 16. — *Tout polynôme est holomorphe et si* $P(z) = z^n$, *alors* $P'(z) = nz^{n-1}$. *Si* $f(z) = \sum_n a_n(z-z_0)^n$ *est analytique en* z_0, *elle y est holomorphe et* $f'(z_0) = a_1$. *On a donc* $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{H}(U)$ *(voir figure 1). En revanche, la conjugaison n'est holomorphe nulle part.*

Prop 17. — *La somme, le produit, et le quotient défini de deux fonctions holomorphes est holomorphe.*

Déf 18. — On dit que $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \mathbf{C}$ (différentiable) satisfait les conditions de Cauchy-Riemann (en $z_0 = x_0 + iy_0$) si, on a $\partial_x \widetilde{f}(x_0, y_0) + i\partial_y \widetilde{f}(x_0, y_0) = 0$.

Prop 19. — f *est holomorphe en* z_0 *ssi* $\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}\widetilde{f}$ *est une similitude ssi* $\widetilde{f}$ *satisfait les conditions des Cauchy-Riemann en* z_0.

Appli 20. — *Une ellipse et une hyperbole ayant mêmes foyers se coupent orthogonalement (cf fig 2).*

B) Formule de Cauchy

Déf 21. — Si γ est un chemin $[a, b] \to \mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et f est une fonction continue sur l'image de γ, on définit $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(z))\gamma'(z)\mathrm{d}z$

Ex 22. — *Si* $a \in U$ *et* $r > 0$ *est tel que* $BF(a, r) \subset U$, *alors on note :*

$$\int_{C(a,r)} f(w)\mathrm{d}w = \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

Thm 23. — *(formule de Cauchy, difficile) Si* $f \in \mathcal{H}(U)$, *si* $a \in U$, *si* $r > 0$ *est tel que* $BF(a, r) \subset U$, *alors, pour* $z \in B(a, r)$ *:*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w - z}\mathrm{d}w$$

Cor 24. — *Si* f *est une fonction holomorphe, elle est analytique. De plus, avec les mêmes notations, les coefficients de son développement en* $z \in B(a, r)$ *sont :*

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\mathrm{d}w$$

En particulier, si f *est une fonction holomorphe sur* $\mathbf{C}$ *et* $f(z) = O(|z|^n)$, *alors* f *est polynomiale de degré au plus* n.

Cor 25. — *On a donc* $\mathcal{A}(U) = \mathcal{H}(U) = \mathcal{CR}(U)$. *Si* U *est connexe, cette algèbre est intègre (par les zéros isolés).*

Rmq 26. — *Ainsi, une fonction holomorphe (on dit aussi* $\mathbf{C}$*-dérivable) est analytique. Ce n'est pas vrai pour la variable réelle : la fonction en annexe est dérivable sur* $\mathbf{R}$ *(et même de classe* $\mathcal{C}^\infty$*) mais n'est pas développable en série entière en* 0.

Déf 27. — Soit f une fonction holomorphe sur U contenant z_0 ; l'ordre de f en z_0, noté $v_{z_0}(f)$ est le premier indice n apparaissant dans le développement en série de f autour de z_0.

Rmq 28. — *Si* f *est une fonction continue sur* U, *alors* f *est holomorphe sur* U *ssi elle vérifie la formule de Cauchy.*

Appli 29. — *(théorème de Weierstrass) Soit* (f_n) *une suite de fonctions de* $\mathcal{H}(U)$ *qui converge uniformément sur tout compact de* U, *alors sa limite est holomorphe sur* U.

Ex 30. — *La fonction* $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *est holomorphe sur* $\{z \in \mathbf{C} | \operatorname{Re}(z) > 1\}$

Prop 31. — *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe. Alors il existe F holomorphe telle que $F' = f$.*

Cor 32. — *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U connexe et simplement connexe, qui ne s'annule pas. Alors il existe $g \in \mathcal{H}(U)$ tel que $f = e^g$.*

III–Applications : probas, analyse

Déf 33. — Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Sa série génératrice est la série entière $G_X(z) = \mathbb{E}\left(z^X\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) z^n$

Rmq 34. — *La série génératrice est définie sur un ouvert contenant le disque unité (ouvert). Elle caractérise la loi, car on peut retrouver $(\mathbb{P}(X = n))$ en dérivant G_X en 0 (ou en intégrant sur $C(0, r), r < 1$).*

Prop 35. — *Si X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$, alors : $G_{X+Y} = G_X G_Y$*

Ex 36. — *Si X_p suit une loi géométrique de paramètre p, alors $G_{X_p}(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$ pour tout $z \in B(0, 1)$. En particulier, pX_p converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre 1.*

Ex 37. — *Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors : $G_X(z) = e^{-\lambda(z-1)}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. En particulier, la somme de deux variables suivant une loi de Poisson suit une loi de Poisson.*

DEVELOPPEMENT 1
La réciproque est vraie, ie : si X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$ et $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson, alors X et Y suivent une loi de Poisson.

Prop 38. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : U \times X \to \mathbf{C}$. On suppose qu'il existe $N \in \mathcal{A}$ négligeable tel que :*

- *Pour tout $z \in U$, $x \mapsto f(z, x) \in L^1(X, \mu)$*
- *Pour tout $x \in X - N$, $z \mapsto f(z, x) \in \mathcal{H}(U)$*
- *Il existe $g \in L^1(X, \mu)$ telle que $\forall x \in X - N, \forall z \in U, |f(z, x)| \leq g(x)$.*

Alors $z \mapsto \int_X f(z, x) \mathrm{d}\mu(x)$ définit une fonction holomorphe sur U.

Rmq 39. — *Contrairement au théorème de dérivation (réelle) sous le signe intégrale, il n'y a aucune condition à vérifier sur la dérivée.*

Rmq 40. — *Comme l'holomorphie est une notion locale, il suffit de vérifier les conditions autour de chaque point.*

Ex 41. — *La fonction $\Gamma : s \mapsto \int_0^{\infty} t^s e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ définit une fonction holomorphe sur $\{s \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(s) > 0\}$, qui vérifie : $\Gamma(s + 1) = z\Gamma(s)$. En particulier, $\frac{1}{\Gamma}$ est prolongeable en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$, qui s'annule en les entiers négatifs, telle que : $v_{-n}(\Gamma) = n + 1$ pour tout $n \geq 0$.*

Ex 42. — *Si $a > 0$ et $f \in L^1(\mathbf{R})$ vérifie : $f(x) = O(e^{-a|x|})$, alors sa transformée de Fourier*

$$\widehat{f} : z \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-ixz} \mathrm{d}x$$

définit une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbf{C}, -a < \operatorname{Im}(z) < a\}$.

Appli 43. — *Si f et $\widehat{f}$ sont à support compacts, alors $f = 0$. En particulier, $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ n'est pas stable par transformée de Fourier.*

IV–Méromorphie, et calculs d'intégrales

Prop 44. — *(corollaire de la formule de Cauchy) Si f est une fonction holomorphe sur U, et $\gamma : [0, 1] \to U$ est un lacet de classe C^1 par morceaux, qui se rétracte en un point, alors : $\int_\gamma f(w) \mathrm{d}w = 0$.*

Appli 45. — *La gaussienne $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est sa propre transformée de Fourier.*

Déf 46. — Une fonction est dite méromorphe sur U s'il existe une partie localement finie S telle que $f \in \mathcal{H}(U - S)$, et en chaque point $s \in S$, il existe $n \geq 0$ tel que $(z - s)^n f(z)$ soit prolongeable en une fonction holomorphe autour de s.

Prop 47. — *Soit γ un chemin de classe C^1 par morceaux, soit $a \in \mathbf{C}$, le nombre :*

$$\mathrm{Ind}_a(\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$$

est un entier, appelé indice de a par rapport à γ.

Prop 48. — *Si f est méromorphe sur U contenant z_0, alors on dispose d'uniques coefficients $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ tels que les $(a_n)_{n<0}$ sont presque tous nuls, et $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(z-z_0)^n$ autour de z_0. Ce développement est appelé développement en série de Bertrand; a_{-1} est le résidu de f en z_0, noté $\mathrm{Res}(f, z_0)$.*

Thm 49. — *(des résidus) Soit f une fonction méromorphe sur U, soit γ un lacet C^1 par morceaux telle que f est holomorphe en tout point de $\gamma([0,1])$. Alors :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{w\in U}\mathrm{Res}(f,w)\mathrm{Ind}_w(\gamma)$$

(la somme de droite a un nombre fini de termes non nuls).

Appli 50. — $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin(\frac{\pi}{n})}$ *(cf contour en annexe)*
$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\sin(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ *pour $a > 1$*

DEVELOPPEMENT 2

- La transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est $\xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.
- Si $n \geq 2$, celle de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $\xi \mapsto \pi e^{-|\xi|}$.
- Si $f \in L^1(\mathbf{R})$ vérifie : $f(x) = O(e^{-\frac{x^2}{2}})$ et $\widehat{f}(\xi) = O(e^{-\frac{x^2}{2}})$, alors f est proportionnelle à la gaussienne $(x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}})$.

Annexe : une figure pour expliquer les relations entre $\mathcal{A}(U), \mathcal{H}(U)$ et $\mathcal{CR}(U)$, une figure pour la fonction plateau, une figure pour l'ellipse et l'hyperbole homofocale, un dessin des contours.

4.0.4 246-Séries de Fourier. Exemples et applications.

Motivation : Certaines fonctions qu'on étudie (par exemple les signaux en physiques) sont/ont de bonne raisons d'être périodiques. On cherche à avoir une "base" pour décomposer ces fonctions, en un sens à définir. Cette base va être donnée par les fonctions oscillantes e^{int} (ou bien, si l'on travaille dans le domaine réel, $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$). L'idée est de voir dans quelle mesure on peut remplacer f par sa série de Fourier, en fonction de f et de la structure cherchée. On en déduira des applications pour beaucoup de calculs, mais aussi pour des résolutions d'EDO/EDP

Plan

I–Polynômes trigonométriques, séries de Fourier Définition des poly trigo. Ils sont orthogonaux pour la structure L^2. Polynômes de Tchebychev, linéarisation, utilisation pour le calcul d'intégrales. Des preuves d'existence en comparant avec la moyenne (cf Queffélec & Queffélec).
Fonctions périodiques, espaces C^0, C^k et L^p périodiques, convolution. Les polynômes trigo sont denses dans C^0-per par Weierstrass. Coefficients de Fourier, propiétés calculatoires (convolution, IPP, etc). Série de Fourier, noyau de Dirichlet. Noyau de Poisson, noyau de Féjer. Faire des calculs pour les fonctions créneaux, pour les monômes, etc. Lemme de Riemann-Lebesgue.

II–Étude de la convergence des séries de Fourier Convergence pour le cas C^0, etc : cas les plus simples (cv normale, cv unif, etc) puis Abel, puis Dirichlet (assez simple) puis Féjer par l'étude du noyau. Séries de Fourier à problèmes (cf Zuily-Queffélec). On peut parler du phénomène de Gibbs.

III–Applications Application de Parseval au calcul de séries, de Dirichlet au calcul de séries, ou de la valeur d'une fonction en un point (**dev : Gauss quad par séries de Fourier**). Formule de Poisson, application au prolongement de la fonction zêta (**dev**). Résolution de l'équation de la chaleur.

5 Probabilités

5.0.1 261-Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Motivation : La loi d'une variable aléatoire, c'est la mesure de probabilité qui lui est associée. C'est en quelque sorte le côté "intégration" de la théorie des probas : on simplifie le problème en regardant seulement une trace sur l'espace des "observables" (souvent $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{N}$) ; cependant, en faisant ça, on oublie l'aléa, et on ne connaît donc pas la relation avec d'autres variables (par exemple, les lois de X et de Y ne disent rien sur celle de (X,Y), ou celle de $X+Y$). La connaissance de la loi permet néanmoins de définir bon nombre de quantités utiles à l'étude des variables aléatoires : fonctions de répartition, caractéristique, moments, transformée de Laplace. De plus, la convergence en loi, bien que plus faible que les autres convergences, permet de donner des informations intéressantes (intervalles de confiance...). On s'intéressera à des exemples de lois, et, avec des hypothèses sur l'aléa sous-jacent, à des calculs de lois à partir de variables aléatoires.

Plan Cadre : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. δ_x est la mesure "de Dirac".

I - Définition, exemples de lois

Déf 1. — Une variable aléatoire (v.a.) est une fonction mesurable $X : \Omega \to E$ pour un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.
La loi de X est la mesure "poussée en avant" $\mathbb{P}_X : \mathcal{E} \to [0,\infty]$ donnée par $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ pour $A \in \mathcal{E}$. On dit que X suit la loi $\mathbb{P}_X$ (noté $X \sim \mathbb{P}_X$).

Rmq 2. — *La loi d'une variable dépend de la probabilité $\mathbb{P}$: on devrait dire "la loi de X sous $\mathbb{P}$". Comme on suppose $\mathbb{P}$ fixée, on s'en abstiendra.*

Ex 3. — *Si E est fini, la loi uniforme est $\mathscr{U}(E) : A \in \mathcal{P}(E) \mapsto \frac{|A|}{|E|}$.*

Prop 4. — *Si X est à valeurs dans un ensemble dénombrable D (au moins p.s.), on dit que X est discrète. La loi de X est alors $\sum_{x\in D} \mathbb{P}(X = x)\,\delta_x$. Ainsi, la loi de X est déterminée par la masse des points.*

Ex 5. — *(Quelques lois classiques sur $\mathbf{N}$) $n \in \mathbf{N}^*, p \in [0,1], \lambda > 0$: Bernoulli :* $\mathrm{Ber}(p) = p\delta_0 + (1-p)\delta_1$ *: épreuve aléatoire succès/échec avec proba p de succès.*
Binomiale : $\mathrm{Bin}(n,p) = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}\delta_k$ *: nombre de succès de n variables de Bernoulli indépendantes.*
Géométrique : $\mathrm{Geom}(p) = \sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1}\delta_k$ *: instant de premier succès d'une suite de Bernoulli indépendantes.*
Poisson : $\mathrm{Poi}(\lambda) = e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}\delta_k$ *: loi des évènements rares.*

Prop 6. — *La somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson suit une loi de Poisson (dont le paramètre est la somme des deux autres).*

Prop 7. — *Si $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ et $Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$, alors $X+Y \sim \mathrm{Bin}(n+m,p)$ et $n - X \sim \mathrm{Bin}(n, 1-p)$.*

Déf 8. — Si μ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$, on dit que X est à densité par rapport à μ s'il existe $f : E \to \mathbf{R}_+$ mesurable telle que : $\forall A \in \mathcal{E}, \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x)$. Une telle fonction f est alors unique (μ-presque partout).

Ex 9. — *On considère la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$: les lois à densités sont dites continues, et elles n'ont alors pas d'atomes.*
Uniforme : $f = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}$ (loi $\mathscr{U}([a,b])$)
Exponentielle : $f(x) = \theta\exp(-\theta x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ modélise un évènement sans mémoire (ex : désintégration radioactive) (loi $\mathscr{E}xp(\theta)$)
Normale : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ (loi $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$)
Cauchy : $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{c}{c^2+x^2}$: ordonnée à distance c de la droite dont l'angle avec l'axe des abscisses suit une loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (loi $\mathscr{C}auchy(c)$)
Gamma : $f(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)}e^{-\theta x}x^a\frac{1}{x}$ (loi $\mathscr{G}amma(a,\theta)$)

Déf 10. — Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires. Les lois marginales sont les lois des X_i ; la loi conjointe est celle de $(X_1, \ldots, X_n)$.

Prop 11. — *La loi conjointe détermine la loi marginale ; la réciproque est fausse.*

Ex 12. — *Si $X \sim \mathscr{U}(\{0,1\})$, alors (X,X) et $(X,1-X)$ ont mêmes lois marginales, mais pas même lois conjointes.*

Ex 13. — *Si $X \sim \mathscr{U}(\mathfrak{S}_n)$, alors pour tout $i \in [\![1,\dots,n]\!]$, $X(i) \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$; la réciproque est fausse en prenant $X=(1,2,\dots,n)^U$, où $U \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$*

Prop 14. — *Les X_i sont indépendantes ssi la loi de (X_i) est la mesure produit de celle des X_i.*

II-Caractérisations fonctionnelles de lois

Thm 15. — *(de transfert) Si f est positive mesurable, alors :*

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_E f(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$$

Cor 16. — *La donnée de $\mathbb{E}(f(X))$ pour f positive mesurable caractérise la loi.*

Cor 17. — *La loi de X caractérise ses moments (et leurs existences).*

Rmq 18. — *En général, les moments ne caractérisent pas la loi. Par exemple $X=e^g$ où g suit une loi normale centrée réduite, et Y discrète telle que $\mathbb{P}(Y=e^j)=ce^{-\frac{j^2}{2}}$: alors X et Y ont mêmes moments (mais pas mêmes lois).*

Appli 19. — *Si X et Y sont iid de lois $\mathscr{N}(0,1)$, alors X^2+Y^2 et $\frac{Y}{X}$ sont indépendantes de lois $\mathscr{E}xp(1)$ et $\mathscr{C}auchy(1)$.*

Déf 20. — On suppose X à valeurs réelles. La fonction de répartition de X est définie par $F(x)=\mathbb{P}(X\leq x)$.

Prop 21. — *Cette fonction est croissante, continue à droite, et ses discontinuités correspondent aux atomes de X. Elle tend vers 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Dans le cas où F est de classe $\mathcal{C}^1$, X est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité F'.*

Rmq 22. — *Si les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, la fonction de répartition de $\max_{1\leq i\leq n} X_i$ est le produit des fonctions de répartition.*

Prop 23. — *La fonction de répartition caractérise la loi. En fait, notant $F^* : t \mapsto \inf\{x|F(x)\geq t\}$, si $U \sim \mathscr{U}([0,1])$, alors $F^*(U)\sim \mathbb{P}_X$.*

Appli 24. — *La loi géométrique est le premier instant de succès d'une suite de Bernoulli indépendantes.*
Si les $(X_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes de lois $\mathscr{E}xp(\theta)$, alors $\min_{1\leq i\leq n} X_i \sim \mathscr{E}xp(n\theta)$.

Prop 25. — *On dit que X est sans vieillissement si $1-F(x+y)=(1-F(x))(1-F(y))$ pour tout $x,y\in\mathbf{R}_+$. Si X est sans vieillissement, alors X suit une loi exponentielle ou $X\in\mathbf{R}_-$ p.s..*

Déf 26. — La fonction caractéristique (resp génératrice) d'une variable réelle (resp entière) est $\varphi_X : t\mapsto \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)$ (resp $s\mapsto \mathbb{E}\left(s^X\right)$).

Prop 27. — *La fonction caractéristique (resp génératrice) caractérise la loi.*

Prop 28. — *Si X et Y sont indépendantes, $\varphi_{X+Y}=\varphi_X\varphi_Y$ (resp $G_{X+Y}=G_XG_Y$).*

Appli 29. — *La somme de deux lois de Poisson indépendante est de Poisson ; cela est aussi le cas pour la loi normale.*

DEVELOPPEMENT 1
Si X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$ et $Z=X+Y$ suit une loi de Poisson, alors X et Y suivent une loi de Poisson

Prop 30. — *Si $X\in L^n(\Omega)$ est à valeurs réelles, alors φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et : $\forall k\leq n, \varphi^k(0)=i^k\mathbb{E}\left(X^k\right)$. De même, si X est à valeurs entières, si $X\in L^n$, alors G_X est k-fois dérivable à gauche en 1, et : $G^{(k)}(1-)=\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-k+1))$.*

Appli 31. — *Calcul des moments de la loi normale.*

III-Convergence en loi Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace topologique E (souvent, $E=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{N}$).

Déf 32. — On dit que (X_n) converge en loi vers μ si pour toute fonction $f : E \to \mathbf{R}$ continue bornée, $\mathbb{E}(f(X_n)) \longrightarrow \int_E f \mathrm{d}\mu$. Si $X \sim \mu$, on dit que (X_n) converge en loi vers X.

Prop 33. — *Si (X_n) est à valeurs dans un espace discret E (au sens topologique) et dénombrable, alors $X_n \longrightarrow X$ si et seulement si $\mathbb{P}(X_n = k) \mapsto \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in E$*

Ex 34. — *Soit $\lambda > 0$, soit (X_n) une suite de variables aléatoires telles que pour n assez grand, $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$. Alors (X_n) converge en loi vers la loi de Poisson $\mathrm{Poi}(\lambda)$.*

DEVELOPPEMENT 2
Soit $n \geq 0$ un entier impair. Soient $(\xi_i)_{i\geq 0}$ des variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ telles que $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \mathbb{P}(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$. Soit $X_i = \sum_{j=0}^{i} \xi_j$. Alors (X_i) converge en loi vers la loi uniforme sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Prop 35. — *Si (X_n) converge en probabilités vers X, alors elle converge en loi vers X.*

Cor 36. — *Si (X_n) converge p.s. ou L^1 vers X, elle converge en loi.*

Prop 37. — *Si les (X_n) sont réelles, (X_n) converge en loi vers X ssi φ_{X_n} converge simplement vers φ_X.*

Appli 38. — *Si $X_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$, alors $X_n \longrightarrow \delta_0$ en loi.*

Thm 39. — *(théorème central limite) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ réelles iid de carré intégrable, de moyenne m de variance σ^2. Alors*

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m) \longrightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ en loi}$$

Prop 40. — *Si les (X_n) sont réelles, elles convergent en loi vers X ssi $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$ pour tout point x où F_X est continue.*

Appli 41. — *Détermination d'intervalles de confiance asymptotique. On a l'équivalent : $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \sim \frac{e^n}{2}$*

5.0.2 262-Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Motivation : Étant donnée une suite de variables aléatoires, on peut chercher à connaître des résultats sur son asymptotique. Les exemples sont nombreux : suite de piles ou faces, itération d'une chaîne de Markov, propagation d'un allèle dans une population, etc. Il y a plusieurs types de convergences, correspondant à différentes intuitions : la convergence ps (je vais observer ça à coup sûr), la convergence L^p (l'écart entre l'observation et la limite va être de plus en plus réduit), la convergence en probas (quelque soit l'écart ε, pour un n assez grand, il sera peu probable d'être plus loin que ε), et la convergence en loi (correspondant en quelque sorte à la "limite des histogrammes"). L'idée est de mettre en relation ces convergences et de les reformuler.

I–Définition et critères des convergences Convergence ps : définition, critères de convergence ps par le lemme de Borel-Cantelli. Application : suite de pile ou face.
Convergence L^p : lien avec la variance ; théorème de convergence dominée. Métrique associée.
Convergence en probas : définition, métrique associée. Exemples : bernoulli de petit paramètre.
Convergence en loi : définition équivalentes avec les fonctions continues bornées etc. Cas des variables aléatoires discrètes, théorème de Portmanteau, théorème de Levy. Exemples : binomiales de petit paramètre, **dev 1** Marche aléatoire sur le N-gone régulier, $pGeom(p) \to Exp(1)$.

II–Relations entre les convergences $L^p \implies \mathbb{P}()$ par Markov. ps $\implies \mathbb{P}$ par le théorème de convergence dominée à $\mathbf{1}_{(|X_n - X| > \varepsilon}$. ps implique loi (faire par unif continuité). Réciproques partielles (sous suite pour cv en probas et ps, lemme de Slutsky, bornée L^q).

III–Théorèmes limites, applications Loi du tout ou rien. Loi des grands nombres, approche fréquentiste des probas, théorème de Glivenko-Cantelli. Application : un estimateur fortement consistant pour la moyenne = la moyenne empirique. Problématique des intervalles de confiance. Détermination exacte : Bienaymé-Tchebychev. Théorème centrale limite : interprétation en intervalles de confiance. Petites billes dans un "arbre". Application analytique ($\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \sim \frac{e^n}{2}$).
dev : restaurants chinois.

5.0.3 264-Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications

Motivation : Dans beaucoup de situations, des variables à valeurs entières apparaissent : les expériences finies (lancers de dés, urnes), mais aussi les processus (gain au casino, nombre de piles ou faces pour un nombre infini de lancers, etc). On dispose de méthodes spécifiques pour étudier ce genre de variables : séries génératrices, caractérisation de la loi par la masse des points, etc. On présente quelques lois classiques, et on montre leurs utilisations.

Plan

I–Présentation de lois discrètes et leur interprétation Qu'est-ce qu'une loi discrète, description avec les atomes. Loi uniforme sur un ensemble fini (un mélange idéal est une permutation uniforme) : utilisation du dénombrement. Lois de Bernoulli, binomiale (lancers de pièces), géométrique (premier pile), (hypergéométrique). Simulation de lancer de dé, de tirages. Loi de Poisson. Indépendance, application à l'indicatrice d'Euler. Avec la loi zeta, expression de la fonction zeta en produit eulérien. Loi d'une somme, justification de l'interprétation de la binomiale. Fonction de répartition, indépendance : minimum de deux géométriques.

II–Objets associées à des lois discrètes Moments, exemples pour les lois au-dessus. Utilisations : inég de Markov, de Tchebychev. Applications : intervalles de confiance, polynômes de Bernstein. Identité de Wald.
Fonctions génératrices ; la somme de deux poissons indép est poisson. Impossible de truquer un dé pour que la somme de deux lancers suive une loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$. La fonction géné caractérise la loi, comment les calculer (dérivées, ou intégrales sur le cercle). Moments dans la fonction génératrice. Application : moments de la géométrique. **dev** : Si la somme de deux variables indép suit une loi de Poisson, chacune d'entre elle est de Poisson.

III–Limites de variables discrètes Loi des grands nombres : approche fréquentiste des probas. Un estimateur pour la moyenne, dont on voudrait avoir le comportement. Convergence en loi : équivaut à celle sur les atomes si la loi finale est discrète. Exemples de binomiales de petit paramètres. **dev** : marche aléatoire sur le N-gone régulier. Fonctions caractéristiques et convergence en loi ; $pGeom(p) \to Exp(1)$. Théorème de Moivre-Laplace, généralisation : théorème centrale limite. Intervalles de confiance, application en analyse ($\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \sim \frac{e^n}{2}$).

5.0.4 266-Illustration de la notion d'indépendance en probabilités

Motivation Notion intuitive et physique d'indépendance. Exemples de deux dés, d'une pièce tirée deux fois, de tirages d'urnes distinctes, de tirage d'une urne avec remise. Idée de «non-corrélation».
X et Y indép. si on peut faire «comme en intégration» : on a des informations sur le couplage entre X et Y.
Exemple : si X et Y sont à densité (f et g par rapport à μ et ν), alors X et Y sont indép $\iff$ $\mathrm{d}\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) = f(x)g(y)\mathrm{d}\mu \otimes \mathrm{d}\nu(x,y)$. Objectif : donner des illustrations de cette notion, exposer son intérêt quant à la détermination de lois, de convergences, etc.

Plan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne toujours un espace probabilisé.

I - Indépendance : définitions, exemples, prop directes

Déf 1. — 1 Deux évènements A et B de $\mathcal{A}$ sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Rmq 2. — *Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, cela équivaut à dire : $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.*

Ex 3. — *$\Omega = \{0,1\}^2$ modélisant deux piles ou faces successifs. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $A = \{0\} \times \{0,1\}$ et $B = \{0,1\} \times \{0\}$ sont indépendants pour la probabilité uniforme. Même configuration, même A, mais $B = \{1\} \times \{0,1\}$: $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*

Rmq 4. — *A et A sont indépendants $\iff$ $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.*

Déf 5. — Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements. On dit que ces évènements sont indépendants si pour tout $J \subset I$ fini, on a :

$$\mathbb{P}(\cap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

On dit que les (A_i) sont deux à deux indépendants si pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.

Prop 6. — *L'indépendance implique l'indépendance deux à deux.*

Rmq 7. — *La réciproque est fausse : $\Omega = \{1,\ldots,6\}^2$ modélisant le jet de deux dés, $A_i = \{\omega \in \Omega, \omega_i \text{ est pair}\}$ (pour $i \in \{1,2\}$), et $C = \{\omega, \omega_1 + \omega_2 \text{ est pair}\}$. A_1, A_2, C sont deux à deux indépendants, mais pas indépendants.*

Prop 8. — *Si les (A_i) sont indépendants, et si $I = I_1 \cup I_2$ est une partition de I, soit B_i défini par $B_i = A_i$ si $i \in I_1$ et $B_i = A_i^c$ sinon. Alors les $(B_i)_{i\in I}$ sont indépendants.*

Ex 9. — *(indicatrice d'Euler) $n \geq 1$, $\Omega = \{1,\ldots,n\}$, avec la tribu discrète et la loi uniforme. $A = \{\omega \in \Omega, \omega \text{ est premier avec } n\}$. Pour p premier, soit $A_p = \{\omega \in \Omega, p \mid \Omega\}$. Alors $A = \bigcap_{p|n} A_p^c$ donc :*

$$\mathbb{P}(A) = \varphi(n) = \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Ex 10. — *En prenant la loi zêta sur $\mathbf{N}^*$, on trouve, en considérant les évènements $A_p = (p \mid n)$:*

$$\forall s > 1,\ \zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Déf 11. — Soient $X_i : \Omega \to (E_i, \mathcal{E}_i)$, $i \in I$, des variables aléatoires. On dit qu'elles sont indépendantes si pour tout $(A_i) \in \prod_{i\in I} \mathcal{E}_i$, les $(X_i \in A_i)$ sont indépendants.

Prop 12. — *Si I est fini, il suffit de vérifier : $\forall (A_i)_{i\in I} \in \prod \mathcal{E}_i, \mathbb{P}(X_i \in A_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$*

Ex 13. — *Si $X \sim \mathscr{U}([a,b]^2)$, alors ses projections sont indépendantes.*

Notation 14. — "iid" : indépendantes de mêmes lois. $X \coprod Y$: X et Y sont indépendantes.

Ex 15. — *Si $X \sim \mathscr{U}([0,1])$, et si $(X_n)_{n\geq 1}$ sont les coefficients de son développement dyadique, les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires iid de loi* $\mathrm{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$

Prop 16. — $X \coprod Y \iff$ *la loi de (X,Y) est* $\mathrm{d}\mathbb{P}_X \otimes \mathrm{d}\mathbb{P}_Y$.

Prop 17. — *(lemme des coalitions) Soit (X_i) des variables aléatoires indépendantes, et $f_i : E_i \to F_i$ des fonctions mesurables. Les $(f_i(X_i))$ sont indépendantes.*

Appli 18. — *Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires réelles, alors X_n est indépendante de $X_0 + \ldots + X_{n-1}$. Pour $X_n \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$, il y a une chance sur deux d'avoir face, même après 4 fois face.*

II - Indépendance et objets associés aux variables aléatoires

Prop 19. — *Si X et Y sont à densités : $\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = f(x)\mathrm{d}\mu(x)$, $\mathrm{d}\mathbb{P}_Y(y) = g(y)\mathrm{d}\nu(y)$, alors : $X \coprod Y \iff \mathrm{d}\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) = f(x)g(y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)$.*

Ex 20. —

- *Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont iid de loi $\mathrm{Ber}(p)$, alors leur somme suit une loi binomiale de paramètres (n,p).*
- *Si X et Y sont iid de lois $\mathscr{N}(0,1)$, alors X^2+Y^2 et $\frac{Y}{X}$ sont indépendantes de lois $\mathscr{E}xp(1)$ et $\mathscr{C}auchy(1)$.*
- *La somme de deux lois de Poisson indépendantes suit une loi de Poisson.*

Prop 21. — *Si les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes réelles, on pose $Y_n = \max_{k\leq n} X_k$. Notant F les fonctions de répartitions, on a :*

$$F_{Y_n} = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}$$

Ex 22. — *Si les (X_n) sont iid de loi $\mathscr{E}xp(\lambda)$, alors $\min_{1\leq i\leq n} X_i$ suit une loi $\mathscr{E}xp(n\lambda)$.*

Prop 23. — *Si X et Y sont des variables aléatoires réelles indépendantes et admettent un moment d'ordre 1, alors XY aussi et : $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$*

Ex 24. — *Si X est centrée et indépendante de Y, alors XY est centrée. Si $X = 1$ ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et Y représente une mise, XY représente le gain algébrique avec la proba. de perte.*

Ex 25. — *Si N est à valeurs entières intégrable, et $(X_n)_{n\geq 0}$ est iid intégrable, alors : $\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{N} X_n\right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$*

Déf 26. — Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, on définit $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))$. On note $X \perp Y$ si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Prop 27. — $X \coprod Y \implies X \perp Y$*, la réciproque est fausse (prendre X et Y centrées telles que $XY = 0$ pp).*

Rmq 28. — *L'indépendance est plus forte que l'"orthogonalité" au sens L^2.*

Prop 29. — *Si X et Y sont indépendantes et dans L^2, alors : $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$*

Appli 30. — *Si X est une loi binomiale de paramètres (n,p), alors $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$. Plus généralement, la variance est utile dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

Prop 31. — *Si X et Y sont indépendantes réelles (resp à valeurs dans $\mathbf{N}$), alors la fonction caractéristique (resp génératrice) de la somme est le produit de celle de X et de Y.*

Appli 32. —

- *Si X et Y sont indépendantes de lois $\mathscr{N}(m_1,\sigma_1^2)$ et $\mathscr{N}(m_2,\sigma_2^2)$, alors $X+Y$ suit une loi $\mathscr{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.*
- *Si X et Y sont indépendantes de lois $\mathscr{C}auchy(a)$ et $\mathscr{C}auchy(b)$, alors $X + Y \sim \mathscr{C}auchy(a+b)$.*

DEVELOPPEMENT 1
Si X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$ et $Z = X+Y$ suit une loi de Poisson, alors X et Y suivent une loi de Poisson

III-Indépendance et asymptotique

Lemme 33. — *(Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements indépendants. On suppose $\sum \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Alors : $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.*

Appli 34. — *Sur $\mathbf{N}^*$ muni de la tribu discrète, il n'exite pas $\mathbb{P}$ telle que : $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(n\mathbf{N}^*) = \frac{1}{n}$.*

Appli 35. — *Si (A_n) est une suite iid de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, alors :*

$$\text{presque sûrement}, \forall p \in \mathbf{N}, \forall w = (w_0, \dots w_p) \in \{0,1\}^p,$$
$$w \text{ apparaît une infinité de fois dans } (A_0, A_1, \dots)$$

Prop 36. — *(Loi des grands nombres) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ iid de carré intégrable. Alors : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \longrightarrow \mathbb{E}(X_1)$ presque sûrement*

Appli 37. — *Si (X_n) sont iid et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \longrightarrow p$ p.s..*
Ce théorème permet d'estimer un paramètre à partir de la moyenne empirique pour n grand (estimation dite paramétrique).

Thm 38. — *(limite central) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ iid de carré intégrable, de moyenne m de variance σ^2. Alors*

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n (X_k - m) \longrightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ en loi}$$

Appli 39. — $\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \sim \frac{e^n}{2}$

Rmq 40. — *L'hypothèse d'independance est cruciale dans les deux théorèmes précédents, comme l'illustre le contre-exemple où (X_n) est constante de loi $\mathrm{Ber}(\frac{1}{2})$.*

DEVELOPPEMENT 2 Restaurant chinois pour la cv en loi ?

Annexe : les lois usuelles avec leurs densités

6 Autres

6.0.1 267-Exemples d'utilisations de courbes en dimension 2 ou supérieure.

Rouvière, Lafontaine, Benzoni-Gavage, Amar-Matheron, Chambert-Loir, Audin.

Comment définir une courbe ?

- Par un paramétrage
- $n = 3$: comme l'intersection de deux surfaces : si $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ est une submersion, alors $g^{-1}(0)$ est une sous-variété. Exemple : $g(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2, ax^2 + by^2 + cz^2 - M^2)$ pour $R, M \geq 0, a > b > c > 0$: la polhodie. Courbes intégrales de l'équation d'Euler $\frac{d}{dt}M = M \wedge AM$

Analyse complexe Intégrale curviligne (théorèmes de Cauchy, des résidus, Rouché) Homotopie pour les ouverts de $\mathbf{C}$ (indice, détermination du logarithme, simple connexité)

Équations différentielles autonomes Théorème de Cauchy-Lipschitz (courbes intégrales, flot d'un champ vectoriel, portrait de phase, intégrale première). Ex : oscillateur harmonique, équation de Lokta-Volterra, théorème de Poincaré-Bendixon, calcul variationnel, équations d'Euler Lagrange et géodésiques.

Méthode des caractéristiques pour les EDP de transport.

Calcul diff Définition des espaces tangents, application : espaces tangents de groupes linéaires classiques, morphismes $\mathbf{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
Courbes classiques : hélice, lemniscate de Bernoulli, cycloïde, chaînette...

Étude métrique des courbes Longueur, courbure : paramétrage par longueur d'arc (cf équa diff) ; étude des surfaces.

Connexité par arcs Ouvert d'un evn, connexe vs connexe par arcs.

7 Groupes

7.0.1 101–Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Motivation : Les axiomes de définition d'un groupe permettent de donner une définition d'action qui est "naturelle". Il y a essentiellement deux approches : d'une part, étant donnée une action $G \curvearrowright X$, on peut chercher à dire des choses sur le groupe à partir de ses caractéristiques (formes normales, etc) ; d'autre part, l'étude d'un groupe G peut permettre de déterminer des renseignements sur ses actions. De plus, étant donné une action $G \curvearrowright X$, certains stabilisateurs donnent des groupes intéressants à étudier. Enfin, on regarde souvent des objets modulo un groupe de transformations (ex : angles) d'où la classification d'orbites.

Plan G désigne un groupe, et X un ensemble non vide.

I-Actions : définition, constructions Deux définitions équivalentes d'une action de groupes. Exemple pour le cas de $[\![1, n]\!]$, par exemple pour l'action de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Groupes "d'actions" naturels : $\mathfrak{S}_n$, GL_n. Construction d'actions : restriction, action produit, action sur Hom, etc.

II-"Éléments" associés à l'action : stabilisateur, orbites Action fidèle. Exemple d'action non fidèle (par ex GL_n sur l'ens des droites vectorielles) et fidélisation (déf des PGL_n). Stabilisateur, fixateur. Sous-groupes définis comme tels (ex : $Isom(q)$ pour l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur les fq), idée de moyenne. Principe de conjugaison. Orbites, décomposition en union d'orbite. App : th de Lagrange, cycles d'une permutation et classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$. Problématique de la détermination d'orbites et de forme normale : actions sur les matrices (rang pour l'équivalence, noyau/image pour l'action à g/d, inv de sim pour la similitude, etc), sur les fq (classification sur $\mathbf{K}$ alg clos, sur $\mathbf{R}$, sur $\mathbf{F}_q$). Formule des classes, de Burnside. Une jolie application : si A et B sont deux matrices à coefficients entiers, alors $\mathrm{Tr}(A^p + B^p) \equiv \mathrm{Tr}(A^p) + \mathrm{Tr}(B^p) \pmod p$. Applications : centre d'un p-groupe, lemme de Cauchy, etc. Transitivité, simple transitivité, multiple transitivité. Définitions de notions géométriques (angles). Théorème d'Iwasawa (dev ?).

III-Théorie des représentations Définitions de base, construction de rep. Lemme de Maschke, lemme de Schur, conséquences. Tables de caractères. Indicateur de Frobenius-Schur (dev ?).

7.0.2 102–Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

I–Exponentielle, sous-groupes de $\mathbf{U}$ Lien exp trigo : calcul de sommes de cosinus. Noyaux pour les séries de Fourier ; linéarisation, polynômes de Tchebychev. Exponentielle lien $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et $\mathbf{U}$: les sous-groupes de $\mathbf{U}$ sont monogènes ou denses. Sous-groupes remarquables de $\mathbf{U}$: finis=cycliques=exposant fini, monogènes (finis ou denses), $\mathbf{U}_\infty$ (sous-groupe de torsion), $\mathbf{U}_{p^\infty}$ (lien avec un caractère $\mathbf{Q}_p \to \mathbf{C}^\times$). Générateurs de ces groupes : application démonstration de $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. Non canonicité de l'isomorphisme $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathbf{U}_n$.

II–Apparitions géométriques

a) Module 1, groupe orthogonal $\mathbf{U} \simeq \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$. Application : angles, sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$, dessins de n-gones.
Critère d'alignement, de cocyclicité, etc. Inversion.
Paramétrisation rationnelle du cercle unité et triplets pythagoriciens.

b) Spectre de matrices Toute matrice d'ordre fini n est diagonalisable à valeurs prores dans $\mathbf{U}_n$. Cas des matrices réelles : le spectre est stable sous conjugaison. Exemple : **dev** : diagonalisation de la circulante, suite de polygones qui cv, chaîne de Markov sur le n-gone régulier.

III–Cyclotomie, caractères

a) Cyclotomie Extension cyclotomiques, polynômes cyclotomiques. **dev** : sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$. Automorphismes d'une extension cyclotomique. Discriminant d'une extension cyclotomique par le Vandermonde. Règle et compas : un critère suffisant (facile) et nécessaire (difficile) pour pouvoir construire le n-gone régulier.

b) Utilisation en théorie des caractères (abéliens) Définition d'un caractère se ramène à $\mathbf{U}$. Prolongement des caractères. Corollaire : classification des groupes abéliens finis. Transformée de Fourier sur un groupe abélien fini. Application : **dev** : calcul algébrique de la somme quadratique de Gauss.

c) Utilisation en théorie des représentations Utilisation du fait que les val propres sont dans $\mathbf{U}$: pour que $\mathrm{Tr}(g^{-1}) = \overline{\mathrm{Tr}(g)}$, ce qui donne l'orthogonalité des caractères (regarder la représentation de $\mathrm{Hom}(V, W)$: les morphismes fixés sont les morphismes de rep) ; pour que $\chi(g) = \chi(1)$ équivale à $\rho(g) = \rho(1)$ (ce qui permet de voir la non-fidélité sur la table de caractères) ; pour montrer qu'il y a autant de lignes réelles que de colonnes réelles (regarder la trace de la fonction $f \in \mathcal{R}(G) \mapsto f(g^{-1}) \in \mathcal{R}(G)$ (où $\mathcal{R}(G)$ est l'ens des fonctions centrales), et autres (entièreté des caractères et conséquences arithmétiques, automorphismes cyclotomiques qui se manifestent dans le groupe, etc).

7.0.3 103–Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Motivation : Si G est un groupe, on a des actions à gauche et à droite sur lui-même par multiplication. Si on "gauchise" celle à droite et qu'on restreint la bi-action obtenue à la diagonale, on obtient donc une action naturelle : la conjugaison. Cette action préserve la structure de groupes : elle induit donc un morphisme $G \to \mathrm{Aut}(G)$. C'est une raison pour laquelle elle est privilégiée. En situation géométrique, on a le principe de conjugaison : les invariants de $g.x$ sont les conjugués de ceux de x par g.
L'action par conjugaison s'étend aux sous-groupes, cela introduit les sous-groupes distingués. Les sous-groupes distingués sont en quelque sorte des composante du groupe de départ. De là, deux questions sont possibles : d'abord, existe-t'il des briques de base ? cela amène à étudier les groupes simples, et à en déterminer ; ensuite, étant donné un sous-groupe H normal dans G, admet-il un "supplémentaire" ? cela amène à étudier les quotients. Les quotients permettent d'avoir des "modèles" de groupes plus fidèles (penser à la fidélisation d'une action).
Ainsi, l'étude des classes de conjugaisons donne des informations importantes sur le groupe : de plus, elle est intimement liée à la théorie des représentations.

Plan

I-Action par conjugaison. Définition, exemples dans le cas abélien, de $\mathfrak{S}_n$. Son fixateur, et un critère de commutation ; formule des classes, et p-groupes. Morphisme $G \to \mathrm{Aut}(G)$ induit. Principe de conjugaison : stabilisateurs, espaces propres, cycles, etc. Action sur les sous-groupes associée : interprétation pour "être conjugué à $\mathcal{O}(n)$". Faire des **diagrammes**. Classes de conjuguaison, et forme normale comme orbites de cette action : exemples dans les cas abéliens, $\mathfrak{S}_n$, $\mathcal{D}_n$, $\mathcal{O}(n)$, GL_n (par les inv de similitude).

II-Sous-groupes distingués, groupes quotients, groupes simples. Normalisateur, interprétation comme un stabilisateur (de H pour l'action de G sur ses ss-g par conjug), cardinal (vs la classe de conj). Sous-groupes distingués. Un noyau est distingué. Exemples : cas abélien, $SO \subset O(n)$, $SL_n \subset \mathrm{GL}_n$, $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{S}_n$, homothéties-translations dans GA, $V_4 \subset \mathfrak{S}_4$... Si p est le plus petit diviseur premier de $|G|$, tout ss-g d'indice p est distingué. Non transitivité (donner un ex avec $\mathfrak{S}_4$). Groupes caractéristiques, $D(G)$, Frattini. Groupes quotients. Propriété universelle du quotient. Premier (et deux autres) théorème d'isomorphie. Isom de $Int(G)$. Quotients de groupes, suites exactes. Exemples : cas cyclique, cas d'avant (quotient = $\mathbf{K}*$ ou bien $\{\pm 1\}$). Tout sous-groupe distingué est un noyau. Sous-groupes de G/H, application : sous-groupes d'un groupe cyclique ; si G est un p-groupe et d divise son ordre, il existe un ss g d'ordre d.
Sous-groupe simple, morphisme qui part d'un groupe simple (équivalent des corps). Groupes abéliens simples. **Dev** : groupes simples et actions : th d'Iwasawa. Application de la simplicité : $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les dérangements, actions d'un groupe simple.

III-Théorie des représentations et fonctions centrales. Déf des rep, lemmes de Schur et de Maschke, caractères base de l'espace des fonctions centrales. Applications : un groupe est ab ssi il a beaucoup de caractères ; un groupe non ab d'ordre 8 a exactement 5 classes de conj (décomposer la régulière... et somme de carrés) ; **dev** sur le nb de classes de conj, le degré d'une rep et le card du groupe. Nombre de classes stables par inverse.

7.0.4 105-Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Motivation : La donnée d'une action de G revient au même que celle d'un morphisme $G \to \mathrm{Bij}(X)$. D'où l'étude des $\mathfrak{S}_n$, vus comme des groupes "universels". Ces groupes sont naturellement munis d'une action sur $[\![1, n]\!]$, et l'étude de cette action permet de distinguer des caractéristiques des éléments (ordre, orbite, etc). L'idée est d'étudier $\mathfrak{S}_n$ à la fois en tant que groupes (avec toute la technologie que cela permet : conjugaison, simplicité, générateurs, sous-groupes etc) et vu via son action (orbites, points fixes, etc).
Ce groupe a des applications en algèbre linéaire (via son action sur les vecteurs de $\mathbf{K}^n$, par les matrices de permutation), en algèbre générale (via son action sur $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$), en géométrie (vu comme groupe d'isométries du tétraèdre, ou encore via l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur le birapport), en probabilités (où le mélange d'un paquet de cartes s'interprète comme un élément de $\mathfrak{S}_{52}$), en combinatoire, etc.

Plan

I-Le groupe $\mathfrak{S}_n$ agissant sur $[\![1, n]\!]$ Action, décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Fidélité, n-transitivité de l'action. Application : cardinal de $\mathfrak{S}_n$. Principe de conjugaison. Exemples de mise en pratique : les permutations $k \mapsto n + 1 - k$, les affines ds $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Ordre d'une permutation.

II-Le groupe $\mathfrak{S}_n$ en tant que groupe Composer deux permutations : exemples dans $\mathfrak{S}_4$. Classes de conjugaison. Application : centre de $\mathfrak{S}_n$. Famille génératrices de $\mathfrak{S}_n$: transpositions, etc. Elles n'ont pas toutes mêmes cardinal. Construire un morphisme $G \to \mathfrak{S}_n$; application : tout groupe fini est un sous-groupe d'un $\mathfrak{S}_n$. Morphisme signature : existence et unicité. Application : unique sous-groupe d'indice 2 $\mathfrak{A}_n$. Simplicité de $\mathfrak{A}_n$, application (engendrement par les dérangements, th de Galois), $\mathfrak{A}_5$ n'a pas de sous-groupe d'indice entre 2 et 4.

III-D'autres apparitions de $\mathfrak{S}_n$ **dev** : groupe d'isométries du tétraèdre et table de caractère de $\mathfrak{S}_4$. **dev** : nombre de cycles de permutations aléatoires. Action de $\mathfrak{S}_n$ sur les polynômes : th de Waring. Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbf{K}^n$, matrices de permutation. Théorème de Brauer, utilisation dans le pivot de Gauss. Matrices diagonalisables comme $\mathbf{C}^n/\mathfrak{S}_n$. Utilisation pour définir le déterminant, qui est (projectivement) la seule forme n-linéaire alternée. On en déduit : $1 = \frac{1}{n!}\sum_\sigma \varepsilon(\sigma) n^{c_\sigma}$, avec c_σ le nombre de cycles ; on a regardé la multiplicité de la composante ε-isotypique dans la représentation de $\mathfrak{S}_n$ sur les formes n-linéaires.

7.0.5 104-Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

Motivation : On cherche à étudier les groupes finis : cette information de finitude est de première importance, et permet de définir l'ordre d'un élément ou d'un sous-groupe. L'objectif initial est de classifier, à isomorphisme près, tous les groupes finis (en gros, trouver une forme normale). Dans le cas abélien, c'est "facile" grâce au théorème de structure. Dans le cas quelconque, ce n'est pas le cas. On cherche alors des techniques pour étudier les groupes non abéliens finis. Par exemple, on peut chercher à savoir quand deux groupes sont non isomorphes. Une bonne idée pour cela est de les faire agir sur un ensemble convenable, par exemple géométrique. Cela peut aussi déboucher sur la théorie des représentations des groupes finis.

Plan

I-Condition de finitude Groupes finis, exemples. Ordre, théorème de Lagrange via le quotient. Applications : morphismes vers C_p (p premier), diagonalisabilité des représentations. On peut aussi parler du cas particulier des p-groupes (**dev** Frattini) et de l'arithmétique.

II-Groupes abéliens finis Exemples : C_n, $\mathbf{F}_q^\times$: tout sous-groupe fini de $\mathbf{K}^\times$ est cyclique, illustration pour $\mathbf{C}$, $V_4 = C_2 \times C_2$... Critère(s) pour être abélien. Un groupe non abélien. Théorème de structure des gr ab finis par la forme normale de Smith (**dev ?**).

III-Une méthode pour étudier les groupes quelconques : les voir comme sous-groupes de groupes "standards" Exemples : théorème de Cayley, signature par le théorème de Zolotarev, isométries du tétraèdre (**dev ?**). Autre groupe : GL_n. Sous-groupes finis de $\mathcal{O}_2(\mathbf{R})$. Lemme de Serre (**dev ?**). Regarder les représentations : linéarisation d'un groupe fini quelconque. Avantage de la finitude : on peut moyenner !

7.0.6 106–Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

Motivation : Le groupe linéaire est un groupe "d'action" : il est défini à partir de son action sur l'espace vectoriel E. Pour étudier l'espace E et ses morphismes, on va donc étudier les détails de cette action, et en particulier, le groupe $\mathrm{GL}(E)$. Réciproquement, à partir d'informations sur l'action, on en déduira des propriétés sur le groupe $\mathrm{GL}(E)$.

I–Groupe linéaire, et certaines actions Groupe linéaire : définition, lien avec les $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ via une base. Action sur E transitive.
Action simplement transitive sur les bases de E. Application : cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$.
Action à gauche, à droite sur les matrices : invariants = le noyau, l'image.
Action de $\mathrm{GL}(E)^2$ sur les matrices par "r-équivalence" : pivot de Gauss, invariant = le rang.
Action par "conjugaison" sur les matrices : classes de similitude.
Action sur les formes quadratiques ; correspond à celle par congruence sur les matrices (exemples des vecteurs gaussiens)
Action sur les sev de E, sur les décompositions en somme directe : invariant = la dimension.
Action sur les réseaux (dans le cas où $\mathbf{K}$ est de caractéristique 0).

II–Sous-groupes et familles génératrices Réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$: application pour les p-Sylow. Application : tout groupe fini est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Déterminant d'une matrice de permutation.
Stabilisateur d'objets : sous-groupes d'isométries ; groupe SL vu comme préservant les volumes. Stabilisateur de réseau comme $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$.
Certains sous-groupes particuliers : où tous les éléments sont d'ordre 2 pour montrer que $\mathrm{GL}_n \simeq \mathrm{GL}_m$ ssi $n = m$ en carac $\neq 2$. Sous-groupes finis de GL_n : on peut moyenner ! App : tout ss g fini de GL_n est conj à un ssg de $\mathcal{O}(n)$, et détermination des sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$. Deux **dev** : lemme de Serre et ss g finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$; et sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
Trouver des familles génératrices : de GL_n par le pivot de Gauss. Application : $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{K})$ est simple sauf cas nuls, connexité par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$. De $\mathcal{O}(n)$ par Cartan-Dieudonné, montre que $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ est simple. De $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ par

l'algo d'Euclide, permet de simplifier l'étude des formes quadratiques binaires à coefs entiers.

III–Le cas de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ Diago/trigonalisation simultanée dans le cas abélien. Généralisation : **Dev** : Lie-Kolchin.
Lemme de Maschke comme illustration de la moyenne (sur les projecteurs); lemme de Schur, et on en déduit l'orthogonalité des caractères grâce aux propriétés de $\mathbf{U}$.

7.0.7 108-Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Motivation : Par analogie avec le cas des espaces vectoriels, on s'intéresse aux parties S d'un groupe G qui l'engendrent. Tout morphisme $G \to \dots$ est alors uniquement déterminé par l'image sur cette partie (autrement dit, l'application $\mathrm{Hom}(G, \dots) \to \mathrm{Fonc}(S, \dots)$ est injective), et tout morphisme $\dots \to G$ dont l'image contient cette partie est surjectif.
L'objectif de la leçon est de présenter des **exemples** de telles parties et leurs applications. On a des exemples dans le cas des groupes abéliens finis (cas qui se ramène aux groupes cycliques), aux groupes diédraux, aux groupes symétriques (isom tétraèdre dev), alternés, aux groupes GL, $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{SO}(n)$, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$, etc. On peut aussi s'intéresser au cardinal d'une famille génératrice (sous-g de Frattini, dev).

Plan

I-Groupes abéliens Monogènes, cycliques, exemples de $\mathbf{Z}$, C_n, $\mathbb{U}_n$. Théorème des restes chinois. Sous-groupes finis de $\mathbf{K}^\times$: application : existence de sous-groupes, logarithme discret. Cas où $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ est cyclique. Théorème de structure des groupes abéliens finis ; applications : trouver tous les sous-groupes d'un certain ordre, se restreindre au cas cyclique, montrer $G \sim \widehat{G}$.
Un exemple intéressant : les nombres premiers et -1 engendrent $\mathbf{Q}^\times$, qui est ainsi isomorphe à $\{\pm 1\} \times \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$. On montre ainsi : $\mathbf{Q}^\times \simeq \mathbf{F}_3(X)^\times$

II-Sous-groupes du groupe symétrique Les cycles (...), les transpositions, certaines transp., une transposition et un n-cycle. Tri-cycles et groupe alterné. Application : simplicité du groupe alterné ; on montre que les dérangements engendrent $\mathfrak{S}_n$

III-Générateurs géométriques Matrices d'opérations élémentaires et pivot de Gauss : cas de GL_n, de SL_n. On peut aussi parler de la réduction en forme normale de Smith, mais c'est plus compliqué. Application : connexité de groupes de matrices.
Isométries comme produit de réflexions : th de Cartan-Dieudonné, cas de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{SO}(E)$. Application : simplicité de $\mathcal{SO}_3$.
Groupes finis d'isométries : le groupe diédral (générateurs : symétrie + rotation),

groupe d'isométries du tétraèdre (**dev**), du cube, etc. On peut parler de graphe de Cayley.

IV- Le cas des p-groupes finis Propriétés sur les $\mathbf{F}_p$ espaces vectoriels, $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.
dev : sous-groupe de Frattini.

7.0.8 150-Exemples d'actions de groupes sur des espaces de matrices

Motivation :

8 Algèbre linéaire

8.1 Objets de base

8.1.1 154-Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Motivation :

- Diviser pour mieux régner : simplifier un problème *a priori* difficile de par la grande dimension (la classification des classes de similitude, etc) en le fractionnant sur des sous-espaces stables, ce qui revient essentiellement à regarder sa matrice par blocs.
- Comprendre l'action conjointe d'une famille d'endomorphismes agissant sur l'espace : existence de bases de diagonalisation/trigonalisation commune, espaces stables, etc.
- Trouver des invariants pour l'action d'un endom.

Plan Cadre : K est un corps, E est un K-espace vectoriel de dim finie, notée n. u est un endomorphisme de E. Notation : $\langle I\rangle$: espace vectoriel engendré par I, χ_u, π_u : polynômes caractéristiques et minimaux de u.

I-Espaces stables, endomorphismes induits, dualité

Déf 1. — Un sous-espace vectoriel (sev) F de E est dit stable par u si $u(F) \subset F$.

Ex 2. — *Le noyau et l'image de u sont u-stables. Si $P \in K[X], \ker(P(u))$ et $\mathrm{im}(P(u))$ le sont aussi. En particulier, tout espace propre est stable.*

Rmq 3. — *Si F et G sont stables, $F+G$ aussi. Ainsi, les espaces caractéristiques ($E'_\lambda := \mathrm{Vect}(\ker(u-\lambda id)^k)_{k\geq 1}$) sont stables.*

Prop 4. — *Si F est u-stable, alors u induit des endomorphismes $u\big|_F : F \longrightarrow F$, et $\overline{u} : E/F \longrightarrow E/F$.*

Appli 5. — *Pour tout k, u induit un morphisme $\ker(u^{k-1})/\ker(u^k) \to \ker(u^k)/\ker(u^{k+1})$ surjectif, donc les accroissements de la suite $(\dim(\ker(u^k)))_k$ décroissent.*

Rmq 6. — *Soit $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1} \dots, e_n)$ une base adaptée à $F \oplus G$, où G est un supplémentaire de F. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ la matrice de u dans cette base. Dans la base $(e_1, \dots, e_m)$ de F, la matrice de $u\big|_F$ est A ; dans la base image de $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ dans E/F, la matrice de $\overline{u}$ est C.*

Ex 7. — *u peut admettre un espace stable n'ayant pas de supplémentaire stable : par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'admet que $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ comme droite propre.*

Prop 8. — *Si $1 \leq r \leq n-1$ et u laisse tous les espaces de dimension k stables, alors u est une homothétie.*

Prop 9. — *(Principe de conjuguaison) Si $g \in GL(E)$, alors F est u-stable ssi $g(F)$ est $g \circ u \circ g^{-1}$-stable.*

Appli 10. — *Si $r \in SO_3(\mathbf{R})$ est une rotation d'axe Δ, et $g \in O_3(\mathbf{R})$, alors $g \circ r \circ g^{-1}$ est une rotation d'axe $g(\Delta)$ (et de même angle).*

Déf 11. — Si F est un sev de E, on note $F^\circ \subset E^*$ le noyau de $E^* \to F^*$. On note u^T l'application $E^* \to E^*$ induite par u.

Prop 12. — *F est u-stable ssi F° est u^T-stable.*

Appli 13. — *Si K est algébriquement clos (ou, si χ_u a une racine sur K), alors u admet une droite propre et un hyperplan propre.*

Appli 14. — *Si la matrice de u dans une base e est M, alors les hyperplans stables de u ont pour équations $\sum_{i=1}^n x_i e_i^* = 0$, où les (x_i) sont les coordonnées des vecteurs propres de M^T. Si M est diagonalisable à valeurs propres distinctes, alors il y en a n distincts.*

Déf 15. — Soit E un espace euclidien. Si u est un endomorphisme de E, on note u^* son adjoint. On note $F^\perp$ l'orthogonal de F.

Prop 16. — *F est u-stable ssi $F^\perp$ est u^*-stable.*

II-Applications à la théorie de la réduction

Prop 17. — *Les décompositions $E = \oplus F_i$ en somme d'espaces u-stables correspondent aux décompositions $id_E = \sum_i p_i$ où les p_i sont des projecteurs orthogonaux deux à deux (i.e. : $p_i p_j = \delta_{i,j} p_i$) commutant à u.*

Lemme 18. — *(des noyaux) Si P annule u, alors $E = \oplus_{i=1}^m \ker(P_i^{\alpha_i}(u))$, où les $P_i^{\alpha_i}$ sont les facteurs irréductibles de P. C'est une décomposition en espaces u-stables ; les projecteurs correspondants sont dans $K[u]$.*

Rmq 19. — *u est diagonalisable si et seulement si E est somme directe de droites stables par u.*

Appli 20. — *u est diagonalisable ssi u est annulé par un polynôme scindé à racines simples.*

Prop 21. — *Si F est u-stable et $u\big|_F, \overline{u}$ sont induits sur F et E/F, alors : $\chi_u = \chi_{u_{|F}} \chi_{\overline{u}}$.*

Rmq 22. — *La stabilité d'un sous-espace permet de calculer un déterminant par blocs.*

Prop 23. — *Soit $E = \oplus_{i=1}^m F_i$ une décomposition en sous-espaces u-stables. Alors : $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_{u_{|F_i}})$.*

Cor 24. — *u est diagonalisable si et seulement si $u_{|F_i}$ l'est pour tout i.*

Appli 25. — *Soit E un euclidien, soit u un endomorphisme de E symétrique ($u^* = u$). Alors, comme u admet une droite stable[a], dont l'orthogonal est stable. Par récurrence, u est diagonalisable dans une base orthonormée (théorème spectral).*

a. par exemple par des arguments de topologie/calcul diff : la fonction $x \mapsto \langle x, u(x)\rangle$ admet un maximum sur la sphère, forcément vecteur propre.

Déf 26. — Pour $x \in E$, on définit $E_x = \langle u^n(x)\rangle_{n\in\mathbf{N}}$: c'est un espace u-stable. On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$.

Ex 27. — *Si u est nilpotent d'indice n, alors, si $u^{n-1}(x) \neq 0$, $E_x = E$. Donc E est cyclique.*

Déf 28. — La matrice compagnon d'un polynôme unitaire de degré m $P = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_0$ est :

$$C_P := \begin{pmatrix} 0 & & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(K)$$

Prop 29. — *u est cyclique ssi la matrice de u dans une certaine base est une matrice compagnon.*

Prop 30. — *C_P est la matrice de la multiplication par $\overline{X}$ dans $K[X]/(P)$. Donc $\pi_{C_P} = P$.*

Prop 31. — *$\chi_{C_P} = P$, donc $\chi_{C_P}(P) = 0$.*

Appli 32. — *Si $x \in E$, $\chi_u(u)(x) = \chi_{u_{E_x}}(u_{E_x})(x) = 0$. Donc $\pi_u \mid \chi_u$ (th de Cayley-Hamilton)*

III-Familles d'endomorphismes : vers la théorie des représentations

Prop 33. — *Si u et v commutent, alors v stabilise les espaces propres et caractéristiques de u.*

Appli 34. — $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle.*

Déf 35. — On dit qu'une famille (u_i) est codiagonalisable (resp cotrigonalisable) si elle admet une base commune de diago (resp trigo) nalisation.

Prop 36. — *Si (u_i) est une famille d'endomorphismes diagonalisables (resp trigonalisables) qui commutent, ils sont codiagonalisables (resp cotrigonalisables).*

Appli 37. — *Si A et B sont diagonalisables, l'application $M \in \mathcal{M}_n(K) \mapsto AMB \in \mathcal{M}_n(K)$ l'est aussi, ainsi que $M \mapsto AM + MB$.*

Appli 38. — *$GL_n(K)$ et $GL_m(K)$ ne sont pas isomorphes lorsque $n \neq m$ et K est de caractéristique différente de 2.*

DEVELOPPEMENT 1 : Lie-Kolchin
Si G est un sous-groupe connexe résoluble de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, alors ses éléments sont cotrigonalisables.

Déf 39. — Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation, on dit que ρ est irréductible si les seuls espaces G-stables (ie stables par tous les $\rho(g)$) sont 0 et V.

Prop 40. — *(cf prop 36) Si G est abélien, toute représentation irréductible de G est de dimension 1.*

Prop 41. — *(th de Maschke) Tout sous-espace G-stable admet un supplémentaire G-stable.*

Cor 42. — *Toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles.*

Ex 43. — *La représentation $\mathfrak{S}_n \to GL_n(\mathbf{C})$ canonique se décompose en irréductibles par :*

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \oplus \{x = (x_i), \sum x_i = 0\}$$

Prop 44. — *(lemme de Schur) Si (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) sont deux représentations irréductibles de G, alors $Hom_G(V_1, V_2) = 0$ si V_1 et V_2 ne sont pas isomorphes; sinon, tout G-morphisme est inversible, et $\dim(\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)) = 1$.*

Cor 45. — *Le caractère $(\chi = \mathrm{Tr}(\rho))$ caractérise la représentation à isomorphismes prèès.*

Déf 46. — Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation. G agit sur $\mathrm{Bil}(V, V; \mathbf{C})$ par : $(g \cdot f)(x, y) = f(\rho(g)^{-1}x, \rho(g)^{-1}y)$: cette action est une représentation.

Rmq 47. — *$S(V)$ et $A(V)$ (les formes symétriques, et antisymétriques sur V) sont stables par G*

DEVELOPPEMENT 2 Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible, de caractère χ. Alors, s'équivalent :

(i) χ est à valeurs réelles

(ii) Il existe une forme bilinéaire non nulle fixée par $\rho(G)$.

(iii) Il existe une forme bilinéaire non dégénérée fixée par $\rho(G)$.

De plus si ces conditions sont réunies, les prop suivantes sont équivalentes :

(i) ρ se réalise sur $\mathbf{R}$: dans une base (e_i) de V, pour tout g, $\mathrm{Mat}_{e,e}(\rho(g))$ est à coeff réels.

(ii) Il existe une forme bilinéaire symétrique non nulle fixée par $\rho(G)$.

(iii) L'indicateur de Frobenius-Schur vaut 1, i.e. :

$$\frac{1}{|G|}\chi(g^2) = 1$$

Appli 48. — *Les groupes $\mathcal{D}_4$ et $\mathbb{H}_8$ ne sont pas isomorphes mais ont même tables de caractères.*

8.2 Réduction

8.3 Les calculs

8.3.1 152-Déterminants : exemples et applications.

Norme comme déterminant de l'application de multiplication. Déterminant comme composante ε-isotypique de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur les formes n-linéaires. Application :

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)n^{c_\sigma}=1$$

(où c_σ est le nombre de cycles de σ).

9 Algèbre bilinéaire

9.0.1 158–Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

Motivation : Les matrices symétriques apparaissent naturellement dans beaucoup de domaines : par exemple, si on a un graphe symétrique, sa matrice d'adjacence est symétrique ; de même, la matrice de variance-covariance d'un vecteur (par exemple gaussien) est symétrique, et la hessienne d'une fonction deux fois différentiable est symétrique (th de Schwarz). On sait que la bonne généralisation d'un produit scalaire au cas complexe est le produit hermitien (cf espaces L^2, etc) : on cherche la positivité pour avoir des normes (entre autres).

I–Matrices symétriques et hermitiennes : géométrie Produit scalaire/hermitien, endomorphismes auto-adjoints. Lien avec les matrices symétriques et hermitiennes dans les bases orthonormées. Action de GL_n par congruence (resp $P^\star$ pour le cas hermitien). Application : multiplication d'un vecteur gaussien donne la congruence de la variance.
Pour le cas réel : vision des formes quadratiques.
Les projecteurs spectraux d'un endom symétrique/hermitien sont symétriques/hermitiens ; applications pour la diagonalisation de la circulante.

II–Réduction des matrices symétriques ou hermitiennes Matrices positives, définies positives ; loi d'inertie de Sylvester. Rayon spectral, convexité de $\mathcal{S}_n^{++}$ et de $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbf{C})$. Application : tout sous-groupe fini est...
Théorème spectral. Orthogonalisation simultanée, application à la classification euclidienne des coniques à centre (permet de se ramener à une équation en carré).
Rayon spectral, calcul de puissances : application à des marches aléatoires sur des graphes symétriques.
Inégalité de Hadamard.
Intégrale vecteur gaussien.

III–Utilisation dans d'autres problèmes Exponentielle de matrices : racines carré de matrices. Application : Frobenius-Schur. Décomposition polaire. Vision géométrique (dans $\mathbf{C}\subset\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$). Application : homéo $\mathcal{O}(p,q)$.

9.0.2 170-Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Motivation : Allure d'une nappe autour d'un point critique : point selle, cuvette ou sommet. Étude d'équations diophantiennes de degré 2 (ex : triplets pythagoriciens revient à trouver le cône rationnel de $x^2+y^2-z^2$; équation de Pell-Fermat).. Les quatres manières de voir des formes quad, les invariants correspondants. L'action de $\mathrm{GL}(E)$, la problématique de classification. L'algorithme de Gauss : plus simple que l'algèbre linéaire ? La classification dans le cas de corps clos sous le carré, de $\mathbf{R}$, des corps finis.

Plan Dans toute la leçon, K est un corps de caractéristique différente de 2, et E est un K-espace vectoriel de dimension finie.

I–Formes quadratiques : points de vue Un récapitulatif est donné figure 1.

a) Formes bilinéaires

Déf 1. — On a une application

$$\begin{aligned}\mathrm{Bil}(E,E;K) &\longrightarrow K^E\\ b &\longmapsto (q_b : x \mapsto b(x,x))\end{aligned}$$

Son image est notée $\mathcal{Q}(E)$, dont les éléments sont appelés *formes quadratiques.*

Ex 2. — *$x \in K \mapsto x^2$; $(x,y) \in K^2 \mapsto xy$; si V est un K-ev, $E = V \times V^*$, $(v,\mu) \mapsto \mu(v)$; si $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est deux fois différentiable en a, alors $h \mapsto \mathrm{d}_a^2 f(h,h)$ est une forme quadratique (Schwarz).*

Ex 3. — *$A \in \mathcal{M}_n(K) \mapsto \mathrm{Tr}(A^2)$; $P \in K_n[X] \mapsto 2P'P(0)$.*

Prop 4. — *Le noyau de l'application précédente est l'ensemble des formes alternées, donc antisymétriques : ainsi, notant $\mathcal{S}(E)$ les formes symétriques, on a un isomorphisme $\mathcal{S}(E) \simeq \mathcal{Q}(E)$. En particulier, si $n = \dim(E)$, on a* $\dim(\mathcal{Q}(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$

Prop 5. — *L'unique antécédent de q est appelé forme polaire de q (notée b_q), et on a (identités de polarisation) :*

$$b_q(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y)-q(x-y))$$

Ex 6. — *On reprend l'ex 2. Le premier exemple redonne les identités remarquables. Les formes polaires des autres exemples sont : $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto \frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_1)$; $((v_1,\mu_1),(v_2,\mu_2)) \mapsto \frac{1}{2}(\mu_1(v_2)+\mu_2(v_1))$ et $(h,k) \mapsto \mathrm{d}_a^2 f(h,k)$.*

Prop 7. — *L'action de GL(E) sur $\mathrm{Bil}(E)$, donnée par : $(g \cdot b)(x,y) = b(g^{-1}x, g^{-1}y)$ laisse $\mathcal{S}(E)$ stable, et induit donc une action de GL(E) sur $\mathcal{Q}(E)$, donnée par $(g\cdot q)(x) = q(g^{-1}x)$*

b) Dualité On note $E^\star$ le dual de E.

Déf 8. — Un morphisme $\varphi : E \to E^\star$ est dit *symétrique* si ${}^t\varphi \circ \mathrm{ev} = \varphi$, où $\mathrm{ev} : E \to E^{\star\star}$ est l'isom. canonique, et ${}^t\varphi$ est le morphisme transposé de φ.

Prop 9. — *On a une action naturelle de GL(E) sur $\mathrm{Hom}(E,E^\star)$, donnée par le diagramme ci-dessous :*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"'] & V^\star \arrow[d, "{}^tg^{-1}"] \\ V \arrow[r, "g\cdot\varphi"'] & V^\star \end{tikzcd}$$

Elle stabilise l'espace des morphismes symétriques.

Prop 10. — *On a une correspondance bijective entre les formes quadratiques sur E et les morphismes symétriques $E \to E^\star$, qui conserve l'action de GL(E). Elle est donnée par :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(E,E^\star) &\longrightarrow \mathcal{Q}(E)\\ \varphi &\longmapsto (v \mapsto \varphi(v)(v))\\ (v \mapsto (w \mapsto b_q(v,w))) &\longleftarrow\!\mid\; q\end{aligned}$$

On note φ_q l'unique antécédent de q.

c) Matrices symétriques

Déf 11. — Si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, la matrice de q dans e est $Mat_e(q) := (b_q(e_i, e_j))$. C'est la matrice de φ_q dans les bases e et $e^\star$ (base duale).

Ex 12. — *En reprenant ex2, dans les bases canoniques, on a les matrices suivantes :* (1) ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0_m & I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$ *(où* $m = \dim(V)$*) et* $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)_{i,j}$

Prop 13. — *Si* $g \in GL(E)$ *et si* P *est sa matrice dans la base* e*, alors :* $Mat_e(q.g) = PMat_e(q)^tP$. *En particulier, si* f *est une autre base et* P^{-1} *est la matrice de passage de* e *à* f*, alors :* $Mat_f(q) = PMat_e(q)^tP$.

Rmq 14. — *Via le choix d'une base, les formes quadratiques correspondent aux matrices symétriques, et l'action de* $GL(E)$ *sur les formes quadratiques correspond à l'action de* $GL_n(K)$ *sur* $\mathcal{S}_n(K)$.

Déf 15. — Une base (e_i) de E est dite orthogonale si $Mat_e(q)$ est diagonale, et orthonormée si $Mat_e(q) = I_n$.

d) Polynômes homogènes de degré 2

Déf 16. — Un polynôme $Q \in K[X_1, \dots X_n]$ est dit homogène de degré 2 si $Q(TX_1, \dots, TX_n) = T^2 Q(X_1, \dots, X_n)$ (dans $K[X_1, \dots X_n][T]$).

Déf 17. — On a une action de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $K[X_1, \dots, X_n]$ donnée par :
$(P \cdot Q)(X_1, \dots X_n) = Q\left(P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}\right)$. Elle stabilise les polynômes homogènes de degré 2.

Prop 18. — *On a une bijection entre les polynômes homogènes de degré* 2 *et les formes quadratiques, donnée par :* $q \mapsto Q_q := \sum_{1 \le i,j \le n} b_q(e_i, e_j) X_i X_j$ *; de plus ce morphisme envoie action sur action.*

Ex 19. — $(v, \mu) \in V \times V^\star \mapsto \mu(v)$ *correspond à* $Q = X_1 X_{m+1} + \dots X_m X_{2m}$

II–Objets associés à une forme quadratique et invariants

a) Isotropie

Déf 20. — Un élément $x \in E$ est dit isotrope si $q(x) = 0$. L'ensemble $C(q) = q^{-1}(0)$ est appelé cône isotrope.

Ex 21. — *Si* $q : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 - z^2$, *on obtient bien un cône (cf fig 1). Le cône de* $(x, y, z) \in \mathbf{Q}^3 \mapsto x^2 + y^2 - 3z^2$ *est* $\{0\}$*, et celui de* $(x, y, z) \in \mathbf{Q}^3 \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ *est non réduit à* 0*. Le cône de* $P \in K_n[X] \mapsto 2PP'(0)$ *est* $XK_{n-1}[X] \cup$.

Rmq 22. — *Le cône d'une fq est stable par homothétie, mais n'est pas un espace vectoriel ; c'est, en plus de* 0*, une union de droites, c'est donc un objet projectif. On dit que* q *est anisotrope si ce cône contient une droite.*

Appli 23. — *Les matrices* 2×2 *nilpotentes sont les points du cône de* $A \mapsto \mathrm{Tr}(A^2)$ *sur* $\ker(\mathrm{Tr})$ *: une illustration est donnée figure 3, on parle de cône nilpotent.*

Prop 24. — *Si* $g \in GL(E), C(g \cdot q) = g \cdot C(q)$ *: en particulier, deux formes quadratiques équivalentes ont deux cônes en bijection.*

b) Noyau, orthogonalité

Déf 25. — Le noyau de φ_q est appelé *noyau* de q, noté $\ker(q)$: donc $\ker(q) = \{x \in E, \forall y \in E, b_q(x, y) = 0\}$. C'est un sev de E.

Déf 26. — On dit que q est non dégénérée si $\ker(q) = \{0\}$; la forme induite $\tilde{q} : E/\ker(q) \to K$ est toujours non dégénérée.

Ex 27. — *À part éventuellement le dernier, tous les exemples de ex2 ont un noyau trivial.*

Rmq 28. — *On a les inclusions, a priori strictes :* $\{0\} \subset \ker(q) \subset C(q)$.

Déf 29. — Soit W une partie de E, on note W° le noyau de la restriction $E^\star \to W^\star$. L'orthogonal de W est : $W^{\perp,q} = \varphi_q^{-1}(W^\circ) = \{v \in E, \forall w \in W, b_q(v, w) = 0\}$.

Prop 30. — $W \subset (W^{\perp,q})^{\perp,q}$; $\ker(q) = \{0\}^{\perp,q}$; $\dim(W^{\perp,q}) \ge \mathrm{codim}_E(W)$, *avec égalité quand la forme est non dégénérée.*

Rmq 31. — *Avec $q:(x,y)\mapsto xy$, l'orthogonal de $\langle(1,0)\rangle$ est lui-même : en particulier, on peut avoir $E\neq W\oplus W^{\perp,q}$ même si q est non dégénérée.*

Prop 32. — *Soit $g\in GL(E)$: on a $\ker(g\cdot q)=g\cdot\ker(q)$; en particulier, la non-dégenerscence est un invariant pour l'action.*

c) Invariants

Déf 33. — Le rang de q, noté $\mathrm{rg}(q)$, est le rang de φ_q ; on a $\mathrm{rg}(q)=\mathrm{codim}(\ker(q))$.

Rmq 34. — *Le rang de q est le rang de sa matrice dans n'importe quelle base ; en particulier, comme l'action par congruence est une restriction de la "r-équivalence", le rang est un invariant.*

Déf 35. — Soit M la matrice de q dans une base quelconque ; le discriminant de q est la classe de $\det(M)$ dans le quotient $K/K^{*,2}$, où $K^{*,2}$ est le groupe des carrés de $K^\star$. Le discriminant réduit de q est le discriminant de $\widetilde{q}:E/\ker(q)\to K$.

Prop 36. — *Cela ne dépend pas de la base choisie ; de plus, le discriminant est un invariant.*

Déf 37. — Le groupe d'isométries de q est le stabilisateur de q dans $\mathrm{GL}(E)$: on le note $\mathcal{O}(q)$. Si q et q' sont équivalentes, leur groupes d'isométries sont conjugués.

Prop 38. — *Si e est une base de E, $g\in\mathcal{O}(q)\iff Mat_e(g)\in\mathcal{O}(Mat_e(q))$, où $\mathcal{O}(Mat_e(q)):=\{P\in GL_n(K),{}^tPMat_e(q)P=Mat_e(q)\}$.*

III–Classification et applications

a) Algorithme de Gauss

Déf 39. — Classifier les formes quadratiques, c'est expliciter $\mathcal{Q}(E)/\mathrm{GL}(E)$, en trouvant des invariants totaux et/ou des formes normales.

Prop 40. — *(algorithme de Gauss) Si $P\in K_{(2)}[X_1,\dots,X_n]$, il existe $a_1,\dots,a_n\in K$ et $f_1,\dots,f_n$ une base des polynômes homogènes de degré 1 tels que : $P=\sum_{i=1}^n a_if_i^2$*

Cor 41. — *Toute forme quadratique a une base orthogonale.*
Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale (non unique !).

Ex 42. — *$XY=((\frac{X+Y}{2})^2-(\frac{X-Y}{2})^2)$ donc $(\frac{1}{2}(1,1),\frac{1}{2}(1,-1))$ est orthogonale pour $q((x,y))=xy$, et :* ${}^T\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

Déf 43. — Si K est clos sous le carré (i.e. : tout $x\neq0$ est un carré), alors le rang est un invariant total, et des formes normales des matrices symétriques sont données par les matrices $J_r=diag(1,\dots,1,0\dots0)$; en particulier, il n'y a qu'une orbite non dégénérée.

b) Cas réel

Déf 44. — On prend $K=\mathbf{R}$. On dit que q est définie positive (négative) si $q(x)>0$ (resp $q(x)<0$) dès que $x\neq0$. On note $\mathcal{Q}^+(E)$, $\mathcal{Q}^-(E)$.

Ex 45. — *$(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1^2+\dots x_n^2$, $A\in\mathcal{M}_n(K)\mapsto\mathrm{Tr}({}^tAA)$ sont définies positives, mais pas $(x,y)\mapsto xy$.*

Prop 46. — *$\mathcal{Q}^+(E)$ est stable sous l'action de $GL(E)$, et est convexe.*

Cor 47. — *Tout sous-groupe fini de $GL_n(\mathbf{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ (où $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})=\{P,{}^tPP=I_n\}$).*

Cor 48. — *Les sous-groupes finis de $GL_2(\mathbf{R})$ sont les sous-groupes cycliques ou diédraux.*

Thm 49. — *Si K est un compact d'intérieur non vide, il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K. On en déduit que tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbf{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbf{R})$*

Thm 50. — *(loi d'inertie de Sylvester) Soit q une forme quadratique. Alors il existe une base dans laquelle la matrice de q est de la forme $diag(I_s, -I_{r-s}, 0)$, où $r = \mathrm{rg}(q)$; de plus le couple $(s, r-s)$ ne dépend que de q, et est appelé signature de q.*

Cor 51. — *La signature est un invariant total de l'action de $GL(E)$. En particulier, il y a $\dim(E)$ orbites non dégénérées.*

Ex 52. — *La signature de $(x,y) \mapsto xy$ est $(1,1)$.*
En considérant les matrices symétriques et antisymétriques, la signature de $A \mapsto \mathrm{Tr}(A^2)$ est $(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$.
Soit $f : U \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fois différentiable en a et $\mathrm{d}_a f = 0$, on a l'allure de la nappe $(x, f(x))$ en fonction de la signature de d_a^2 (cf fig4).

DEVELOPPEMENT 1 : O(p,q) Si p, q sont deux entiers non nuls, on note $\mathcal{O}(p,q) = \mathcal{O}(diag(I_p, -I_q))$. On a un homéomorphisme :

$$\mathcal{O}(p,q) \simeq \mathcal{O}(p) \times \mathcal{O}(q) \times \mathbf{R}^{pq}$$

DEVELOPPEMENT 2 : nombre de solutions modulaire Soit Q une forme quadratique en n variables à coeff entiers. On note D_Q son discriminant dans la base canonique de $\mathbf{Q}^n$. Alors on peut calculer le nombre de solutions de $Q(x) = 0$ dans $((\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times)^n$; il vaut :

$$c(N) = \prod_{p|N} (p^{(m-1)(n-1)}(p^{n-1} - 1 + \varepsilon_p (p-1) p^{\frac{n}{2}-1})$$

$$\text{où } \varepsilon_p = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} D_Q}{p}\right) & \text{si } n \text{ est pair)} \end{cases}.$$

c) Corps finis Soit q la puissance d'un nombre premier impair ; on travaille dans $K = \mathbf{F}_q$, corps fini à q éléments.

Déf 53. — Le groupe $(\mathbf{F}_q)^{\star,2}$ est le seul groupe d'indice 2 dans $\mathbf{K}^\star$; on note $\left(\frac{\dots}{q}\right)$ l'unique morphisme non trivial $\mathbf{F}_q^\star \to \{\pm 1\}$.

Lemme 54. — *Soit a, b deux éléments non nuls de $\mathbf{F}_q$; alors $ax^2 + by^2 = 1$ a une solution dans $\mathbf{F}_q$.*

Prop 55. — *Le couple (rang, discriminant réduit) est un invariant total. Soit ζ un non-carré dans K ; alors il y a deux orbites non-dégénérées et on a les deux formes normales données par I_n et $diag(I_{n-1}, \zeta)$.*

9.0.3 171-Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Motivation : Dessin d'une nappe $(x, y, f(x, y))$ au voisinage d'un pt critique en fonction de la signature de d^2 ; ellipses, hyperboles comme faisceaux de lumières, trajectoire de planètes ; forme de Lorentz en relat G.

I–Classification des formes quadratiques réelles

a) Invariants et classification des fq en général Fq, forme polaire, cône, noyau, non-dégénérescence, discriminant. Base orthogonale, algorithme de Gauss. Exemples d'utilisation. Développements possibles : ellipsoïde de John, $\mathcal{O}(p, q)$.

b) Loi d'inertie de Sylverster & applications Le théorème, nombre d'orbites de fq. Interprétation géométrique de la signature, par ex pour les nappes $(x, y, f(x, y))$ avec f tq $d_0 f = 0$. Résolution de l'équation de degré 2, discriminant.
Cas défini positif : convexité des fq positives d'où ss-g finis de GL_n (ex dans le cas $n = 2$). Th spectral, orthogonalisation simultanée, la différence ($P \in O(n)$ ou GL_n ? ?).

II–Étude des coniques

a) Coniques euclidiennes Définitions avec directrice, foyers, excentricité ; signification de la classification. Équivalence de définition pour l'ellipse. Paramétrisation, longueur. Application : ellipse et hyperboles homofocales. Classification finale. Dev : calcul de la longueur du lemniscate.

b) Coniques affines Définition, se ramener à une fq en $n + 1$ variables. Lien entre la signature de la dite fq et la conique. Éventuellement parler de projectif. Classification finale. Une application : ellipse de Steiner.

10 Corps, extensions

10.0.1 123–Corps finis, exemples et applications.

dev 1 : Dirichlet faible. dev 2 : solutions d'éq quadratique modulo N.

I–Construction des corps finis Tout anneau intègre fini est un corps.
$\mathbf{F}_p$ vu comme $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$; morphisme $\mathbf{Z} \to \mathbf{F}_p$.
Corps fini : déf, caractéristique ; tout corps de car p contient $\mathbf{F}_p$, corps premier. Cardinaux a priori possibles pour un corps fini. Automorphisme de Frobenius, sa restriction à $\mathbf{F}_p$.
Sous-groupes finis des inversibles d'un corps. Ex : $\mathbb{U}_n$, mais surtout $(\mathbf{F}_q)^* = \mathbf{Z}/(q-1)\mathbf{Z}$. $\mathbf{Z}/p^\alpha\mathbf{Z}$ n'est pas un corps. Construction de $\mathbf{F}_q$ comme corps de déc de $X^q - X$ au-dessus de $\mathbf{F}_p$; c'est bien de card q.
Pour tout x, $x^q = x$ (par Lagrange). Unicité du corps $\mathbf{F}_q$ à isomorphisme près.
Construction explicite de $\mathbf{F}_4, \mathbf{F}_9, \mathbf{F}_8, \mathbf{F}_{16}$, leurs tables en *annexe*.

II–Extensions de corps finis CNS pour être une extension. Dessin des tours en *annexe*. Automorphismes d'extensions, un critère pour être dans $\mathbf{F}_q$: caractère galoisien. Théorème de l'élément primitif dans le cas des corps finis.
Carrés dans $\mathbf{F}_q$. Application de $\mathbf{F}_{p^2}/\mathbf{F}_p$ pour calculer $\left(\frac{2}{p}\right)$ (car $\sqrt{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{i} + (\sqrt{i})^{-1})$.
Racines de l'unité dans $\mathbf{F}_q$; **dev** : polynômes cyclo et corps finis, Dirichlet faible. (Une autre application hp : décomposition de $p\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\zeta_n)}$ en idéaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\zeta_n)}$)
Trace et norme, surjectivité de la norme. Déc de Jordan.

III–Applications à d'autres domaines Construction de groupes (linéaires) finis : $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_q)$: son cardinal, le card de ses sous-groupes. Premier théorème de Sylow. Lemme de Serre.
Dénombrement : cardinal de $\mathbf{P}^n(\mathbf{F}_q)$ et formule de Bernoulli. Divisibilités improbables (ex : $|\mathrm{GL}_k(\mathbf{F}_q)||\mathrm{GL}n - k(\mathbf{F}_q)|$ divise $|\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)|$).
Algèbre bilinéaire, classification des fq sur $\mathbf{F}_q$; sommes de Gauss. **dev** : nombre de solutions équation quad mod N.

10.0.2 125–Extensions de corps. Ex et app.

dev 1 : Existence de matrice annulant un polynôme. dev 2 : Poly cyclos dans les corps finis, Dirichlet faible.

I–Objets associés à une extension de corps Définition d'une extension de corps et d'un sous-corps. Sous-corps premier, caractéristique. Exemples de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})/\mathbf{Q}$ $\mathbf{C}/\mathbf{R}$, $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$.
Algébricité, condition de finitude ; exemple de nb transcendant (nb de Liouville). Un critère : x est algébrique $\iff$ $K(x)/K$ est fini. Application : les élts forment un sous-corps. Polynôme minimal d'un élément. Exemple de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.
Caractéristiques "vectorielles" : degré d'une extension, ex des ext quadratiques. Théorème de la base téléscopique. Applications arithmétiques : $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $\mathbf{Q}(\xi_5,\sqrt[5]{7})$. Endom de multiplication, trace, norme. Polynôme caractéristique d'un élément.
Automorphismes d'une extension ; exemples de $\mathbf{C}/\mathbf{R}$, du Frobenius, de $\mathbf{Q}(\xi_n)/\mathbf{Q}$, de $K(X)/K$. Ils permutent les racines des polynômes.

II–Construction d'extensions

a) Corps de rupture Existence du corps de rupture, cas où P est irréductible. Tous les corps de rupture associés à un irréd sont isomorphes (faux en gal...). Application à l'irréd. de polynômes : P irréductible $\iff$ P n'a pas de racine dans une extension de degré $\leq \frac{deg(P)}{2}$. Application aux polynômes de degré 4.
"Insuffisance" du corps de rupture : l'exemple de X^3-2, son groupe d'autom est trivial.

b) Corps de décomposition Existence du corps de décompostion, construction. Action transitive sur les racines. Corps de déc de X^3-2, de X^5-7.
Unicité (à (non unique) isom près) du corps de déc. Construction des corps finis. Exemple de ϕ_n.

III–Applications : algèbre linéaire, corps finis, arithmétique Matrices par extension de corps : Dunford, Jordan ont besoin d'avoir des polynômes scindés. Invariants par extension de corps : rang, poly min. Appli de l'invariance du rang : polynôme minimal (d'une matrice) invariant par ext de corps. **dev 1** CNS pour qu'il existe $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que $P(M)=0$, avec P irréductible tq $Aut(L/K)$ agisse transitivement sur les racines de P dans L corps de déc de P.

Corps finis, caractère galoisien des extensions de corps finis (Artin). Théorème de l'élément primitif. Blocs de Jordan d'une matrice à coeff dans $\mathbf{F}_q$. **dev 2** : Dirichlet faible.

En arithmétique, anneaux d'entiers algébriques : ce sont des anneaux (par le résultant par ex). Entiers algébriques rationnels. Utilisation en théorie des représentations.

Sous-corps des fractions rationnelles symétriques, théorème de Waring.

10.0.3 141–Polynômes irréductibles à une indeterminée. Corps de rupture. Ex et app.

dev 1 : Dirichlet faible ; dev 2 : CNS sur n tq $\exists M, P(M) = 0$.

I–Irréductibilité Définition, importance du corps (et on peut déf sur un anneau). Corps algébriquement clos : ses irréductibles. Les irréd de $\mathbf{R}[X]$. Décomposition en produit de facteurs irréductibles, factorialité de $A[X]$, déc en éléments simples.
Cas des polynômes de degré ≤ 3 (racines). Contre-exemple en degré 4. Appli : des polys irréd sur $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$.
Séparabilité d'un polynôme irréductible.
Exemple important : polynômes cyclotomiques. Ils sont dans $\mathbf{Z}[X]$. Critère d'Eiseinstein : Φ_p, $X^p - T$ dans $\mathbf{F}_p(T)[X]$.
Théorème de Gauss pour le contenu. Application à des polynômes de $\mathbf{Z}[X]$.
Réduction modulo un premier : application : irréductibilité des Φ_n sur $\mathbf{Z}$, donc sur $\mathbf{Q}$.

II–Extensions de corps

a) Objets associés à une extension de corps Élément algébrique ; ils forment un corps par la condition de finitude (ou le résultant). Polynôme minimal ; il est irréductible par intégrité de K. Degré d'une extension, cas monogène ; exemple des extensions quadratiques. Théorème de la base téléscopique, applications arithmétiques : $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$, $\mathbf{Q}(\xi_5, \sqrt[5]{7})$, sous-extensions de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
Endom de multiplication, son polynôme minimal, son poly carac.

b) Corps de rupture Définition. Exemples de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, de $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$, de $\mathbf{Q}(j\sqrt[3]{2})$. Unicité à isom près dans le cas P irréductible. Construction de $\mathbf{F}_4$, de $\mathbf{F}_9$, des corps cyclotomiques.
Prolongement des plongements qui envoient racine sur racine. Ex pour la conjugaison avec $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.
Insuffisance du corps de rupture : $Aut(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})) = 1$. Un critère nécessaire et suffisant pour être irréductible : avec $\frac{deg(P)}{2}$, et avec primalité (cf Perrin)

c) Corps de décomposition Définition, exemple de $X^3 - 2$: plus satisfaisant. Corps de déc de $X^5 - 7$. Unicité à isom (non unique) près. Construction des $\mathbf{F}_q$ Action transitive sur les racines.

III–Applications : corps finis, algèbre linéaire

a) Corps finis Extensions de $\mathbf{F}_p$, tour associée en *annexe* ; comparer avec celle de $\mathbf{R}$. Frobenius. **dev 1** Dirichlet faible. Groupe d'automorphismes.

b) Algèbre linéaire Rang invariant par extension de corps ; polynôme minimal aussi.
dev 2 : CNS... Action sur la déc de Jordan.

10.0.4 142–PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

I–PGCD dans un anneau euclidien et algorithmes de calcul

II–PGCD dans un anneau principal ou factoriel

III–Applications

10.0.5 144–Racines d'un polynôme, fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

dev 1 : Formules de Newton par trigonalisation. dev 2 : Le degré d'une rep divise l'ordre du groupe.

Plan

I–Racines et fonctions des racines Définitions équivalentes des racines : $P(x) = 0$ ou $X - x \mid P$. Multiplicité d'une racine : $v_x(P)$ ou n tq $P^{(n)}(x) \neq 0$ et $P^{(n-1)}(0) = 0$. Résolution de l'équation de degré 2 dans $\mathbf{C}$; théorème de d'Alembert-Gauss. Fonctions des racines, fonctions symétriques élémentaires, formules de Viète. Théorème de Waring ; lien avec l'extension $K(X_1, \ldots, X_n)/K(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$. **dev 1** : formules de Newton matricielles. Résoudre l'équation générique de degré n revient à trouver une résolution du groupe $\mathfrak{S}_n$: résolution des équations de degré 3 et 4, impossibilité en degré 5.

II–Localisation de racines Idée : approcher des racines, les trouver.
Premier axe : tvi, ou théorème de Rolle pour localiser/montrer l'existence de racines. Cf Chambert-Loir Analyse 2 pour deux propriétés qui assurent le scindage sur $\mathbf{R}$ de polynômes.
Deuxième axe : analyse complexe avec le théorème de Kronecker pour compter le nombre de racines à l'intérieur d'un domaine ; formule de Jensen, dont la preuve est facile pour les polynômes scindés (donc tous par d'Al Gauss).
Troisième axe : utilisation d'algèbre linéaire ; matrice compagnon. Matrice à diag dominante, applications à la borne de Cauchy.
Dernier axe : algèbre bilinéaire, avec les formes de Hankel, qui encondent dans leur signature le nombre de racines réelles.

III–Propriétés des entiers algébriques L'ensemble des entiers algébriques forme un anneau. Entiers algébriques rationnels. Anneaux d'entiers d'une extension quadratique.
Des entiers d'une extension cyclotomique. Application en théorie des représentations : la valeur d'un caractère est un entier algébrique. **dev 2** le degré d'une représentation divise l'ordre du groupe.
Utilisation des automorphismes : la table de $\mathfrak{S}_n$ est à valeurs entières.

11 Autres

11.0.1 190–Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement

dev 1 : nb de sol équ quad mod N ; dev 2 : Restaurants chinois

I–Méthodes combinatoires génériques

a) Structures standards Ensembles finis ; nombre d'applications, d'injections, de surjections, de bijections. Intérêt de calculer un cardinal : inj=bij=surj (ex : anneaux intègres finis).
Nombres de Pascal, prop élém. Binôme de Newton, application à des sommes de nb de Pascal. Arrangements.
Une application : nbs de Catalan.

b) Relations de récurrence Ex des dominos 2×1. Relations de récurrence sur les nombres de Bell, de Catalan, de dérangements. Utilisation de séries génératrices pour "inverser" les relations.

c) Utilisation de probabilités Indépendance ; valeur de l'indicatrice de $\varphi(n)$, en utilisant la loi uniforme. Nombre moyen de point fixe.

II–Groupes et actions Formule des classes et de Burnside. Calculs de cardinaux d'orbite. Ex : lois multinomiales.
Dev : restaurants chinois, déc en cyles.
Cas des p-groupes, applications de la formule des classes. Nombre de classes de

conjugaison de $\mathfrak{S}_n$.
Cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$, de ses sous-groupes. Applications : th de Sylow, isom exceptionnels. Card des variétés de drapeaux, des grassmanniennes, des projecteurs, des symétries.

III–Méthodes géométriques Comptage du cardinal de $\mathbf{P}^n(\mathbf{F}_q)$, formule de Bernoulli.
Utilisation de caractères abéliens. Application : **dev** nombre de sol éq quad mod N.
Trace d'un projecteur et rang : nouvelle preuve de Burnside, dimension des Hom_G vue comme la trace du projecteur associé dans Hom sur Hom_G.
Preuve que la représentation "standard" de $\mathfrak{S}_n$ est irréductible par Burnside. Action de $\mathfrak{S}_n$ sur les formes n-linéaires, et $\frac{1}{n!}\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)n^{c_\sigma} = 1$ (c_σ : nb de cycles) par l'unicité (projective) du déterminant comme composante ε-isotypique.
Lemme de Serre, cardinaux des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$.