Rapport de stage de Master 2

# Tour de Drinfeld et correspondance de Langlands $p$-adique : la conjecture de Breuil-Strauch.


Benjamin FLEURIAULT
ENS de Lyon

*Encadrant :* Gabriel Dospinescu
ENS de Lyon


du 3 avril au 29 juillet 2023

# Introduction

L'objectif de la correspondance de Langlands est d'étudier les représentations du groupe de Galois absolu d'un corps $F$ (local ou global) à coefficients dans un corps $L$ (souvent, algébriquement clos et de caractéristique $0$). Dans ce rapport, le corps $F$ sera une extension finie du corps $\mathbf{Q}_p$. Dans le cas particulier des représentations de dimension 1, cette correspondance est bien comprise depuis le début du vingtième siècle via la théorie du corps des classes. Dans le cas où le corps $L$ est $\overline{\mathbf{Q}_\ell}$, avec $\ell \neq p$, ou bien le corps $\mathbf{C}$, la situation est bien avancée. Mais le cas des représentations de dimension 2 avec $L$ un corps $p$-adique, et pour $F = \mathbf{Q}_p$ n'a été résolu qu'en 2010 par Colmez, et fait appel à des constructions qui semblent parfois très parachutées, mais surtout, qui rendent difficile l'imagination de la correspondance pour $F$ arbitraire, ou en dimension supérieure.

Dans les années $60$, Lubin et Tate introduisent un nouveau point de vue sur la théorie du corps des classes. Ils donnent en fait une réalisation explicite de l'isomorphisme ; rappelons cette construction. Ils considèrent un groupe formel $\mathscr{X}$ sur $\breve{\mathbf{Z}}_p$, relevant l'"unique" groupe formel de dimension 1 et de hauteur $1$ sur $\overline{\mathbf{F}_p}$. En notant $\pi$ une uniformisante de $F$, puis $F_n = F(\mathscr{X}[\pi^n])$ le corps engendré par les points de $\pi^n$-torsion de $\mathscr{X}$ et enfin $F_\pi$ l'union de tous les $F_n$, ils montrent que l'extension $F_\pi \cdot F^{\mathrm{unr}}$ est exactement l'extension abélienne maximale, ce qui est un analogue du théorème de Kronecker-Weber. Par exemple, dans le cas où $F = \mathbf{Q}_p$ et $\pi = p$, on trouve que $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}} = \mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}} \cdot \mathbf{Q}_p^{\mathrm{unr}}$. Cela donne aussi un morphisme $\mathbf{Q}_p^\times \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}|\mathbf{Q}_p)^{\mathrm{ab}}$, qui envoie $p$ sur le Frobenius, et sur $\mathbf{Z}_p^\times$ associe l'inverse du caractère cyclotomique.

Cette construction amène à en imaginer une nouvelle qui fonctionnerait en toute dimension. En 1976, dans un article monumental, Drinfeld construit une tour de revêtements $(\breve{\mathcal{M}}_n)_{n\geq 0}$ du "demi-plan de Drinfeld" $\Omega(\mathbf{C}_p) = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) - \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, en utilisant des recettes similaires à celle de Lubin-Tate. Dans les années 80 puis 90, Deligne, Drinfeld, Carayol, Harris, Taylor [1] montrent que la cohomologie de cette tour réalise la correspondance dans le cas où le corps des coefficients est un corps $\ell$-adique (où $\ell \neq p$) : plus précisément, si $M$ est une représentation absolument irréductible du groupe de Weil $W_F$ de dimension 2, alors, en notant $\mathcal{M}_\infty$ la limite des espaces $\breve{\mathcal{M}}_n$ :

$$\mathrm{Hom}_{W_F}(M, H^n_{\mathrm{proet}}(\mathcal{M}_\infty(F), \overline{\mathbf{Q}_\ell})) = \mathrm{JL}(M) \otimes \mathrm{LL}(M)^*$$

où $\mathrm{LL}(M)$ (resp $\mathrm{JL}(M)$) est la représentation de $\mathrm{GL}_2(F)$ (resp $D^\times$, groupe des unités de l'algèbre à division d'invariant $1/2$) associée à $M$ par la correspondance de Langlands locale "classique" [2] (resp Jacquet-Langlands). En construisant la tour au-dessus du demi-espace (au lieu du demi-plan), ce procédé se généralise à toutes les dimensions. Il est donc tentant de voir ce qui se produit dans le cas où $L$ est un corps $p$-adique.

Dans les travaux de Colmez, les foncteurs réalisant la correspondance sont construits en utilisant la théorie des $(\varphi, \Gamma)$-modules et les anneaux de Fontaine : le but de ce rapport est d'expliquer comment la construction cruciale $V \mapsto \Pi(V)$ s'interprète dans la géométrie de la tour de Drinfeld ; et de donner une piste pour l'interprétation d'autres objets cruciaux, qui n'ont pour l'instant qu'une incarnation dans le monde des $(\varphi, \Gamma)$-modules.

1. entre autres
2. i.e. : pas $p$-adique

La différence essentielle entre le monde $p$-adique et le monde $\ell$-adique est que du côté $\mathrm{GL}_2$, il ne suffit plus de regarder les représentations lisses [3] ; du côté galoisien, il ne suffit plus de regarder les représentations de Weil-Deligne.

## Les résultats

Dans la suite, $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, $D^\times$ est l'unique [4] algèbre de quaternions non déployée sur $\mathbf{Q}_p$ et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$.
Soit $\pi$ une représentation lisse supercuspidale de $G$, de caractère central trivial, et soit $\rho = \mathrm{JL}(\pi)$ la représentation de $D^\times$ associée par correspondance de Jacquet-Langlands lisse.

Notons $\mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}(G)$ la catégorie des représentations de $G$ sur des $L$-espaces de Banach $\Pi$, qui ont un réseau ouvert, borné et $G$-invariant, dont la réduction modulo $p$ est lisse admissible au sens usuel. Si $\Pi \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}(G)$, on définit $\Pi^{\mathrm{an}}$ (resp $\Pi^{\mathrm{lisse}}$) l'ensemble des vecteurs pour lesquels l'action de $G$ est localement analytique (resp localement lisse). Alors $\Pi^{\mathrm{an}}$ est dense dans $\Pi$ (théorème 7.1 de [ST03]), alors que $\Pi^{\mathrm{lisse}}$ peut être nul. Quitte à étendre $L$, on suppose que $\rho$ est à coefficients dans $L$.

**Définition 0.1.** On note $\mathscr{V}(\pi)$ l'ensemble des représentations absolument irréductibles $\Pi \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}(G)$ telles que $\Pi^{\mathrm{lisse}} = \pi$.

Pour $\sigma$ une représentation de $G \times D^\times$, on note $\sigma^\rho = \mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho, \sigma)$.
Posons $\Sigma_n = \breve{\mathcal{M}}_n / p^{\mathbf{Z}}$. Le résultat essentiel du rapport, et aussi de l'article [DB17] est le suivant :

**Théorème A.** *Pour $n$ assez grand, il existe un isomorphisme de $G$-modules topologiques, unique à scalaire près :*
$$\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho \simeq (\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}})^*$$

Le résultat permet ainsi d'exhiber la représentation $\Pi^{\mathrm{an}}/\pi$. Une question naturelle est donc : comment récupérer $\Pi^{\mathrm{an}}$ entièrement ? Pour cela, on a besoin de rajouter la donnée de la filtration de Hodge.
Par la correspondance de Langlands "classique", et en utilisant une recette de Fontaine, la représentation lisse $\pi$ donne un $(\varphi, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module $M(\pi)$, libre de rang 2 sur $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p^{\mathrm{unr}}$. On montre alors que le foncteur de Colmez $\Pi \mapsto V(\Pi)$ induit une bijection [5] entre $\mathscr{V}(\pi)$ et l'ensemble des $L$-représentations absolument irréductibles $V$ de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, potentiellement cristallines, à poids de Hodge-Tate 0 et 1 et telles que $D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M(\pi)$. On pose $M_{\mathrm{dR}}(\pi) = (\overline{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{unr}}} M(\pi))^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ : c'est un $L$-espace vectoriel de dimension 2. En combinant ce qui précède avec un théorème de Colmez-Fontaine, on a une bijection canonique :
$$\mathscr{V}(\pi) \simeq \mathrm{Proj}(M_{\mathrm{dR}}(\pi))$$
qui, à $\Pi$, associe la $L$-droite $\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V(\Pi)))$. Notons $\Pi_{\mathcal{L}}$ la représentation correspondant à la droite $\mathcal{L}$.

3. voir la première section pour des rappels sur les définitions
4. (à isomorphisme près)
5. par abus, on notera encore $\mathscr{V}(\pi)$ l'image de cette bijection : $\mathscr{V}(\pi)$ s'identifie ainsi à un ensemble de représentations galoisiennes

**Théorème B.** *Il existe un isomorphisme, canonique à scalaire près, de $G$-modules de Fréchet*

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho \simeq M^*_{\mathrm{dR}} \otimes_L \pi^*$$

*tel que, pour $\mathcal{L} \in \mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V(\Pi)))$, l'image inverse de $\mathcal{L}^\perp \otimes \pi^* \subset H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$ dans $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho$ est isomorphe à $(\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathcal{L}})^*$ et la suite exacte :*

$$0 \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho \to (\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathcal{L}})^* \to \mathcal{L}^\perp \otimes \pi^* \to 0$$

*correspond à celle du théorème précédent.*

**En résumé :** Pour construire le foncteur $V \mapsto \Pi(V)$, on procède ainsi : d'un côté, $V$ donne une représentation de Weil-Deligne, d'où l'on déduit $\pi$ lisse par correspondance de Langlands classique. La filtration de Hodge de $V$ donne un élément $\mathcal{L}$ de $\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V))$ ; la représentation $\Pi(V)$ est alors définie comme la complétion de $\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathcal{L}}$. On a bien obtenu une description géométrique du foncteur $V \mapsto \Pi(V)$.

Remarquer que $\Pi(V)$ ne dépend que de $D_{\mathrm{pst}}(V)$ et de la filtration de Hodge $\mathcal{L}$ sur $D_{\mathrm{dR}}(V)$ : cette observation est compatible avec une conséquence du théorème de monodromie $p$-adique, qui donne :

$$V = \mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{pst}}(V) \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{st}})^{\varphi=1, N=0}$$

## Plan du mémoire et schéma de preuve

Les parties 1 et 2 sont essentiellement des constructions fondamentales, servant à formuler convenablement le problème : la première est dédiée à la géométrie de la tour de Drinfeld, et la deuxième aux constructions fondamentales liées aux $(\varphi, \Gamma)$-modules.
Les sections 3 et 4 constituent le cœur de l'article [DB17] : il s'agit de munir les deux [6] espaces que l'on cherche à comparer, $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ et $\Pi(\pi, 0)^*$, d'une structure de module sur $\mathcal{O}(\Omega)$, puis de montrer qu'un morphisme non nul pour cette structure est bijectif.
La section 5 aborde le lien local–global, qui permet de définir le morphisme $\Phi$, ainsi que de calculer un terme important : par manque de temps, je n'ai pas pu détailler ces résultats, qui sont évidemment cruciaux.
La section 6 présente des conjectures importantes, qui me seront sans doute intéressantes.
Enfin, la dernière section est une annexe, dans laquelle on donne des résultats importants de topologie et de géométrie analytique $p$-adique.

**Remerciements** Je remercie mon encadrant Gabriel Dospinescu pour m'avoir proposé ce sujet de stage, et m'avoir fait découvrir le domaine ; ses réponses à mes questions m'ont permis de me frayer un chemin vers la compréhension.
Je remercie aussi Sophie Morel et Olivier Taïbi pour m'avoir aidé à trouver un sujet de thèse.
Enfin, je remercie le secrétariat de l'UMPA pour leur soutien, tant administratif que matériel.

6. La structure est déjà présente sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$

# Table des matières

## 0.1 Notations

On fixe $\overline{\mathbf{Q}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{C}_p$ sa complétion, $\breve{\mathbf{Q}}_p$ la complétion de l'extension non ramifiée maximale $\mathbf{Q}_p^{unr}$. On note $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}}$ l'extension cyclotomique de $\mathbf{Q}_p$. On fixe $(\zeta_{p^n})_{n\geq 1}$ un système compatible de racines de l'unité, et on note $L_n = L(\zeta_{p^n})$.
Soit $D$ l'algèbre de quaternions non déployée sur $\mathbf{Q}_p$. On note $\mathcal{O}_D$ son ordre maximal ; on fixe un plongement $\mathbf{Q}_{p^2} \to D$, et soit $\varpi_D$ une uniformisante de $\mathcal{O}_D$, telle que, notant $\sigma$ le frobenius :

$$\mathcal{O}_D = \mathbf{Z}_{p^2}[\varpi_D], \quad \varpi_D^2 = p, \quad \text{et} \quad : \forall a \in \mathbf{Z}_{p^2},\, \varpi_D a = \sigma(a)\varpi_D$$

On note :

$$G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p), \quad \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}|\mathbf{Q}_p) \quad \text{et} \quad \mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}|\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}})$$

## 0.2 Rappels : représentations lisses, et correspondances dans le cas classique

On considère des représentations de $G$ à coefficients dans $\mathbf{C}_\ell$, le nombre premier $\ell$ pouvant être égal à $p$. On rappelle qu'une représentation de $G$ est dite lisse si le stabilisateur de tout vecteur est ouvert ; et admissible si pour tout sous-groupe ouvert $K$ de $G$, les points fixes sous l'action de $K$ forment un espace de dimension finie.
Les représentations lisses irréductibles de $G$ sur $\mathbf{C}_\ell$ se classifient en quatre familles :

- Les caractères lisses $\mathbf{Q}_p^\times \to \mathbf{C}_\ell^\times$ donnent des représentations de $G$, en composant par le déterminant.
- Les représentations de la série principale, classifiées par les paires de caractères $(\chi_1, \chi_2)$ lisses tels que $\chi_1/\chi_2 \neq |\cdot|^{\pm 1}$ : elles se réalisent comme l'espace des fonctions $f : G \to \mathbf{C}_\ell$, invariantes à droite par un certain sous-groupe ouvert de $G$ satisfaisant :

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \chi_1(a)\chi_2(d)\left|\frac{a}{d}\right|^{1/2} f(g)$$

  (pour $g \in G, a, d \in \mathbf{Q}_p^\star$ et $b \in \mathbf{Q}_p$) ; l'action de $G$ est celle induite par la translation à droite.
- Les représentations de la série spéciale, *i.e.* les tordues de la représentation de Steinberg par des caractères lisses (la Steinberg étant le quotient des fonctions localement constantes $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{C}_\ell$ par les fonctions constantes).
- Les représentations supercuspidales, caractérisées par la compacité modulo $Z(G)$ du support de leurs coefficients matriciels.

Les deux dernières catégories forment la série discrète.

Le premier résultat fondamental permet de définir $\rho$ à partir de $\pi$ :

**Théorème 0.2** (Jacquet-Langlands). *Il existe une bijection canonique $\rho \mapsto \pi$ entre :*

- *l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations lisses irréductibles de $D^\times$ sur $\mathbf{C}_\ell$ et*

- *l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations de la série discrète de $G$*

*telle que, notant $\chi$ le caractère*[7] *si $g$ et $d$ ont même polynôme caractéristique, $\chi_\pi(g) = -\chi_\rho(d)$.*

Cette correspondance préserve le caractère central, est compatible avec les twists par des caractères et la dualité ; $\rho$ est de dimension 2 ou plus si et seulement $\pi$ est supercuspidale.

Le deuxième résultat fondamental permet de définir $\pi$ à partir de la représentation de Weil-Deligne sous-jacente à $V$ :

**Théorème 0.3** (Langlands local «classique»)**.** *Il existe une bijection naturelle $\pi \longleftrightarrow \mathrm{LL}(\pi)$ entre :*

- *l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $G$ sur $\mathbf{C}_\ell$ et*
- *l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de Weil-Deligne de dimension $2$ sur $\mathbf{C}_\ell$, Frobenius semi-simples.*

Rappelons que, par le théorème de monodromie $\ell$-adique de Grothendieck, si $\ell \neq p$, la catégorie des représentations de Weil-Deligne de dimension 2 sur $\mathbf{C}_\ell$ est équivalente à celle des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2.

7. défini à l'aide de l'algèbre de Hecke

# 1 Sur la tour de Drinfeld

Cette section, qui est surtout un condensé de résultats de [BC91], vise à définir la tour de Drinfeld. On donne des ingrédients de la preuve du théorème de Drinfeld, publié dans [Dri76]. Cette section contient peu de preuves.

## 1.1 Autour du demi-plan non-archimédien

### 1.1.1 Arbre, structure de schéma formel

On commence par rappeler la construction de l'immeuble de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$ :

- ses sommets sont les classes d'homothétie de réseaux (sous-$\mathbf{Z}_p$-modules libres de rang 2 de $\mathbf{Q}_p^2$)
- ses arrêtes sont construites ainsi : si $s = [M]$ et $s = [M']$ satisfont $pM \subset M' \subset M$, alors $s$ est joint par une arrête à $s'$.

Pour chaque point $[M]$, l'ensemble des arrêtes partant de $[M]$ est en bijection avec $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_p)$.
On a une réalisation géométrique $I_{\mathbf{R}}$ de $I$ comme les classes de proportionnalité de normes sur $\mathbf{Q}_p^2$ : à un réseau $M$, on associe la norme dont $M$ est la boule unité. Étant donnés deux réseaux $M, M'$ vérifiant la condition $pM \subset M' \subset M$, on dispose d'une base $(e_1, e_2)$ de $M$ telle que $(e_1, pe_2)$ soit une base de $M'$. On définit alors la réalisation de l'arrête ainsi : le point $(1-t)[M]+t[M']$ correspond à la norme :

$$|v|_t = \max(|a_1|, p^t|a_2|)$$

et cela lie $[M]$ à $[M']$ dans $I_{\mathbf{R}}$.

On définit l'ensemble :

$$\Omega = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) - \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$$

En identifiant $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ aux applications non nulles $\mathbf{Q}_p^2 \to \mathbf{C}_p$ modulo $\mathbf{C}_p^\times$-homothéties, on identifie $\Omega$ avec les classes de $\mathbf{C}_p^\times$-homothétie d'applications injectives $\mathbf{Q}_p^2 \hookrightarrow \mathbf{C}_p$.
Cela permet de construire une application $\lambda : \Omega \to I_{\mathbf{R}}$, qui à $z \in \Omega$ associe la norme suivante : $|v|_z = |z(v)|_{\mathbf{C}_p}$ (on a vu $z$ comme une application injective). C'est cette application qui permet de munir $\Omega$ d'une structure analytique rigide : en effet, en identifiant $\Omega$ à $\mathbf{C}_p - \mathbf{Q}_p$, les ensembles $\lambda^{-1}(s)$ et $\lambda^{-1}([s, s'])$ ont des structures naturelles d'espaces analytiques rigides sur $\mathbf{Q}_p$, car complémentaires d'un nombre fini de disques ouverts dans $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}_p}$.

Cette structure provient en fait d'une structure sous-jacente de schéma formel [8], noté $\widehat{\Omega}$.
Pour le construire, on procède sommet par sommet. Soit $s = [M]$, la fibre générique de $\mathbf{P}^1(M)$ au-dessus de $\mathbf{Z}_p$ ne dépend pas du représentant $M$ choisi, on la note $\mathbf{P}^1_s$ ; elle est alors canoniquement identifiée à $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}_p}$.
On note alors $\Omega_s$ l'ouvert de $\mathbf{P}^1_s$ complémentaire des points $\mathbf{F}_p$-rationnels de la fibre spéciale [9]. On

8. On consultera l'annexe pour des bases sur les schémas formels
9. ici, la fibre spéciale signifie la fibre du point $(p) \in \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)$

note $\widehat{\Omega_s}$ le schéma formel complété de $\Omega_s$ le long de la fibre spéciale.
La structure analytique rigide se déduit ainsi : l'espace analytique rigide $\lambda^{-1}(s)$ est la fibre générique du schéma formel $\widehat{\Omega_s}$ : cela veut simplement dire que l'algèbre de Tate correspondant à $\lambda^{-1}(s)$ est $\Gamma(\widehat{\Omega_s}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$.
On construit, en éclatant $\mathbf{P}^1_s$ en le point correspondant à l'application $M \to M/M' \simeq k$, un schéma formel $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$; cela étant compatible, en regardant les fibres génériques, aux inclusions $\lambda^{-1}(s), \lambda^{-1}(s') \hookrightarrow \lambda^{-1}([s,s'])$. Plus généralement, en regardant sur les sous-arbres finis et enfin en prenant l'union, on construit le schéma formel $\widehat{\Omega}$.
Les constructions effectuées permettent de définir l'action de $G = GL_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\widehat{\Omega}$ : elle permute les $\widehat{\Omega_s}$, et la flèche $\widehat{\Omega_s} \to \widehat{\Omega_{g\cdot s}}$ est la restriction de $\mathbf{P}^1(M) \to \mathbf{P}^1(g\cdot M)$. Noter que l'application $\lambda$ est $G$-équivariante.

### 1.1.2 Description modulaire de Deligne

Notons $Compl$ la catégorie des $\mathbf{Z}_p$-algèbre séparées complètes pour la topologie $p$-adique. Construisons deux foncteurs représentés par $\widehat{\Omega_s}$ et $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$.

**Définition 1.1.** Notons $F_s$ le foncteur qui, à $R$ un objet de $Compl$, associe l'ensemble des classes d'isomorphie des couples $(\mathscr{L}, \alpha)$, où $\mathscr{L}$ est un $R$-module libre de rang 1, et $\alpha : M \to \mathscr{L}$ vérifie :

$$(\star) \qquad \forall x \in \operatorname{Spec}(R/pR), \alpha(x) : M/pM \to \mathscr{L} \otimes_R \mathbf{F}_p(x) \text{ est injective}$$

**Proposition 1.2.** *Le foncteur $F_s$ est représenté par le schéma formel $\widehat{\Omega_s}$.*

*Démonstration.* Commençons par remarquer que si $u \in M - pM$, alors $\alpha(u)$ est un générateur de $\mathscr{L}$ : en effet, sinon, on pourrait écrire $\alpha(u) \in \mathscr{L} \otimes_R \mathfrak{p}_x$ (pour un $x \in \operatorname{Spec}(R/pR)$), et alors $\alpha(x)(u)$ serait nul, ce qui exclu vu la condition. Ainsi $\alpha \otimes id_R : M \otimes R \to \mathscr{L}$ est surjective. Cela permet de voir $F_s$ comme un sous-foncteur de $\widehat{\mathbf{P}_s}$.
En fait, si $(e_1, e_2)$ est une base de $M$, le couple $(\mathscr{L}, \alpha)$ est déterminé à isomorphisme près par $\alpha(e_1)/\alpha(e_2) \in R$. La condition $(\star)$ correspond alors à dire que le point associé n'est pas un point $\mathbf{F}_p$-rationnel : autrement dit, on a bien montré que $F_s$ est représenté par $\widehat{\Omega_s}$. $\square$

**Définition 1.3.** On note $F_{[s,s']}$ le foncteur sur $Compl$, qui à $R$ associe l'ensemble des classes d'isomorphie de diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} pM \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha/p"] & M' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha'"] & M \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathscr{L} \arrow[r, "c"] & \mathscr{L}' \arrow[r, "c'"] & \mathscr{L} \end{tikzcd}$$

où $\mathscr{L}, \mathscr{L}'$ sont deux $R$-modules libres de rang 1, $c, c'$ sont des morphismes de $R$-modules, et $\alpha, \alpha'$ vérifient la condition :

$$(\star) \quad \forall x \in \operatorname{Spec}(R/pR), \ker(\alpha(x)) \subset M'/pM \text{ et } \ker(\alpha'(x)) \subset pM/pM'$$

**Proposition 1.4.** *Le foncteur $F_{[s,s']}$ est représenté par le schéma formel $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$.*

*Démonstration.* Soit $(e_1, e_2)$ une base de $M$ telle que $(e_1, pe_2)$ soit une base de $M'$. La condition $(\star)$ implique que $\alpha(e_2)$ engendre $\mathscr{L}$ et $\alpha'(e_1)$ engendre $\mathscr{L}'$. Identifions $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ avec $R$, en décrétant que ces deux quantités valent 1. Alors en regardant les coordonnées $\zeta = \alpha(e_1)$ et $\eta = \alpha'(pe_2)$, la commutativité du diagramme s'écrit : $\eta\zeta = p$. Ainsi, $F_{[s,s']}$ s'identifie à un sous-foncteur du foncteur $\mathrm{Spf}(\mathbf{Z}_p\langle\eta,\zeta\rangle/(\eta\zeta - p))$. La condition $(\star)$ permet de conclure comme avant. $\square$

**Remarque 1.5.** L'immersion $\widehat{\Omega_s} \hookrightarrow \widehat{\Omega_{[s,s']}}$ correspond à $\mathrm{Spf}(\mathbf{Z}_p\langle\zeta,\zeta^{-1}\rangle) \hookrightarrow \mathrm{Spf}(\mathbf{Z}_p\langle\eta,\zeta\rangle/(\eta\zeta - p))$. Fonctoriellement, on définit $F_s \to F_{[s,s']}$ en associant à $(\mathscr{L}, \alpha)$ le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
pM \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha/p"] & M' \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathscr{L} \arrow[r, "p"] & \mathscr{L} \arrow[r, "id"] & \mathscr{L}
\end{tikzcd}$$

## 1.2 Les $\mathcal{O}_D$-modules formels

### 1.2.1 Éléments de la théorie de Cartier

À présent, $B$ est une $\mathbf{Z}_p$-algèbre. On consultera l'annexe pour la théorie des groupes formels.

#### $\mathbf{Z}_p$-modules

**Définition 1.6.** Un $\mathbf{Z}_p$-module formel sur $B$ est un groupe formel $X$ muni d'une action de $\mathbf{Z}_p$ par automorphismes, de telle sorte que l'action induite sur $\mathrm{Lie}(X)$ coïncide avec la structure induite par celle de $B$-module.

Notons $W(B)$ les vecteurs de Witt de $B$, et définissons l'algèbre non commutative $W(B)[F, V]$, vérifiant les relations [10] : $Fx = \sigma(x)F$, $xV = V\sigma(x)$, $VxF = \tau(x)$ et $FV = p$. On définit alors $E(B)$ le complété de cette algèbre pour la topologie $V$-adique [11].

**Définition 1.7.** Un $\mathbf{Z}_p$-module de Cartier est un $E(B)$-module à gauche $M$ tel que :

(i) $M/VM$ est un $B$ module libre de rang fini.

(ii) $V$ est injectif sur $M$.

(iii) $M$ est séparé et complet pour la filtration $V$-adique.

**Théorème 1.8** (Dieudonné-Cartier). *La catégorie des $\mathbf{Z}_p$-modules formels sur $B$ est équivalente à celle des $\mathbf{Z}_p$-modules de Cartier sur $B$. De plus, si $M$ est associé à $X$, alors* $\mathrm{Lie}(X) = M/VM$.

10. (où $\sigma$ est l'opérateur de décalage des composantes fantômes, et $\tau$ celui de décalage des vraies composantes dans $W(B)$)

11. définie par les idéaux à droite engendrés par les $V^n$

**$\mathcal{O}_D$-modules**

**Définition 1.9.** Un $\mathcal{O}_D$-module formel sur $B$ est un $\mathbf{Z}_p$-module formel muni d'une action de $\mathcal{O}_D$ prolongeant celle de $\mathbf{Z}_p$.

**Définition 1.10.** Si $X$ est un $\mathcal{O}_D$-module formel, on dit que $X$ est spécial si l'action de $\mathbf{Z}_{p^2}$ fait de $\mathrm{Lie}(X)$ un $\mathbf{Z}_{p^2} \otimes B$-module libre de rang 1.

Pour définir l'analogue du côté module de Cartier, il faut introduire une graduation, à valeurs dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On peut déjà munir $E(B)$ d'une telle graduation, en posant $\deg(V) = \deg(F) = 1$, et $\deg(W(B)) = 0$.

**Définition 1.11.** On appelle $\mathbf{Z}_p[\varpi_D]$-module de Cartier gradué sur $B$ un $\mathbf{Z}_p$-module de Cartier $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-gradué $M = M_0 \oplus M_1$, muni d'un endomorphisme $E(B)$-linéaire $\varpi_D$ de degré 1 satisfaisant $\varpi_D^2 = p$.

**Définition 1.12.** Si $M$ est un $\mathbf{Z}_p[\varpi_D]$-module de Cartier gradué, on dit que $M$ est spécial si $M_0/VM_1$ et $M_1/VM_0$ sont des $B$-modules libres de rang 1.

**Théorème 1.13.** *La catégorie des $\mathcal{O}_D$-module formel est équivalente à celle des $\mathbf{Z}_p[\varpi_D]$-modules de Cartier gradués, et cette correspondance préserve le fait d'être spécial.*

**Remarque 1.14.** On peut retrouver l'algèbre de Lie par la même recette qu'avant. On a mieux : la graduation suivante :

$$(\mathrm{Lie}(X))_i = \{m \in \mathrm{Lie}(X), \forall a \in \mathbf{Z}_{p^2}, [a](m) = \sigma^i(a)m\} \qquad (i \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

se retrouve comme $M_i/VM_{i-1}$.

**Définition 1.15.** On dit que $i \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est un indice critique pour $X$ si son module de Cartier vérifie $\varpi_D M_i \subset VM_i$.

Si $B$ est intègre, au moins un des deux indices (parmi $\{0, 1\}$) est critique.

### 1.2.2 $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux sur un corps algébriquement clos

À présent, on suppose $B = \overline{\mathbf{F}_p}$ ; on considérera $\breve{\mathbf{Z}}_p$ et $\breve{\mathbf{Q}}_p$.

**Définition 1.16.** Si $X$ est un $\mathbf{Z}_p$-module formel sur $\overline{\mathbf{F}_p}$, sa hauteur $h$ est le rang de son module de Cartier $M$ sur $\breve{\mathbf{Z}}_p$.

Notons que la hauteur est aussi la plus grande puissance du frobenius par lequel le groupe formel $X$ se factorise.

Dans ce cadre, la classification des groupes formels sur $B$ est simple :

**Théorème 1.17.** *Sur $B$ corps algébriquement clos de caractéristique $p$, alors pour tout $h \geq 1$, il existe un unique groupe formel de hauteur $h$ à isomorphisme près.*
*Le seul groupe formel de hauteur infinie est le groupe additif.*

De plus, l'anneau d'endomorphismes d'un tel groupe formel est isomorphe à l'ordre maximal de l'algèbre à division d'invariant $\frac{1}{h}$. Dans le cas $h = 2$, on retrouve $\mathcal{O}_D$.

**Proposition 1.18.** *Si $X$ est un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial, sa hauteur est un multiple de $4$.*

**Proposition 1.19.** *Il existe une seule classe d'isogénie de $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux de hauteur $4$. Pour un tel module formel $\overline{X}$, on a une identification :* $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_D}\overline{X} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} =: \mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_D}\overline{X} \simeq \mathcal{M}_2(\mathbf{Q}_p)$

**Remarque 1.20.** On peut construire explicitement un tel module formel $\overline{X}$ ainsi : on note $\mathscr{F}$ l'unique groupe formel de dimension $1$ et de hauteur $2$, et l'on pose : $\overline{X} = \mathscr{F} \times \mathscr{F}$, l'action de $x \in \mathcal{O}_D$ étant donnée ainsi (on rappelle que $\mathrm{End}(\mathscr{F}) = \mathcal{O}_D$) :

$$x \in \mathcal{O}_D \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \varpi_D x \varpi_D^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{O}_D) = \mathrm{End}(\mathscr{F} \times \mathscr{F})$$

### 1.2.3 Description du demi-plan à la Drinfeld, et théorème de Drinfeld

On note $\overline{X}$ le $\mathcal{O}_D$-module formel spécial de hauteur $4$ sur $\overline{\mathbf{F}_p}$ tel que $0$ soit critique pour $\overline{X}$, et on fixe un isomorphisme $\mathbf{Z}_p^2 \simeq \eta_{\overline{X},0}$.
Notons $\mathrm{Nilp}_{\breve{\mathbf{Z}}_p}$ la catégorie des $\breve{\mathbf{Z}}_p$-algèbres dans lesquelles $p$ est nilpotent.

**Définition 1.21.** Soit le foncteur

$$\mathcal{F}_{\overline{X}} : \mathrm{Nilp}_{\breve{\mathbf{Z}}_p} \to \mathrm{Ens}$$

des déformations par quasi-isogénies de $\overline{X}$, défini par : $\mathcal{F}_{\overline{X}}(B)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de couples $(X, \rho)$ où $X$ est un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial de hauteur $4$ sur $B$, et

$$\rho : \overline{X} \otimes_{\overline{\mathbf{F}_p}} B/pB \longrightarrow X \otimes_B B/pB$$

est une quasi-isogénie $\mathcal{O}_D$-équivariante.

**Théorème 1.22** (Drinfeld, "basic theorem")**.** *Notons $\breve{\widehat{\Omega}} = \widehat{\Omega} \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p} \breve{\mathbf{Z}}_p$. Le foncteur $\mathcal{F}_{\overline{X}}$ est pro-représentable par le schéma formel :*

$$\widehat{\mathscr{M}_0} := \breve{\widehat{\Omega}} \times \mathbf{Z}$$

*sur* $\mathrm{Spf}(\breve{\mathbf{Z}}_p)$

**Remarque 1.23.** Le $\mathbf{Z}$ qui apparaît vient simplement de la partition des quasi-isogénies par hauteur : il suffit de montrer que le foncteur des déformations par quasi-isogénies **de hauteur** $0$ est représentable par $\breve{\widehat{\Omega}}$ et c'est ce qui est fait dans [BC91] (et, avant, dans [Dri76]).

*Idée de la preuve.* À un module de Cartier $M$, on associe un triplet $(\eta, T, u)$, comme dans la section II-3.2 de [BC91], dit «admissible» (définition II-5.8 de *loc. cit.*). La donnée de $\rho$ permet de construire un morphisme $r$ entre $\eta$ et $T$ (propostion II-7.2 de *loc. cit.*).
On montre ensuite que le foncteur $F$, qui à $B$ une $\mathbf{Z}_p$-algèbre, associe l'ensemble des classes d'isomorphie de tels quadruplets, représente le demi-plan : pour cela, on construit des morphismes de foncteurs $F_s \to F$, et $F_{[s,s']} \to F$, de façon compatible aux recollements. La construction précédente donne ainsi un morphisme $\overline{\xi} : \mathcal{F}_{\overline{X}} \to H$, où on note $H$ la restriction de $F$ aux $\breve{\mathbf{Z}}_p$-algèbres.
Il ne reste plus qu'à vérifier que $\overline{\xi}$ est un isomorphisme de foncteurs, ce qui se fait en montrant que c'est un isomorphisme sur les espaces tangents, puis en se ramenant au cas $B = \overline{\mathbf{F}_p}[\varepsilon]$. □

## 1.3 La tour de Drinfeld

### 1.3.1 Construction de la tour

On peut construire le $\mathcal{O}_D$ module formel spécial universel $\mathscr{X} \to \widehat{\mathscr{M}_0}$, avec $(\mathscr{X}, \varrho) \in \mathcal{F}_{\overline{X}}(\widehat{\mathscr{M}_0})$ correspondant à $id_{\widehat{\mathscr{M}_0}} \in \mathrm{Hom}(\widehat{\mathscr{M}_0}, \widehat{\mathscr{M}_0})$.

**Définition 1.24.** Notons $\mathscr{X}[\varpi_D^n]$ le schéma formel fini et plat sur $\widehat{\mathscr{M}_0}$ des points de $\varpi_D$.-torsion de $\mathscr{X}$. On note, pour $n \geq 1$ :

$$\mathscr{M}_n = (\varpi_D^{n-1})^{-1}(\mathscr{X}[\varpi_D]^{\mathrm{an}} \backslash \{e\})$$

et $\mathscr{M}_0$ est l'espace analytique associé à $\widehat{\mathscr{M}_0}$.

Alors $\mathscr{M}_n \to \mathscr{M}_0$ est un revêtement fini étale [12]. Construisons une structure de schéma formel pour le $n$-ème étage de la tour : pour cela, on a besoin d'un foncteur représentant. Suivant les section I.6.2 et III.1 du premier article de [FGL08], il suffit d'introduire une structure de niveau.
Soit $K \subset D^\times$ un sous-groupe compact ouvert stabilisant $\mathcal{O}_D$. On pose :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{O}_D,K} = \mathrm{Isom}_{\mathbf{Z}_p}(p^{-2}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D, \mathscr{X}[p^n])/K \qquad \text{pour } n \gg 0$$

**Définition 1.25.** Soit $(X, \rho) \in \mathcal{F}_{\overline{X}}(B)$, correspondant ainsi à un morphisme $\mathrm{Spf}(B) \to \widehat{\mathscr{M}_0}$. Une structure de niveau $K$ pour $(X, \rho)$ est une section $\eta$ du produit fibré donné par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{\mathcal{O}_D,K} \arrow[r] & \widehat{\mathscr{M}_0} \\ & \mathrm{Spf}(B) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

**Lemme 1.26.** *Le foncteur qui, à $B$ comme avant, associe les classes d'isomorphie des triplets $(X, \rho, \eta)$, où $(X, \rho) \in \mathcal{F}_{\overline{X}}(B)$, et $\eta : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} T_p(X^{rig})[1 + \varpi_D^n\mathcal{O}_D]$ est une structure de niveau $1 + \varpi_D^n\mathcal{O}_D$ est représentable par un schéma formel dont la fibre spéciale est $\mathscr{M}_n$.*

La flèche $\mathscr{M}_n \to \mathscr{M}_0$ correspond alors au foncteur d'oubli de la structure de niveau.

### 1.3.2 Actions de $D^\star$ et $G$ sur le rez-de-chaussée

L'action de $G$ sur $\widehat{\Omega}$ peut se décrire facilement avec l'interprétation à la Deligne : le morphisme de foncteurs $g : F_s \to F_{gs}$ envoie $(\mathscr{L}, \alpha)$ sur $(\mathscr{L}, \alpha \circ g^{-1})$. Pour l'interprétation à la Drinfeld (via les quadruplets), on a :

**Proposition 1.27.** *L'action de $g \in G$ sur le foncteur $F$ est donnée par :*

$$g \cdot (\eta, T, u, r) = (\eta[n], T[n], u[n], \varpi_D^n \circ r \circ g^{-1})$$

*où $n = v_p(\det(g))$, et $[n]$ désigne le décalage de la graduation.*

12. i.e. : plat et non ramifié

On a une action de $G$ sur le foncteur $\mathcal{F}_{\overline{X}}$ : en effet, vu l'identification : $G = \mathrm{GL}_2(\eta_{\overline{X},0} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p) = (\mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_D} \overline{X})^\times$, tout élément $g \in G$ définit une quasiisogénie de $\overline{X}$. On peut dès lors définir :

$$g \cdot (X, \rho) = (X, \rho \circ g^{-1})$$

**Proposition 1.28.** *L'action de $G$ sur le foncteur correspond à l'action sur $\mathbf{Z}$ de décalage par $-v_p(\det(g))$, et à l'action canonique sur $\breve{\hat{\Omega}}$.*

On a une action de $D^\star$ sur le foncteur $\mathcal{F}_{\overline{X}}$ : si $d \in D^\star$, à un couple $(X, \rho)$, on associe le couple : $(X', \rho')$, où si $d^{-1} \in \mathcal{O}_D$ :

- $X'$ est le $\mathcal{O}_D$-module formel donné par $X' = X/X[\varpi_D^a]$, où $a \geq 0$ est tel que $\varpi_D^a d \in \mathcal{O}_D^\times$.
- $\rho' = \varphi \circ \rho$, où $\varphi$ est l'isogénie : $X \twoheadrightarrow X'$

et on demande que l'action de $p \in \mathcal{D}^\star$ corresponde à celle de $pI_2 \in G$.

**Remarque 1.29.** L'action de $\mathcal{O}_D^\times$ sur le foncteur est donc triviale.

**Proposition 1.30.** *L'action de $D^\star$ sur le foncteur correspond à l'action sur $\mathbf{Z}$ de décalage par $-v_p(N_{D/K}(g))$, et à l'action triviale sur $\breve{\hat{\Omega}}$.*

### 1.3.3 Actions de $D^\star$ et $G$ sur les étages supérieurs

La représentabilité de $\mathscr{M}_n$ permet de définir une action sur $\mathscr{M}_n$ en la définissant sur le foncteur donnant $(X, \rho, \eta)$.
L'action de $G$ est définie comme ne changeant pas $\eta$ et avec la même action que le paragraphe précédent pour $(X, \rho)$.
Il ne reste qu'à définir l'action de $d \in D^\star$ sur ce foncteur : à $(X, \rho, \eta)$, on associe $(X', \rho', \eta')$, où $X', \rho'$ sont définis comme précédemment, et, dans le cas où $d^{-1} \in \mathcal{O}_D$, on définit $\eta'$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_D \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\times d^{-1}"'] & T_p(X^{rig})[1+\varpi^n \mathcal{O}_D] \arrow[d, "\varphi^\star"] \\ \mathcal{O}_D \arrow[r, "\eta'"] & T_p(X'^{\,\mathrm{rig}})[1+\varpi^n \mathcal{O}_D] \end{tikzcd}$$

Sinon, on demande que l'action de $p \in \mathcal{D}^\star$ corresponde à celle de $pI_2 \in G$.

Remarquer que l'action de $1 + \varpi_D^n \mathcal{O}_D$ est triviale sur $\mathscr{M}_n$ ; cela induit :

**Proposition 1.31.** *Il existe un isomorphisme, induit par l'action de $D^\star$ :*

$$\mathrm{Gal}(\mathscr{M}_n | \mathscr{M}_0) = \frac{\mathcal{O}_D^\times}{1 + \varpi_D^n \mathcal{O}_D}$$

**Remarque 1.32.** Au vu des définitions précédentes, les actions de $G$ et $D^\star$ commutent entre elles, et avec les morphismes de transition $\mathscr{M}_{n+1} \to \mathscr{M}_n$.

Le caractère étale des revêtements $\mathscr{M}_n \to \mathscr{M}_0$ et permet de formuler le résultat suivant (théorème 3.2 de [DB17]) :

**Théorème 1.33.** *L'action de $G$ sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)^*$ est localement analytique, faisant de $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ un module sur $\mathscr{D}(G)$.*

## 1.4 Point de vue moderne sur la tour

Le théorème de Drinfeld a été publié en 1976 ; depuis, d'autres approches de sa tour ont été effectuées : on présente ici l'approche de Rapoport-Zink, puis un résultat important sur la comparaison des deux tours en niveau infini. Ces résultats dépassent mon champ de compétence actuel.

### 1.4.1 Approche de Rapoport-Zink

Dans leur livre [RZ96], Rapoport et Zink présentent une approche plus générale : ils définissent des problèmes de déformation par quasi-isogénies, munies de certaines structures (EL, PEL), et montrent, que, sous certaines hypothèses (vérifiées dans notre cadre), le foncteur des déformations est représentable : on peut ainsi construire un schéma formel $\widehat{\mathscr{M}_0}$ comme avant.
L'inconvénient est que, à la différence de ce qu'a fait Drinfeld, on ne connaît pas la structure du schéma formel $\widehat{\mathscr{M}_0}$ représentant le foncteur. Pour remédier à ce problème, ils [13] définissent un morphisme «de périodes» :

$$\pi_{Dr} : \mathscr{M}_0 \longrightarrow \breve{\Omega}(\mathbf{C}_p)$$

En montrant que ce morphisme est un isomorphisme (sur la composante de hauteur $0$), on retrouve le résultat de Drinfeld.

### 1.4.2 La tour en niveau infini, et les deux tours

La tour en niveau infini est simplement la limite du système de revêtements $(\widehat{\mathscr{M}_n})_{n\geq 0}$. C'est un espace perfectoïde, qu'on note $\mathscr{M}_{Dr,\infty}$ : on trouvera tous les détails dans [SW13].

Dans [FGL08], on définit la tour de Lubin-Tate (en regardant, comme dans le cas de la tour de Drinfeld, les points de torsion de la déformation universelle d'un certain groupe formel, et en trivialisant localement ces points de torsion). Cela permet de définir une tour $(\widehat{\mathscr{L}_n})$ et, en niveau infini, un espace perfectoïde $\mathscr{M}_{LT,\infty}$. Noter qu'on a un morphisme de périodes

$$\pi_{GH} : \mathscr{L}_0 \longrightarrow \breve{\mathbf{P}}^1$$

Le résultat suivant est une manifestation d'une dualité pour la donnée EL de Rapoport-Zink :

**Théorème 1.34** (théorème 7.2.3 de [SW13]). *On a un isomorphisme d'espaces perfectoïdes, «compatible» avec les morphismes de périodes :*

$$\mathscr{M}_{LT,\infty} \simeq \mathscr{M}_{Dr,\infty}$$

13. on peut aussi citer Gross et Hopkins, en 1994, avec [HG94]

# 2 $(\varphi, \Gamma)$-modules, et constructions associées

## 2.1 $(\varphi, \Gamma)$-modules, constructions sur $\mathbf{Z}_p$

### 2.1.1 Préliminaires : anneaux de périodes

Rappelons très brièvement les constructions de Fontaine : il construit trois anneaux de périodes [14] :

$$\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$$

venant chacun avec une action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ainsi que des structures préservées par cette action, à savoir :

- Une filtration sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ (dont le gradué donne l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$ de périodes de Hodge-Tate).
- Un frobenius $\varphi$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$.
- Un frobenius $\varphi$ et un opérateur de monodromie $N$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$.

Soit $B$ un anneau de périodes comme ci-dessus. Si $V$ est une représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on définit :

$$D_B(V) = (B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$$

On dit que $V$ est $B$-admissible si l'application injective $D_B(V) \otimes_{\mathbf{Q}_p} B \to V \otimes_{\mathbf{Q}_p} B$ est un isomorphisme. $D_B(V)$ hérite alors des structures de $B$ : ainsi, on a une filtration sur $D_{\mathrm{dR}}(V)$, un frobenius sur $D_{\mathrm{cris}}(V)$, etc.

### 2.1.2 Définition des $(\varphi, \Gamma)$-modules, correspondance galoisienne

**Définition 2.1.** On définit les trois anneaux de séries de Laurent suivants :

- $\mathcal{E}^{\dagger}$ est l'ensemble des fonctions $f(T) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n \in L[[T, T^{-1}]]$ telles que $(a_n)$ est bornée, et $f$ converge sur $\rho(f) \leq |T| < 1$.
- $\mathcal{E}$ est l'ensemble des $f$ telles que $(a_n)$ est bornée, et $a_{-n} \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.
- $\mathcal{R}$ est l'ensemble des $f$ convergeant sur une couronne semi-ouverte $\rho(f) \leq |T| < 1$ (anneau de Robba)

Remarquer que $\mathcal{E}$ est le complété de $\mathcal{E}^{\dagger}$ pour la norme de Gauss, et $\mathcal{R}$ est le complété de $\mathcal{E}^{\dagger}$ pour la topologie LF sur $\mathcal{E}^{\dagger}$.

Chacun de ces trois anneaux est muni d'un frobenius et d'une action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}}|\mathbf{Q}_p) \simeq \mathbf{Z}_p^{\times}$ qui commutent, via (notant $\sigma_a \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}}|\mathbf{Q}_p)$ l'élément tel que $\chi_{\mathrm{cyc}}(\sigma_a) = a$) :

$$\varphi(f)(T) = f((1+T)^p - 1) \text{ et } \sigma_a(f)(T) = f((1+T)^a - 1)$$

On montre que cela définit bien une action sur ces anneaux. Remarquer que, comme ces deux expressions proviennent de la structure de $\mathbf{Z}_p$-module formel de Lubin-Tate, c'est évident qu'elles commutent et qu'elles donnent bien une action ; la difficulté est plutôt de montrer que les séries sont bien définies.

14. Un tel anneau doit vérifier des conditions dites de régularité : on ne rentre pas dans les détails ici

**Définition 2.2.** Soit $A$ un anneau parmi $\mathcal{E}^\dagger, \mathcal{E}, \mathcal{R}$. Un $(\varphi, \Gamma)$-module sur $A$ est un $A$-module $D$ libre de rang fini $d$, muni d'un frobenius $\varphi$ semi-linéaire tel que, dans une base, on ait $Mat(\varphi) \in \mathrm{GL}_d(A)$. On dit que $D$ est étale si la matrice du frobenius est dans $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger})$ (pour $A = \mathcal{E}^\dagger$ ou $A = \mathcal{R}$) ou $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ si $A = \mathcal{E}$.

Remarquer que la condition $\mathrm{Mat}(\varphi) \in \mathrm{GL}_d(A)$ est équivalente à dire que $A \otimes_{\varphi(A)} \varphi(D) \to D$ est un isomorphisme. Comme $A = \bigoplus_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(A)$, on peut écrire tout $z \in D$ comme :

$$z = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(z_i)$$

où $z_i \in A$. Cette écriture est unique, et cela permet de définir un morphisme $\psi : z \in D \mapsto z_0 \in D$, qui est alors un inverse à gauche de $\varphi$.

Le théorème suivant justifie en quelque sorte l'étude des $(\varphi, \Gamma)$-modules :

**Théorème 2.3** (Fontaine, Cherbonnier-Colmez, Berger, Kedlaya)**.** *Les catégories des $(\varphi, \Gamma)$-modules étales sur $\mathcal{E}, \mathcal{E}^\dagger, \mathcal{R}$ sont toutes équivalentes à la catégorie des $L$-représentations continues, de dimension finie de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.*

La correspondance est réalisée ainsi [15] : on construit des anneaux de périodes $\mathbf{B}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$ (différent selon le choix de $A$), et on pose $D(V) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}}$, où : $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}|\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}})$.
Dans l'autre sens, on récupère $V$ via : $V = ((L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \widetilde{\mathbf{B}}) \otimes_A D)^{\varphi=1}$. [16]

**Exemple 2.4.** La représentation triviale correspond au $(\varphi, \Gamma)$-module trivial $\mathcal{R}$.

### 2.1.3 Le faisceau $P^+$-équivariant associé à un $(\varphi, \Gamma)$

On part d'un $(\varphi, \Gamma)$-module $D$ sur $\mathcal{E}$, et on veut construire $\Pi(D) \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}(G)$ (pour rappel, $\mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}(G)$ est la catégorie des représentations de $G$ sur des $L$-espaces de Banach $\Pi$, qui ont un réseau ouvert, borné et $G$-invariant, dont la réduction modulo $p$ est lisse admissible au sens usuel). On commence par construire une action du monoïde :

$$P^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sur $D$ via les formules suivantes (qui seront expliquées ultérieurement) :

- $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ agit via $\varphi$
- Pour $a \in \mathbf{Z}_p^\times$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ agit via $\sigma_a$
- Pour $b \in \mathbf{Z}_p$, $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ agit par multiplication par $(1+T)^b$

15. c'est évidemment un résumé !
16. (où $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \widetilde{\mathbf{B}}$ est muni d'une action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$) et $D$ aussi via : $g \cdot z = [\chi_{\mathrm{cyc}}(g)](z)$)

Comme on a de plus une action continue de $P^+$ sur $\mathbf{Z}_p$, restriction de l'action par homographies de $G$ sur $\mathbf{P}^1$, on a :

**Proposition 2.5.** *Il existe un faisceau $P^+$-équivariant, qu'on note $U \mapsto D \boxtimes U$, sur $\mathbf{Z}_p$, tel que, pour $b \in \mathbf{Z}_p$ :*

$$D \boxtimes (b + p^n \mathbf{Z}_p) = \begin{pmatrix} p^n & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D$$

*Les applications de la restriction $b + p^n\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Z}_p$ étant données par :*

$$\mathrm{Res}_{b+p^n\mathbf{Z}_p} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \varphi^n \circ \psi^n \circ \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** la restriction $D \mapsto D \boxtimes U$ est surjective, ie, notre faisceau est flasque.

### 2.1.4 Transformée d'Amice et explication des formules précédentes

On rappelle que, si $X$ est $\mathbf{Z}_p$ ou $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ [17], l'espace des mesures sur $X$ est le dual de $C^0(X, L)$, et l'espace des distributions est le dual de $\mathrm{LA}(X, L)$ (espace des fonctions localement analytiques).

**Définition 2.6.** Si $\mu$ est une distribution sur $\mathbf{Z}_p$, on définit sa transformée d'Amice par :

$$\mathcal{A}_\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} T^n \mathrm{d}\mu(x) \quad \in L[[T]]$$

Remarquer que ce n'est qu'un analogue $p$-adique et formel de la transformée de Fourier : en effet, en se rappelant que $t = \log(1+T)$ est l'analogue p-adique de $2i\pi$, $(1+T)^x$ est l'analogue de $e^{2i\pi x}$ issu de la transformée de Fourier.

**Proposition 2.7** (Amice)**.** *L'application $\mu \mapsto \mathcal{A}_\mu$ identifie l'espace des distributions sur $\mathbf{Z}_p$ avec $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R} \cap L[[T]]$.*

Considérons l'action de $G$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ par homographies. Elle se restreint en une action de $P^+$ sur $\mathbf{Z}_p$. Cela donne ainsi une action de $P^+$ sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$, puis sur son dual l'espace des distributions, donnée par :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \mathrm{d}(g \cdot \mu)(x) = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(g \cdot x) \mathrm{d}\mu(x)$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu} &= \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^{px} \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{\mathbf{Z}_p} \varphi((1+T)^x) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \varphi(\mathcal{A}_\mu) \end{aligned}$$

17. on peut prendre plus généralement $X$ une variété analytique molle au sens de Colmez

ce qui justifie la première formule. De la même manière, on vérifie que les formules données avant pour l'action de $P^+$ sont les mêmes que celles issues des distributions sur $\mathbf{Z}_p$.
Enfin, les applications de restriction sont compatibles ; faisons le cas $U = p\mathbf{Z}_p$, on a :

$$\mathcal{A}_\mu = \int_{p\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \mathrm{d}\mu(x) + \sum_{k=1}^{p-1} \int_{p\mathbf{Z}_p+k} (1+T)^x \mathrm{d}\mu(x)$$

Le deuxième terme est dans $\bigoplus_{k=1}^{p-1}(1+T)^k\varphi(\mathcal{R})$. On en déduit, par définition de $\psi$ :

$$\varphi \circ \psi(\mathcal{A}_\mu) = \int_{p\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \mathrm{d}\mu(x) = \mathcal{A}_{\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(\mu)}$$

## 2.2 Constructions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$

Dans la suite, on considère $D$ un $(\varphi, \Gamma)$ module sur $\mathcal{E}$, qui provient d'une représentation galoisienne $V$ ; on notera $D_{\mathrm{rig}}$ le $(\varphi, \Gamma)$-module sur $\mathcal{R}$ correspondant.
La construction précédente donne une action du monoïde $P^+$ : on veut arriver à une action de $G$. Vu l'interprétation issue de la transformée d'Amice, cela impose de regarder des faisceaux définis sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ tout entier. Par abus, on notera $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$

**Définition 2.8.** On note $\delta$ le caractère de $\mathbf{Q}_p^\times$ qui correspond au caractère $\det(V) \cdot \chi_{\mathrm{cyc}}^{-1}$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ via la théorie du corps des classes.

La construction doit respecter une contrainte importante : si l'on veut aboutir à une correspondance de Langlands compatible avec le cas abélien, il faut fixer l'action des matrices scalaires $aI_2$, $a \in \mathbf{Q}_p^*$, comme étant la multiplication par $\delta(a)$.

### 2.2.1 De $\mathbf{Z}_p$ à $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ pour la transformée d'Amice

On considère l'espace des distributions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, munie de l'action de $G$ donnée par :

$$\int_{\mathbf{P}^1} \phi(x) \mathrm{d}(g \cdot \mu)(x) := \int_{\mathbf{P}^1} \delta(cx+d)\phi\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) \mathrm{d}\mu(x)$$

pour tous $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ et $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{P}^1, L)$.

**Remarque 2.9.** Dans le cas où $V \in \mathscr{V}(\pi)$, avec $\pi$ supercuspidale et à caractère central trivial [18], un résultat de [CDP14] montre que $\delta$ est trivial : on trouve donc l'action habituelle.

Pour obtenir l'action de $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur une mesure $\mu$ à support dans $\mathbf{Z}_p^\times$, il faut expliciter l'intégrale :

$$\mathcal{A}_{w\cdot\mu} = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta(x)(1+T)^{1/x} \mathrm{d}\mu(x)$$

18. c'est à dire le cadre des deux théorèmes importants de ce rapport...

On a ainsi, en approximant l'intégrale par des sommes de Riemann, un candidat pour une formule, pour $z \in D^{\psi=0} = D \boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$ :

$$w(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times} \delta(i)(1+T)^{1/i} \sigma_{-1/i^2} \varphi^n \psi^n((1+T)^{-i} z)$$

Cette limite existe dans $D^{\psi=0}$ (c'est un résultat non trivial, voir le chapitre V de [Col10a]), et définit donc une involution continue sur $D^{\psi=0}$. D'après [Col10b], $w$ stabilise $D^{\dagger,\psi=0}$, et se prolonge en une involution sur $D_{\text{rig}}^{\psi=0}$.

### 2.2.2 Le faisceau sur $\mathbf{P}^1$

Comme $\mathbf{P}^1$ s'écrit comme la réunion de $\mathbf{Z}_p$ et $w(\mathbf{Z}_p)$, et que l'intersection de ces deux ouverts est exactement $\mathbf{Z}_p^\times$, on peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.10.** *Le faisceau $(D \boxtimes U)_{U \subset \mathbf{Z}_p}$ s'étend canoniquement en un faisceau $G$-équivariant sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, tel que l'action des matrices scalaires soit donnée par $\delta$.*

On a :

$$D \boxtimes \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D, w(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^\times}(z_1)) = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^\times}(z_2)\}$$

### 2.2.3 Le foncteur "de Montréal" $V \mapsto \Pi(V)$

On a donc une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, qu'il faut ensuite quotienter pour arriver à la représentation souhaitée.
La formule précédente permet aussi de munir $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ d'une topologie (induite par celle de $D \times D$, qui provient de la structure de $\mathcal{E}$-module libre de rang fini de $D$).

**Définition 2.11.** Soit $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ l'ensemble des $z \in D \boxtimes \mathbf{P}^1$ dont l'orbite sous l'action de $G$ est bornée. On définit

$$\Pi(V) := D \boxtimes \mathbf{P}^1 / D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$$

**Théorème 2.12** (Colmez)**.** *$\Pi(V)$ est une représentation de Banach unitaire, admissible, absolument irréductible de $G$. On a en plus des suites exactes de $G$-modules topologiques :*

$$0 \to (\Pi(V)^{\text{an}})^* \otimes \delta \circ \det \to D_{rig}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi(V)^{\text{an}} \to 0$$

$$0 \to \Pi(V)^* \otimes \delta \circ \det \to D(V) \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi(V) \to 0$$

**Exemple 2.13.** Dans le cas où $V$ est la représentation triviale, la suite exacte obtenue est :

$$0 \to (\mathcal{R}^+ \boxtimes \mathbf{P}^1) \otimes \chi^{-1} \to \mathcal{R} \boxtimes \mathbf{P}^1 \to (\mathcal{R}/\mathcal{R}^+) \boxtimes \mathbf{P}^1 \to 0$$

et on peut expliciter les termes sur les côtés :

- $(\mathcal{R}^+ \boxtimes \mathbf{P}^1) \otimes \chi^{-1}$ est exactement, via la transformée d'Amice, l'espace des distributions sur $\mathbf{P}^1$, muni de l'action définie précédemment.

- La dualité de Serre :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \\ f & \longmapsto & \phi_f : x \mapsto \mathrm{res}_0\left((1+T)^x f \frac{dT}{1+T}\right) \end{array}$$
donne un isomorphisme $(\mathcal{R}/\mathcal{R}^+) \boxtimes \mathbf{P}^1 \simeq \mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))$.

**Proposition 2.14.** *Notons $\check{V} = V^* \otimes \chi_{\mathrm{cyc}}$ le dual de Cartier de $V$. Il existe un accouplement parfait $G$-équivariant*[19] *:*
$$\{\ \}_{\mathbf{P}^1} : (D_{\mathrm{rig}}(\check{V}) \boxtimes \mathbf{P}^1) \times (D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1) \to L$$
*Comme $\Pi(\check{V})^* = \Pi^* \otimes \delta \circ \det$, cela permet d'identifier $(\Pi(\check{V})^{\mathrm{an}})^*$ à l'orthogonal de $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*$*

**Remarque 2.15.** Si $\pi$ est supercuspidale à caractère central trivial et $V \in \mathscr{V}(\pi)$, alors $\check{V} \simeq V$.

### 2.2.4 L'action infinitésimale de $G$

En regardant un sous-ensemble de $\Pi(V)$ formé de vecteurs analytiques (les $\Pi^{(b)}$ dans la section 0.5 de [CD14]), on prouve le théorème suivant (voir le chapitre V de [Col10b]) :

**Théorème 2.16.** *L'action de $G$ sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ en fait un module sur l'algèbre des distributions sur $1 + p^m \mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_p)$, pour $m \geq 2$. En particulier, l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{g})$, agit sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$.*

Introduisons la base de $\mathfrak{g}$ donnée par :
$$a^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ a^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ u^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ u^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On rappelle la définition de l'élément de Casimir, qui engendre le centre de l'algèbre $U(\mathfrak{sl}_2)$ : $C = u^+u^- + u^-u^+ + \frac{1}{2}h^2$, où $h = a^+ - a^-$. Le théorème suivant est démontré dans [Dos12] :

**Théorème 2.17.** *Notons $\nabla$ la dérivée de l'action de $\Gamma$ (voir paragraphe suivant). Si $V$ est à poids de Hodge-Tate $0$ et $1$, alors en tant qu'opérateurs de $D_{\mathrm{rig}}(V)$ :*
$$a^+ = \nabla = -a^-,\ C = 0,\ u^+ = t,\ u^- = -\frac{\nabla(\nabla - 1)}{t} = -t\partial^2$$

## 2.3 Équation différentielle $p$-adique associée

### 2.3.1 Connexion et module $N_{\mathrm{rig}}(V)$

Soit $\Delta$ un $(\varphi, \Gamma)$-module sur l'anneau de Robba $\mathcal{R}$. Dans [Ber02], Berger montre l'existence d'une connexion, issue de la dérivée de l'action de $\Gamma$ :
$$\nabla : \Delta \to \Delta, \quad \nabla(z) = \lim_{a \to 1} \frac{\sigma_a(z) - z}{a - 1}$$
Cette connexion vérifie alors, pour $\lambda \in \mathcal{R}$ et $z \in \Delta$ :
$$\nabla(\lambda z) = \nabla(\lambda) z + \lambda \nabla(z)$$

19. c'est même un accouplement de $\mathscr{D}(G)$-modules : voir la section sur l'action infinitésimale

où $\nabla$ est définie sur $\mathcal{R}$ par $\nabla = t\partial$, avec $\partial = (1+T)\frac{d}{dT}$ : par exemple $\nabla(t) = t$.

Soit $V$ une $L$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de Rham. Notons $\Delta = D_{\mathrm{rig}}(V)$. Rappelons que, par le théorème 2.3, la donnée de $D_{\mathrm{rig}}(V)$ caractérise celle de $V$. Le résultat suivant, dû à Berger (theorème 5.20 de [Ber02]), associe à une telle représentation une équation différentielle.

**Théorème 2.18.** *Si $V$ est de Rham, alors :*

*i) Il existe un unique $(\varphi, \Gamma)$-module $N_{\mathrm{rig}}(V)$ sur $\mathcal{R}$ vérifiant :*

$$N_{\mathrm{rig}}(V) \subset \Delta[1/t], \quad N_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] = \Delta[1/t] \quad \textit{et} \quad \nabla(N_{\mathrm{rig}}(V)) \subset tN_{\mathrm{rig}}(V)$$

*ii) Le module $N_{\mathrm{rig}}(V)$ ne dépend que du $(\varphi, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module $D_{\mathrm{pst}}(V)$.*

**Remarque 2.19.** Le deuxième point montre que $N_{\mathrm{rig}}(V)$ est indépendant de la filtration de Hodge sur $V$. En particulier, le foncteur $V \mapsto N_{\mathrm{rig}}(V)$ n'est pas pleinement fidèle.

### 2.3.2 Définition de $N_{\mathrm{rig}}(\pi)$

Supposons que $V$ soit potentiellement cristalline ; soit $K/\mathbf{Q}_p$ une extension finie pour laquelle la restriction de $V$ à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ est cristalline.
Dans le chapître 2 de [Ber08], Berger construit une extension finie étale $\mathcal{R}_K$ de $\mathcal{R}$ , ainsi qu'un isomorphisme de comparaison (compatible avec les structures supplémentaires (action de $\varphi, \Gamma$, morphismes de localisation, etc)) :

$$N_{\mathrm{rig}}(V) = \left(\mathcal{R}_K \otimes_{K_0} D_{\mathrm{pst}}(V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)}\right)^{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{cyc}}/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}})}$$

où $K/K_0/\mathbf{Q}_p$ est la sous-extension maximale non ramifiée.
Rappelons que, si $V \in \mathcal{V}(\pi)$, alors on a un isomorphisme, unique à scalaire près $D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M(\pi)$ : cela motive la :

**Définition 2.20.** Soit $K$ une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$ contenant $L$ telle que le groupe d'inertie $I_K \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ agisse trivialement sur $M(\pi)$. On pose :

$$N_{\mathrm{rig}}(\pi) = \left(\mathcal{R}_K \otimes_{K_0} M(\pi)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)}\right)^{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{cyc}}/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}})}$$

### 2.3.3 Représentations non triangulines

**Définition 2.21.** On dit qu'un $(\varphi, \Gamma)$-module est triangulable si c'est une extension successive de $(\varphi, \Gamma)$-modules de rang $1$.

Tout $(\varphi, \Gamma)$-module de rang $1$ est de la forme $\mathcal{R}(\delta)$, pour $\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathcal{O}_L^\times$ un caractère [20]. Ainsi, en dimension $2$, $\Delta$ est triangulable si et seulement si il existe une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{R}(\delta_1) \to \Delta \to \mathcal{R}(\delta_2) \to 0$$

20. on a noté $\mathcal{R}(\delta)$ le $\mathcal{R}$-module de rang $1$, dont une base est $e_\delta$, muni de l'action de $\varphi, \Gamma$ via $\delta$

**Définition 2.22.** On dit que $V$ est trianguline si le $(\varphi, \Gamma)$-module associé $D_{\mathrm{rig}}(V)$ est triangulable.

Dans le cas où la représentation $\pi$ lisse de $G$ est dans la série principale ou dans la série spéciale, la représentation $V(\Pi)$ associée à un $\Pi \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}(G)$ qui est dans $\mathscr{V}(\pi)$ est trianguline ; à l'inverse, si $\pi$ est supercuspidale, alors $V(\Pi)$ est non trianguline (voir [Dos12]). C'est donc le cas **non triangulin** qu'on étudiera.

Le but de la suite est de démontrer le résultat suivant :

**Proposition 2.23.** *Soit $V$ une $L$-représentation galoisienne, absolument irréductible, de de Rham, de dimension $2$ non trianguline. Alors $\partial = \frac{1}{t}\nabla$ est bijectif sur $N_{\mathrm{rig}}(V)$.*

On commence par le lemme suivant (proposition 2.1 de [Dos14]) :

**Lemme 2.24.** *Si $V$ est de dimension $2$, alors $D_{\mathrm{rig}}^{P(\nabla)=0}$ est de dimension au plus $2\deg(P)$.*

*Démonstration.* On peut étendre les scalaires de $L$ à une extension finie dans laquelle $P$ est scindé. On procède alors par récurrence sur le degré de $P$.
On a $(\mathrm{Frac}(\mathcal{R}))^{\nabla=0} = L$ : en effet, si $\nabla(f/g) = 0$, on montre (cf *loc. cit.*) que $f/g$ est analytique, donc dans $\mathcal{R}^{\nabla=0} = L$. On montre ensuite que l'application $D_{\mathrm{rig}}^{\nabla=\alpha} \otimes_L \mathcal{R} \to D_{\mathrm{rig}}$ est injective : on raisonne par l'absurde, on regarde une relation de longueur minimale annulée dans $D_{\mathrm{rig}}$. Cela termine le cas $\deg P = 1$.
Pour l'hérédité, si $P = (X - \alpha)Q$, notant $W_1 = D_{\mathrm{rig}}^{P(\nabla)=0}$ et $W_2 = D_{\mathrm{rig}}^{Q(\nabla)=0}$, alors $\nabla - \alpha$ est une application $L$-linéaire $W_1 \to W_2$ dont le noyau est de dimension au plus 2 (par ce qui précède), et dont l'image est de dimension au plus $2\deg(Q)$ par hypothèse de récurrence : on conclut par le théorème du rang. $\square$

**Lemme 2.25.** *Si $V$ est absolument irréductible, de dimension $2$ et non trianguline, si $P \in L[X]$ est non nul, alors $P(\nabla)$ est injectif sur $D_{\mathrm{rig}}(V)$.*

*Démonstration.* On a montré que $D_{\mathrm{rig}}^{P(\nabla)=0}$ était de dimension finie sur $L$ ; si cet espace est non nul, alors $\varphi$ a des vecteurs propres (à extension des scalaires près) : cela est impossible, car $V$ n'est pas trianguline (voir lemme 3.2 de [Col08]). $\square$

*Preuve de la proposition.* On commence par l'injectivité de $\partial$ : si $x \in N_{rig}(V)$ vérifie $\partial x = 0$, alors pour $h \in \mathbf{N}$, on a :

$$(\nabla - h)(t^h x) = \nabla(t^h)x + t^h\nabla(x) - ht^h x = 0$$

donc, si $h$ est assez grand, on a $t^h x \in D_{\mathrm{rig}}^{\nabla=h} = 0$, ce qui conclut.
La preuve de la surjectivité utilise le théorème de monodromie $p$-adique : en fait, on a (prop 20.4.2 de [Ked10]) un accouplement parfait :

$$N_{\mathrm{rig}}/\partial N_{\mathrm{rig}} \times N_{\mathrm{rig}}(\check{V})^{\partial=0} \to L$$

où $\check{V} = V^\star \otimes \chi$ est le dual de Cartier de $V$. Mais comme cette dernière représentation n'est pas trianguline, $N_{\mathrm{rig}}(\check{V})^{\partial=0}$ est nul et $\partial$ est surjective. $\square$

## 2.4 Localisation des $(\varphi, \Gamma)$-modules

**Définition 2.26.** On note $\mathcal{R}^{]0,r_n]}$ le sous-anneau des fonctions de $\mathcal{R}$ qui convergent sur la couronne $r_n = |\zeta_{p^n} - 1| \leq |T| < 1$

$\mathcal{R}^{]0,r_n]}$ est stable par $\Gamma$, mais $\varphi(\mathcal{R}^{]0,r_n]}) \subset \mathcal{R}^{]0,r_{n+1}]}$. On a évidemment $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}^{]0,r_n]}$.
Soit $\Delta$ un $(\varphi, \Gamma)$-module sur $\mathcal{R}$. Dans le théorème I.3.3 de [Ber08], Berger montre que, pour $n$ assez grand (dépendant de $\Delta$), il existe un unique sous-$\mathcal{R}^{]0,r_n]}$-module de $\Delta$, noté $\Delta^{]0,r_n]}$, tel que $\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}^{]0,r_n]}} \Delta^{]0,r_n]} \to \Delta$ soit un isomorphisme, et tel que $\mathcal{R}^{]0,r_{n+1}]} \otimes_{\mathcal{R}^{]0,r_n]}} \Delta^{]0,r_n]}$ ait une base contenue dans $\varphi(\Delta^{]0,r_n]})$. Pour $n \geq 1$, l'application de localisation est $\varphi^{-n} : \mathcal{R}^{]0,r_n]} \to L_n[[t]]$ définie par :

$$\varphi^{-n}(f) = f(\zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1)$$

On note alors :

$$\Delta^+_{\mathrm{dif},n} = L_n[[t]] \otimes_{\mathcal{R}^{]0,r_n]}} \Delta^{]0,r_n]}$$

Le morphisme de transition $\Delta^+_{\mathrm{dif},n} \to \Delta^+_{\mathrm{dif},n+1}$, donné par $u \otimes z \mapsto u \otimes \varphi(z)$, permet de définir :

$$\Delta^+_{\mathrm{dif}} = \varinjlim \Delta^+_{\mathrm{dif},n}$$

C'est un $L_\infty[[t]]$-module libre, de même rang que $\Delta$. Il est muni d'une action de $\Gamma$ qui, pour $n$ assez grand, respecte $\Delta^+_{\mathrm{dif},n}$ ; celle-ci induit, en dérivant, une connexion sur $\Delta^+_{\mathrm{dif},n}$, pour $n$ assez grand.

On rappelle aussi une construction de Fontaine : soit $V$ une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Pour $n$ assez grand, on a un morphisme de localisation (on a noté $D^{]0,r_n]}(V) = (D_{rig}(V))^{]0,r_n]}$) :

$$\varphi^{-n} : D^{]0,r_n]}(V) \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}}$$

qui est $\Gamma$-équivariant, et induit un morphisme injectif :

$$\varphi^{-n} : D^+_{\mathrm{dif},n}(V) \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}}$$

Alors $\varphi^{-n}$ induit un isomorphisme :

$$D^+_{\mathrm{dif},n}(V) = \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V))$$

Par un résultat de Berger, on peut décrire $N^+_{\mathrm{dif},n}(V) \subset D^+_{\mathrm{dif},n}(V)[1/t]$ par :

$$N^+_{\mathrm{dif},n}(V) = L_n[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V)$$

On peut aussi décrire directement $N_{\mathrm{rig}}(V)$ à partir de $D_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$ via :

$$N_{\mathrm{rig}}(V) = \{z \in D_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] | \varphi^{-n}(z) \in L_n[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V) \quad \forall n \gg 0\}$$

De même, on trouve $D_{\mathrm{rig}}(V)$ à partir de $N_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$ via :

$$D_{\mathrm{rig}}(V) = \{z \in N_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] | \varphi^{-n}(z) \in \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V)) \quad \forall n \gg 0\}$$

**Remarque 2.27.** L'avantage de travailler avec les $D^{]0,r_n]}$ est que l'inclusion :

$$t\Delta^{]0,r]} \subset \Delta^{]0,r]}$$

est fermée.
À l'inverse, $t\Delta$ est dense dans $\Delta$ ! En effet, il suffit de voir que $t\mathcal{R}$ est dense dans $\mathcal{R}$, puisque :

$$t\frac{p^n}{(1+T)^{p^n} - 1} \longrightarrow 1$$

## 2.5 Modèle de Kirillov

On trouvera les résultats suivants dans le chapitre VI.5 de [Col10b].

### 2.5.1 Vecteurs $P$-finis, modèle de Kirillov

Rappelons que le groupe mirabolique est $P = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Soit $V$ une $L$-représentation absolument irréductible de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

**Définition 2.28.** On dit que $v \in \Pi(V)$ est $P$-fini si :

i) Il existe $n, k \geq 1$ tels que $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^k v = 0$.

ii) $\mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v\right)$ est de dimension finie.

On note $\Pi(V)^{P-\text{fini}}$ l'espace des vecteurs $P$-finis de $\Pi(V)$.

**Définition 2.29.** Un vecteur $v \in \Pi(V)^{P-\text{fini}}$ est dit de pente infinie s'il existe $n, k \geq 1$ et $m \in \mathbf{Z}$ tels que :

$$\left(\sum_{i=0}^{p^n-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)^k \circ \left(\begin{smallmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v = 0$$

On note $\Pi(V)_c^{P-\text{fini}}$ l'espace des vecteurs de pente infinie.

**Remarque 2.30.** Pour tous $u \in \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pour tous $v \in \Pi(V)^{P-\text{fini}}$, on a $(1-u)v \in \Pi(V)_c^{P-\text{fini}}$.

**Définition 2.31.** Si $Y$ est une représentation de $P$, on note $Y_c$ le sous-espace engendré par les éléments de la forme $(1-u)v$, où $u \in \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et $v \in Y$.

On montre que $\Pi(V)_c^{P-\text{fini}}$ est exactement $(\Pi(V)^{P-\text{fini}})_c$.

**Définition 2.32.** Si $X$ est un $L_\infty[[t]]$-module muni d'une action semi-linéaire [21] de $\Gamma$, on définit :

$$\mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, X)^\Gamma := \left\{\phi : \mathbf{Q}_p^* \to X, \phi(ax) = \sigma_a(\phi(x)),\ \text{et } \phi \text{ est à support compact dans } \mathbf{Q}_p\right\}$$

On note $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X)^\Gamma \subset \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, X)^\Gamma$ le sous-espace formé des fonctions nulles au voisinage de $0$. L'application $\phi \to (\phi(p^i))_{i \in \mathbf{Z}}$ est un isomorphisme $L$-linéaire $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X)^\Gamma \to \bigoplus_{\mathbf{Z}} X$.

Fixons un système compatible de racines de l'unité $(\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$. On définit un caractère additif localement constant :

$$\varepsilon : \mathbf{Q}_p \to \mu_{p^\infty}, \quad \varepsilon(b) = \zeta_{p^n}^{p^n b} \text{ si } p^n b \in \mathbf{Z}_p$$

et on munit les espaces $\mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^\times, X)^\Gamma$ et $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X)^\Gamma$ d'une action de $P$, donnée par :

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \phi\right)(x) = \varepsilon(bx) e^{tbx} \phi(ax)$$

On note $D_{\mathrm{dif}}^-(V) = \varinjlim_n D_{\mathrm{dif},n}^+(V)[1/t]/D_{\mathrm{dif},n}^+(V)$

21. Rappelons que $L_\infty$ est muni d'une action de $\Gamma$, et $\Gamma$ agit sur $t$ par multiplication par l'élément de $\mathbf{Z}_p^\times$ associé

**Proposition 2.33.** *Les sous-espaces $\Pi(V)^{P-\mathit{fini}}$ et $\Pi(V)_c^{P-\mathit{fini}}$ de $\Pi(V)$ sont stables sous l'action de $P$, et il existe une injection $P$-équivariante canonique :*

$$v \in \Pi(V)^{P-\mathit{fini}} \longmapsto \phi_v \in \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, D_{\mathrm{dif}}^-(V))^\Gamma$$

*induisant un isomorphisme :*

$$\Pi(V)_c^{P-\mathit{fini}} \simeq \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, D_{\mathrm{dif}}^-(V))^\Gamma$$

*En particulier, $v \mapsto (\phi_v(p^i))_{i\in\mathbf{Z}}$ est une bijection $\Pi(V)^{P-\mathit{fini}} \to \bigoplus_{\mathbf{Z}} D_{\mathrm{dif}}^-(V)$.*

La preuve de cette propriété se trouve dans le chapitre VI.5 de [Col10b].

### 2.5.2 Dualité et modèle de Kirillov

On rappelle que $\check{V} = V^\times \otimes \chi$ est le dual de Cartier de $V$ : on a un accouplement parfait $\check{V} \times V \to L(1)$ (où $L(1) = L\mathrm{d}t$, avec action triviale de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $L$ et action via $\chi$ sur $\mathrm{d}t$). Cet accouplement induit, par fonctorialité, un accouplement :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : D_{\mathrm{dif}}^+(\check{V})[1/t] \times D_{\mathrm{dif}}^+(V)[1/t] \to L_\infty((t))\mathrm{d}t$$

On définit un accouplement :

$$\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{dif}} : D_{\mathrm{dif}}^+(\check{V})[1/t] \times D_{\mathrm{dif}}^+(V)[1/t] \to L$$

par la formule :

$$\{\check{z}, z\}_{\mathrm{dif}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \mathrm{res}_0(\mathrm{Tr}_{L_n((t))/L((t))}(\langle\sigma_{-1}(\check{z}), z\rangle)$$

où $\mathrm{res}_0(\sum a_n t^n \mathrm{d}t) = a_{-1}$.

**Proposition 2.34.** *i) $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{dif}}$ est un accouplement parfait $\Gamma$-équivariant entre $D_{\mathrm{dif}}^+(\check{V})[1/t]$ et $D_{\mathrm{dif}}^+(V)[1/t]$. Pour $n$ assez grand, l'orthogonal de $D_{\mathrm{dif},n}^+(\check{V})$ est $D_{\mathrm{dif},n}^+(V)$. Ainsi, $\{\}_{\mathrm{dif}}$ induit un accouplement parfait entre $D_{\mathrm{dif}}^+(\check{V})$ et $D_{\mathrm{dif}}^-(V)$.*

*ii) Si $V$ est de Rham à poids de Hodge-Tate $0$ et $k \geq 1$, alors pour $n$ assez grand, l'orthogonal de $N_{\mathrm{dif},n}^+(\check{V})$ est $t^k N_{\mathrm{dif},n}^+(V)$.*

D'après le lemme de Baire, il existe un entier $m(V)$ tel que pour $n \geq m(V)$, l'inclusion $(\Pi(\check{V})^{\mathrm{an}})^* \subset D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ (induite par la suite exacte du théorème 10) se factorise à travers le module $D^{]0,r_n[}(\check{V}) \boxtimes \mathbf{P}^1$. Cela permet de définir, pour $n \geq m(V)$ et $j \in \mathbf{Z}$ :

$$i_{j,n} = \varphi^{-n} \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \begin{pmatrix} p^{n-j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (\Pi(V)^{\mathrm{an}})^\star \to D_{\mathrm{dif},n}^+(\check{V})$$

Rappelons qu'on a un un accouplement canonique $G$-équivariant parfait

$$\{\}_{\mathbf{P}^1} : D_{\mathrm{rig}}(\check{V}) \boxtimes \mathbf{P}^1 \times D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1 \to L$$

induisant la suite exacte de Colmez du théorème 2.12.
On a un isomorphisme $v \mapsto \phi_v$ entre $\Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}}$ et $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, D_{\mathrm{dif}}^-(V))^\Gamma$. Le théorème suivant, dû à Colmez, et qui est le théorème 5.3 de [Dos15], permet de relier l'accouplement $\{\}_{\mathbf{P}^1}$ avec $\{\}_{\mathrm{dif}}$.

**Théorème 2.35.** *On a $\Pi(V)_c^{P-\mathit{fini}} \subset \Pi(V)^{\mathrm{an}}$ et :*

$$\{l, v\}_{\mathbf{P}^1} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \{i_{j,n}(l), \phi_v(p^{-j})\}_{\mathrm{dif}}$$

*pour tous $l \in (\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*$, $n \geq m(V)$ et $v \in \Pi(V)_c^{P-\mathit{fini}}$.*

### 2.5.3 Caractérisation des vecteurs lisses

**Proposition 2.36.** *Notons, pour $V \in \mathcal{V}(\pi)$ :*

$$\Pi(V)_c^{P-\text{lisse}} = \{v \in \Pi(V)_c^{P-\text{fini}}, u^+v = a^+v = 0\}$$

*Alors $\Pi(V)_c^{P-\text{lisse}} \subset \Pi(V)^{\text{lisse}}$, et l'isomorphisme $\Pi(V)_c^{P-\text{fini}} \simeq \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^\star, D_{\text{dif}}^-(V))^\Gamma$ induit un isomorphisme de $P$-modules :*

$$\Pi(V)_c^{P-\text{lisse}} \simeq \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^\star, N_{\text{dif}}^+(V)/D_{\text{dif}}^+(V))^\Gamma$$

*Démonstration.* Montrons l'inclusion $\Pi(V)_c^{P-\text{lisse}} \subset \Pi(V)^{\text{lisse}}$ : si $v \in \Pi(V)_c^{P-\text{lisse}}$, alors on a $a^-(v) = -a^+(v) = 0$ (le caractère central étant trivial). On a, pour $l \in (\Pi(V)^{\text{an}})^*$ :

$$\{l, u^-(v)\}_{\mathbf{P}^1} = \left\{-\frac{1}{t}\nabla(\nabla-1)(l), v\right\}_{\mathbf{P}^1}$$

Par le théorème 2.35 et la proposition 2.34, il suffit de vérifier que pour $n$ assez grand, on a :

$$\forall j \in \mathbf{Z}, \quad i_{j,n}\left(-\frac{1}{t}\nabla(\nabla-1)(l)\right) \in tN_{\text{dif}}^+(V)$$

C'est une conséquence du lemme 4.4 de [Dos12], qui donne :

$$\forall z \in D_{\text{dif}}^+(V),\ \nabla(\nabla-1)(z) \in t^2N_{\text{dif}}^+(V)$$

(ce lemme se prouve en utilisant une base de $D_{\text{dif}}^+(V)$ adaptée à l'action de $\Gamma$). La deuxième partie de la proposition se prouve en traduisant la condition $a^+v = u^+v$ du côté Kirillov, et en utilisant l'isomorphisme :

$$(D_{\text{dif}}^-(V))^{t=0,\nabla=0} = N_{\text{dif}}^+(V)/D_{\text{dif}}^+(V)$$

□

On définit $\mathrm{LC}_c$ comme l'espace des fonctions localement constantes à support compact, nulles au voisinage de $0$.
Le théorème suivant, d'usage fréquent dans la suite, décrit complètement les vecteurs lisses.

**Théorème 2.37.** *Si $V \in \mathscr{V}(\pi)$, alors :*

$$\Pi(V)^{\text{lisse}} = \{v \in \Pi(V)^{\text{an}}, u^+v = a^+v = 0\} = \Pi(V)_c^{P-\text{lisse}}$$

*On a ainsi un isomorphisme canonique de $P$-modules :*

$$\Pi(V)^{\text{lisse}} \simeq \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, N_{\text{dif}}^+(V)/D_{\text{dif}}^+(V))^\Gamma$$

*Démonstration.* Soit $v \in \Pi(V)^{\text{an}}$ tué par $u^+$ et $a^+$ : montrons que $u^-v = 0$. Soit $x \in \mathbf{Q}_p$, on définit $v_x = \left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v - v$ : la remarque 2.30 montre : $v_x \in \Pi(V)_c^{P-\text{fini}}$. On a alors $u^+v_x = 0$, et :

$$\begin{aligned} a^+v_x &= a^+\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v - a^+v \\ &= \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)a^+v + xu^+v\right) - 0 = 0 \end{aligned}$$

Dès lors, $v_x \in \Pi(V)_c^{P-\text{lisse}}$, et on a $u^- v_x = 0$ ; or, par des calculs similaires :

$$u^- v_x = ((\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1)u^- v$$

Dès lors, $u^- v$ est invariant par l'unipotent supérieur. Or, si $w \in \Pi(V)$ est fixé par l'unipotent supérieur, alors pour $n \geq 1$, la réduction de $w$ modulo $p^n$ est fixée par un sous-groupe ouvert, puis [22] par $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, donc, en passant à la limite, $w$ est fixé par $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Or l'espace $\Pi(V)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ est $G$-stable, et de dimension finie (par le corollaire III.37 de [Dos14]) ; comme $\Pi(V)$ est absolument irréductible et de dimension infinie, cet espace est nul, et $w = 0$.
On a ainsi montré la première égalité. Pour la deuxième, il faut montrer que tout vecteur lisse est dans $\Pi(V)_c^{P-\text{lisse}}$ : il suffit pour cela d'utiliser le fait que, comme $\pi$ est supercuspidale, elle est engendré par les vecteurs de la forme $(1-u)v$, où $u$ parcourt l'unipotent, et $v$ parcourt $\pi$. $\square$

22. On consultera le lemme 7.1 de [Dos15] pour les détails de cette preuve

# 3 Structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module sur $\Pi(\pi, 0)^*$

## 3.1 Définition de $\Pi(\pi, 0)^*$

Si $V \in \mathcal{V}(\pi)$, alors $\det V = \chi_{\mathrm{cyc}}$ et donc $\check{V} \simeq V$. La suite exacte de Colmez devient donc :

$$0 \to (\Pi(V)^{\mathrm{an}})^\star \to D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi(V)^{\mathrm{an}} \to 0$$

d'où une inclusion $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^* \subset D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1$.

**Proposition 3.1.** *Pour tout $V \in \mathcal{V}(\pi)$, il existe $n$ tel que l'inclusion précédente induise une inclusion :*

$$(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^* \subset tN^{]0,r_n[}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1$$

*Démonstration.* Soit $n$ assez grand tel que l'inclusion $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^* \subset D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1$ se factorise par $D^{]0,r_n]}(V)$ ; pour $l \in (\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*$, on a $\{l, v\}_{\mathbf{P}^1} = 0$ pour tout $v$ vecteur lisse. Cela montre, par le théorème 2.35, et en utilisant le modèle de Kirillov de $\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$ : $\forall j \in \mathbf{Z}, i_{j,n}(l) \in tN^+_{\mathrm{dif},n}(V)$, donc en prenant $j = n$, on obtient $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(l) \in tN^{]0,r_n]}(V)$. Remplacer $l$ par $wl$ permet de conclure. □

On rappelle que l'opérateur $\psi$ vérifie :

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \psi \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$$

Dès lors, de l'inclusion $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^* \subset D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1$ composée avec $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$, on déduit une flèche :

$$[(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=1} \to D_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$$

**Lemme 3.2.** *Cela reste une inclusion :*

$$[(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=1} \subset D_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$$

*Démonstration.* $(D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=1}$ est stable par $w$, car si $z$ est invariant par $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors [23] :

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (wz) = (w \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w^{-1})(wz) = wz$$

Dès lors, si $z = (x, y)$ vérifie $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z) = 0$, alors $x = 0$, et $\varphi(y) = y$. Comme les actions de $\varphi$ et $\Gamma$ commutent, on exhibe ainsi un sous-$(\varphi, \Gamma)$-module de $D_{\mathrm{rig}}(V)$ : c'est impossible car $V$ est non trianguline. □

**Théorème 3.3.** *L'inclusion précédente est un isomorphisme de $\mathscr{D}(\Gamma)$-modules, et induit un isomorphisme de $\mathscr{D}(\Gamma)$-modules :*

$$[(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=1} \simeq (tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}$$

*d'où un isomorphisme de $\mathscr{D}(\Gamma)$-modules :*

$$[(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=1} \simeq (1-\varphi)(tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}$$

23. on a utilisé le fait que le caractère central $\delta_V$ est trivial dans la première égalité

*Démonstration.* Notons $\Lambda(\Gamma)$ l'algèbre des mesures [24] sur $\Gamma$ à valeurs dans $L$. On a un isomorphisme de $\mathscr{D}(\Gamma)$-modules (voir [Col10b], prop. V.1.18 pour une preuve) :

$$\mathscr{D}(\Gamma)\otimes_{\Lambda(\Gamma)} D(V)^{\psi=1} \to D_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$$

Or on a ([CD14], remarque V.14) un isomorphisme de $\Lambda(\Gamma)$-modules :

$$(\Pi(V)^*)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1} \simeq D(V)^{\psi=1}$$

On en déduit facilement que l'inclusion $[(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1} \subset D_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$ est un isomorphisme.
Comme on a une inclusion $(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^* \subset tN^{]0,r_n[}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1$, on en déduit une inclusion :

$$(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^* \subset (tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}$$

Pour montrer que c'est un isomorphisme, il suffit de montrer que, pour $z\in (tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}$, si $l\in [(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1}$ vérifie $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(l)=z$, alors $l$ s'annule sur $\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$.
En effet, si $l$ est fixée par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, alors $i_{j,n}(l)=\varphi^{-n}(z)\in tN^+_{\mathrm{dif},n}(V)$ pour $n$ assez grand, donc $\{i_{j,n}(l),\phi_v(p^{-j}\}_{\mathrm{dif}}=0$ pour $v$ un vecteur lisse, donc, par le théorème 2.35, $l(v)=0$. □

**Proposition 3.4.** *Pour tout $V\in\mathcal{V}(\pi)$ :*

*a) $tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$ est $w$-stable.*

*b) $tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1$ est $G$-stable.*

*Démonstration.* Par le théorème précédent, $(1-\varphi)(tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}$ est $w$-stable (on utilise à nouveau que le caractère central est trivial).
Or, par [KPX14], $tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$ est engendré, en tant que $\mathscr{D}(\Gamma)$-module, par $(1-\varphi)(tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}$.
Comme $w\circ\sigma_a=\sigma_{a^{-1}}\circ w$ sur $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes \mathbf{Z}_p^\times$, on a bien la stabilité.
Le deuxième point découle du premier et du fait que $G$ est engendré par l'union de son centre, de $w$ et du mirabolique $P$. □

La preuve du théorème suivant se trouve dans [Col19] (ou dans le paragraphe 9 du chapitre VI de [Col10b]).

**Théorème 3.5.** *Soit $V\in\mathcal{V}(\pi)$. Choisissons un isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V)\simeq M(\pi)$, induisant ainsi un isomorphisme $N_{\mathrm{rig}}(V)\simeq N_{\mathrm{rig}}(\pi)$.*
*L'involution $w$, induite sur $N_{\mathrm{rig}}(\pi)$, est indépendante du choix de l'isomorphisme, ainsi que du $V\in\mathcal{V}(\pi)$ choisi.*

Soit $V\in\mathcal{V}(\pi)$. Soit un isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V)\simeq M(\pi)$ fixé (canonique à scalaire près), il induit un isomorphisme $G$-équivariant $tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes\mathbf{P}^1\simeq tN_{\mathrm{rig}}(\pi)\boxtimes\mathbf{P}^1$. Cela induit une inclusion $G$-équivariante :

$$(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^* \subset tN_{\mathrm{rig}}(\pi)\boxtimes\mathbf{P}^1$$

**Théorème 3.6.** *Soient $V_1,V_2\in\mathcal{V}(\pi)$. On a, en tant que sous-ensembles de $tN_{\mathrm{rig}}(\pi)\boxtimes\mathbf{P}^1$ :*

$$(\Pi(V_1)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_1)^{\mathrm{lisse}})^* = (\Pi(V_2)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_2)^{\mathrm{lisse}})^*$$

24. dual de $C^0(\Gamma,L)$

**Définition 3.7.** On définit la représentation $\Pi(\pi,0)^*$ comme $(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^* \subset tN_{\mathrm{rig}}(\pi)\boxtimes\mathbf{P}^1$, pour n'importe quel $V\in\mathcal{V}(\pi)$ et n'importe quel isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V)\simeq M(\pi)$.
On note $\Pi(\pi,0)$ la duale de $\Pi(\pi,0)^*$.

*Démonstration du théorème.* Notons $\Delta_i = D_{\mathrm{rig}}(V_i)$, et $\Pi_i=\Pi(V_i)$. Les identifications précédentes donnent :

$$(\Pi_1^{\mathrm{an}}/\Pi_1^{\mathrm{lisse}})^* \subset tN_{\mathrm{rig}}(\pi)\boxtimes\mathbf{P}^1 \subset \Delta_2\boxtimes\mathbf{P}^1$$

On commence par montrer l'inclusion : $(\Pi_1^{\mathrm{an}}/\Pi_1^{\mathrm{lisse}})^* \subset (\Pi_2^{\mathrm{an}})^*$. Comme $\mathfrak{g}(\Pi_1^{\mathrm{an}})^*$ est dense dans $(\Pi_1^{\mathrm{an}}/\Pi_1^{\mathrm{lisse}})^*$ (utiliser le théorème de Hann-Banach), il suffit de montrer que ce dernier est contenu dans $(\Pi_2^{\mathrm{an}})^*$. Il suffit en fait de montrer $u^+(\Pi_1^{\mathrm{an}})^*\subset(\Pi_2^{\mathrm{an}})^*$, car conjuguer par $w$ donnera alors $u^-$, et l'expression de $h=2a^+=-2a^-$ en fonction de $u^+$ et $u^-$ permettra de conclure.
En vertu de la remarque 2.15, il suffit de montrer que $u^+(\Pi_1^{\mathrm{an}})^*$ et $(\Pi_2^{\mathrm{an}})^*$ sont orthogonaux dans $\Delta_2\boxtimes\mathbf{P}^1$. Soit $\Pi_i^0$ la boule unité de $\Pi_i$, alors, comme $(\Pi_i)^*\subset(\Pi_i^{\mathrm{an}})^*$ est dense, il suffit de montrer que $u^+(\Pi_1^0)^*$ et $(\Pi_2^0)^*$ sont orthogonaux. Or, si $x\in(\Pi_1^0)^*$ et $y\in(\Pi_2^0)^*$, si $n\in\mathbf{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}\{u^+x,y\}_{\mathbf{P}^1} &= \{\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)u^+x,\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)y\}_{\mathbf{P}^1}\\ &= p^n\{u^+\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)x,\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)y\}_{\mathbf{P}^1}\in p^n\{u^+(\Pi_1^0)^*,(\Pi_2^0)^*\}_{\mathbf{P}^1}\end{aligned}$$

En faisant tendre $n$ vers l'infini, on obtient, par continuité et compacité : $\{u^+x,y\}_{\mathbf{P}^1}=0$. On a donc montré $(\Pi_1^{\mathrm{an}}/\Pi_1^{\mathrm{lisse}})^*\subset(\Pi_2^{\mathrm{an}})^*$.

Reste à montrer que si $l\in(\Pi_1^{\mathrm{an}}/\Pi_1^{\mathrm{lisse}})^*$, alors $l$ s'annule sur $\Pi_2^{\mathrm{lisse}}$. Il suffit de remarquer que, pour $n$ assez grand, on a :

$$i_{j,n}(l)\in tN^+_{\mathrm{dif},n}(V_2)$$

et on conclut à l'aide du modèle de Kirillov de $\Pi(V_2)^{\mathrm{lisse}}$. □

## 3.2 Construction de $\partial$

L'objectif de cette partie est de construire un opérateur $\partial$ de $\Pi(\pi,0)^*$, analogue de la multiplication par $z\in\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$.
Nous notons $a^+$ l'action infinitésimale du sous-groupe $\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_p^\times & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, et $u^+$ celle de $\begin{pmatrix}1&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{pmatrix}$.

### 3.2.1 La formule clé

Le lemme suivant va guider la recherche "de l'autre côté" :

**Lemme 3.8.** *L'opérateur de multiplication par $z\in\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ vérifie :*

$$a^+-1=u^+\circ\partial$$

*Démonstration.* Commençons par remarquer que la restriction à $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ est bien définie, car $D^\times$ agit trivialement sur le demi-plan.
Si $h\in\mathcal{O}(\Omega)$, alors comme l'action de $G$ sur $\Omega$ est l'action usuelle, la formule est évidente. [25]

25. Elle s'écrit en fait $-zf'(z)-f(z)=-\frac{d}{dz}(zf(z))$

Soit $f \in \mathcal{O}(\Sigma_n)$, alors, comme $\Sigma_n \to \Omega$ est un revêtement fini, on dispose de $h_0, \ldots, h_{m-1} \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles que :

$$P(f) = 0, \quad \text{où} \quad P(T) = T^m + h_{m-1}T^{m-1} + \ldots + h_0$$

On peut alors choisir pour $P$ le polynôme minimal de $f$ sur $\mathcal{O}(\Omega)$.
On note $P^{a^+}$ le polynôme dont les coefficients sont $a^+(h_i)$, et $P^{u^+\circ\delta}$ de même. En appliquant $a^+$ à la relation $P(f) = 0$, on obtient :

$$a^+(f)P'(f) + P^{a^+}(f) = 0$$

Et en appliquant $u^+ \circ \partial$, on obtient :

$$\partial \circ u^+(f)P'(f) + P^{u^+\circ\partial}(f) = 0$$

Par ce qui précède : $P^{a^+}(f) = P^{u^+\circ\partial}(f)$. Dès lors :

$$\partial \circ u^+(f)P'(f) = a^+(f)P'(f)$$

Il suffit de remarquer que $P'(f) \neq 0$ (car $\Sigma_n \to \Omega$ est étale) et $\partial \circ u^+ = u^+ \circ \partial + 1$ (qui provient simplement de l'identité $u^+(z) = -1$) pour conclure. $\square$

### 3.2.2 Construction

Fixons $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$, notons $V$ la représentation galoisienne associée par la recette de Colmez. On fixe un isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M(\pi)$, induisant un isomorphisme $N_{\mathrm{rig}}(V) \simeq N_{\mathrm{rig}}(\pi)$ et une identification $\Pi(\pi, 0) = \Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$.

**Proposition 3.9.** *L'opérateur $u^+$ est d'image fermée sur $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$, et induit un homéomorphisme $(\Pi^{\mathrm{an}})^* \to u^+(\Pi^{\mathrm{an}})^*$*

*Démonstration.* Commençons par montrer que $u^+$ est injective sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ : il suffit de montrer que $u^+$ et $u^- = \mathrm{Ad}(w)(u^+)$ sont injectifs sur $D_{\mathrm{rig}}$. Or, pour $z \in D_{\mathrm{rig}}$ :

$$u^+(z) = tz \text{ et } u^-(z) = -\frac{\nabla(\nabla - 1)(z)}{t}$$

donc, comme $\nabla$ et $\nabla - 1$ sont injectifs sur $D_{\mathrm{rig}}$ (par un argument déjà vu, leur non injectivité donnerait un vecteur propre de $\varphi$, contradiction car $V$ est non trianguline), on conclut facilement.
Si l'on sait que $u^+$ est d'image fermée, alors la dernière partie du résultat est une conséquence du théorème de l'image ouverte. Il reste donc à montrer que $u^+$ est d'image fermée.
Soit $z_n = (x_n, y_n) \in (\Pi^{\mathrm{an}})^* \subset D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ le terme général d'une suite vérifiant $u^+(z_n) \to z = (x, y)$ dans $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$. On montre que $z = u^+(z')$, avec $z' \in (\Pi^{\mathrm{an}})^*$. On écrit $z = (x, y)$, où $x, y \in D_{\mathrm{rig}}$. Alors, on a $tx_n \to x$, et $-t\partial^2 y_n \to y$. Par le théorème de Baire [26], on dispose de $m \geq 0$ tel que les convergences précédentes aient lieu dans $D^{]0,r_m]}$.
Comme $tD^{]0,r_m]}$ est fermé dans $D^{]0,r_m]}$, on a $x = tx'$, pour $x' \in D^{]0,r_m]}$, donc dans $D_{\mathrm{rig}}$. Pour la deuxième composante : par un argument similaire, quitte à augmenter $m$, on peut supposer que la convergence a lieu dans $N^{]0,r_m]}$ ; on peut écrire $y = -tu$, où $u \in N^{]0,r_m]}$. Comme $\partial : N_{\mathrm{rig}} \to N_{\mathrm{rig}}$ est

26. On l'utilise dans la version suivante : si un espace de Baire est réunion dénombrable de fermés, la réunion de leurs intérieurs y est dense

une bijection (proposition 11) linéaire continue entre deux espaces LF [27], c'est un homéomorphisme. On peut donc écrire $u = \partial^2 y'$, puis : $z = u^+(z')$, où $z' = (x', y')$.
On a $z' \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ : en effet, la condition de recollement sur $\mathbf{Z}_p^\times$ passe évidemment à la limite. Il reste à vérifier $z' \in (\Pi^{\mathrm{an}})^*$ : pour ce faire, il suffit de montrer que $z'$ est orthogonal à $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ pour l'accouplement $\{\}_{\mathbf{P}^1}$ : c'est une conséquence du fait que $(x_n, y_n)$ l'est pour tout $n$. □

On en déduit le corollaire suivant (on utilise le caractère réflexif du Fréchet $\Pi(\pi,0)^*/u^+(\Pi(\pi,0)^*)$) :

**Corollaire 3.10.** L'opérateur $u^+$ est d'image fermée sur $\Pi(\pi,0)^*$, et :

$$\Pi(\pi,0)^*/u^+(\Pi(\pi,0)^*) \simeq (\Pi(\pi,0)^{u^+=0})^*$$

On peut finalement construire l'application $\partial$ :

**Théorème 3.11.** *Il existe une unique application linéaire continue $\partial : \Pi(\pi,0)^\star \to \Pi(\pi,0)^\star$ telle qu'on ait :*

$$a^+ - 1 = u^+ \circ \partial$$

*Démonstration.* L'unicité découle de l'injectivité de $u^+$. Pour l'existence, on montre que $a^+ - 1$ est à valeurs dans $u^+(\Pi(\pi,0)^*)$. Autrement dit, on doit montrer que si $\ell$ est dans $\Pi(\pi,0)^*$, alors $\ell_1 = a^+\ell - \ell$ s'annule sur $(\Pi(\pi,0)^*)^{u^+=0}$. Comme $\Pi(\pi,0) = \Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$, on doit montrer que si $u^+v$ est lisse, alors $\ell_1(a^+v + v) = 0$. On utilise le :

**Lemme 3.12.** *Si $v \in \Pi^{\mathrm{an}}$ est tel que $u^+v$ est lisse, alors $a^+v + v$ est lisse.*

*preuve du lemme.* Par la caractérisation des vecteurs lisses, il suffit de montrer que $u^+(a^+v + v) = a^+(a^+v + v) = 0$. Pour le premier, on a $u^+(a^+ + 1) = a^+u^+$, et on utilise simplement $a^+u^+v = 0$ (car $u^+v$ est lisse). Pour le deuxième, on utilise le fait que l'action du Casimir est nulle, ce qui donne :

$$u^-u^+v + a^+v + (a^+)^2v = 0$$

or $u^-u^+v = 0$ car $u^+v$ est lisse, ce qui permet de conclure. □

La linéarité de $\partial$ se montre en utilisant l'unicité. Pour la continuité, on utilise le fait que $u^+$ est un homéomorphisme. □

### 3.2.3 Conjuguaison, action infinitésimale et $\partial$

Enfin, on a besoin des quelques propriétés techniques suivantes :

**Proposition 3.13.**

- *En tant qu'opérateurs sur $\Pi(\pi,0)^*$ :*

$$a^+ = \partial \circ u^+, \quad \partial u^+ - u^+\partial = 1, \quad u^- = -\partial a^+$$

- *En tant qu'opérateurs sur $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ (via le choix d'un isomorphisme $\Pi(\pi,0) \simeq \Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$, qui donne une inclusion $\mathfrak{g}(\Pi^{\mathrm{an}})^* \subset \Pi(\pi,0)^*$) :*

$$a^+ = \partial \circ u^+, \quad u^- = -\partial a^+$$

- *Pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, l'opérateur $a - c\partial$ est inversible sur $\Pi(\pi,0)^*$ et :*

$$g \circ \partial \circ g^{-1} = (d\partial - b)(a - c\partial)^{-1}, \quad gu^+g = \frac{1}{\det g}(a - c\partial)^2 u^+$$

27. limite de Fréchet

## 3.3 Construction de la structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module

Maintenant que l'opérateur $\partial$ a été construit, on montre que cela suffit pour construire une structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module. Cette intuition est motivée par la dualité de Morita, comme énoncée dans [ST97] :

### 3.3.1 Dualité de Morita

**Proposition 3.14.** *i) Soit $\lambda \in \mathcal{O}(\Omega)^*$. La fonction*

$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbf{Q}_p & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & \lambda\left(\frac{1}{z-x}\right) \end{array}$$

*s'étend en une fonction localement analytique sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, nulle en l'infini. L'application $\lambda \mapsto f_\lambda$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques*[28] *:*

$$\mathcal{O}(\Omega)^* \simeq \mathrm{St}^{\mathrm{an}}$$

*ii) La transposée de l'isomorphisme précédent est :*

$$(\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\Omega), \quad \mu \mapsto f_\mu(z) = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \frac{1}{z-x} \mathrm{d}\mu(x)$$

### 3.3.2 Idée

On a donc envie de définir, pour $\mu \in (\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^*$, $T_{f_\mu}(z)$ tel que, pour tout $v \in \Pi(\pi, 0)$, en notant $\langle\ ,\ \rangle$ l'accouplement de dualité :

$$\langle T_{f_\mu}(z), v\rangle = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \langle(\partial - x)^{-1}(z), v\rangle \mathrm{d}\mu(x)$$

### 3.3.3 L'application $\phi_{l,v}$

On note $\phi_{l,v}(x) = \langle(\partial - x)^{-1}(z), v\rangle$ l'intégrande dans ce qui précède. La propriété suivante est cruciale :

**Proposition 3.15.** *L'application $\phi_{l,v}$ s'étend en une fonction localement analytique sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, nulle à l'infini.*

*Démonstration.* En utilisant les calculs de la section précédente, on montre la formule :

$$\phi_{l,v}(g \cdot x) = \frac{cx+d}{\det g} \phi_{(c\partial+d)g^{-1}l, g^{-1}v}$$

Cette formule permet, par transitivité de l'action de $G$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, de se ramener au voisinage de 0. On a, en définissant les opérateurs $\partial^{-1}, \partial$ sur $\Pi(\pi, 0)$ par dualité :

$$\phi_{l,v}(x) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \partial^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) l, v\rangle = \langle l, \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \partial^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v\rangle$$

28. pour avoir un isomorphisme de $G$-représentations, il faut plutôt regarder $\Omega^1(\Omega)$

On peut écrire $\Pi(\pi,0)=\cup_{h\geq 1}\Pi(\pi,0)^{(h)}$ la filtration par rayon d'analyticité comme dans [CD14], chapitre IV : cette filtration est stable sous l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, mais pas sous celle de $\partial$ ou $\partial^{-1}$. Soit $h\geq 1$ tel que $v\in\Pi^{(h)}$. Comme la fonction $x\mapsto\left(\begin{smallmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v$ est localement analytique, il existe $N\geq 1$ tel que, pour $|x|\leq p^{-N}$ :

$$\begin{pmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{pmatrix}v=\sum_{n\geq 0}x^n v_n$$

avec $v_n\in\Pi(\pi,0)^{(h)}$ (en effet, la convergence a lieu dans ce Banach). On a $p^{-nN}v_n\to 0$ dans $\Pi(\pi,0)^{(h)}$, donc aussi dans $\Pi(\pi,0)$. Dès lors, comme $\partial^{-1}$ est continue, cela donne : $p^{nN}\partial^{-1}(v_n)\to 0$ dans $\Pi(\pi,0)$. Par le théorème de Baire, pour un certain $h'\geq h$, on a la même convergence dans $\Pi(\pi,0)^{(h')}$. Posons $v'_n=p^{nN}\partial^{-1}(v_n)$. On a, en utilisant la continuité de $\partial^{-1}$ et de $l$ :

$$\phi_{l,v}(x)=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{p^N}\right)^n l(\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v'_n)$$

Comme $v'_n\to 0$ dans $\Pi(\pi,0)^{(h')}$, il existe $M\geq 0$ tel que les fonctions $f_n : x\mapsto l(\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v'_n)$ tendent vers 0 dans l'espace des fonctions analytiques sur $p^M\mathbf{Z}_p$ (on utilise le ii) du théorème IV.6 de [CD14]). On en déduit que la fonction

$$x\mapsto\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{p^N}\right)^n f_n(x)=\phi_{l,v}(x)$$

est localement analytique : cela conclut. $\square$

### 3.3.4 Structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module

Définissons $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}(\Omega)$ engendré par les fonctions $\frac{1}{z-x}$. On peut facilement définir $T_f(l)$, pour $f\in\mathcal{S}$.
Par dualité de Morita et par le théorème de Hann-Banach, $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathcal{O}(\Omega)$. Cela nous permet de définir $T_f$, pour $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ :

**Proposition 3.16.** *L'application $T_f:\Pi(\pi,0)^*\to\Pi(\pi,0)^*$ donnée par :*

$$\langle T_f(z),v\rangle=\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}\langle(\partial-x)^{-1}(z),v\rangle\mathrm{d}\mu_f(x)$$

*est bien définie, et est un opérateur continu. De plus, si $f_n\to f$ dans $O(\Omega)$, alors $T_{f_n}$ converge faiblement vers $T_f$.*

*Démonstration.* On commence par un lemme :

**Lemme 3.17.** *Si $f_n\in\mathcal{S}$ et $(f_n)$ converge vers $f$, alors $(T_{f_n})$ a une limite faible que l'on notera $T_f$.*

*preuve du lemme.* Comme $f_n-f_{n-1}\to 0$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$, la dualité de Morita donne $\mu_{f_n}-\mu_{f_{n-1}}\to 0$ dans $(\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^*$. Ainsi, si $v\in\Pi(\pi,0)$ et $l\in\Pi(\pi,0)^*$, on a (en utilisant le fait que $\phi_{l,v}$ est localement analytique) :

$$\langle(T_{f_n}-T_{f_{n-1}})(l),v\rangle=\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}\phi_{l,v}(\mu_{f_n}-\mu_{f_{n-1}})\longrightarrow 0$$

Ainsi, par le lemme 7.1 de l'annexe, on en déduit que $T_{f_n}(l)-T_{f_{n-1}}(l)\to 0$. Ainsi, par complétude, $T_{f_n}(l)$ a une limite ; cela étant vrai pour tout $l$, on conclut. $\square$

Par le théorème de Banach-Steinhaus, $T_f$ est un opérateur continu. Comme $\mu_{f_n}$ converge vers $\mu_f$, on a la formule avec l'intégrale. Cette formule permet de montrer le dernier point, en utilisant à nouveau la dualité de Morita. $\square$

Pour vérifier que $f \cdot l$ est une structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module, il reste à vérifier que $T_f \circ T_g = T_{fg}$. Par densité et continuité, il suffit de le faire pour $f = \frac{1}{z-x}$ et $g = \frac{1}{z-y}$. On peut même, par continuité, supposer $y \neq x$. Tout se résume alors au résultat suivant, en tant qu'opérateurs sur $\Pi(\pi, 0)^*$ :

$$\frac{1}{x-y}\left((\partial - x)^{-1} - (\partial - y)^{-1}\right) = (\partial - x)^{-1} \circ (\partial - y)^{-1}$$

# 4 Bijectivité des morphismes entre $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ et $\Pi(\pi,0)^\star$

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 4.1.** *Tout morphisme $G$-équivariant continu non nul $\Phi : \Pi(\pi,0)^\star \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ est un isomorphisme.*

La première étape, pour utiliser ce qui précède, est la proposition suivante :

**Proposition 4.2.** *Tout morphisme $G$-équivariant continu non nul $\Phi : \Pi(\pi,0)^\star \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ est un morphisme de $\mathcal{O}(\Omega)$-modules.*

*Démonstration.* Comme l'action de $G$ sur $\Pi(\pi,0)^\star$ et sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ est dérivable, et comme $\Phi$ est continu, $\Phi$ est un morphisme de $U(\mathfrak{g})$-modules. Comme $a^+ - 1 = u^+ \circ \partial$ sur les deux espaces, on a, pour tout $l \in \Pi(\pi,0)^\star$ :

$$u^+\Phi(\partial l) = u^+\partial\Phi(l)$$

Comme $u^+$ est injectif sur $\mathrm{O}(\Sigma_n)^\rho$ (car $u^+ = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)$), on en déduit que $\Phi$ et $\partial$ commutent. Dès lors, $\Phi$ commute avec l'action de [29] $f \in \mathcal{S}$ : par densité de $\mathcal{S}$ et continuité de $\Phi$, on conclut. □

On commence par démontrer que le morphisme $\Phi$ est surjectif. Pour cela, on montre que l'image est dense, et on utilise un résultat d'analyse fonctionnelle pour conclure.

## 4.1 Densité de l'image : les deux tours

Notons $\breve{X} = X\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\breve{\mathbf{Q}}_p$. On a le lemme suivant :

**Lemme 4.3.** *Si $F : X \to Y$ est un morphisme d'espaces de Fréchet est tel que $\breve{F} : \breve{X} \to \breve{Y}$ est d'image dense, alors $F$ est d'image dense.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème de Hann-Banach : si $l$ est une forme linéaire continue nulle sur l'image de $F$, alors $\breve{l}$ est nulle sur l'image de $\breve{F}$, donc $\breve{l} = 0$, et $l(x) = \breve{l}(x \otimes 1) = 0$. □

### 4.1.1 Lien avec le fibré $\mathcal{O}(\mathcal{M}_n)^\rho$ sur $\Omega$

On note

$$W = \overline{\mathrm{Im}(\breve{\Phi})}$$

$W$ est un sous-$\mathcal{O}(\breve{\Omega})$-module fermé de $\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n)^\rho$, il est donc coadmissible (car $\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n)$ est coadmissible en tant que $\mathcal{O}(\breve{\Omega})$-module projectif de type fini). Ainsi, on a une suite exacte $G$-équivariante de $\mathcal{O}(\breve{\Omega})$-modules coadmissibles :

$$0 \to W \to \mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n)^\rho \to \mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n)^\rho/W \to 0$$

Comme $\breve{\Omega}$ est une variété Stein, cette suite exacte équivaut (voir annexe) à une suite exacte de faisceaux cohérents $G$-équivariants sur $\breve{\Omega}$ :

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{F}' \to 0$$

29. Rappelons que $\mathcal{S}$ est l'espace vectoriel engendré par les $\frac{1}{z-x}$, $x \in \mathbf{Q}_p$

Comme $\breve{\mathcal{M}}_n$ est un revêtement fini étale de $\breve{\Omega}$, $\mathscr{G}$ est un fibré vectoriel. En fait, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ le sont aussi : pour le voir, comme $\breve{\Omega}$ est une courbe lisse, il suffit de montrer qu'ils sont sans torsion ; or la partie de torsion d'un faisceau cohérent $G$-équivariant est un sous-ensemble discret de $\breve{\Omega}$ qui est $G$-stable : c'est forcément l'ensemble vide. Ainsi, notre suite exacte est une suite exacte de fibrés vectoriels $G$-équivariants sur $\breve{\Omega}$.

### 4.1.2 Comparaison des torseurs sur les deux tours

On va utiliser le résultat suivant :

**Proposition 4.4.** *Soit $H$ un groupe localement profini et $f : X \to Y$ un torseur pro-étale de groupe $H$, alors :*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{fibrés } H-\textit{équivariants sur } X\} & \longrightarrow & \{\textit{fibrés sur } Y\} \\ \mathscr{F} & \longmapsto & (f_*\mathscr{F})^H \end{array}$$

*est une équivalence de catégories, dont un inverse est donné par $\mathscr{E} \mapsto f^*\mathscr{E}$.*

On en déduit :

**Proposition 4.5.** *Il y a une équivalence de catégories :*

$$\mathscr{F} \in \{\textit{fibrés } G-\textit{équivariants sur } \breve{\Omega}\} \simeq \{\textit{fibrés } D^\times-\textit{équivariants sur } \breve{\mathbf{P}}^1\} \ni \widetilde{\mathscr{F}}$$

*Cette équivalence préserve les sous-objets (autrement dit est exacte à gauche)*

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser la propriété précédente, avec les deux torseurs :

$$\begin{tikzcd} & X_\infty \arrow[dl, "G"'] \arrow[dr, "D^\times"] & \\ \breve{\mathbf{P}}^1 & & \breve{\Omega} \end{tikzcd}$$

(où $X_\infty$ est le modèle en niveau infini de la tour de Drinfeld, et de Lubin-Tate). Les deux catégories sont équivalentes à celle des fibrés $G \times D^\times$-équivariants sur $X_\infty$. □

Il reste maintenant à trouver le fibré sur $\breve{\mathbf{P}}^1$ correspondant à $\mathcal{O}_{\Sigma_n}^\rho$ sur $\breve{\Omega}$. Or on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\Sigma_n}^\rho &= \mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho, \mathcal{O}_{\Sigma_n}) \\ &= \mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho, \mathcal{O}_{X_\infty}) \\ &= (\rho^* \otimes \mathcal{O}_{X_\infty})^{D^\times} \end{aligned}$$

le passage de la première à la deuxième ligne vient du fait que $\rho$ est triviale sur $1 + \pi_D^n \mathcal{O}_D = \mathrm{Gal}(X_\infty | \Sigma_n)$. On en déduit que le fibré associé sur $\breve{\mathbf{P}}^1$ est :

$$(\rho^* \otimes \mathcal{O}_{X_\infty})^G = \rho^* \otimes \mathcal{O}_{\breve{\mathbf{P}}^1}$$

### 4.1.3 Preuve de la densité

En utilisant ce théorème, notre suite exacte donne une injection $D^\times$-équivariante :

$$\widetilde{\mathscr{F}} \hookrightarrow \rho^* \otimes \mathcal{O}_{\check{\mathbf{P}}^1}$$

Choisissons $\lambda \geq 0$ un entier tel que $\widetilde{\mathscr{F}} \otimes \mathcal{O}(\lambda)$ soit à pente positive : alors on a une injection $D^\times$-équivariante :

$$H^0(\check{\mathbf{P}}^1, \widetilde{\mathscr{F}} \otimes \mathcal{O}(\lambda)) \hookrightarrow \rho^* \otimes \mathrm{Sym}^\lambda(L^2)$$

comme le membre de droite est une représentation irréductible, on en déduit qu'il y a égalité [30], donc $\mathscr{F} = \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ : on a bien prouvé que $\Phi$ était d'image dense.

## 4.2 Analyse fonctionnelle sur les variétés Stein

Le but est maintenant de montrer que $\Phi$ est d'image fermée. Si l'on savait que $\Pi(\pi, 0)^*$ était un $\mathcal{O}(\Omega)$-module coadmissible, un résultat de [ST03] permettrait de conclure. Malheureusement, il semble difficile de montrer une telle coadmissibilité.
On démontre la propriété suivante :

**Proposition 4.6.** *Soit $X$ une variété Stein sur $\mathbf{Q}_p$. Soit $N$ un $\mathcal{O}(X)$-module projectif de type fini et soit $Y$ un $\mathcal{O}(X)$-module qui soit un espace de Fréchet. Tout morphisme continu $F : Y \to N$ qui est $\mathcal{O}(X)$-linéaire et d'image dense est surjectif.*

On applique cette propriété avec $F = \Phi$, $X = \Omega$, $Y = \Pi(\pi, 0)^*$, et $N = \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$, qui est de type fini, et qui est facteur direct de $\mathcal{O}(\Sigma_n)$, ce dernier étant projectif car localement libre. On en déduit la surjectivité désirée.

*Démonstration.* Notons $N'$ l'image de $F$ : on doit montrer $N' = N$.
Comme $N$ est projectif et de type fini, on dispose de $N''$ un $\mathcal{O}(X)$-module tel que $N \oplus N'' = \mathcal{O}(X)^d$, pour un certain $d \geq 0$. Quitte à remplacer $N$ par $N \oplus N''$, $Y$ par $Y \oplus N''$ (qui reste un Fréchet, car $N''$ est un Fréchet comme sous-module fermé d'un Fréchet), et $F$ par $F \oplus \mathrm{id}$, on peut se ramener au cas où $N = \mathcal{O}(X)^d$ ; en décomposant suivant les coordonnées, on se ramène ainsi au cas suivant :

$$N = \mathcal{O}(X) \quad \text{et} \quad N' = I \text{ est un idéal dense de } N$$

Tout réside alors dans le :

**Lemme 4.7.** *Il existe un nombre fini d'éléments $f_1, \ldots, f_m \in I$ tels que $V(f_1, \ldots, f_m) = \varnothing$.*

Le lemme suffit à conclure : en effet, notons $J$ l'idéal engendré par $f_1, \ldots, f_m$. Soit $X = \cup U_j$ un recouvrement Stein de $X$, alors, pour tout $j$, $V(J \cap \mathcal{O}(U_j)) = \varnothing$. Par le Nullstellensatz affinoïde, on en déduit $J \cap \mathcal{O}(U_j) = \mathcal{O}(U_j)$ ; d'où $J = \mathcal{O}(X)$ en passant à la limite sur $j$. $\square$

30. $\widetilde{\mathscr{F}}$ n'est pas nul car $W \neq 0$ car $\Phi \neq 0$

*preuve du lemme.* On choisit $f_1 \in I$ non nul quelconque, et on construit la famille $(f_1, \dots, f_m)$ par récurrence de telle sorte que $\dim V(f_1, \dots, f_i) < \dim V(f_1, \dots, f_{i-1})$. Considérons toujours notre recouvrement Stein $X = \cup U_j$ ; chaque $U_j$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles [31]. Pour chacune de ces composantes, on choisit un point fermé. On obtient ainsi une suite (dénombrable) $(z_n)$ de points de $X$.

**Lemme 4.8.** *Il existe $f_i \in I$ tel que $f_i(z_n) \neq 0$ pour tout $n$.*

Si $f_i$ satisfait cette condition, alors pour toute composante irréductible $Z$ de $V(f_1, \dots, f_{i-1}) \cap U_j$ satisfait :

$$\dim(V(f_i) \cap Z) < \dim Z$$

On en déduit alors $\dim(V(f_1, \dots, f_i) \cap U_j) < \dim(V(f_1, \dots, f_{i-1}) \cap U_j)$, d'où le premier lemme en passant à la limite sur $j$.

*preuve du second lemme.* On commence par définir $\xi_k \in \mathcal{O}(X)$ tel que $\xi_k$ s'annule en $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}$ et pas en $z_k$ (l'existence d'un tel $\xi_k$ est facile car il existe une immersion de $X$ dans un espace affine ; il suffit alors de prendre pour $\xi_k$ un bon polynôme). Par densité de $I$, il existe $y_n \in Y$ tel que $F(y_n)$ ne s'annule pas en $z_n$. On construit alors $(c_n)$ une suite à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$ telle que $c_0 = 1$ et :

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} c_k(\xi_k F(y_k))(z_n) & \neq & 0 \\ \sum_{k \in \mathbf{N}} c_k \xi_k y_k & & \text{converge dans } Y \end{cases}$$

Pour satisfaire la deuxième condition, il suffit de remarquer que la topologie de $Y$ est donnée par une famille dénombrable de semi-normes. On pose alors :

$$f_i = F\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi_k y_k\right)$$

Alors $f_i \in I$ et $f_i(z_n) = c_n \xi_n(z_n) h_n(z_n) \neq 0$ : on a bien le deuxième lemme. Remarquer qu'on a utilisé la continuité de $F$ pour permuter la somme et $F$. □

□

## 4.3 Injectivité

Notre objectif est de prouver que $\Phi$ est un isomorphisme entre $\Pi(\pi, 0)^*$ et $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$. On a, en utilisant le fait que $\Sigma_n \to \Omega$ est étale :

$$\Omega^1(\Sigma_n) = \mathcal{O}(\Sigma_n)\mathrm{d}z \simeq \mathcal{O}(2) \otimes \det$$

(on a noté $\mathcal{O}(2)$ le fibré vectoriel sur $\Sigma_n$ dont les sections globales sont les fonctions rigides analytiques sur $\Sigma_n$, où l'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ est l'action naturelle tordue par $(a - cz)^{-2} \in \mathcal{O}(\Omega)$)
Il est donc naturel de définir :

$$\Pi(\pi, 2)^* = \Pi(\pi, 0)^* \mathrm{d}z$$

31. celles-ci correspondant aux idéaux premiers minimaux de l'algèbre affinoïde associée, en nombre fini par noetherianité des algèbres affinoïdes.

munie de l'action de $G$ :

$$g \star (l\mathrm{d}z) = \det(g)(a - c\partial)^{-2}(g \cdot l)\mathrm{d}z \quad \text{si } g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$$

Comme l'action de $u^+$ est donnée par $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)$, on définit $d : \Pi(\pi, 0)^* \to \Pi(\pi, 2)^*$ en posant $d(l) = -u^+(l)\mathrm{d}z$. On vient de montrer que $d$ était $G$-équivariant et d'image fermée.

Pour résumer, on a le diagramme suivant, à lignes exactes [32] :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Pi(\pi,0)^* \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\Phi"] & \Pi(\pi,2)^* \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & (\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^* \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho \arrow[r, "d"] & \Omega^1(\Sigma_n)^\rho \arrow[r] & H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On montre que la flèche verticale à droite est un isomorphisme en détaillant les deux termes. Enfin, on montre que cela suffit pour conclure.

### 4.3.1 Description de $\Pi(\pi, 2)^{u^+=0}$

L'objectif de cette sous-section est d'utiliser les techniques des $(\varphi, \Gamma)$-modules pour prouver le théorème :

**Théorème 4.9.** *Le sous-espace $\Pi(\pi, 2)^{u^+=0}$ de $\Pi(\pi, 2)$ est $G$-stable, et on a un isomorphisme, canonique à scalaire près, de représentations de $G$ :*

$$\Pi(\pi, 2)^{u^+=0} \simeq \pi \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi)$$

Comme le dual de $\Pi(\pi, 2)^{u^+=0}$ est le conoyau de l'application $G$-équivariante $d$, cet espace est $G$-stable.

**Proposition 4.10.** *a) Pour tout $v \in \Pi(\pi, 2)^*$, l'application*

$$f_v : (a, b, c, d) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \star v$$

*est localement analytique en chacun des arguments au voisinage de* $(1, 0, 0, 1)$.

*b) $\Pi(\pi, 2)^{u^+=0}$ est lisse.*

*Démonstration.* a) Vue comme représentation du Borel $B = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & \mathbf{Q}_p^* \end{pmatrix}$, $\Pi(\pi, 2)$ ne diffère de $\Pi(\pi, 0)$ que par torsion par le caractère $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto d/a$. Dès lors, $f_v$ est localement analytique en $a, b$ et $d$. Comme on a de plus :

$$f_v(1, 0, x, 1) = w f_{w \cdot v}(1, x, 0, 1)$$

on en déduit que $f_v$ est localement analytique en $c$, ce qui conclut.

32. Rappelons que $u^+$ est injective (voir proposition 3.9) : on utilise ici le fait que $\pi$ est supercuspidale, donc tout $V \in \mathscr{V}(\pi)$ est non trianguline

b) On a les formules suivantes, en tant qu'opérateurs sur $\Pi(\pi, 2)$ :

$$a^+ = \partial u^+,\ a^- = -\partial u^+,\ u^- = -\partial^2 u^+$$

Donc si $v$ est annulé par $u^+$, alors il est annulé par $\mathfrak{g}$ tout entier, donc il est lisse.

$\square$

On sait à présent que $\Pi(\pi, 2)^{u^+=0}$ est lisse : on montre qu'elle contient $\pi \oplus \pi$. Comme $\pi$ est un objet projectif, il suffit de montrer :

**Proposition 4.11.** *Il existe une surjection $G$-équivariante*

$$\Pi(\pi, 2)^{u^+=0} \twoheadrightarrow \pi \oplus \pi$$

*Démonstration.* On a besoin du :

**Lemme 4.12.** *Soit $\Pi \in \mathscr{V}(\pi)$. Le choix d'un isomorphisme $\Pi(\pi, 0) \simeq \Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$ détemine un plongement $G$-équivariant*

$$(\Pi^{\mathrm{an}})^* \hookrightarrow \Pi(\pi, 2)^*$$

*qui fait de $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ un sous-espace $G$-stable de $\Pi(\pi, 2)^*$ contenant $d(\Pi(\pi, 0)^*)$.*

*preuve du lemme.* Définissons le plongement comme la composée :

$$\begin{array}{ccccccc} (\Pi^{\mathrm{an}})^\star & \longrightarrow & (\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}})^* & \xrightarrow{\sim} & \Pi(\pi, 0)^* & \longrightarrow & \Pi(\pi, 2)^* \\ & & & & & & \\ l & \longmapsto & -u^+(l) & & l' & \longmapsto & l'\mathrm{d}z \end{array}$$

C'est bien un plongement, car $u^+$ est d'image fermée sur $\Pi(\pi, 0)^*$. Pour vérifier que celui-ci est $G$-équivariant, il faut vérifier, pour tout $g \in G$ et $l \in (\Pi^{\mathrm{an}})^*$ :

$$u^+(gl) = \det g (a - c\partial)^{-2} g(u^+ l)$$

Si $c = 0$, c'est une conséquence de la formule :

$$u^+ \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \frac{d}{a} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot u^+$$

vraie dans $U(\mathfrak{g})$, donc sur le $U(\mathfrak{g})$-module $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$. Enfin, pour $g = w$, on a $u^+ w l = w u^- l$. Comme $u^- = -\partial^2 u^+$, et comme $w \partial^2 w = \partial^{-2}$, on conclut. $\square$

Choisissons $V_1, V_2 \in \mathscr{V}(\pi)$ deux représentations non isomorphes (cela revient à choisir deux filtrations différentes sur $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$). On fixe des isomorphismes :

$$\Pi(\pi, 0) \simeq \Pi(V_1)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_1)^{\mathrm{lisse}} \quad \text{et} \quad \Pi(\pi, 0) \simeq \Pi(V_2)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_2)^{\mathrm{lisse}}$$

Le lemme précédent permet de contruire des plongements $G$-équivariants de $(\Pi(V_1)^{\mathrm{an}})^*$ et $(\Pi(V_2)^{\mathrm{an}})^*$ dans $\Pi(\pi, 2)^*$, dont l'image contient $d(\Pi(\pi, 0)^*)$ ; notons $X_1, X_2$ les images de ces plongements dans

le quotient $\Pi(\pi,2)^*/d(\Pi(\pi,0)^*)$.
En tant que $G$-représentations, on a :

$$X_i \simeq (\Pi(V_i)^{\mathrm{an}})^*/\Pi(\pi,0)^* \simeq \pi^*$$

En particulier, $X_1$ et $X_2$ sont irréductibles. Si $X_1 \cap X_2$ n'est pas nul, alors $X_1 = X_2$, puis $(\Pi(V_1)^{\mathrm{an}})^* = (\Pi(V_2)^{\mathrm{an}})^*$. Par le théorème 0.2 de [CD14], on trouve $\Pi(V_1) \simeq \Pi(V_2)$, absurde. Donc $X_1$ et $X_2$ sont en somme directe dans le quotient $\Pi(\pi,2)^*/d(\Pi(\pi,0)^*)$. La transposée de l'injection $X_1 \oplus X_2 \hookrightarrow \Pi(\pi,2)^*/d(\Pi(\pi,0)^*)$ donne la surjection désirée :

$$\Pi(\pi,2)^{u^+=0} \twoheadrightarrow \pi \oplus \pi$$

□

On peut ainsi écrire :

$$\Pi(\pi,2)^{u^+=0} = \pi \oplus \pi \oplus \xi$$

pour une certaine représentation $\xi$ lisse ; on montre que $\xi$ est nulle. Pour cela, on a besoin d'utiliser le résultat suivant, issu du modèle de Kirillov :

**Théorème 4.13.** *On dispose d'un plongement $P$-équivariant, canonique à scalaire près :*

$$\Pi(\pi,2)^{u^+=0} \hookrightarrow \mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi))^\Gamma$$

Admettons provisoirement ce théorème : on a alors une injection [33] :

$$\pi_c \oplus \pi_c \oplus \xi_c \hookrightarrow ((\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)^\Gamma)_c)^{\oplus 2} = (\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi))^\Gamma)^{\oplus 2}$$

Or, le théorème 2.37 montre que le terme de droite est isomorphe, en tant que $P$-représentations, à $\pi_c \oplus \pi_c$. Ainsi, on a $\xi_c = 0$, donc $\xi$ est fixée par l'unipotent supérieur. Mais il n'y a aucun vecteur non nul de $\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)^\Gamma$ fixé par l'unipotent supérieur ! Comme $\xi$ se plonge dans $(\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)^\Gamma)^{\oplus 2}$, on conclut : $\xi = 0$ et le plongement du théorème 4.13 induit un isomorphisme canonique $G$-équivariant :

$$\Pi(\pi,2)^{u^+=0} \simeq \pi \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi)$$

ce qui conclut.

**Preuve du théorème 4.13** La proposition suivante est le point de départ des constructions.

**Proposition 4.14.** *Soit $V \in \mathscr{V}(\pi)$. Le plongement $v \mapsto \phi_v$ induit un plongement $P$-équivariant :*

$$(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^{u^+=0} \hookrightarrow \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/N_{\mathrm{dif}}^+(V))^\Gamma$$

*Démonstration.* Par caractérisation des vecteurs lisses, on a :

$$(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^{u^+=0} = (\Pi(V)^{\mathrm{an}})^{(u^+)^2=a^+u^+=0}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$$

33. on rappelle que, si $Y$ est une représentation de $P$, alors $Y_c$ est le sous-module engendré par les $(1-u)v$, où $u$ parcourt l'unipotent supérieur et $v$ parcourt $Y$

En traduisant la condition $(u^+)^2 = a^+u^+ = 0$ du côté Kirillov, on obtient un plongement :

$$(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^{(u^+)^2=a^+u^+=0}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}} \hookrightarrow \mathrm{LP}\left(\mathbf{Q}_p^*, (t^{-2}D_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V))^{\nabla\circ t=0}\right)$$

Les descriptions

$$N_{\mathrm{dif}}^+(V) = L_\infty[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V) \text{ et } D_{\mathrm{dif}}^+(V) = tN_{\mathrm{dif}}^+(V) + L_\infty[[t]] \otimes_L \mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V))$$

donnent un isomorphisme $\Gamma$-équivariant :

$$t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V) \simeq (t^{-2}D_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V))^{\nabla\circ t=0}$$

Comme on a aussi, par propriété du modèle de Kirillov (théorème 2.37) :

$$\Pi(V)^{\mathrm{lisse}} \simeq \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^\times, N_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V))^\Gamma$$

On obtient finalement un plongement :

$$(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^{(u^+)^2=a^+u^+=0}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}} \hookrightarrow \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/N_{\mathrm{dif}}^+(V))^\Gamma$$

ce qui conclut. □

Soit $V \in \mathscr{V}(\pi)$ et soit un isomorphisme :

$$\alpha : D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M(\pi)$$

Alors $\alpha$ induit :

- Un isomorphisme de $\Gamma$-modules : $N_{\mathrm{dif}}^+(V) \simeq L_\infty[[t]] \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi)$, d'où un isomorphisme de $\Gamma$-modules :
$$t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/N_{\mathrm{dif}}^+(V) \simeq L_\infty(-1) \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi)$$
- Un isomorphisme $tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes\mathbf{P}^1 \simeq tN_{\mathrm{rig}}(\pi)\boxtimes\mathbf{P}^1$, d'où un plongement $(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^* \to tN_{\mathrm{rig}}(\pi) \boxtimes \mathbf{P}^1$. Son image est par définition $\Pi(\pi,0)^*$. On a ainsi, en transposant, un isomorphisme :
$$\Pi(\pi,0) \simeq \Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$$

Ainsi, en utilisant la proposition précédente, le choix de $V$ et $\alpha$ donne un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Pi(\pi,0)^{u^+=0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty(-1) \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi))^\Gamma \arrow[d] \\
(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^{u^+=0} \arrow[r] & \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/N_{\mathrm{dif}}^+(V))^\Gamma
\end{tikzcd}$$

Le théorème se reformule ainsi [34] :

**Proposition 4.15.** *La flèche en haut de ce diagramme ne dépend, à scalaire près, ni de $\alpha$, ni de $V \in \mathscr{V}(\pi)$.*

34. Se rappeler que, en tant que $P$-représentations, $\Pi(\pi,2)$ ne diffère de $\Pi(\pi,0)$ que par torsion par un caractère

*Démonstration.* À $V$ fixé, l'indépendance par rapport à $\alpha$ est immédiate car il n'y a, à scalaire près, qu'un isomorphisme entre $D_{\mathrm{pst}}(V)$ et $M(\pi)$. C'est plutôt l'indépendance en $V$ qui est difficile à établir. Il faut pour cela montrer une compatibilité avec les accouplements.
On rappelle la définition (pour $j \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$ assez grand) :

$$i_{j,n} = \varphi^{-n} \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{n-j} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : \Pi(\pi, 0)^* \to tL_\infty[[t]] \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi)$$

Alors, le théorème 2.35 donne :

**Lemme 4.16.** *Soit $V \in \mathscr{V}(\pi)$, soit $\alpha : D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M(\pi)$. Alors, pour $L \in \Pi(\pi, 0)^*$ et $v \in \Pi(\pi, 0)_c^{u^+=0}$, pour tout $n$ assez grand, on a :*

$$L(v) = \sum_{j \in Z} \{i_{j,n}(l), v(p^{-j})\}_{\mathrm{dif},V}$$

*On a vu $i_{j,n}(l)$ comme un élément de $tN_{\mathrm{dif}}^+(V) \simeq t(N_{\mathrm{rig}}(\pi))_{\mathrm{dif}}^+$, et $v$ comme un élément de $\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/N_{\mathrm{dif}}^+(V))^\Gamma$, par les constructions précédentes.*

Soient $V_1, V_2 \in \mathscr{V}(\pi)$. L'accouplement $\{,\}_{\mathrm{dif},V_j}$ est induit par l'isomorphisme $\Lambda^2 D_{\mathrm{pst}}(V_j) \simeq L$ : il est donc unique à scalaire près. Ainsi, notant $u$ l'isomorphisme [35] $u : D_{\mathrm{pst}}(V_1) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{pst}}(V_2)$, on dispose d'un scalaire $C \in L^*$ tel que :

$$\{u(m_1), u(x_1)\}_{\mathrm{dif},V_2} = C^{-1}\{m_1, x_1\}_{\mathrm{dif},V_1}$$

pour tout $m_1 \in tN_{\mathrm{dif}}^+(V_1)$ et $x_1 \in t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/N_{\mathrm{dif}}^+(V)$. Notons

$$\iota_i : \Pi(\pi, 0)^* \to \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty(-1) \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi))^\Gamma$$

l'isomorphisme induit par le couple $(V_i, \alpha_i)$. Soit $L \in \Pi(\pi, 0)^*$ et $v \in \Pi(\pi, 0)_c^{u^+=0}$ ; en utilisant le lemme précédent pour $V_1$ et $V_2$, on a, en voyant $i_{j,n}(L)$ dans $tN_{\mathrm{dif}}^+(V_1)$ :

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} \{i_{j,n}(L), (\iota_1(v) - C\iota_2(v))(p^{-j})\}_{\mathrm{dif},V}$$

Cela étant vrai pour tout $L \in \Pi(\pi, 0)^*$, on montre, en utilisant le théorème 2.35, [36] que $\iota_1 - C\iota_2$ est nulle sur $\Pi(\pi, 0)_c^{u^+=0}$ ; ainsi, son image est contenue dans les $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-invariants de $\mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty(-1) \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi))^\Gamma$ : ce sous-espace étant nul, on conclut. □

### 4.3.2 Description de $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$ (admis)

On utilisera le théorème suivant, dont la preuve utilise des arguments globaux :

**Théorème 4.17.** *On a :*

$$\dim \mathrm{Hom}_L(\pi^*, H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho) = 2$$

*Démonstration.* Voir des éléments de preuve dans la section suivante. □

35. ce dernier est unique à scalaire près, issu de la composée $D_{\mathrm{pst}}(V_1) \to M(\pi) \to D_{\mathrm{pst}}(V_2)$

36. construire $w \in \Pi(V_1)_c^{P-\mathrm{fini}}$ tel que $\phi_w(p^{-j}) = \iota_1(v) - C\iota_2(v))(p^{-j}$ : alors $w$ est annulé par $(\Pi(V_1)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_1)^{\mathrm{lisse}})^*$, donc lisse, puis nul.

### 4.3.3 Injectivité, et fin de la preuve des théorèmes

On prouve le théorème suivant :

**Théorème 4.18.** *Le morphisme* $(\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^* \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)$ *est un isomorphisme, et* $\Phi : \Pi(\pi,2)^* \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho$ *est injectif.*

En regardant les suites exactes ci-dessus, on obtient l'injectivité de $\Phi : \Pi(\pi,0)^* \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$.

*Démonstration.* On sait que le morphisme $(\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^* \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)$ est surjectif : en effet, c'est une simple conséquence de la surjectivité de $\Phi$. Or, en tant que $G$-représentations, le premier est isomorphe à $\pi^* \oplus \pi^*$ ; le théorème précédent permet de montrer que ce morphisme est injectif. Dès lors, on a bien un isomorphisme.
Soit $v \in \Pi(\pi,2)^*$ tel que $\Phi(v) = 0$. Alors $v$ est dans l'image de $u^+$. On peut ainsi écrire $v = u^+(v')\mathrm{d}z$, avec $v' \in \Pi(\pi,0)^*$. Alors $v'\mathrm{d}z$ est aussi dans le noyau de $\Phi$ : en effet, par $G$-équivariance, on a

$$\Phi(u^+(v')) = u^+\Phi(v') = 0$$

et $u^+$ est injective sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)$. En continuant, on prouve que $v$, vu comme élément de $\Pi(\pi,0)^*$, est dans l'image de $(u^+)^j$, pour tout $j$. Alors en écrivant $v = (z_1, z_2)$ vu dans $tN_{\mathrm{rig}}(\pi) \boxtimes \mathbf{P}^1$, on a :[37] $z_1 = 0$. Comme $\Phi(wv) = 0$, on a aussi $z_2 = 0$, et $v = 0$ ; on a bien l'injectivité désirée. $\square$

### 4.3.4 Preuve du théorème B

Comme $\Phi$ est bijectif, c'est bien un isomorphisme :

$$\Pi(\pi,0)^* \simeq \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$$

et le théorème A est prouvé. Il reste à prouver le théorème B.
On considère $\mathcal{L}$ une filtration sur $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$ ; il lui correspond une représentation :

$$V_{\mathcal{L}} = \mathrm{Fil}^0(M(\pi) \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{st}})^{\varphi=1,N=0}$$

(la filtration est induite par le plongement $M(\pi) \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \hookrightarrow M_{\mathrm{dR}}(\pi) \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$)
Notons $\Pi_{\mathcal{L}} = \Pi(V_{\mathcal{L}})$. L'énoncé suivant est un corollaire de la description donnée par le modèle de Kirillov :

**Corollaire 4.19.** La préimage de $\pi^* \otimes \mathcal{L}^\perp \subset (\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^*$ dans $\Pi(\pi,2)^*$ est $(\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}})^*$ (vu dans $\Pi(\pi,2)^*$ via le plongement du lemme 4.12).

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que la flèche $\Pi(\pi,2)^* \to (\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^*$ induit un isomorphisme :

$$d((\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}})^*)/d(\Pi(\pi,0)^*) \simeq \pi^* \otimes \mathcal{L}^\perp$$

On reprend les constructions du modèle de Kirillov juste avant, avec $V = V_{\mathcal{L}}$ ; on a un isomorphisme :

$$\Pi(\pi,2)^{u^+=0} \simeq \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi)) \simeq \pi \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi)$$

37. un élément non nul de $tN_{\mathrm{rig}}$ ne peut pas être indéfiniment divisible par $t$

Cela donne, en prenant le dual, l'ismorphisme :

$$(\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^* \simeq (\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi)))^* \simeq \pi^* \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi)^*$$

Il s'agit alors de montrer que cela induit un isomorphisme :

$$d((\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}})^*)/d(\Pi(\pi,0)^*) \simeq \left(\mathrm{LC}_c\left(\mathbf{Q}_p^*, \frac{L_\infty((t)) \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi)}{\mathrm{Fil}^0(L_\infty((t)) \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi))}\right)^\Gamma\right)^* \simeq \pi^* \otimes \mathcal{L}^\perp$$

Pour cela, il suffit de justifier la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\Pi(\pi,2)^{u^+=0} \arrow[r] \arrow[d] & d((\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}})^*)/d(\Pi(\pi,0)^*) \arrow[d] \\
\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi)) \arrow[r] & \mathrm{LC}_c\left(\mathbf{Q}_p^*, \frac{L_\infty((t))\otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi)}{\mathrm{Fil}^0(L_\infty((t))\otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi))}\right)^\Gamma
\end{tikzcd}$$

cette commutativité vient du fait que les deux isomorphismes verticaux proviennent du plongement $\Pi(V_{\mathcal{L}})^{P-\mathrm{fini}} \to \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, D_{\mathrm{dif}}^-(V_{\mathcal{L}}))^\Gamma$. □

On est maintenant en mesure de prouver le théorème. On rappelle le diagramme suivant, où les lignes sont exactes et $\Phi$ induit un isomorphisme de complexes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Pi(\pi,0)^* \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\Phi"] & \Pi(\pi,2)^* \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & (\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho \arrow[r, "d"] & \Omega^1(\Sigma_n)^\rho \arrow[r] & H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

L'image inverse de $\pi^*\otimes\mathcal{L}^\perp \subset H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$ dans $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho$ est isomorphe à l'image inverse de $\pi^*\otimes\mathcal{L}^\perp \subset (\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^*$ dans $\Pi(\pi,2)^*$ ; le corollaire montre que celle-ci est isomorphe à $(\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}})^*$ : cela conclut.

# 5 Constructions par voie globale, et compatibilité local–global

*«On peut aussi utiliser du global, mais c'est mauvais style...»* (Pierre Colmez)

*«Bien sûr, tout ceci est scandaleux : construire par voie globale transcendante quelque chose de local, quelle honte !»* (Jean–Pierre Serre, lettre à John Tate)

On donne ici (brièvement) les idées des constructions par voie globale nécessaires dans le rapport.

## 5.1 Théorème de Cerednik-Drinfeld

Soit $B$ une algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}$, déployée à l'infini et de discriminant $p\ell$, où $\ell \neq p$ est un nombre premier fixé ; soit $\overline{B}$ sa «sœur» c'est-à-dire une algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}$, non ramifiée en $p$ et ramifiée en l'infini, et isomorphe à $B$ en les autres places. Autrement dit :

$$B(\mathbf{R})^\times = \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}),\ B(\mathbf{Q}_p)^\times = D^\times \quad \text{et} \quad \overline{B}(\mathbf{R})^\times = \mathbf{H}^*,\ \overline{B}(\mathbf{Q}_p)^\times = G$$

Posons $K_p = 1 + p^n\mathcal{O}_D$ et soit $U \subset B^*(\mathbf{A}_f^p)$ un sous-groupe compact ouvert. À ces données correspond une courbe de Shimura sur $\mathbf{Q}$, qui classifie des surfaces abéliennes avec action de $\mathcal{O}_B$ et structure de niveau $K = U \cdot K_p$ : on la note $\mathrm{Sh}_n(U)$. Les $\mathbf{C}$-points de cette courbe sont donnés par :

$$\mathrm{Sh}_n(U)(\mathbf{C}) = B^*(\mathbf{Q})\backslash[(\mathbf{C} - \mathbf{R}) \times B^*(\mathbf{A}_f)/K]$$

On la voit comme une courbe sur $\mathbf{C}_p$. On peut aussi définir [38] $S^p(U) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f^p)/U$. Le théorème suivant est la proposition 5.4 de [CDN20] :

**Théorème 5.1** (Cerednik-Drinfeld). *Il existe une famille d'isomorphismes d'espaces rigides analytiques :*

$$\mathrm{Sh}_n(U)^{\mathrm{an}} \simeq \overline{B}^*(\mathbf{Q})\backslash\,(\mathscr{M}_n \times S^p(U))$$

*compatibles avec la variation de $U$ et $n$.*

## 5.2 Le calcul de $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$

La variété $B^*(\mathbf{Q})\backslash S^p(U)$ est suffisamment «simple» pour $U$ assez petit. On arrive ainsi, en utilisant une suite spectrale (remarque 5.5 de [CDN20]), puis un résultat d'analyse fonctionnelle (lemme 5.6 de *loc. cit.*) et en passant à la limite quand $U$ est petit, à un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{LC}(\overline{B}^*(\mathbf{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f))^*, H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho) \simeq H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_n)^\rho$$

Or, on connaît bien la $\pi$-partie de $\mathrm{LC}(\overline{B}^*(\mathbf{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f))$ ; et, en construisant une représentation automorphe de réduction $\pi$, on peut calculer la $\pi$-partie de $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_n)^\rho$ (c'est ici qu'on utilise les connaissances globales ! voir la proposition 5.2 de *loc. cit.* pour un énoncé précis).
En combinant tout cela, on arrive à un résultat plus précis que ce qui nous est nécessaire (voir proposition 5.7 de *loc. cit.*) :

**Proposition 5.2.** *On a un isomorphisme de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-modules :*

$$M_{\mathrm{dR}}(\pi) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{C}_p \simeq \mathrm{Hom}_G(\pi^*, H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho) \otimes_L \mathbf{C}_p$$

38. cela a un sens car $U \subset B^*(\mathbf{A}_f^p)$

## 5.3 Construction du morphisme $\Phi$

La construction de $\Phi : (\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}})^* \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ se fait selon les mêmes idées, mais en utilisant cette fois-ci des arguments sur l'algèbre de Hecke. Plus précisément, on montre un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{LA}(\overline{B}^*(\mathbf{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f))^*, \Omega^1(\Sigma_n)^\rho) \simeq \Omega^1(\mathrm{Sh}_K)^\rho$$

et on regarde la $\mathfrak{p}$-partie, pour un idéal maximal $\mathfrak{p} \subset A[1/p]$ associé à une bonne forme modulaire quaternionique, et où $A$ est le complété de l'algèbre de Hecke. La $\mathfrak{p}$-partie de droite étant non nulle par compatibilité locale-globale [39], on conclut quant à l'existence de $\Phi$.

# 6 Conjecture sur le bord

Soit $\mathscr{F}$ un fibré vectoriel sur $\Sigma_n$ (on prendra $\mathscr{F} = \mathcal{O}_{\Sigma_n}^\rho$). On note $\tau_n$ la composée de $\Sigma_n \to \Omega$ et de l'application $\lambda : \Omega \to I_{\mathbf{R}}$ de rétraction sur l'arbre de Bruhat-Tits $I_{\mathbf{R}}$ (voir section 1).
L'arbre est muni d'une distance, qui généralise le covolume [40], et d'une origine, correspondant au réseau $\mathbf{Z}_p^2 \subset \mathbf{Q}_p^2$. Pour $i \in \mathbf{N}$, notons $B_i$ la boule centrée en l'origine de rayon $i$.

**Définition 6.1.** Si $U$ est un ouvert de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, on note $V$ l'ouvert de l'arbre constitué de la réunion des demi-droites partant de l'origine aboutissant en un point de $U$. On définit alors :

$$\mathscr{F}^\partial(U) = \varinjlim_i \mathscr{F}(\tau_n^{-1}(V - B_i))$$

qui est un faisceau sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$.

On note $\mathscr{F}_\pi$ le faisceau associé à $\mathcal{O}_{\Sigma_n}^\rho$.

Par dualité de Serre, on a un isomorphisme :

$$\Omega^1(\Sigma_n)^* \simeq H_c^1(\Sigma_n, \mathcal{O})$$

Comme $\Sigma_n$ est une variété Stein, on a en outre, une suite exacte (la limite porte sur les reunions finies d'affinoïdes admissibles de $\Sigma_n$) :

$$0 \to \mathcal{O}(\Sigma_n) \to \varprojlim_Z \mathcal{O}(\Sigma_n - Z) \to H_c^1(\Sigma_n, \mathcal{O}) \to 0$$

D'où, en prenant la $\rho$-partie, une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho \to \mathscr{F}_\pi(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)) \to (\Omega^1(\Sigma_n)^\rho)^* \to 0$$

**Conjecture 6.2.** Le faisceau $\mathscr{F}_\pi$ est exactement le faisceau $U \mapsto tN_{\mathrm{rig}}(\pi) \boxtimes U$. De plus, la suite exacte précédente s'identifie à la suite exacte :

$$0 \to \Pi(\pi, 0)^* \to tN_{\mathrm{rig}}(\pi) \boxtimes \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \Pi(\pi, 2) \to 0$$

Si cette conjecture était vraie, alors l'accouplement $\{,\}_{\mathbf{P}^1}$ aurait, en restriction à $tN_{\mathrm{rig}}(\pi) \boxtimes \mathbf{P}^1$, une interprétation géométrique comme une dualité de Poincaré $p$-adique.

39. On ne détaille pas cette technique ici : l'énoncé important étant le théorème 5.4 de [DB17]
40. pour deux réseaux $V_1, V_2$, il existe $\alpha$ de norme minimale tel que $\alpha V_1 \subset V_2$ ; la distance entre $V_1$ et $V_2$ est le logarithme du cardinal du quotient de $V_2$ par $\alpha V_1$.

# 7 Annexe

## 7.1 Schémas formels, groupes formels, variétés Stein

### 7.1.1 Schémas formels

**Définition 7.1.** Soit $A$ un anneau topologique. On dit que $I$ est un idéal de définition si c'est un idéal ouvert tel que, pour tout voisinage $V$ de 0, il existe $n \geq 1$ tel que $I^n \subset V$.
On dit que $A$ est linéairement topologisé si il existe une base de voisinage de 0 formée d'idéaux.
On dit que $A$ est pré-admissible s'il est linéairement topologisé et possède un idéal de définition. Un anneau $A$ est dit admissible s'il est préadmissible et qu'il est séparé et complet.

Si $A$ est préadmissible complet, alors (EGA, corollaire 7.1.7) il admet un plus grand idéal de définition

**Définition 7.2.** On dit que $A$ est (pré)-adique s'il est (pré)-admissible et qu'il existe un idéal de définition $I$ de $A$ tel que $(I^n)$ forme une base de voisinage de 0 dans $A$.

Dans ce cas, on a un isomorphisme d'espaces topologiques $A \simeq \varprojlim A/I^{n+1}$.

**Définition 7.3.** Soit $A$ un anneau adique, d'idéal de définition $I$ ; notons $X = \mathrm{Spec}(A)$ le schéma affine associé. On peut construire l'espace annelé $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ défini par $\mathfrak{X} = V(I)$, et $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = \varprojlim \mathcal{O}_X/I^{n+1}$. L'espace $\mathfrak{X}$ ainsi construit est appelé schéma formel affine associé à $A$, et est noté $\mathrm{Spf}(A)$

On définit ainsi un schéma formel comme un espace annelé $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ admettant un recouvrement ouvert $(\mathfrak{U}_i)$ tel que $(\mathfrak{U}_i, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\big|_{\mathfrak{U}_i})$ est un schéma formel affine.
On définit un morphisme $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ comme un morphisme d'espaces annelés, dont la composante sur les faisceaux est continue.

Si $X$ est un pré-schéma localement noethérien et $X'$ est une partie fermée de $X$, alors on construit le complété de $X$ le long de $X'$, dont le faisceau structural est la restriction à $X'$ du faisceau[41] $\varprojlim_{\Phi} \mathcal{O}_X/I$ : en particulier, si $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $X' = V(I)$, alors $X' = \mathrm{Spf}(\widehat{A})$, où $\widehat{A}$ est le séparé complété de $A$ pour la topologie $I$-adique.

**Définition 7.4.** Un morphisme $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est fini, étale, lisse, etc. si pour tout schéma $Z$ et tout morphisme $Z \to \mathfrak{Y}$, le produit fibré $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} Z$ est un schéma et la flèche $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} Z \to Z$ induite est finie, étale, lisse, etc.

### 7.1.2 Groupes formels, groupes $p$-divisibles

Soit $S$ un schéma (on prendra souvent $S = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)$ ou $\mathrm{Spec}(\breve{\mathbf{Z}}_p)$).

41. $\Phi$ est l'ensemble des faisceaux cohérents d'idéaux $I$ tels que $O_X/I$ soit à support dans $X'$

**Groupes formels**

**Définition 7.5.** Un groupe formel (commutatif) $X$ de dimension $n$ sur $S$ est un foncteur $\mathrm{Nil}_S \to \mathrm{Ab}$ des $\mathcal{O}_S$-algèbres nilpotentes vers les groupes abéliens, dont la composition avec le foncteur d'oubli $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Set}$ est simplement $N \mapsto \bigoplus_{i=1}^n N$.

Pour $S = \mathrm{Spec}(A)$, cela revient à donner une loi de groupe formel de dimension $n$ (c'est-à-dire une série formelle à coefficients dans $A$ et vérifiant les axiomes de groupes) : pour la retrouver, il suffit de regarder les algèbres $(T_1, \ldots, T_n)A[T_1, \ldots, T_n]/(T_1, \ldots, T_n)^m$, pour $m \geq 2$.
Un groupe formel donne naturellement une structure d'algèbre de Lie [42].

**Groupes $p$-divisibles** On rappelle qu'un morphisme $S' \to S$ est dit fppf s'il est fidèlement plat et de présentation finie ; on peut alors considérer la pré-topologie de Grothendieck sur $S$, donnée par les recouvrements finis fppf. La topologie de Grothendieck induite est appelée topologie fppf.
Un $S$-groupe $G$ est un faisceau fppf en groupes abéliens sur le site des schémas sur $S$.

**Définition 7.6** (Grothendieck)**.** Un groupe $p$-divisible sur $S$ est un $S$-groupe satisfaisant aux trois propriétés suivantes :

i) Le morphisme de multiplication par $p : G \to G$ est un épimorphisme.

ii) $G$ est de $p$-torsion, i.e. : $G \simeq \varinjlim G(n)$, où $G(n) = \ker(p^n : G \to G)$.

iii) Les $S$-groupes $G(n)$ sont représentables par des $S$-groupes finis localement libres (sur $S$).

Dans le cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, la première condition donne que pour tout $s \in G$, il existe $B/A$ plat et de présentation finie tel que $s \otimes 1 \in G(B)$ soit dans l'image de $p$. On montre que le rang de $G(1)$ est de la forme $p^h$, avec $h : S \to \mathbf{N}$ localement constante, qu'on appelle hauteur de $G$.
On a une définition équivalente :

**Définition 7.7** (Tate)**.** Un groupe $p$-divisible sur $S$ est un système projectif $(G_n)_{n\geq 1}$ de $S$-groupes finis localement libres, tels que :

1. Pour tout $n \geq 1$, $G_n = G_{n+1}(n)$.
2. Le rang de la fibre de $G_n$ au-dessus de $s$ est $p^{nh(s)}$, où $h : S \to \mathbf{N}$ est localement constante.

À partir d'un groupe formel, on construit un groupe $p$-divisible, en définissant $G_n$ comme l'ensemble des points de $p^n$-torsion. Remarquer que cette construction est "injective" : deux groupes formels distincts donneront des groupes $p$-divisibles distincts, voir [Ber20].

42. en prenant $m = 2$ au-dessus

**Quasi-isogénies**

**Définition 7.8.** Soient $G, G'$ deux groupes $p$-divisibles sur $S$. On dit que $f : G \to G'$ est une isogénie si c'est un épimorphisme fppf dont le noyau est fini et localement libre.

**Exemple 7.9.** Par hypothèse, la multiplication par $p$ est une isogénie.

Le groupe $\mathrm{Hom}_S(G, G')$ est donc un $\mathbf{Z}_p$-module sans torsion. On note $\underline{\mathrm{Hom}}_S(G, G')$ le faisceautisé des germes de morphismes.

**Définition 7.10.** Une quasiisogénie est un élément $\rho \in \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, G')$ tel que, localement sur $S$, il existe $n \geq 1$ tel que $p^n \rho$ est une isogénie.

### 7.1.3 Variétés Stein

**Définition 7.11.** Si $X$ est un espace rigide sur $\mathbf{C}_p$, on dit que $X$ est Stein s'il existe un recouvrement croissant admissible $(X_m)$ par des ouverts affinoïdes tels que $\mathcal{O}(X_{m+1}) \to \mathcal{O}(X_m)$ soit d'image dense pour tout $m$.

**Proposition 7.12.** *Pour tout $n$, $\Sigma_n$ est une variété Stein.*

**Proposition 7.13.** *Si $X$ est Stein, alors le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}(X)$ réalise une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux cohérents sur $X$ et celle des $\mathcal{O}(X)$-modules coadmissibles.*

## 7.2 Analyse fonctionnelle

**Définition 7.14.** Un espace vectoriel topologique $p$-adique est dit de Fréchet s'il est localement convexe, métrisable, et complet. Un espace LF est une limite inductive dénombrable d'espaces de Fréchet.

**Théorème 7.15** (de l'image ouverte). *Si $E$ et $F$ sont deux Fréchets, et $f : E \to F$ est une application linéaire continue surjective, alors $f$ est ouverte.*

**Lemme 7.16.** *Soit $V$ un espace vectoriel localement convexe sur un corps sphériquement complet. Une suite de $V$ converge vers $0$ si et seulement si elle converge faiblement vers $0$.*

# Références


[BC91] J.-F. Boutot et H. Carayol. « Uniformisation $p$-adique des courbes de Shimura : les théorèmes de Cerednik et Drinfeld ». In : *Astérisque* 196 (1991), p. 45-158.

[Ber02] L. Berger. « Représentations $p$-adiques et équations différentielles ». In : *Invent. Math.* 148.2 (2002), p. 219-284.

[Ber08] L. Berger. « Équations différentielles et $(\varphi, N)$-modules filtrés ». In : *Astérisque* 319 (2008), p. 13-38.

[Ber20] L. Berger. « Rigidity and unlikely intersections for formal groups ». In : *Acta Arith.* 195.3 (2020), p. 305-312.

[CD14] P. Colmez et G. Dospinescu. « Complétés universels de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ». In : *Algebra & Number Theory* 8 (2014), p. 1447-1519.

[CDN20] P. Colmez, G. Dospinescu et W. Niziol. « Cohomologie $p$-adique de la tour de Drinfeld : le cas de la dimension 1 ». In : *J. AMS* 33 (2020), p. 311-362.

[CDP14] P. Colmez, G. Dospinescu et V. Paskunas. « The p-adic local Langlands correspondance for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ». In : *Cambridge Journal of Mathematics* 2.1 (2014).

[Col08] P. Colmez. « Représentations triangulines de dimension 2 ». In : *Astérisque* 319.6 (2008), p. 1447-1519.

[Col10a] P. Colmez. « $(\varphi, \Gamma)$-modules et représentations du mirabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ». In : *Astérisque* 330 (2010), p. 61-153.

[Col10b] P. Colmez. « Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et $(\varphi, \Gamma)$-modules ». In : *Astérisque* 330 (2010), p. 281-509.

[Col19] P. Colmez. « Correspondance de Langlands locale p-adique et changement de poids ». In : *J.EMS* 21 (2019), p. 797-838.

[DB17] G. Dospinescu et A.-C. Le Bras. « Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands $p$-adique ». In : *Annals of Mathematics 321-411* 186.2 (2017), p. 321-411.

[Dos12] G. Dospinescu. « Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale $p$-adique ». In : *Mathematische Annalen* 354 (2012), p. 627-657.

[Dos14] G. Dospinescu. « Equations différentielles $p$-adiques et modules de Jacquet analytiques ». In : *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 414.Automorphic Forms and Galois Representations Vol. 1 (2014), p. 359-374.

[Dos15] G. Dospinescu. « Extensions de Représentations de de Rham et vecteurs localement algébriques ». In : *Compositio Math.* 8 (2015), p. 1462-1498.

[Dri76] V.G. Drinfeld. « Coverings of $p$-adic symmetric domains ». In : *Func. Anal. and Appl.* 10 (1976), p. 107-115.

[FGL08] L. Fargues, A. Genestier et V. Lafforgue. *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld.* T. 262. Progress in Mathematics, 2008.

[HG94] M. J. Hopkins et B. H. Gross. « Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space ». In : *Contemporary Mathematics* 156 (1994).

[Ked10] K. Kedlaya. « $p$-adic differential equations ». In : *Cambridge Studies in Avanced Mathematics* 125 (2010).

[KPX14] K. Kedlaya, J. Potharst et L. Xiao. « Cohomology of arithmetic families of $(\varphi, \Gamma)$-modules ». In : , *J. Amer. Math. Soc* 27 (2014), p. 1043-1115.

[RZ96] M. Rapoport et T. Zink. *Period Spaces for p-divisible Groups*. Sous la dir. de Princeton University Press. T. 141. Ann. Math. Stud., 1996.

[ST03] P. Schneider et J Teitelbaum. « Algebras of p-adic distributions and admissible representations ». In : *Invent. Math.* 153 (2003), p. 145-196.

[ST97] P. Schneider et J Teitelbaum. « An integral transform for $p$-adic symmetric spaces ». In : *Duke Math. Journal* 86 (1997), p. 391-433.

[SW13] P. Scholze et J. Weinstein. « Moduli of $p$-divisible groups ». In : *Camb. J. Math.* 1.2 (2013), p. 145-237.