Formes symétriques, représentations du groupe symétrique, et restaurants chinois

Benjamin

Résumé

On calcule l'espace des formes symétriques et antisymétriques sur $\mathbf{C}^n$, en les interprétant comme des dimensions isotypiques d'une représentation canonique, ce qui ramène à un problème combinatoire. L'algorithme dit des «restaurants chinois» permet de calculer la valeur cherchée.

I – Les formes n-linéaires, et l'action de $\mathfrak{S}_n$

Soit $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux entiers. Notons $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. L'objectif de ce mini-article est de répondre à la question suivante :

Quelle est la dimension des formes n-linéaires symétriques sur $\mathbf{C}^m$? Et alternées ?

On rappelle que si $f : (\mathbf{C}^m)^n \to \mathbf{C}$ est une forme n-linéaire, elle est dite *symétrique* si :

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

et, en notant $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ le morphisme signature, elle est dite *alternée* si :

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n)$$

(pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{C}^m$ et toute permutation σ).
Comme les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$, cela revient à dire que permuter deux variables ne change pas (*resp* fait prendre un signe moins à) la valeur de f.

Précisons un peu ce fait : notons

$$V := \{\text{formes } n - \text{linéaires sur } \mathbf{C}^m\}$$

On a une **action** du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur V, donnée par [1] :

$$(\sigma \cdot f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$$

Les formes symétriques sont alors exactement les points fixes de l'action, mais les formes alternées sont plus compliquées à décrire «naturellement».

Que peut-on dire de cette action ? On remarque que la formule donnant $\sigma \cdot f$ est linéaire en f [2]. Autrement dit, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, l'application $f \in V \mapsto (\sigma \cdot f) \in V$ est un endomorphisme linéaire de V :

1. pour une explication du σ^{-1} (et pas σ), on renvoie à l'annexe B
2. et en $x_1 \ldots x_n$, évidemment !

notons $\rho(\sigma) : V \to V$ cette application [3]. On dit alors que ρ est une **représentation** du groupe $\mathfrak{S}_n$.

La théorie (cf annexe A) nous dit alors que notre représentation se *décompose* en somme d'irréductibles. Autrement dit, notant ρ_i les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$, on peut écrire :

$$V = \bigoplus_i V_{\rho_i}$$

On note $\chi(\sigma) = \mathrm{Tr}(\rho(\sigma))$ le *caractère* de notre représentation. Alors :

$$\dim(V_{\rho_i}) = \langle \chi, \chi_i \rangle = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi(\sigma)\overline{\chi_i(\sigma)}$$

Revenons à nos moutons : on cherche la dimension de l'espace des formes symétriques Sym $\subset V$, et celle des formes alternées Alt $\subset V$. Il s'avère qu'on a deux représentations irréductibles de dimension 1 de $\mathfrak{S}_n$, qui sont :

- la représentation triviale, associée à l'action triviale sur $\mathbf{C}$: $\sigma \cdot z = z$: on la note $\mathbf{1}$;
- la représentation signature sur $\mathbf{C}$, donnée par : $\sigma \cdot z = \varepsilon(\sigma) z$: on la note (par abus) ε.

Alors on a :

$$\text{Sym} = V_{\mathbf{1}} \text{ et Alt} = V_\varepsilon$$

ce qui revient à dire que les formes symétriques sont celles qui sont multpliées par 1, et les antisymétriques par $\varepsilon(\sigma)$. On en déduit alors les formules :

$$\dim(\text{Sym}) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi(\sigma)$$

$$\dim(\text{Alt}) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\chi(\sigma)$$

Il reste maintenant à expliciter le terme $\chi(\sigma) = \mathrm{Tr}(\rho(\sigma))$.

II–Calcul du caractère

Nous voulons calculer la trace de l'endomorphisme $\rho(\sigma)$. Pour cela, nous allons fixer une base de V, et regarder la matrice de $\rho(\sigma)$ dans cette base.
Soit $e_1, \ldots e_m$ la base canonique de $\mathbf{C}^m$. Pour un n-uplet $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ d'entiers compris entre 1 et m, on note :

$$e^\star_{\mathbf{k}} : \left(\begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{1,m} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ \vdots \\ x_{n,m} \end{pmatrix} \right) \in (\mathbf{C}^m)^n \longmapsto x_{1,k_1} \ldots x_{n,k_n}$$ [4]

Ces éléments forment une base de V, de cardinal mn.
Alors, on vérifie (cf annexe B pour une interprétation) :

$$\sigma \cdot e^\star_{\mathbf{k}} = e^\star_{\sigma \cdot \mathbf{k}}$$

3. On vérifie alors que $\sigma \mapsto \rho(\sigma)$ est un morphisme de groupes $\mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}(V)$
4. Dit autrement, notant $e^\star_1, \ldots, e^\star_m$ la base duale, on pose $e^\star_{\mathbf{k}} = e^\star_{k_1} \otimes \ldots \otimes e^\star_{k_n}$, en identifiant V avec $((\mathbf{C}^m)^\star)^{\otimes, n}$

où $\sigma \cdot \mathbf{k} = (k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)})$.
Autrement dit, la matrice de $\rho(\sigma)$, dans cette base, est une matrice ayant un seul 1 par ligne et par colonne, et des 0 partout ailleurs [5]. Ainsi, $\mathrm{Tr}(\rho(\sigma))$ est le nombre de 1 dans la diagonale, ce qui correspond au nombre de n-uplets $\mathbf{k}$ fixés par σ.
Un calcul permet de montrer qu'il y en a m^{c_σ}, où c_σ est le *nombre de cycles* de σ. On en déduit :

$$\chi(\sigma) = m^{c_\sigma}$$

et les formules précédentes deviennent :

$$\dim(\mathrm{Sym}) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} m^{c_\sigma}$$

$$\dim(\mathrm{Alt}) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m^{c_\sigma}$$

Remarque 1. *Prenons $n = 2$. On a alors $\dim(Sym) = \frac{1}{2}(m^2 + m) = \frac{m(m+1)}{2}$ et $\dim(Alt) = \frac{1}{2}(m^2 - m)$, formules bien connues de qui a déjà étudié les formes bilinéaires ou quadratiques. En particulier, la décomposition $V = Sym \oplus Alt$ vient du fait que $\mathbf{1}$ et ε sont les seules représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_2$.*

Remarque 2. *Si $m = n$, un résultat «à la main» de L1 montre que $Alt = Vect(\det)$, d'où l'on en déduit la formule :*

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) n^{c_\sigma} = 1$$

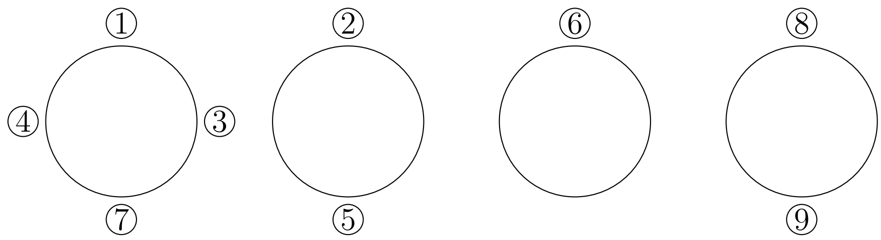
III–Restaurants chinois

L'objectif de cette section est de calculer le terme de droite des formules précédentes. L'idée est d'interpréter le terme comme une moyenne.

Soit Σ une variable aléatoire sur $\mathfrak{S}_n$ suivant une loi uniforme. Les formules précédentes permettent d'écrire :

$$\dim(\mathrm{Sym}) = \mathbb{E}(m^{c_\Sigma}) \text{ et } \dim(\mathrm{Alt}) = \mathbb{E}(\varepsilon(\Sigma) m^{c_\Sigma})$$

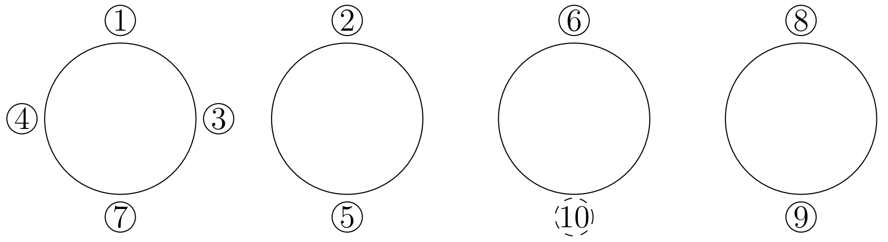
Ainsi, il nous suffit (presque) de connaître la loi de la variable c_Σ (qui est une bête loi à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$) pour conclure !
Pour comprendre la loi de c_Σ, on doit comprendre comment *simuler* la variable aléatoire Σ.
Une manière naïve serait d'énumérer les $n!$ permutations, et d'en choisir une avec probabilité $\frac{1}{n!}$; le problème est que $n!$ devient très vite très grand, ce qui est prohibitif en terme de temps de calcul.
Raisonnons autrement, en nous concentrant sur les cycles.
Définissons un restaurant chinois [6] comme un ensemble de tables rondes, avec des gens assis autour, numérotés de 1 à n. Voici un exemple, avec $n = 9$:



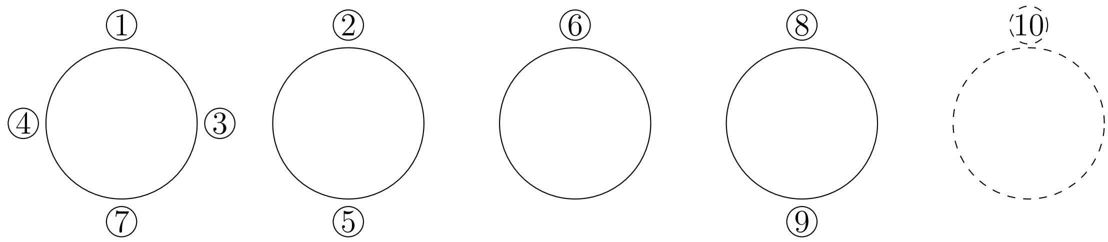
5. On appelle une telle matrice une matrice de permutation ; normalement, vous voyez pourquoi à ce stade (penser à une représentation de $\mathfrak{S}_n$ de dimension n)
6. Outre Manche, on parle de *chinese restaurant process*

À un restaurant, on peut associer une permutation et réciproquement : dans l'exemple, la permutation est : $(1374)(25)(6)(89)$. Le nombre de cycles est le nombre de tables dans le restaurant.
Supposons que Σ_{n-1} suive une loi uniforme sur $\mathfrak{S}_{n-1}$. On tire alors U_n suivant une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ (indépendante de Σ_{n-1}), qui sera le voisin de table à gauche de l'invité n. Voici deux exemples de simulations où l'on part de l'exemple précédent, avec $n = 10$ et U_n vaut 6 pour le premier, et 10 pour le second.

$(U_n = 6)$



$(U_n = 10)$



On montre qu'on obtient ainsi, en posant $\Sigma_n = \Sigma_{n-1} \circ (n\ U_n)$, une loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. On a ainsi une méthode pour simuler Σ : on tire $U_1, \dots, U_n$ indépendantes, telle que pour tout i, U_i suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, i\}$. On pose alors $\Sigma = (1\ U_1) \dots (n\ U_n)$.
Combien notre permutation a-t-elle de cycles ? On crée un cycle à l'étape i si et seulement si $U_i = i$. On note $B_i = \mathbf{1}_{(U_i = i)}$: les B_i sont des variables indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. Ainsi, on a :

$$c_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} B_i$$

De plus, la signature de Σ_n est l'opposé de celle de Σ_{n-1}, sauf si $U_n = n$. On a donc :

$$\varepsilon(\Sigma) = (-1)^{n - \sum_{i=1}^{n} B_i} = (-1)^{n - c_\Sigma}$$

On peut alors conclure :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(m^{c_\Sigma}\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} m^{B_i}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(m^{B_i}) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{i} + \frac{m}{i}\right) \\
&= \binom{m+n-1}{n}
\end{aligned}$$

et, de même :

$$\mathbb{E}\left(\varepsilon(\Sigma) m^{c_\Sigma}\right) = \binom{m}{n}$$

On a ainsi une réponse à notre question initiale :

$$\dim(\text{Sym}) = \binom{m+n-1}{n} \text{ et } \dim(\text{Alt}) = \binom{m}{n}$$

IV–Vers une décomposition totale ?

On a donc déterminé les multiplicités des deux représentations de degré 1 dans V. Une question naturelle, pour prolonger, serait alors de finir la décomposition, à savoir de trouver *toutes* les multiplicités. Et, si possible, d'interpréter un sous espace stable associé.
Cela correspond à décomposer la fonction $\sigma \mapsto m^{c_\sigma}$ en somme de caractères. On peut traiter un exemple pour $n = 3$, en notant η la représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$ de dimension 2 [7] :

$$m^{c_\sigma} = \binom{m+2}{3} \times 1 + \binom{m}{3} \varepsilon(\sigma) + \binom{m+1}{3} \chi_\eta(\sigma)$$

Mais il y a ici deux problèmes :

- d'abord, en toute généralité, on ne connaît pas facilement la table de caractères de $\mathfrak{S}_n$;
- ensuite, même en connaissant un caractère, le calcul de sa multiplicité n'est pas simple (on peut le faire en fixant le n, mais les calculs deviennent sur-exponentiellement prohibitifs).

Dans un prochain article, nous verrons comment pallier à ces deux difficultés, à l'aide d'un outil puissant : les *tableaux de Young*.
En attendant, voici un petit exercice :

Exercice :

- Montrer que la représentation $\mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, de permutation des variables ($\sigma \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$), se décompose en $V_\mathbf{1} \oplus V'$, où $V_\mathbf{1}$ est la droite vectorielle engendrée par $(1, \ldots, 1)$ et V' est irréductible (on appelle cette dernière la représentation standard). Calculer le caractère de V'.
- En utilisant l'algorithme des restaurants chinois, calculer la mutliplicité de V' dans la représentation V (sur les formes n-linéaires) qui nous intéresse.

Annexe A– rappels de quelques résultats sur les représentations

Soit G un groupe fini. Une représentation est une action linéaire de G sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel V de dimension finie, ou, ce qui revient au même, un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.
On dit qu'un sous-espace $W \subset V$ est une sous-représentation s'il est stable par tous les éléments de G.
On dit que deux représentations V et V' de G sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $f : V \to V'$ d'espaces vectoriels faisant commuter le diagramme, i.e. tel que $f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$ pour tout $g \in G$.

7. qu'on peut obtenir en faisant agir $\mathfrak{S}_3$ sur le triangle équilatéral

Le lemme de Maschke affirme qu'il existe des représentations irréductibles de G, notées ρ_i, et des sous-espaces $V_i^{(j)}$, qui sont stables sous l'action de G, tels que :

$$V = \bigoplus_i \left(\bigoplus_{j=1}^{m_i} V_i^{(j)} \right)$$

et, pour tout i, pour tout j, $V_i^{(j)}$ est stable sous l'action de G et vérifie : $\rho\big|_{V_i^{(j)}} = \rho_i$. On a alors : $m_i = \langle \chi, \chi_i \rangle$, où $\chi = \mathrm{Tr}(\rho)$, $\chi_i = \mathrm{Tr}(\rho_i)$ et :

$$\langle \chi, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi_i(g)}$$

Annexe B– construction naturelle d'actions

Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de la catégorie des ensembles (par exemple, la catégorie des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels de dimension finie). On note $\mathcal{C}^{op}$ la catégorie avec les mêmes objets dont on a renversé les flèches.
Soit F un foncteur à n variables, éventuellement contravariant en certaines, à valeurs dans $\mathcal{C}$. Autrement dit, F est un foncteur d'un produit de catégories parmi $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^{op}$ vers $\mathcal{C}$. On peut par exemple penser au foncteur à 2 variables Hom, contravariant en la première et covariant en la seconde variable.
Supposons qu'un groupe G agisse sur $V_1, \ldots, V_n$ par morphismes de $\mathcal{C}$; alors on a une action canonique de G^n sur $F(V_1, \ldots, V_n)$, et donc, en restreignant à la diagonale, on a une action canonique de G sur $F(V_1, \ldots, V_n)$. On verra alors apparaître une inversion pour chaque variable contravariante ; ainsi, pour l'exemple précédent, si V et W sont deux représentations linéaires de G, on a une action de G sur $\mathrm{Hom}(V, W)$, donnée par :

$$(g \cdot f)(x) = g \cdot (f(g^{-1}x))$$

Ainsi, on retrouve l'action par permutation de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbf{K}^n$ en identifiant $\mathbf{K}^n \simeq \mathbf{K}^{[\![1,n]\!]}$. De même, on retrouve l'action sur les formes n-linéaires, en restreignant celle sur les fonctions $(\mathbf{C}^m)^n \to \mathbf{C}$

Un avantage certain de procéder ainsi, c'est que les transformations naturelles sont alors compatibles. Prenons F et H deux n-foncteurs de $\mathcal{C}$, la catégorie des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit Φ une transformation naturelle de F vers H (dans la catégorie $\mathcal{C}$), et soit $V_1, \ldots, V_n$ des représentations du groupe G. Alors Φ induit un isomorphisme de représentations entre $F(V_1, \ldots, V_n)$ et $G(V_1, \ldots, V_n)$. On a ainsi les isomorphismes de représentation suivants :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(V, W) &\simeq V^* \otimes W \\
\mathrm{Bil}(V, V; \mathbf{C}) &\simeq \mathrm{Hom}(V, V^*) \\
\Lambda^n(V \oplus W) &\simeq \bigoplus_{a=0}^{n} \Lambda^a V \otimes \Lambda^{n-a} W
\end{aligned}$$