1 (φ, N)-modules filtrés et st

Rappel : $W(k) = K_0$, muni d'un frobenius σ.

Définition 1.1. (φ, N)-module sur K_0 = K_0-espace vectoriel D de dimension finie et

$$\varphi, N : D \longrightarrow D$$

1. φ est bijective et semi-linéaire pour σ ;
2. N est linéaire nilpotent ;
3. $N\varphi = p\varphi N$.

Morphismes = ceux qui commutent à φ, N.

Exemple 1.2. En dimension 1 : $D \sim D_\lambda$, pour un $\lambda \in K_0^\star$, déf par :

$$D_\lambda = K_0 e_\lambda \qquad N = 0 \qquad \varphi(e_\lambda) = \lambda e_\lambda$$

Proposition 1.3. *La catégorie des (φ, N)-modules est :*

(i) abélienne

(ii) munie de $\otimes$, objet unité K_0

(iii) objet dual : $\mathrm{Hom}_{ev}(D, K_0)$

Démonstration. (i) C'est une catégorie de modules à gauche sur une certaine algèbre non commutative à deux générateurs (φ et N), quotienté par la relation 3.

(ii) Définir $\varphi_{D_1 \otimes D_2} = \varphi_1 \otimes \varphi_2$; $N_{D_1 \otimes D_2} = N_1 \otimes 1 + 1 \otimes N_2$.

(iii) $\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\eta} & K_0 \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ D & \xrightarrow{\varphi^*(\eta)} & K_0 \end{array}$ et $N^* = -{}^tN$

□

Remarque 1.4. L'hypothèse "N nilpotent" est superflue, car la condition 3. et la bijectivité de φ l'assurent.

Démonstration. Par les noyaux itérés, la suite des $(N^n(D))$ stationne : comme l'image de N^n est φ-stable, on peut alors supposer N et φ bijectifs.
On a, en notant Q la matrice de φ et N la matrice de N dans la même base :

$$QN = pQ\sigma(N)$$

donc $\det(N) = p^{\dim(D)} \det(N)$, absurde. □

Définition 1.5. Un (φ, N)-module filtré sur K (et pas K_0) est la donnée d'un (φ, N)-module D sur K_0 tel que $D_K = D \otimes_{K_0} K$ est muni d'une filtration décroissante, qui est séparée exhaustive, ie :

$$\bigcap_{i \in \mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^i D_K = 0 \qquad \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^i D_K = D_K$$

Les morphismes = ceux de (φ, N)-modules qui donnent des morphismes filtrés.

Exemple 1.6. En dimension 1, tout (φ, N)-module filtré est donné par $\lambda \in K_0^\times$ et $i \in \mathbf{Z}$; noté $D_{\lambda,i}$, tel que :

$$\varphi = \lambda \qquad \mathrm{Fil}^j(D_K) = \begin{cases} D_K & \text{si} \quad j \leq i \\ 0 & \text{si} \quad j > i \end{cases}$$

Remarque 1.7. Attention dans la définition, la filtration n'est pas sur K_0 mais bien sur K. Je crois que c'est pareil que pour les motifs...
Bien sûr, une filtration sur D en donne une sur D_K ; mais la réciproque est fausse. Elle est néanmoins vraie en dim 1.

Proposition 1.8. *Si V est une représentation de Rham, alors $D_{\mathrm{st}}(V)$ est un (φ, N)-module filtré.*

Démonstration. On rappelle que $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ est muni de $N = -\frac{d}{du}$, et de φ via $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$. On en déduit une structure de (φ, N)-module sur $D_{\mathrm{st}}(V)$ en regardant :

$$\varphi \otimes 1 : \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes V \to \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes V$$

$$N \otimes 1 : \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes V \to \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes V$$

comme ces deux applications commutent à l'action de $\mathscr{G}_K$ (la première par naturalité du frobenius sur les vecteurs de Witt ; la deuxième par Enguerrand), elles stabilisent $D_{\mathrm{st}}(V)$.
Filtration : on a une injection :

$$D_{\mathrm{st}}(V) \otimes_{K_0} K \hookrightarrow D_{\mathrm{dR}}(V)$$

qui donne la filtration par restriction de celle sur $D_{\mathrm{dR}}(V)$. □

Remarque 1.9. V est cristalline ssi $N = 0$ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ (et en général : $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)^{N=0}$).

Remarque 1.10. $\mathbf{D}_{\mathrm{st}} : \mathrm{Rep}_{\mathrm{dimfin}}(\mathscr{G}_K) \to \mathrm{MF}^{(\varphi,N)}$ est un $\otimes$-foncteur additif entre catégories abéliennes (déjà vu avec Rustam).

2 Lien filtration/frobenius sur les anneaux de périodes

Quelques rappels :

$$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ = (\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[1/p])^{\wedge,\xi} \qquad \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[1/t]$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+ = \{x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+, x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{\xi^n}{n!},\ x_n \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[1/p]\} \qquad \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+[1/t]$$

On a en particulier $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+ \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, donc $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. On définit une filtration sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ par restriction de celle sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$.

Remarque 2.1. On a :

$$\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+} \subset \mathrm{Fil}^{0}\,\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \cap \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$$

mais ce n'est pas une égalité !
Si

$$x = t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{\xi^n}{n!} \in t^{-1}\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+}$$

alors :

$$x \in \mathrm{Fil}^{0}\,\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \iff x_0 = 0$$

Mais la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}\frac{t\xi^{n-1}}{(n-1)!}$ n'est pas toujours de la bonne forme pour être dans $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+}$.

Proposition 2.2. *Soit $r \in \mathbf{N}$ ($r \in \mathbf{Z}$ pour la dernière) ; on a les suites exactes suivantes :*

$$0 \to \mathbf{Z}_p t^{\{r\}} \to \mathrm{Fil}^{r}\,\mathbf{A}_{\mathrm{cris}} \cap \varphi^{-1}(p^{r}\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}) \overset{p^{-r}\varphi-1}{\to} \mathbf{A}_{\mathrm{cris}} \to 0$$

$$0 \to \mathbf{Q}_p(r) \to \mathrm{Fil}^{r}\,\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+} \overset{p^{-r}\varphi-1}{\to} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+} \to 0$$

$$0 \to \mathbf{Q}_p(r) \to \mathrm{Fil}^{r}\,\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \overset{p^{-r}\varphi-1}{\to} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \to 0$$

On esquisse la preuve, qui est faite en détail dans Fontaine–Ouyang.

Démonstration. On a noté $t^{\{n\}} = \frac{q(n)!}{p^{q(n)}}t^n$, où $q(n)$ est le quotient de n par $p-1$.
Pour la première : on utilise le lemme-clé suivant :

Lemme 2.3. *Pour tout $r \in \mathbf{N}$, on a :*

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (\varphi^{-n})^{-1}(\mathrm{Fil}^{r} A_{\mathrm{cris}}) = \left\{ \sum_{s\geq r} a_s t^{\{s\}},\ a_s \to 0 \text{ dans } \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \right\}$$

Comme $\varphi(t) = pt$, on peut expliciter tout dans la première suite exacte, et conclure (c'est assez technique).
La deuxième suite se déduit de la première en inversant p ; il faut montrer que $\mathrm{Fil}^{r}\,\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+} \subset \varphi^{-1}(p^{r}\mathbf{A}_{\mathrm{cris}})[1/p]$ et c'est une autre conséquence du lemme.
En appliquant la deuxième avec $r+i$, et en tordant par t^{-i}, on obtient :

$$0 \to \mathbf{Q}_p(r) \to t^{-i}\,\mathrm{Fil}^{r+i}\,\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+} \to t^{-i}\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+} \to 0$$

et on obtient le résultat en prenant la limite [1] sur i. □

Théorème 2.4. *Notons $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}$. On a les trois suites exactes suivantes :*

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \cap \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \overset{\varphi-1}{\longrightarrow} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{B}_e \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \overset{\varphi-1}{\longrightarrow} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \longrightarrow \mathbf{B}_e \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \longrightarrow 0$$

1. la filtration est séparée

Démonstration. La première : le cas $r = 0$ de la prop avant. La surjectivité de $\varphi - 1$ en découle, d'où la deuxième.
Par le lemme du serpent, on en déduit :

$$\frac{\mathbf{B}_e}{\mathbf{Q}_p} \simeq \frac{\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}}{\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \cap \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+}$$

mais comme $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, le dernier terme est $\simeq \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. $\square$

Remarque 2.5. La dernière suite est la suite exacte fondamentale : elle s'interprète dans la géométrie de la courbe de Fargues-Fontaine X comme une suite de la forme :

$$0 \to \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X - \{\infty\}) \to \frac{\mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}_{X,\infty}})}{\widehat{\mathcal{O}_{X,\infty}}} \to 0$$

Remarque 2.6. En appliquant le foncteur $(- \otimes V)^{\mathscr{G}_K}$ à cette suite exacte, on obtient une application de transition (dite : exponentielle de Bloch-Kato) :

$$\exp_V : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)/\operatorname{Fil}^0(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)) \longrightarrow H^1(\mathscr{G}_K, V)$$

qui coïncide, si V vient d'un groupe de Lie formel dur K, G, modulo des identifications, à l'exponentielle :

$$\exp_G : \tan(G(K)) \longrightarrow G(\mathcal{O}_K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

On trouvera des détails dans [2]

3 Admissibilité faible

3.1 Polygones de Newton et Hodge

Définition 3.1. Soit $D_K \in \mathrm{Fil}_K$. On définit le polygone de Hodge de la filtration comme suit :

- On note $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ les sauts de la filtration ; et $h_j = \dim_K(\operatorname{gr}^{i_j} D_K)$ la dimension de chaque saut.
- On relie les points de coordonnées $(h_1 + \ldots + h_j, h_1 i_1 + \ldots + h_j i_j)$, pour $0 \leq j \leq m$.

Le point de départ est toujours $(0, 0)$. Le point terminal est $(\dim(D_K), t_N(D_K))$ où :

$$t_N(D_K) := \sum_{i \in \mathbf{Z}} i \dim(\operatorname{gr}^i D_K)$$

Exemple 3.2. Prendre $D_K = K \oplus Kt \oplus Kt \oplus Kt^4$, $m = 3$.

Définition 3.3. Le polygone de Newton d'un φ-module D sur K_0 est le polygone de Newton de χ_φ, le polynôme caractéristique.
Son point terminal est $(\dim D, t_N(D))$, avec

$$t_N(D) = v_p(\det(\varphi))$$

Remarque 3.4. Comme $K_0/\mathbf{Q}_p$ est non ramifiée, le polygone de Newton a ses points entiers. En revanche, contrairement au cas Hodge, les pentes sont seulement rationnelles.

Exemple 3.5. Dans le cas où la matrice de φ est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & -p & \\ & 1 & 0 & \\ & & & p^3 \end{pmatrix} \qquad \chi = (X-1)(X^2-p)(X-p^3)$$

Remarque 3.6. La théorie des isocristaux nous donne une décomposition de D en pentes :

$$D = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{Q}} D_\alpha$$

où, si k est algébriquement clos, $D_{r/s}$ est engendré par les x tels que $\varphi^s(x) = p^r x$. On a alors la formule :

$$t_N(D) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}} \alpha \dim(D_\alpha)$$

Exemple 3.7. Le twist par $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(\mathbf{Q}_p(i))$ correspond à augmenter les pentes de i sans changer les abscisses (en gros : ajouter i à la dérivée).

Remarque 3.8. Les fonctions t_N, t_H sont additives dans la catégorie abélienne $\mathrm{MF}^{(\varphi,N)}$

3.2 Exemples en dimension ≤ 2

On va construire différentes représentations V et regarder le polygone de Newton de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$.

3.2.1 Dimension 1

Soit $V = \mathbf{Q}_p(\eta)$, avec $\eta : \mathscr{G}_K \to \mathbf{Q}_p^\times$ un caractère.
Supposons[2] être dans le cas : $\eta = \chi^i \eta^{\mathrm{unr}}$. Soit r une période de η^{unr} : on a $r \in W(\overline{\mathbf{F}_p})$. Alors $t^i r$ est une période de η, et donc :

$$(\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K} = K_0 t^{-i} r^{-1}$$

avec $\varphi(t^i r) = p^i t^i \sigma(r) = p^i \eta^{\mathrm{unr}}(\mathrm{Frob}_p) t^i r = \lambda t^i r$. On a donc :

$$\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = D_{\lambda, v_p(\lambda)} \qquad \lambda^{-1} = p^i \eta^{\mathrm{unr}}(\mathrm{Frob}_p)$$

Donc les polygones de Newton et de Hodge de V sont les mêmes, ils relient $(0,0)$ et $(1,-i)$.

2. D'après Rustam, cela est équivalent à être semi-stable, et (à un caractère fini près) presque équivalent à être de Rham = Hodge-Tate !

3.2.2 Dimension 2 : les courbes elliptiques

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}_p$. À E est associé $V = T_pE$, son module de Tate. Alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ dépend du type de réduction de E (ou de son j-invariant : $|j| \leq 1$ ou $|j| > 1$).

Dans tous les cas [3], en tant qu'espaces vectoriels gradués :

$$\mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(V) = \mathbf{C}_p(-1) \oplus \mathbf{C}_p$$

d'où on déduit le polygone de Hodge : une pente -1 et une pente 0, toutes deux de longueurs 1.
On a alors les identités (admises, mais tout est fait pour) :

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = H^1_{\mathrm{et}}(E, \mathbf{Q}_p) \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} = H^1_{\mathrm{cris}}(E, \mathbf{Q}_p)$$

Cas de bonne réduction Dans ce cas, on sait le polynôme minimal du frobenius géométrique ETALE est $X^2 - a_pX + p$, où $a_p(E) = p + 1 - \#E(\mathbf{F}_p) \in [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}] \cap \mathbf{Z}$. Ce résultat est une conséquence de la formule de Grothendieck–Lefschetz.
Un théorème [4] dû à Katz–Messing démontre que, dans le cas où X est projective lisse sur un corps fini, les frobenius étales et cristallins ont les mêmes polynômes minimaux : on en déduit que le polynôme minimal de φ est :

$$X^2 - \frac{a_p(E)}{p}X + \frac{1}{p}$$

Deux cas se présentent :

- Si $a_p \neq 0$, on dit que E est de réduction ordinaire. alors $a_p \notin p\mathbf{Z}_p$. Dans ce cas, φ est diagonalisable, donc dans une base (e_1, e_2), pour un $\xi \in \mathbf{Z}_p^\times$:

  $$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha_0 p^{-1} & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{pmatrix}$$

  on en déduit le polygone de Newton = le polygone de Hodge.

- Si $a_p = 0$, on dit que E est de réduction supercuspidale. Dans ce cas le frobenius est de la forme

  $$\begin{pmatrix} 0 & -1/p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  dans une base $(e, \varphi(e))$. Donc Newton n'a qu'une pente, contrairement à Hodge. On a : $t_N = t_H = 1$.

Dans ces deux cas, on montre que $N = 0$, ie V est cristalline : c'est logique, car E a bonne réduction ! On peut expliciter une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ sans faire appel à u.

3. on peut déduire cela d'une étude de la cohomologie de de Rham de E, et d'un théorème de comparaison dR-étale
4. C'est un théorème difficile, essentiellement issu de la preuve des conjectures de Weil

Cas de mauvaise réduction À nouveau, deux cas possibles :

- Réduction multiplicative : la réduction a un point double nodal (deux tangentes distinctes). Alors, un théorème de Tate montre qu'il existe une uniformisation [5] :

$$\overline{\mathbf{Q}_p}^{\times}/q^{\mathbf{Z}} \simeq E(\overline{\mathbf{Q}}_p)$$

  qui est Galois équivariant, pour un certain q de norme < 1. Alors on a une base de V donnée par :

$$e = (1, \zeta_p, \zeta_{p^2}, \ldots) \qquad f = (q, q^{1/p}, q^{1/p^2}, \ldots)$$

  en regardant l'action de g dans cette base, on déduit deux vecteurs de base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$:

$$x = t^{-1}e \qquad y = -ut^{-1}e + f$$

  Alors dans cette base on a :

$$\varphi = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  et on peut expliciter la filtration de de Rham dans ce cas.
  Ici Hodge = Newton à nouveau, et V est semi-stable non cristalline.
  Remarquer qu'on a une suite exacte :

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to V \to \mathbf{Q}_p(-1) \to 0$$

  et N envoie $\mathbf{Q}_p(-1)$ dans $\mathbf{Q}_p$.

- Réduction additive : la réduction a un cusp. Alors on montre qu'il existe L/K finie telle que $E_{\mathcal{O}_L}$ est à réduction multiplicative, et on en déduit que V est semi-stable sur $\mathscr{G}_L$. En revanche, elle ne l'est pas sur $\mathscr{G}_K$, et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = K_0$.

3.3 Représentations st

Définition 3.9. $D \in \mathrm{MF}_K^{(\varphi,N)}$ est dit **faiblement admissible** si $t_N(D) = t_H(D)$ et si, pour tout D' sous-objet de D, le polygone de Hodge de D' est **sous** le polygone de Newton de D'.

Remarque 3.10. Il revient au même de demander $t_H(D') \leq t_N(D')$ pour tout D'.
On a $t_H(D') = t_H(\bigwedge^2 D') = \ldots = t^H(\bigwedge^d D')$ si $d = \dim D'$, et pareil pour t_N.

Proposition 3.11. *Si V est une représentation semi-stable, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est faiblement admissible.*

Démonstration. Soit $D = \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$, soit D' un sous-objet de D. Montrons que $t_H(D') \leq t_N(D')$.
Commençons par le cas $\dim D' = 1$.
Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V. Soit δ un générateur de D'. Quitte à tordre par un $D_{\lambda, v_p(\lambda)}$, on peut supposer $\varphi(\delta) = \delta$. On écrit :

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$

5. Sur $\mathbf{C}$, une courbe elliptique s'écrit $\mathbf{C}/\Lambda$, où $\Lambda = \mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z}$. En posant $q = e^{2i\pi\tau}$, c'est isomorphe (via l'exponentielle) à $\mathbf{C}^\times/q^{\mathbf{Z}}$.

Alors $N\delta = 0$ (car D' de dim 1) donc $Nb_i = 0$, donc $b_i \in \mathbf{B}_{\text{cris}}$. Et $\varphi(\delta) = \delta$ donne $\varphi(b_i) = b_i$. On doit montrer : $t_H(D') \leq 0$. Par l'absurde, si $\delta \in \operatorname{Fil}^1 D'$, alors $b_i \in \operatorname{Fil}^1 \mathbf{B}_{\text{cris}}$ pour tout i. La suite exacte fondamentale permet de conclure.

Pour le cas général, on applique le foncteur $\bigwedge^{\dim D'}$. On en déduit aussi que $t_H(D) = t_N(D)$, car $\det \mathbf{D}_{\text{st}}(V) = \mathbf{D}_{\text{st}}(\det V)$ provient d'un caractère donc est de la forme $D_{\lambda, v_p(\lambda)}$. $\square$

4 Les deux théorèmes de Fontaine

4.1 Faiblement admissible implique admissible

Définition 4.1. Si D, on note

$$\mathbf{V}_{\text{st}}(D) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{K_0} D)^{N=0, \varphi=1} \cap \operatorname{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes D_K)$$

On dit que D (resp V) est **admissible** si c'est de dimension $\dim_{K_0}(D)$ (resp $\dim(V)$).

Théorème 4.2 (Colmez-Fontaine, 2000)**.**

(i) Si V est semi-stable, $V \simeq \mathbf{V}_{\text{st}}(\mathbf{D}_{\text{st}}(V))$.

(ii) Si D est faiblement admissible, il existe V semi-stable telle que $D = \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$.

Remarque 4.3. Le (i) est facile, il résulte de V st et de la suite exacte fondamentale. C'est le (ii) qui est difficile.

Corollaire 4.4. Les foncteurs $\mathbf{D}_{\text{st}}$ et $\mathbf{V}_{\text{st}}$ induisent des équivalences de catégories entre rep st de $\mathscr{G}_K$ et $\mathrm{MF}_K^{(\varphi,N),(\mathrm{f})\mathrm{ad}}$.

4.2 dR implique pst

Théorème 4.5 (Berger, 2002)**.** *Si V est de Rham, elle est pst (ie : il existe L/K finie telle que la restriction $V\big|_{\mathscr{G}_L}$ est semi-stable).*

Exemple 4.6. Les courbes elliptiques à réduction multiplicative sont pst mais pas st.

En fait, si A est une variété abélienne, V_A est pst (connu depuis Fontaine).

Définition 4.7. Un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module filtré est la donnée de D_L, un (φ, N)-module filtré sur une extension finie L de K, ainsi qu'une action de $\operatorname{Gal}(L/K)$ semi-linéaire qui commute à φ et N, tel que la filtration descend de L à K.

Corollaire 4.8. Le foncteur $V \to \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ se "prolonge" en une équivalence de catégories, noté $V \to \mathbf{D}_{\text{pst}}(V)$, entre les représentation de $\mathscr{G}_K$ de de Rham, et les $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-modules filtrés sur K.

Voici une application (cas particulier du début du paragraphe 3.1 de [1]) :

Proposition 4.9. *Toute extension de Rham*

$$0 \to \mathbf{Q}_p(i) \to V \to \mathbf{Q}_p(j) \to 0$$

avec $i < j$, est triviale.

Démonstration. Comme V est de Rham, on peut supposer (quitte à restreindre le groupe de Galois) que V est semi-stable. Il s'agit alors de montrer que toute extension de $D_{p^j,j}$ par $D_{p^i,i}$ est scindée dans la catégorie des (φ, N)-modules filtrés.
Le scindage en tant que φ-modules sur K_0 est toujours vrai [6] ; le scindage en tant qu'espace filtrés marche avec l'hypothèse. Pour le scindage sur N, il s'agit de montrer :

$$\forall v \in V,\, v \in \mathbf{Q}_p(i) \implies Nv = 0$$

Si $v \in \mathbf{Q}_p(i)$, alors $\varphi(v) = p^i v$, et alors $\varphi(Nv) = p^{i-1}Nv$. Comme le polygone de Newton de V a pour pentes $> i - 1$, on a forcément $Nv = 0$.
Ainsi, l'extension est scindée dans $\mathrm{MF}^{(\varphi,N)}$.

□

Références

[1] B. Perrin–Riou, Exposé IV : Représentations p–adiques ordinaires, Périodes p-adiques - Séminaire de Bures, 1988. Astérisque, no. 223 (1994)

[2] L. Berger, Bloch and Kato's exponential map : three explicit formulas, Doc. Math. 2003, Extra Vol., 99–129.

6. ici on peut interpréter cela comme le fait que les espaces propres de φ pour les valeurs propres de valuation p^i sont disjoints de ceux pour une valuation p^j.