

HMEF104 — Electromagnétisme
TD4 - Induction

Le niveau des exercices est indiqué par les étoiles.

1 Inductance propre d'un câble coaxial (**)

On considère un câble coaxial constitué d'un conducteur cylindrique creux de rayon R_1 , entouré par un conducteur cylindrique creux de même axe et de rayon R_2 ($R_1 < R_2$). Un courant I circule sur la surface du conducteur intérieur uniformément, et un courant égal et opposé circule sur la surface du conducteur extérieur. La longueur du câble est notée h et on négligera les effets de bords ($h \gg R_2$).

1. Calculer le champ magnétique dans tout l'espace.

Solution: On commence par étudier les symétries et les invariances de la distribution de courants. La distribution de courants est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) commun des conducteurs. Par ailleurs, on néglige les effets de bords, donc le champ magnétique ne dépend que de la variable r en coordonnées cylindriques d'axe (Oz). De plus, pour un point M quelconque, le plan contenant M et l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courants. Le champ magnétique est donc orthogonal à ce plan, soit finalement :

$$\mathbf{B}(M) = B(r)\mathbf{e}_\theta.$$

On applique alors le théorème d'Ampère sur un contour circulaire de rayon r d'axe (Oz). La circulation du champ magnétique sur ce contour s'écrit :

$$\mathcal{C} = 2\pi r B(r).$$

De plus, en utilisant le théorème d'Ampère, on a $\mathcal{C} = \mu_0 I_e$, où l'intensité enlacée I_e vaut :

$$I_e = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_1 \\ I & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{si } r > R_2 \end{cases}.$$

Finalement, on obtient l'expression du champ magnétique dans tout l'espace :

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } r < R_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \mathbf{0} & \text{si } r > R_2 \end{cases}. \quad (1)$$

2. En calculant l'énergie magnétique du câble coaxial par la relation

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{M \in \text{espace}} \mathbf{B}^2(M) dV,$$

en déduire son inductance propre par unité de longueur. Commenter.

Solution: On utilise l'expression donnée de l'énergie magnétique en utilisant les symétries et invariances du champ magnétique :

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{M \in \text{espace}} \mathbf{B}^2(M) dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dr r B(r)^2 = \frac{\pi h}{\mu_0} \int_0^{+\infty} dr r B(r)^2.$$

On exploite alors l'expression du champ magnétique obtenue à la question précédente, en décomposant l'intégrale sur les différents domaines de définition du champ magnétique :

$$E_m = \frac{\pi h}{\mu_0} \int_{R_1}^{R_2} dr r B(r)^2,$$

les intégrales pour $r > R_2$ et $r < R_1$ étant nulles car le champ magnétique est nul sur ces intervalles. On obtient donc :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{\pi h}{\mu_0} \int_{R_1}^{R_2} dr r \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 \\ &= \frac{\pi h}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi} [\ln r]_{R_1}^{R_2} \\ &= \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'énergie magnétique d'un circuit s'écrit $E_m = LI^2/2$, ce qui permet d'en déduire l'inductance propre par unité de longueur :

$$\frac{L}{h} = \frac{2E_m}{I^2 h} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right). \quad (2)$$

On trouve une inductance qui est bien positive.

2 Chauffage par induction (***)

On considère un conducteur non magnétique cylindrique de rayon R , d'axe (Oz) et de longueur L . On suppose que le conducteur vérifie la loi d'Ohm locale $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. On place le conducteur dans un champ magnétique uniforme de la forme $\mathbf{B} = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_z$. On négligera les effets de bords et on se placera dans l'ARQS magnétique.

1. Expliquer qualitativement ce qui se passe.

Solution: Il s'agit d'un cas d'induction de Neumann où un conducteur fixe est placé dans un champ magnétique variable. La présence d'un champ magnétique variable induit un champ électrique en vertu de l'équation de Maxwell-Faraday. Ce champ électrique induit met en mouvement les porteurs de charge, et induit donc un courant volumique dans le conducteur. Ces courants créent à leur tour un champ magnétique, etc. De plus, le conducteur se met à chauffer car les porteurs de charge sont accélérés par un champ électrique : c'est le principe du chauffage par induction.

2. Soit \mathcal{C} un contour fermé fixe orienté délimitant une surface \mathcal{S} orientée compatiblement. Montrer que la circulation du champ électrique sur ce contour est égal à la dérivée temporelle du flux du champ magnétique à travers la surface que le contour délimite, ou encore :

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{E}(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{B}(M, t) \cdot d\mathbf{S}.$$

Solution: On part de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(M, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M, t),$$

qu'on intègre sur la surface \mathcal{S} délimitée par le contour \mathcal{C} :

$$\iint_{M \in \mathcal{S}} \nabla \wedge \mathbf{E}(M, t) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{M \in \mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M, t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{B}(M, t) \cdot d\mathbf{S},$$

la dernière égalité étant obtenue car le contour est fixe. On utilise le théorème de Stokes, pour réécrire le membre de gauche en une intégrale sur le contour \mathcal{C} , ce qui achève la preuve.

3. Justifier que le champ électrique ne dépend que de r en coordonnées cylindriques.

Solution: Le problème est invariant par rotation autour de (Oz) , donc le champ électrique ne dépend pas de θ en coordonnées cylindriques. Par ailleurs, on néglige tout effet de bord, de sorte que le champ électrique ne dépend pas de z également. On en conclut donc que le champ électrique ne dépend que de la variable r en coordonnées cylindriques.

4. En exploitant le résultat de la question 2, calculer les composantes selon \mathbf{e}_z et \mathbf{e}_θ du champ électrique dans le conducteur. On supposera la continuité du champ électrique à l'interface conducteur/vide.

Solution: D'après la question précédente, on a que le champ électrique est de la forme :

$$\mathbf{E}(M, t) = E_r(r, t)\mathbf{e}_r + E_\theta(r, t)\mathbf{e}_\theta + E_z(r, t)\mathbf{e}_z.$$

On considère tout d'abord un contour élémentaire de côtés dr et dz passant par les points $M(r, \theta, z)$, $M'(r, \theta, z+dz)$, $M''(r+dr, \theta, z+dz)$ et $M'''(r+dr, \theta, z)$. La circulation du champ électrique à travers ce contour vaut :

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{C} &= \int_z^{z+dz} E_z(r, t) dz' + \int_r^{r+dr} E_r(r', t) dr' - \int_z^{z+dz} E_z(r+dr, t) dz' - \int_r^{r+dr} E_r(r', t) dr' \\ &= -[E_z(r+dr, t) - E_z(r, t)] dz \\ &= -\frac{\partial E_z}{\partial r}(r, t) dr dz \end{aligned}$$

Par ailleurs, la normale à ce contour est dirigée selon \mathbf{e}_θ , donc le flux du champ magnétique à travers ce contour est nul. On en déduit donc que :

$$\frac{\partial E_z}{\partial r}(r, t) = 0,$$

ou encore que E_z ne dépend que du temps. Par ailleurs, le champ électrique étant continu et nul à l'extérieur du conducteur, on obtient que

$$E_z(M, t) = 0. \quad (3)$$

Pour calculer la composante selon \mathbf{e}_θ , on calcule la circulation du champ électrique sur un cercle de rayon r de même axe que le conducteur :

$$\mathcal{C} = 2\pi r E_\theta(r, t).$$

Ce contour est orthogonal au champ magnétique, ainsi le flux de ce dernier à travers la surface délimitée par le contour vaut :

$$\Phi(r, t) = \pi r^2 B_0 \cos(\omega t),$$

dont on doit calculer la dérivée par rapport au temps, soit finalement :

$$E_\theta(r, t) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(r, t) = \frac{B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t). \quad (4)$$

5. En exploitant la conservation de la charge, calculer la composante selon \mathbf{e}_r du champ électrique et en déduire $\mathbf{E}(M, t)$ et $\mathbf{j}(M, t)$ dans le conducteur. Commenter.

Solution: On utilise la loi d'Ohm, qui indique que \mathbf{j} est de la forme :

$$\mathbf{j}(M, t) = j_r(r, t)\mathbf{e}_r + j_\theta(r, t)\mathbf{e}_\theta,$$

où $j_r = \sigma E_r$ et $j_\theta = \sigma E_\theta$. La conservation de la charge dans l'ARQS magnétique s'écrit $\nabla \cdot \mathbf{j}(M, t) = 0$, ce qui implique que $j_r = 0$, et donc que :

$$E_r(M, t) = 0. \quad (5)$$

On obtient donc l'expression du champ électrique :

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t)\mathbf{e}_\theta, \quad (6)$$

ainsi que celle de la densité volumique de courants :

$$\mathbf{j}(r, t) = \frac{\sigma B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t)\mathbf{e}_\theta. \quad (7)$$

On obtient donc des courants orthoradiaux dans le conducteur, qui sont en quadrature de phase par rapport au champ magnétique inducteur.

6. Calculer la puissance volumique p reçue par le conducteur en fonction de \mathbf{j} et \mathbf{E} . On notera n la densité volumique d'électrons, e la charge électrique élémentaire, et \mathbf{v} leur vitesse.

Solution: La conduction est assurée par les électrons qui subissent la force de Lorentz $\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$. La puissance que reçoit un unique électron est égale à $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$, car la force de Lorentz magnétique ne travaille pas. En sommant sur tous les électrons, on obtient :

$$p = n(-e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (8)$$

où on reconnaît l'expression de la densité volumique de courants $\mathbf{j} = -nev$.

7. Calculer la puissance totale P moyenne dissipée par effet Joule dans le conducteur, en utilisant les expressions de \mathbf{j} et \mathbf{E} obtenues aux questions précédentes. Commenter. Comment optimiser le chauffage par induction ?

Solution: On calcule p à partir des résultats des questions précédentes :

$$p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \frac{\sigma r^2 \omega^2 B_0^2}{4} \sin^2(\omega t).$$

On intègre alors sur l'ensemble du conducteur Σ pour calculer la puissance totale dissipée :

$$\iiint_{M \in \Sigma} p dV = \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr r \frac{\sigma r^2 \omega^2 B_0^2}{4} \sin^2(\omega t) = \frac{\pi \sigma \omega^2 B_0^2 L}{2} \sin^2(\omega t) \int_0^R dr r^3,$$

soit après intégration :

$$\iiint_{M \in \Sigma} p dV = \frac{\pi \sigma \omega^2 B_0^2 L}{2} \sin^2(\omega t) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi \sigma \omega^2 B_0^2 L R^4}{8} \sin^2(\omega t).$$

Il reste alors à moyenner sur une période du champ magnétique pour obtenir la puissance totale moyenne, soit finalement :

$$P = \frac{\pi \sigma \omega^2 B_0^2 L R^4}{16}. \quad (9)$$

La puissance varie comme ω^2 , ce qui est caractéristique de l'échauffement d'un matériau dû aux courants de Foucault.

Pour optimiser le chauffage par induction, il convient d'augmenter la fréquence ou l'amplitude du champ magnétique, ainsi que les dimensions du matériau (notamment son rayon).

8. Calculer le champ magnétique \mathbf{B}_1 induit par les courants de Foucault. Commenter.

Solution: Pour calculer le champ magnétique créé par les courants de Foucault, on utilise le théorème d'Ampère. D'après le principe de Curie, les courants de Foucault ne dépendent que de r en coordonnées cylindriques, on a $\mathbf{B}_1(M, t) = \mathbf{B}_1(r, t)$. De plus, pour un point M quelconque, le plan contenant M et l'axe du cylindre est plan d'antisymétrie de la distribution de courants, il contient donc $\mathbf{B}_1(M)$. On en conclut donc que :

$$\mathbf{B}_1(M, t) = B_{1,r}(r, t) \mathbf{e}_r + B_{1,z}(r, t) \mathbf{e}_z.$$

On exploite tout d'abord la conservation du flux du champ magnétique en considérant la surface délimitée par deux cylindres de rayons r et $r + dr$ et de hauteur dz . Le flux du champ magnétique à travers cette surface fermée est nulle, et par ailleurs, il vaut :

$$d^2\Phi = \int_r^{r+dr} B_{1,z}(r', t) 2\pi r' dr' - \int_r^{r+dr} B_{1,z}(r', t) 2\pi r' dr' + \int_z^{z+dz} B_{1,r}(r + dr, t) 2\pi(r + dr) dz' - \int_z^{z+dz} B_{1,r}(r, t) 2\pi r dz'$$

où les deux premiers termes correspondent aux flux sur les bases, et les deux derniers aux flux latéraux. On obtient donc :

$$d^2\Phi = 2\pi dz [(r + dr)B_{1,r}(r + dr, t) - rB_{1,r}(r, t)] = 2\pi \frac{\partial}{\partial r} (rB_{1,r})(r, t) dr dz,$$

en se contenant d'un développement limité au premier ordre. On obtient donc que :

$$\frac{\partial}{\partial r} (rB_{1,r})(r, t) = 0,$$

soit après intégration :

$$B_{1,r}(r, t) = \frac{C_1(t)}{r} + C_2(t),$$

où $C_1(t)$ et $C_2(t)$ sont des fonctions du temps. Comme le champ magnétique ne peut diverger sur l'axe du conducteur, on a $C_1 = 0$. De plus, la composante normale du champ magnétique étant continu à l'interface conducteur/vide, on obtient que $C_2 = 0$, soit :

$$\mathbf{B}_1(M, t) = B_1(r, t) \mathbf{e}_z.$$

On considère maintenant un contour élémentaire de hauteur h et de côté dr passant par les points $M(r, \theta, z)$, $M'(r, \theta, z+h)$, $M''(r+dr, \theta, z+h)$ et $M'''(r+dr, \theta, z)$. La circulation du champ magnétique sur ce contour vaut :

$$dC = B_1(r, t)h - B_1(r + dr, t)h = -h \frac{\partial B_1}{\partial r}(r, t)dr.$$

Par ailleurs, d'après le théorème d'Ampère, on a :

$$dC = \mu_0 dI_e = \mu_0 h \mathbf{j}(r, t) \cdot \mathbf{e}_\theta dr,$$

soit finalement :

$$\frac{\partial B_1}{\partial r}(r, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(r, t) \cdot \mathbf{e}_\theta = -\frac{\mu_0 \sigma B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t),$$

ou encore après intégration :

$$B_1(r, t) = -\frac{\mu_0 \sigma B_0 r^2 \omega}{4} \sin(\omega t) + C(t),$$

où $C(t)$ est une fonction du temps. On exploite là encore la continuité du champ magnétique à l'interface vide/conducteur (pas de courant surfacique) : le champ magnétique que les courants de Foucault créent à l'extérieur du conducteur étant nul, on obtient que $C = 0$, ou encore que :

$$\mathbf{B}_1(r, t) = -\frac{\mu_0 \sigma B_0 r^2 \omega}{4} \sin(\omega t) \mathbf{e}_z. \quad (10)$$

Du fait des courants de Foucault s'ajoute au champ magnétique initial d'amplitude B_0 un champ magnétique \mathbf{B}_1 inhomogène de même direction, et en quadrature de phase par rapport au premier.

9. À quelle condition l'ARQS magnétique est-elle vérifiée ? Faire l'application numérique pour $\sigma = 2 \times 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$, $f = \omega/(2\pi) = 50 \text{ Hz}$ et $R = 2,5 \text{ cm}$. Commenter.

Solution: L'ARQS sera vérifiée si on peut négliger le champ magnétique \mathbf{B}_1 par rapport au champ magnétique qu'on impose au conducteur. Il faut donc que $\|\mathbf{B}_1\| \ll B_0$, soit :

$$\frac{\mu_0 \sigma R^2 \omega}{4} \ll 1. \quad (11)$$

L'application numérique du membre de gauche donne 0,12 qui est inférieur à 1. L'ARQS magnétique est donc vérifiée, mais cesse de l'être si les dimensions ou la conductivité du conducteur augmentent. Il faut alors tenir compte de ce champ magnétique \mathbf{B}_1 et calculer le champ électrique qu'il induit, etc.

10. On remplace le cylindre conducteur précédent par N cylindres de rayon R' qui occupent le même volume. Calculer la nouvelle puissance moyenne dissipée P' par courants de Foucault. Commenter.

Solution: Dans ce cas, il suffit de sommer les puissances moyennes dissipées par chacun des petits conducteurs, soit :

$$P' = N \frac{\pi \omega^2 B_0^2 L R'^4}{16} = \frac{\pi \omega^2 B_0^2 L R^2 R'^2}{16}. \quad (12)$$

On voit donc que le rapport entre cette puissance et celle obtenue pour un conducteur plein de rayon R est :

$$\frac{P'}{P} = \left(\frac{R'}{R}\right)^2 < 1. \quad (13)$$

Cette construction permet donc de limiter la puissance perdue par effet Joule : c'est le principe du feuilletage des conducteurs, souvent utilisé dans l'industrie pour limiter les pertes.

3 Rail de Laplace (*)

On considère le dispositif du rail de Laplace constitué d'un rectangle formé de trois tiges conductrices fixes et d'une tige conductrice mobile de longueur h pouvant rouler sans glisser en translation rectiligne parallèle à elle-même. Ce rectangle forme donc un circuit fermé, dont on notera R la résistance totale. On place le dispositif dans un champ magnétique $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ uniforme, stationnaire et orthogonal au plan formé par les quatre tiges. On notera \mathbf{e}_y le vecteur normal à la tige mobile dans le plan orthogonal à \mathbf{e}_z , et on introduira $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ un trièdre direct.

1. Si la tige est immobile, que se passe-t-il ?

Solution: Si la tige est immobile, alors rien ne se passe.

2. On lance maintenant la tige mobile à la vitesse $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_y$. Expliquer qualitativement ce qui se passe.

Solution: Si on lance la tige mobile à une vitesse non nulle, il y a alors une variation de flux du champ magnétique à travers le circuit formé des quatre tiges. Cette variation de flux crée une force électromotrice d'induction qui génère des courants induits dans le circuit. Ces derniers sont responsables de forces de Laplace, qui en vertu de la loi de modération de Lenz, freinent le mouvement de la tige jusqu'à ce qu'elle s'arrête, et que la force électromotrice d'induction, ainsi que les courants induits s'annulent.

3. Exprimer l'intensité I des courants induits en fonction de la vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_y$ de la tige mobile. On précisera l'orientation du circuit choisie.

Solution: On oriente le circuit de sorte que le flux du champ magnétique soit positif (selon $+\mathbf{e}_z$). On calcule alors la force électromotrice d'induction en utilisant le théorème de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Si on note y la distance entre la tige mobile et la tige immobile en regard, alors $\Phi = B_0 h y$, et donc :

$$e = -B_0 h \frac{dy}{dt} = -B_0 h v.$$

On applique alors la loi d'Ohm dans le circuit fermé formé des quatre tiges :

$$RI = e,$$

ce qui donne l'expression des courants induits en fonction de la vitesse de la tige :

$$I = -\frac{B_0 h v}{R}. \quad (14)$$

4. Obtenir une équation différentielle vérifiée par la vitesse de la tige en utilisant le résultat de la question précédente. On notera m la masse de la tige et on négligera les frottements.

Solution: On applique le théorème du centre d'inertie à la tige mobile dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire supposé galiléen :

$$m \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_{\mathbf{L}},$$

où \mathbf{P} désigne le poids de la tige, \mathbf{R} la réaction normale et $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$ la force de Laplace. En projection selon \mathbf{e}_y , l'équation précédente se réécrit :

$$m \frac{dv}{dt} = \mathbf{F}_{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{e}_y.$$

On calcule alors les forces de Laplace :

$$\int_{\text{tige mobile}} I d\ell \wedge \mathbf{B} = \int_{\text{tige mobile}} -I d\ell \mathbf{e}_x \wedge B_0 \mathbf{e}_z = IhB_0 \mathbf{e}_y,$$

soit finalement :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{IhB_0}{m},$$

ou encore en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B_0^2 h^2}{mR} v = 0. \quad (15)$$

5. Introduire un temps caractéristique τ dont on vérifiera la dimension. Commenter ses dépendances.

Solution: À partir de la question précédente, on introduit la constante

$$\tau = \frac{mR}{(B_0 h)^2}, \quad (16)$$

homogène à un temps. En effet, la dimension de la résistance est obtenue à partir de la puissance dissipée par effet Joule :

$$[R] = \frac{[P]}{I^2} = ML^2 T^{-3} I^{-2},$$

où $[P]$ désigne la dimension d'une puissance, L une longueur, M une masse, T un temps et I une intensité. De plus, pour le champ magnétique, on utilise la force de Lorentz :

$$[B_0] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{MLT^{-2}}{[q]LT^{-1}} = \frac{MT^{-1}}{[q]} = MT^{-2} I^{-1},$$

où $[F]$ désigne la dimension d'une force, $[v]$ d'une vitesse, et $[q]$ d'une charge. Ainsi, on obtient pour la dimension de τ :

$$[\tau] = \frac{M[R]}{[B_0]^2 L^2} = \frac{M^2 L^2 T^{-3} I^{-2}}{M^2 T^{-4} I^{-2} L^2} = T. \quad (17)$$

Le temps τ diminue quand B_0 ou h augmentent, par contre il augmente avec m et R . Ce temps correspond au temps typique de variation de la vitesse de la tige : il est normal qu'il diminue avec B_0 et avec h (car l'amplitude des forces de Laplace en dépend). De même, il est rassurant qu'il augmente avec R (c'est-à-dire avec la dissipation par effet Joule, de sorte que la puissance disponible pour freiner la tige diminue), et aussi avec m (c'est-à-dire avec l'inertie de la tige).

6. Donner alors l'évolution temporelle de $v(t)$. Commenter.

Solution: L'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ se réécrit :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0,$$

dont la solution est :

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}. \quad (18)$$

On trouve que $v(t)$ décroît exponentiellement vers 0 avec un temps caractéristique τ .

7. Qu'advient-il de l'énergie cinétique de la tige ?

Solution: On applique le théorème de la puissance cinétique à la tige dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire :

$$\frac{dE_c}{dt} = P_L,$$

où P_L désigne la puissance des forces de Laplace (le poids et la réaction normale ne travaillent pas) qui vaut :

$$P_L = \mathbf{F}_L \cdot \mathbf{v} = IhB_0 v = -RI^2,$$

en utilisant l'expression des forces de Laplace, puis de la vitesse de la tige en fonction du courant I . On obtient donc finalement :

$$\frac{dE_c}{dt} = -RI^2, \quad (19)$$

ou encore que toute l'énergie cinétique de la tige est dissipée par effet Joule.

4 Spire en rotation dans un champ magnétique (***)

On considère une spire circulaire de masse m , de résistance R , de rayon a , d'inductance propre négligeable, suspendue à un fil isolant vertical d'axe (OO_1) qui n'exerce aucun couple de torsion (O_1 désignant le point d'attache du fil de torsion et O le centre de la spire). La spire baigne dans un champ magnétique \mathbf{B} horizontal et uniforme, de norme B . On désigne par α l'angle que fait le vecteur surface \mathbf{S} de la spire avec le champ magnétique. À $t = 0$, on lance la spire depuis $\alpha = 0$ à la vitesse angulaire $\dot{\alpha}_0$ autour de l'axe (OO_1) . On notera $J = ma^2/2$ le moment d'inertie de la spire par rapport à l'axe (OO_1) .

1. Expliquer qualitativement ce qui se passe.

Solution: La spire se met à tourner autour de l'axe (OO_1) , ce qui induit une variation du flux du champ magnétique à travers la spire. Cela génère donc une force électromotrice d'induction aux bornes de la spire, et donc un courant induit. Ces courants induits sont à l'origine de forces de Laplace qui s'opposent à la variation du flux du champ magnétique d'après la loi de Lenz. Les forces de Laplace freinent donc le mouvement de la spire jusqu'à l'immobiliser : c'est le principe du freinage par induction.

2. Calculer les courants induits dans la spire en fonction de la vitesse angulaire de rotation de la spire et des données du problème.

Solution: On commence par utiliser la loi de Faraday pour calculer la force électromotrice d'induction :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{M \in \mathcal{D}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}),$$

le champ magnétique étant uniforme (\mathcal{D} désigne le disque de rayon a). On obtient donc finalement :

$$e = -\frac{d}{dt} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}) = -\frac{d}{dt} (B\pi a^2 \cos \alpha) = \pi a^2 B \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}.$$

En utilisant la loi d'Ohm, on obtient alors le courant induit dans la spire :

$$I = \frac{e}{R} = \frac{\pi a^2 B}{R} \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}. \quad (20)$$

3. En déduire une équation différentielle vérifiée par α .

Solution: On applique le théorème du moment cinétique à la tige autour de l'axe (OO_1) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le moment du poids se compense sur toute la spire, et on obtient finalement :

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \mathcal{M}_{L,(OO_1)},$$

où $\mathcal{M}_{L,(OO_1)}$ désigne le moment des forces de Laplace par rapport à l'axe (OO_1) . Le calcul du moment se fait en coordonnées cylindriques dans le plan de la spire, en le calculant par exemple au point O :

$$\mathcal{M}_{L,O} = \oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{OM} \wedge (I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}),$$

\mathcal{C} désignant la spire. On obtient alors, en notant $\mathbf{B} = B(\cos \alpha \mathbf{e}_z + \sin \alpha \mathbf{e}_y)$, où \mathbf{e}_y est dans le plan de la spire et où $\mathbf{e}_z = \mathbf{S}/(\pi a^2)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{L,O} &= \int_0^{2\pi} a \mathbf{e}_r \wedge (I a d\theta \mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{B}) \\ &= \int_0^{2\pi} a \mathbf{e}_r \wedge I a B d\theta (\cos \alpha \mathbf{e}_r + \sin \alpha \mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

Or $\mathbf{e}_y = \cos \theta \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \mathbf{e}_r$, de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{L,O} &= \int_0^{2\pi} a \mathbf{e}_r \wedge I a B d\theta (\cos \alpha \mathbf{e}_r - \sin \alpha \sin \theta \mathbf{e}_z) \\ &= \int_0^{2\pi} I a^2 B d\theta (-\sin \alpha \sin \theta) \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_z \\ &= \int_0^{2\pi} I a^2 B d\theta \sin \alpha \sin \theta \mathbf{e}_\theta \\ &= I a^2 B \sin \alpha \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

Or $\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_x$, soit :

$$\mathcal{M}_{L,O} = I a^2 B \sin \alpha \int_0^{2\pi} d\theta (-\sin^2 \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_y) = -\pi I a^2 B \sin \alpha \mathbf{e}_x,$$

et finalement :

$$\mathcal{M}_{L,(OO_1)} = \mathcal{M}_{L,O} \cdot \mathbf{e}_x = -\pi I a^2 B \sin \alpha.$$

L'équation différentielle vérifiée par α s'écrit donc :

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\pi I a^2 B \sin \alpha,$$

ou encore en utilisant l'expression de I :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{\pi^2 a^4 B^2}{RJ} \sin^2 \alpha \frac{d\alpha}{dt}. \quad (21)$$

4. Obtenir l'expression de $d\alpha/dt$ en fonction de α et des données du problème. Pour cela on posera $d\alpha/dt = g(\alpha)$ et on déterminera la fonction g .

Solution: Pour obtenir $d\alpha/dt$ en fonction de α , on pose $d\alpha/dt = g(\alpha)$ et on réinjecte cette forme dans l'équation différentielle de la question précédente :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = g'(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\pi^2 a^4 B^2}{RJ} \sin^2 \alpha \frac{d\alpha}{dt},$$

d'où l'on tire :

$$g'(\alpha) = -\frac{\pi^2 a^4 B^2}{RJ} \sin^2 \alpha = -\frac{\pi^2 a^4 B^2}{2RJ} (1 - \cos(2\alpha)),$$

qui s'intègre aisément en

$$g(\alpha) = -\frac{\pi^2 a^4 B^2}{2RJ} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \right) + \text{Cste},$$

où Cste est une constante d'intégration. Cette dernière est déterminée à partir des conditions initiales $\alpha(0) = 0$ et $d\alpha/dt(0) = \dot{\alpha}_0$ soit :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\pi^2 a^4 B^2}{4RJ} (2\alpha - \sin(2\alpha)) + \dot{\alpha}_0. \quad (22)$$

5. Trouver l'équation vérifiée par la position angulaire finale α_f de la spire. Justifier qu'il n'existe qu'une seule solution.

Solution: On utilise le résultat précédent, en posant que la dérivée de α par rapport au temps doit être nulle (régime permanent). On obtient alors :

$$0 = -\frac{\pi^2 a^4 B^2}{4RJ} (2\alpha_f - \sin(2\alpha_f)) + \dot{\alpha}_0,$$

où encore :

$$2\alpha_f - \sin(2\alpha_f) = \frac{4RJ\dot{\alpha}_0}{\pi^2 a^4 B^2}. \quad (23)$$

On note

$$h(\alpha_f) = 2\alpha_f - \sin(2\alpha_f),$$

et on en calcule la dérivée :

$$h'(\alpha_f) = 2(1 - \cos(2\alpha_f)),$$

qui est strictement positive. On en déduit donc que la fonction h est strictement croissante, et donc si une solution existe, elle est unique.

6. Calculer la norme du champ magnétique pour que la spire s'arrête au bout d'un quart de tour ($\alpha_f = \pi/2$). On prendra $a = 5$ cm, $R = 0,5 \Omega$, $m = 2$ g et $\dot{\alpha}_0/(2\pi) = 10$ Hz. Commenter.

Solution: On utilise le résultat de la question précédente, en posant $\alpha_f = \pi/2$. On obtient alors :

$$\pi = \frac{4RJ\dot{\alpha}_0}{\pi^2 a^4 B^2},$$

soit en isolant le champ magnétique :

$$B = \sqrt{\frac{4RJ\dot{\alpha}_0}{\pi^3 a^4}} = \sqrt{\frac{2mR\dot{\alpha}_0}{\pi^3 a^2}}. \quad (24)$$

On constate que le champ magnétique pour freiner augmente avec l'inertie de la spire m et la vitesse angulaire initiale $\dot{\alpha}_0$, ce qui est cohérent. Par ailleurs, B augmente aussi avec R car si la résistance de la spire augmente, les courants induits diminuent, ce qui impose d'augmenter le champ magnétique pour freiner la spire plus efficacement. Enfin, la norme du champ magnétique nécessaire pour freiner diminue avec le rayon de la spire, car bien que la masse de la spire augmente linéairement avec a , le flux du champ magnétique (et donc les courants induits) varie comme a^2 .

L'application numérique donne $B \simeq 1,3 \text{ T}$, ce qui est un champ réalisable avec des aimants permanents ou un électroaimant.

5 Haut-parleur électrodynamique (**)

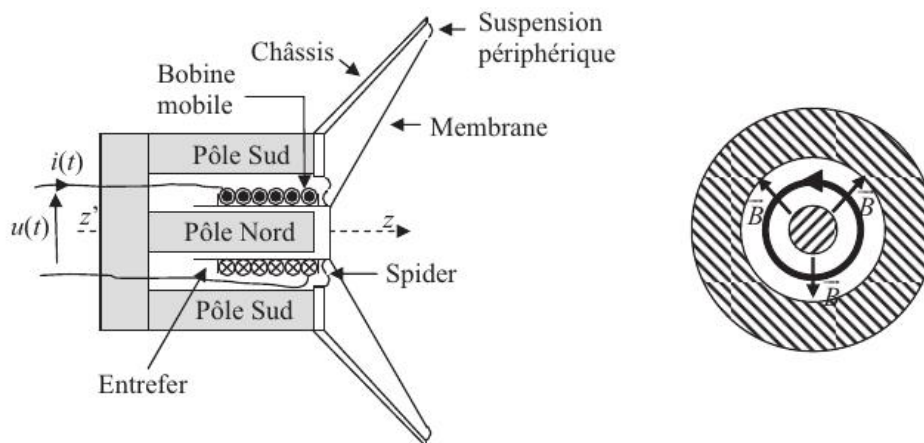


FIGURE 1 – Schéma d'un haut-parleur électrodynamique, extrait de CPP PC 2016.

On s'intéresse à un haut-parleur électrodynamique, constitué d'un aimant permanent à symétrie de révolution d'axe (Oz), créant un champ uniforme radial dans l'entrefer $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_r$ en coordonnées cylindriques. Une bobine, libre de coulisser le long de la pièce centrale de l'aimant, est solidaire d'une membrane. Cette dernière est liée à la pièce centrale de l'aimant par une liaison (spider) mais aussi à la pièce extérieure de l'aimant par des suspensions périphériques. Ce système de liaison permet d'assurer un mouvement de translation de la membrane selon l'axe (Oz) avec une force de rappel vers la position d'équilibre, qu'on assimilera à une force de rappel élastique par un ressort de raideur k . On notera z la position de la partie mobile par rapport à sa position d'équilibre. On supposera également que la membrane en mouvement subit une force de la forme $\mathbf{F}_f = -\eta dz/dt \mathbf{e}_z$ traduisant l'amortissement de son mouvement du fait du rayonnement acoustique qu'elle émet. On modélisera enfin la bobine par un circuit d'inductance L , de résistance totale R et de longueur totale ℓ .

1. Expliquer que ce dispositif est un convertisseur électromécanique et justifier qu'il peut fonctionner comme un haut-parleur ou un microphone.

Solution: Ce dispositif est un convertisseur électromécanique car il peut convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique et réciproquement. Dans un cas, la bobine est branchée à un générateur alternatif qui lui dérive un courant d'intensité i variable. La bobine baignant dans le champ magnétique créé par l'aimant, cela génère des forces de Laplace qui mettent en mouvement la bobine. La puissance électrique est donc convertie en puissance mécanique car la membrane devient mobile : c'est le principe du haut-parleur.

À l'inverse, si la membrane est mise en mouvement par une sollicitation extérieure, par exemple par une onde acoustique, alors par induction sont générés dans la bobine des courants induits et donc une puissance électrique qu'on peut récupérer en sortie : c'est le principe du microphone.

2. On suppose que la bobine est parcourue par un courant d'intensité i et se déplace selon l'axe (Oz) . Calculer la force électromotrice d'induction aux bornes de la bobine.

Solution: On applique la loi de Faraday, qui indique que la force électromotrice e est égale à :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

où Φ désigne le flux du champ magnétique total régnant dans l'espace où se meut la bobine. Le champ magnétique total est la somme du champ magnétique propre créé par la bobine et du champ magnétique créé par l'aimant. On peut donc écrire :

$$\Phi = \Phi_{\text{propre}} + \Phi_{\text{aimant}}.$$

Le premier s'exprime en fonction de l'inductance propre de la bobine :

$$\Phi_{\text{propre}} = Li.$$

Le second correspond au flux coupé du champ magnétique créé par l'aimant quand la bobine se déplace. La surface coupée pendant dt correspond donc à la surface latérale d'un cylindre de même rayon que la bobine, qu'on notera a , et de hauteur dz . On a donc, pour le flux élémentaire :

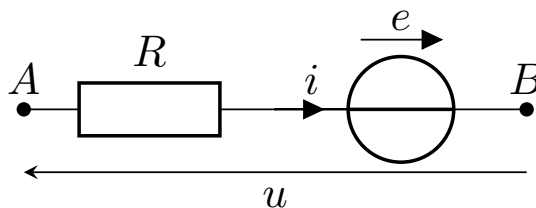
$$d\Phi_{\text{aimant}} = -N(2\pi a dz) B = -2\pi Na \frac{dz}{dt} B dt = -\ell \frac{dz}{dt} B dt,$$

où N désigne le nombre de spires, et où le signe $-$ vient du fait que la surface coupée est orientée selon $-\mathbf{e}_r$. On a donc finalement pour la force électromotrice :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} + B\ell\frac{dz}{dt}. \quad (25)$$

3. Donner le schéma électrique équivalent du circuit ainsi que l'équation électrique correspondante.

Solution: Le schéma électrique équivalent du circuit est le suivant :



La loi des mailles associée à la loi d'Ohm fournit finalement :

$$u = Ri - e = Ri + L\frac{di}{dt} - B\ell\frac{dz}{dt},$$

ou encore :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u + Bl \frac{dz}{dt}. \quad (26)$$

4. Calculer les forces de Laplace s'exerçant sur la bobine.

Solution: On calcule les forces de Laplace à partir de leur expression :

$$\mathbf{F}_L = \int_{\text{bobine}} i d\ell \wedge \mathbf{B} = N \int_0^{2\pi} i a d\theta \mathbf{e}_\theta \wedge B \mathbf{e}_r = -i\ell B \mathbf{e}_z. \quad (27)$$

5. En déduire une équation différentielle vérifiée par la variable z . On notera $\mathbf{F} = F \mathbf{e}_z$ la force extérieure s'exerçant sur la membrane (par exemple lorsqu'une onde acoustique se propage dans l'air), et m la masse de la partie mobile du dispositif.

Solution: On applique le principe fondamental de la dynamique au système constitué de la bobine et de la membrane dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire supposé galiléen, en projection selon \mathbf{e}_z , qui subit une force de rappel élastique, une force d'amortissement \mathbf{F}_f , la force \mathbf{F} et les forces de Laplace \mathbf{F}_L :

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -kz - \eta \frac{dz}{dt} + F - i\ell B,$$

ou encore :

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + \eta \frac{dz}{dt} + kz = F - i\ell B. \quad (28)$$

6. Effectuer un bilan énergétique. On définira plusieurs énergies et puissances. Commenter.

Solution: On applique le théorème de la puissance mécanique à la partie mobile dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = P_L + P(\mathbf{F}) + P(\mathbf{F}_f),$$

où

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{dz}{dt} \right)^2,$$

désigne l'énergie cinétique de la partie mobile,

$$E_p = \frac{1}{2} k z^2,$$

l'énergie potentielle élastique de la partie mobile, tandis que P_L , $P(\mathbf{F})$ et $P(\mathbf{F}_f)$ désignent respectivement la puissance des forces de Laplace, de la puissance de la force \mathbf{F} et de la force de frottements \mathbf{F}_f . La première vaut

$$P_L = -i\ell B \frac{dz}{dt},$$

la seconde vaut :

$$P(\mathbf{F}) = F \frac{dz}{dt},$$

tandis que la troisième vaut :

$$P(\mathbf{F}_f) = -\eta \left(\frac{dz}{dt} \right)^2.$$

La puissance des forces de Laplace peut être réécrite à partir de l'équation électrique en multipliant cette dernière par i :

$$Li \frac{di}{dt} + Ri^2 = ui + Bli \frac{dz}{dt},$$

soit :

$$P_L = ui - Ri^2 - \frac{dE_{\text{bob}}}{dt},$$

où

$$E_{\text{bob}} = \frac{1}{2} Li^2,$$

désigne l'énergie magnétique stockée dans la bobine. Le bilan de puissance s'écrit finalement :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kz^2 + \frac{1}{2} Li^2 \right] = F \frac{dz}{dt} + ui - Ri^2 - \eta \left(\frac{dz}{dt} \right)^2. \quad (29)$$

Le terme entre crochets dans le membre de gauche représente l'énergie totale du système mobile, qui est la somme de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie magnétique stockée dans la bobine. Cette énergie peut varier du fait de la puissance mécanique reçue de la force \mathbf{F} et de la puissance électrique ui reçue par un générateur extérieur. Par ailleurs, cette énergie diminue du fait de la dissipation par effet Joule de puissance $-Ri^2$ mais aussi par rayonnement acoustique de puissance $-\eta (dz/dt)^2$.

7. On se place dans la configuration haut-parleur ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$). On suppose que les grandeurs électriques varient sinusoïdalement à la pulsation ω (régime sinusoïdal forcé), et par la suite on utilise la notation complexe, par exemple :

$$u(t) = \text{Re} \left(\underline{u}(\omega) e^{j\omega t} \right),$$

où $\underline{u}(\omega)$ désigne l'amplitude complexe, j le nombre complexe vérifiant $j^2 = -1$ et Re la partie réelle. Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}(\omega) = \underline{u}(\omega)/\underline{i}(\omega)$ et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\underline{Z}(\omega) = \underline{Z}_e(\omega) + \underline{Z}_m(\omega),$$

où $\underline{Z}_e(\omega)$ est l'impédance électrique du haut-parleur, ne dépendant que des grandeurs électriques, et $\underline{Z}_m(\omega)$ l'impédance motionnelle dépendant des propriétés mécaniques du haut-parleur. Commenter.

Solution: On réécrit les équations mécanique et électrique en régime sinusoïdal forcé (en omettant toutes les dépendances en ω) :

$$(j\omega L + R) \underline{i} = \underline{u} + j\omega B \ell \underline{z},$$

et

$$\left(-m\omega^2 + j\omega\eta + k \right) \underline{z} = -\underline{i} \ell B.$$

L'équation mécanique permet d'exprimer \underline{z} en fonction de \underline{i} :

$$\underline{z} = -\frac{\ell B}{-m\omega^2 + j\omega\eta + k} \underline{i}.$$

On réinjecte alors cette expression dans l'équation électrique pour obtenir :

$$(j\omega L + R) \underline{i} = \underline{u} - \frac{j\omega \ell^2 B^2}{-m\omega^2 + j\omega\eta + k} \underline{i},$$

$$\left[R + j\omega L + \frac{j\omega \ell^2 B^2}{-m\omega^2 + j\omega\eta + k} \right] \underline{i} = \underline{u}$$

soit finalement :

$$\underline{u} = \left(\underline{Z}_e(\omega) + \underline{Z}_m(\omega) \right) \underline{i}, \quad (30)$$

où l'impédance électrique vaut :

$$\underline{Z}_e(\omega) = R + j\omega L, \quad (31)$$

et l'impédance motionnelle :

$$\underline{Z}_m(\omega) = \frac{j\omega\ell^2 B^2}{-m\omega^2 + j\omega\eta + k}. \quad (32)$$

Le couplage électromécanique revient à ajouter en série de la bobine et de la résistance un dipôle d'impédance $\underline{Z}_m(\omega)$ dans le schéma électrique équivalent de la partie mobile en régime sinusoïdal forcé.

8. Réécrire l'impédance motionnelle sous la forme :

$$\underline{Z}_m(\omega) = Z_0 \frac{jx/Q}{1 + jx/Q - x^2},$$

où $x = \omega/\omega_0$, et où on exprimera les constantes ω_0 , Q et Z_0 en fonction des données. Commenter.

Solution: On réécrit l'impédance motionnelle sous la forme :

$$\underline{Z}_m(\omega) = \frac{\ell^2 B^2}{k} \frac{j\omega}{-\frac{m}{k}\omega^2 + j\omega\frac{\eta}{k} + 1}.$$

On pose alors :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (33)$$

la pulsation propre du système masse-ressort équivalent, de sorte que l'impédance motionnelle se réécrit, en notant $x = \omega/\omega_0$:

$$\underline{Z}_m(\omega) = \frac{\omega_0 \ell^2 B^2}{k} \frac{jx}{1 + jx\omega_0 \frac{\eta}{k} - x^2}.$$

On identifie alors :

$$\frac{1}{Q} = \omega_0 \frac{\eta}{k} = \frac{\eta}{\sqrt{mk}} \iff Q = \frac{\sqrt{mk}}{\eta}, \quad (34)$$

le facteur de qualité du système mécanique, de sorte que l'impédance motionnelle se réécrit :

$$\underline{Z}_m(\omega) = \frac{\omega_0 \ell^2 B^2 Q}{k} \frac{jx/Q}{1 + jx/Q - x^2} = Z_0 \frac{jx/Q}{1 + jx/Q - x^2}, \quad (35)$$

où on identifie l'impédance caractéristique :

$$Z_0 = \frac{\omega_0 \ell^2 B^2 Q}{k} = \frac{B^2 \ell^2}{\eta}. \quad (36)$$

L'impédance motionnelle présente alors une résonance quand $x = 1$, c'est-à-dire quand $\omega = \omega_0$.

9. En fonctionnement haut-parleur ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$), définir un rendement r_{HP} en fonction des puissances moyennes introduites en question 6, puis donner son expression en régime sinusoïdal forcé en fonction de k , m , η , R , ω , ℓ , B .

Solution: On calcule la puissance moyenne sur une période à partir du résultat de la question 6. Le membre de gauche est de moyenne nulle, et on obtient :

$$0 = \langle ui \rangle - \langle Ri^2 \rangle - \left\langle \eta \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\rangle.$$

La puissance utile est alors la puissance acoustique rayonnée $P_u = \left\langle \eta \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\rangle$ tandis que la puissance totale consommée est la puissance électrique $P = \langle ui \rangle$, une partie étant dissipée par effet Joule. On définit alors le rendement par :

$$r_{\text{HP}} = \frac{P_u}{P} = \frac{\left\langle \eta \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\rangle}{\langle ui \rangle}. \quad (37)$$

La puissance totale se calcule en régime sinusoïdal forcé :

$$P = \langle ui \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (u \underline{i}^*) = \frac{1}{2} |\underline{i}|^2 \text{Re} (\underline{Z}),$$

où \underline{i}^* le complexe conjugué de \underline{i} . On fait de même pour la puissance utile, en notant que :

$$\frac{dz}{dt} = j\omega z e^{j\omega t},$$

soit

$$P_u = \left\langle \eta \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\eta j\omega z [j\omega z]^*) = \frac{1}{2} \eta \omega^2 |z|^2.$$

Le rendement vaut alors :

$$r_{\text{HP}} = \frac{\eta \omega^2 |z|^2}{|\underline{i}|^2 \text{Re} (\underline{Z})} = \frac{\eta \omega^2}{\text{Re} (\underline{Z}_e) + \text{Re} (\underline{Z}_m)} \left| \frac{z}{\underline{i}} \right|^2 = \frac{\eta \omega^2}{R + \text{Re} (\underline{Z}_m)} \left| \frac{z}{\underline{i}} \right|^2.$$

Or d'après la question 7, on a :

$$z = -\frac{\ell B}{-m\omega^2 + j\omega\eta + k} \underline{i},$$

soit :

$$r_{\text{HP}} = \frac{\eta \omega^2}{R + \text{Re} (\underline{Z}_m)} \frac{\ell^2 B^2}{|-m\omega^2 + j\omega\eta + k|^2}.$$

On doit maintenant calculer la partie réelle de l'impédance motionnelle, en multipliant numérateur et dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur :

$$\underline{Z}_m(\omega) = \frac{j\omega\ell^2 B^2}{-m\omega^2 + j\omega\eta + k} = \frac{j\omega\ell^2 B^2 (k - m\omega^2 - j\omega\eta)}{|-m\omega^2 + j\omega\eta + k|^2}.$$

La partie réelle de l'impédance motionnelle vaut donc :

$$\text{Re} (\underline{Z}_m) = \frac{\omega^2 \ell^2 B^2 \eta}{|-m\omega^2 + j\omega\eta + k|^2}.$$

On obtient finalement l'expression du rendement :

$$r_{\text{HP}} = \frac{\eta \omega^2 \ell^2 B^2}{R |-m\omega^2 + j\omega\eta + k|^2 + \eta \omega^2 \ell^2 B^2} = \frac{\eta \omega^2 \ell^2 B^2}{R [(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 \eta^2] + \eta \omega^2 \ell^2 B^2}. \quad (38)$$

10. Montrer que le rendement est maximal pour $\omega = \omega_0$ et donner sa valeur maximale. Commenter. Faire l'application numérique pour $\ell = 4 \text{ m}$, $B = 1 \text{ T}$, $R = 10 \Omega$ et $\eta = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

Solution: On réécrit le rendement sous la forme :

$$r_{\text{HP}} = \frac{1}{1 + \frac{R\eta}{\ell^2 B^2} + \frac{R}{\eta \ell^2 B^2} \left(\frac{k}{\omega} - m\omega \right)^2}.$$

Le rendement est maximal quand le dénominateur est minimal, c'est-à-dire quand :

$$\frac{k}{\omega} = m\omega \iff \omega^2 = \frac{k}{m} \iff \omega = \omega_0, \quad (39)$$

et dans ce cas, le rendement vaut :

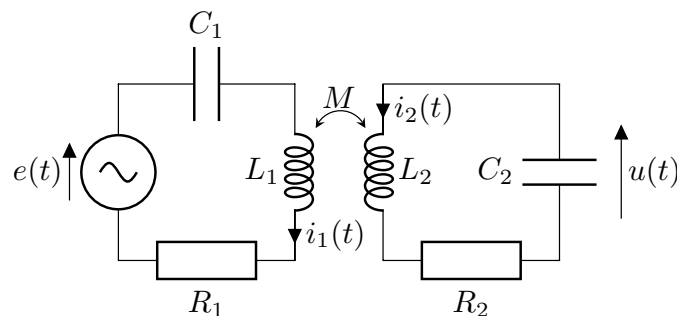
$$r_{\text{HP}} = \frac{1}{1 + \frac{R\eta}{\ell^2 B^2}}. \quad (40)$$

Ce rendement maximal augmente avec le champ magnétique ou la longueur totale de la spire. Par contre, il diminue avec les pertes par effet Joule (R) et par rayonnement acoustique (η). Attention cependant que si $\eta = 0$, alors le rendement vaut 1 mais la puissance utile est nulle!

L'application numérique donne alors $r_{\text{HP}} \simeq 0.62$, ce qui est un rendement acceptable.

6 Résonance par inductance mutuelle (*)

On considère deux circuits RLC couplés par mutuelle inductance comme cela est représenté sur le schéma électrique ci-contre :



Les deux bobines orientées dans le même sens sont couplées par inductance mutuelle avec un coefficient d'inductance mutuelle M .

1. Donner le signe de M .

Solution: Les deux bobines étant orientées dans le même sens, les lignes de champ magnétique créé par la bobine L_2 sont anti-alignées avec i_1 , de sorte que si i_2 est positif alors le flux d'inductance mutuelle doit être négatif. Ainsi $M < 0$.

2. Donner l'expression des tensions u_{L_1} et u_{L_2} aux bornes des deux bobines en convention récepteur.

Solution: Pour la bobine d'inductance L_1 , on utilise la loi de Faraday :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt},$$

où Φ_1 désigne le flux à travers la première bobine. Ce flux se décompose en une composante due au flux propre et une composante due au flux du champ magnétique créé par la bobine L_2 :

$$\Phi = L_1 i_1 + M i_2,$$

soit finalement :

$$u_{L_1} = -e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}. \quad (41)$$

De la même façon, on trouve que :

$$u_{L_2} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \quad (42)$$

3. Établir le système d'équations différentielles couplées vérifiées par les courants i_1 et i_2 .

Solution: Dans la maille 1, on applique la loi des mailles :

$$e = u_{R_1} + u_{C_1} + u_{L_1},$$

où u_{R_1} , u_{C_1} et u_{L_1} désignent respectivement les tensions aux bornes de R_1 , C_1 et L_1 en convention récepteur. Les deux premières s'expriment aisément en utilisant les relations constitutives :

$$u_{R_1} = R_1 i_1,$$

et

$$i_1 = C_1 \frac{du_{C_1}}{dt}.$$

Pour la bobine, on utilise le résultat de la question précédente, et on trouve finalement :

$$e = R_1 i_1 + u_{C_1} + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}.$$

On dérive par rapport au temps pour exprimer u_{C_1} en fonction de i_1 soit finalement :

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C_1} = \frac{de}{dt}. \quad (43)$$

Pour obtenir l'autre équation, on applique la loi des mailles dans la seconde maille, soit :

$$u_{C_2} + u_{R_2} + u_{L_2} = 0,$$

où les tensions sont de nouveau prises en convention récepteur. On obtient alors, en utilisant les relations constitutives, puis en dérivant par rapport au temps :

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C_2} = 0. \quad (44)$$

4. On suppose qu'un générateur délivre une tension sinusoïdale $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$. On supposera que le régime sinusoïdal forcé est atteint, et on utilisera les amplitudes complexes, par exemple :

$$i_1(t) = \text{Re} \left(\underline{i}_1(\omega) e^{j\omega t} \right),$$

où $\underline{i}_1(\omega)$ désigne l'amplitude complexe, Re la partie réelle et j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$. Exprimer les amplitudes complexes \underline{i}_1 et \underline{i}_2 en fonction de e_0 , ω et des données du problème.

Solution: On passe les équations différentielles précédentes dans le domaine complexe :

$$-L_1\omega^2 \underline{i}_1 - M\omega^2 \underline{i}_2 + j\omega R_1 \underline{i}_1 + \frac{\underline{i}_1}{C_1} = j\omega e_0,$$

et :

$$-L_2\omega^2 \underline{i}_2 - M\omega^2 \underline{i}_1 + j\omega R_2 \underline{i}_2 + \frac{\underline{i}_2}{C_2} = 0.$$

À partir de la seconde équation, on exprime \underline{i}_1 en fonction de \underline{i}_2 :

$$\underline{i}_2 = \frac{M\omega^2}{\frac{1}{C_2} + j\omega R_2 - L_2\omega^2} \underline{i}_1 = \frac{MC_2\omega^2}{1 + j\omega R_2 C_2 - L_2 C_2 \omega^2} \underline{i}_1.$$

On réinjecte ceci dans la première équation, et on obtient :

$$\begin{aligned} -L_1\omega^2 \underline{i}_1 - \frac{M^2 C_2 \omega^4}{1 + j\omega R_2 C_2 - L_2 C_2 \omega^2} \underline{i}_1 + j\omega R_1 \underline{i}_1 + \frac{\underline{i}_1}{C_1} &= j\omega e_0 \\ \left[1 + j\omega R_1 C_1 - L_1 C_1 \omega^2 - \frac{M^2 C_1 C_2 \omega^4}{1 + j\omega R_2 C_2 - L_2 C_2 \omega^2} \right] \underline{i}_1 &= j\omega C_1 e_0 \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\underline{i}_1 = \frac{j\omega C_1 (1 + j\omega R_2 C_2 - L_2 C_2 \omega^2)}{(1 + j\omega R_1 C_1 - L_1 C_1 \omega^2) (1 + j\omega R_2 C_2 - L_2 C_2 \omega^2) - M^2 C_1 C_2 \omega^4} e_0, \quad (45)$$

et :

$$\underline{i}_2 = \frac{j\omega^3 M C_1 C_2}{(1 + j\omega R_1 C_1 - L_1 C_1 \omega^2) (1 + j\omega R_2 C_2 - L_2 C_2 \omega^2) - M^2 C_1 C_2 \omega^4} e_0. \quad (46)$$

5. On suppose maintenant que les deux circuits sont identiques, autrement dit $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$ et $L_1 = L_2 = L$. Simplifier les expressions obtenues à la question précédente. On notera $M = kL$ avec k la constante de couplage entre les deux bobines.

Solution: Dans le cas où les deux circuits sont identiques, on peut factoriser le dénominateur. Pour le premier courant, on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{i}_1 &= \frac{j\omega C (1 + j\omega RC - LC\omega^2)}{(1 + j\omega RC - LC\omega^2)^2 - M^2 C^2 \omega^4} e_0 \\ &= \frac{j\omega C (1 + j\omega RC - LC\omega^2)}{(1 + j\omega RC - (L - M)C\omega^2) (1 + j\omega RC - (L + M)C\omega^2)} e_0. \\ &= \frac{j\omega C (1 + j\omega RC - LC\omega^2)}{(1 + j\omega RC - LC(1 - k)\omega^2) (1 + j\omega RC - LC(1 + k)\omega^2)} e_0 \end{aligned} \quad (47)$$

Pour le second courant, on obtient :

$$\underline{i}_2 = \frac{j\omega^3 M C^2}{(1 + j\omega RC - LC(1 - k)\omega^2) (1 + j\omega RC - LC(1 + k)\omega^2)} e_0. \quad (48)$$

6. Calculer la fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u}(\omega)}{\underline{e}(\omega)}.$$

Solution: Pour calculer la fonction de transfert, il faut tout d'abord calculer u en fonction des courants :

$$i_2 = -C \frac{du}{dt} \iff u = j \frac{i_2}{\omega C},$$

soit finalement :

$$\underline{H}(\omega) = -\frac{\omega^2 MC}{(1 + j\omega RC - LC(1 - k)\omega^2)(1 + j\omega RC - LC(1 + k)\omega^2)}. \quad (49)$$

7. Calculer le gain du système et montrer qu'il existe deux résonances à deux pulsations ω_{\pm} qu'on déterminera en fonction de k, L, C . On négligera les résistances. Commenter.

Solution: On calcule le module de la fonction de transfert :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{\omega^2 |M| C}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC(1 - k))^2 + \omega^2 R^2 C^2} \sqrt{(1 - \omega^2 LC(1 + k))^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (50)$$

Pour étudier les éventuelles résonances, on doit étudier l'évolution du gain avec la pulsation en négligeant les résistances :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{\omega^2 |M| C}{|1 - \omega^2 LC(1 - k)| |1 - \omega^2 LC(1 + k)|}.$$

Il y a alors résonance si le dénominateur du gain s'annule, ce qui se produit quand :

$$1 - \omega^2 LC(1 \pm k) = 0 \iff \omega_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{LC(1 \pm k)}}. \quad (51)$$

Quand les deux circuits sont non couplés, ils ont tous deux la même fréquence de résonance en intensité qui est $1/\sqrt{LC}$. Le couplage entre les deux circuits rend les fréquences de résonance non dégénérées et les écarte de leur valeur commune en l'absence de couplage ($k = 0$) : une des fréquences de résonance est inférieure à $1/\sqrt{LC}$, l'autre est supérieure.

7 Chute d'un cadre conducteur dans un champ magnétique (*)

On considère un cadre conducteur de côté a de résistance totale R et de masse m . La spire chute verticalement dans un champ de pesanteur $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$ sans une vitesse initiale. Elle baigne également dans un champ magnétique non uniforme $\mathbf{B} = B(1 - \alpha y)\mathbf{e}_z$ orthogonal au plan de la spire. On négligera les frottements de l'air, et on se placera dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen.

1. Expliquer qualitativement ce qui se passe.

Solution: Le cadre chute dans le champ de pesanteur du fait du poids, cela induit alors une variation du flux du champ magnétique à travers la spire car le champ magnétique est non uniforme. Cette variation de flux induit des courants dans le cadre qui exercent des forces de Laplace pour limiter la variation de flux en vertu de la loi de modulation de Lenz. Le cadre est donc freiné dans sa chute par les forces de Laplace.

2. Obtenir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{e}_y$ du cadre.

Solution: On commence par calculer la force électromotrice d'induction aux bornes du cadre par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

où Φ désigne le flux du champ magnétique à travers la spire, qui s'écrit :

$$\Phi(t) = \iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{B}(M) \cdot d\mathbf{S},$$

où \mathcal{S} désigne l'aire du carré délimité par le cadre. Par la suite, on oriente le circuit selon $+\mathbf{e}_z$, et on obtient alors pour le flux :

$$\Phi(t) = \int_{x-a/2}^{x+a/2} dx' \int_{y-a/2}^{y+a/2} dy' B (1 - \alpha y'),$$

où x et y désignent les abscisse et ordonnée du centre du cadre. L'intégration donne alors :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= aB \left[y' - \frac{\alpha}{2} y'^2 \right]_{y-a/2}^{y+a/2} \\ &= aB \left[y + \frac{a}{2} - \frac{\alpha}{2} \left(y + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(y - \frac{a}{2} \right) + \frac{\alpha}{2} \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 \right], \\ &= aB (a - \alpha a y) \\ &= a^2 B (1 - \alpha y) \end{aligned}$$

soit pour la force électromotrice d'induction :

$$e = \alpha a^2 B v.$$

On obtient ensuite par la loi des mailles, ainsi que la loi d'Ohm, l'intensité du courant induit dans le cadre :

$$I = \frac{e}{R} = \frac{\alpha a^2 B v}{R}.$$

On calcule maintenant les forces de Laplace s'exerçant sur le cadre. Il faut tenir compte des forces s'exerçant sur chacun des quatre côtés. Pour le côté inférieur, la force de Laplace vaut :

$$\mathbf{F}_{L,1} = \int_{x-a/2}^{x+a/2} Idx' \mathbf{e}_x \wedge B \left[1 - \alpha \left(y - \frac{a}{2} \right) \right] \mathbf{e}_z = -IaB \left[1 - \alpha \left(y - \frac{a}{2} \right) \right] \mathbf{e}_y.$$

Pour le côté supérieur, cette force vaut :

$$\mathbf{F}_{L,2} = \int_{x-a/2}^{x+a/2} -Idx' \mathbf{e}_x \wedge B \left[1 - \alpha \left(y + \frac{a}{2} \right) \right] \mathbf{e}_z = IaB \left[1 - \alpha \left(y + \frac{a}{2} \right) \right] \mathbf{e}_y.$$

Pour le côté gauche, cette force vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{L,3} &= \int_{y-a/2}^{y+a/2} -Idy' \mathbf{e}_y \wedge B (1 - \alpha y') \mathbf{e}_z \\ &= -IB \left[y' - \frac{\alpha}{2} y'^2 \right]_{y-a/2}^{y+a/2} \mathbf{e}_x \\ &= -IB \left[y + \frac{a}{2} - \frac{\alpha}{2} \left(y + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(y - \frac{a}{2} \right) + \frac{\alpha}{2} \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 \right] \mathbf{e}_x \\ &= -IaB (1 - \alpha y) \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

Pour le côté droit, cette force vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{L,4} &= \int_{y-a/2}^{y+a/2} I dy' \mathbf{e}_y \wedge B (1 - \alpha y') \mathbf{e}_z \\ &= IB \left[y' - \frac{\alpha}{2} y'^2 \right]_{y-a/2}^{y+a/2} \mathbf{e}_x \\ &= IB \left[y + \frac{a}{2} - \frac{\alpha}{2} \left(y + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(y - \frac{a}{2} \right) + \frac{\alpha}{2} \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 \right] \mathbf{e}_x \\ &= I a B (1 - \alpha y) \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

La résultante des forces de Laplace s'écrit donc finalement :

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{F}_{L,1} + \mathbf{F}_{L,2} + \mathbf{F}_{L,3} + \mathbf{F}_{L,4} = -I \alpha a^2 B \mathbf{e}_y,$$

où les composantes sur les côtés latéraux (selon \mathbf{e}_x) se compensent.

On applique alors le principe fondamental de la dynamique au cadre dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen, soumis au poids et aux forces de Laplace :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_L,$$

soit en projection selon \mathbf{e}_y :

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - I \alpha a^2 B,$$

et finalement en utilisant l'expression de l'intensité I :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha^2 a^4 B^2}{mR} v = -g. \quad (52)$$

3. Donner l'expression de $v(t)$ en fonction du temps, puis celle de la vitesse limite v_{lim} . Commenter son expression.

Solution: L'équation différentielle précédente se résout facilement en sommant la solution homogène avec une solution particulière constante :

$$v(t) = -\frac{mgR}{\alpha^2 a^4 B^2} \left[1 - \exp\left(\frac{\alpha^2 a^4 B^2}{mR} t\right) \right]. \quad (53)$$

Le cadre atteint donc un régime permanent de vitesse car la chute libre est freinée par les forces de Laplace. En régime permanent, la vitesse est constante et vaut :

$$v_{\text{lim}} = -\frac{mgR}{\alpha^2 a^4 B^2}, \quad (54)$$

qui est proportionnelle à la norme du poids mg tout d'abord, ce qui est cohérent. De plus v_{lim} est proportionnelle à la résistance R du cadre, car plus R augmente, plus les courants induits sont faibles, et moins les forces de Laplace freinent le mouvement. Enfin, la vitesse limite est inversement proportionnelle au champ magnétique et à l'aire du cadre car plus ces grandeurs augmentent, plus la force électromotrice, et donc les courants induits augmentent : la puissance des forces de Laplace augmente également.

4. Faire un bilan énergétique.

Solution: On applique le théorème de la puissance mécanique au cadre dans \mathcal{R} :

$$\frac{dE_m}{dt} = P_L,$$

où :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - mgy,$$

désigne l'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur et :

$$P_L = \mathbf{F}_L \cdot \mathbf{v} = -I\alpha a^2 Bv = -RI^2,$$

désigne la puissance des forces de Laplace, qui est égale à la puissance dissipée par effet Joule. On obtient donc que l'énergie mécanique du système décroît car les forces de Laplace la convertissent en énergie électrique dissipée par effet Joule.