HMEF104 — Electromagnétisme

TP2 - Magnétostatique

1 Objectifs du TP

- Proposer un protocole permettant une mesure quantitative du profil de champ magnétique dans un solénoïde en fonction des coordonnées d'espace et de l'intensité du courant.
- Mettre en place ce protocole, en effectuant un traitement rigoureux des incertitudes.
- Matériel :
  - Solénoïde Jeulin
  - Sonde à effet Hall
  - Ampèremètre
  - Générateur de tension continue à limitation de courant

Pour réaliser ce TP, on pourra s'inspirer des exercices ci-dessous.

2 Exercices complémentaires

2.1 Champ magnétique sur l'axe d'un solénoïde

On considère un solénoïde de longueur ℓ et de rayon R, constitué d'un enroulement de N spires, et parcouru par un courant permanent I. On notera O le milieu du solénoïde, et (Oz) son axe.

1. Montrer que le solénoïde est équivalent à une distribution surfacique de courants $\boldsymbol{j_s}$ dont on précisera l'expression en fonction des données du problème.

Solution: On considère un solénoïde de spires infiniment proches dont la densité linéique vaut $n = N/\ell$. Cela correspond donc à une nappe cylindrique de courants, de densité surfacique :

$$\boldsymbol{j_s} = nI\boldsymbol{e_\theta} = \frac{NI}{\ell}\boldsymbol{e_\theta}, \tag{1}$$

en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

2. Étudier les symétries et les invariances du champ magnétique. En déduire la forme du champ sur l'axe du solénoïde.

Solution: La distribution de courants est invariante par rotation autour de l'axe (Oz), de sorte que $\boldsymbol{B}(M) = \boldsymbol{B}(r, z)$ en coordonnées cylindriques. De plus, le plan contenant M et l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution de courants, et contient donc $\boldsymbol{B}(M)$. Ainsi :

$$\boldsymbol{B}(M) = B_r(r, z)\boldsymbol{e_r} + B_z(r, z)\boldsymbol{e_z}. \tag{2}$$

Sur son axe, le champ créé par le solénoïde s'écrit donc :

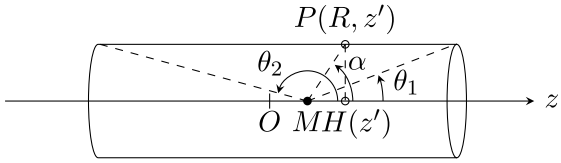
$$\boldsymbol{B}(M) = B(z)\boldsymbol{e_z}. \tag{3}$$

benjamin.guiselin@umontpellier.fr

3. On rappelle que la champ magnétique créé par une distribution surfacique Σ de charges est donné par la loi de Biot et Savart :
$$\boldsymbol{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{P\in\Sigma} \frac{\boldsymbol{j_\mathrm{s}} \wedge \boldsymbol{PM}}{\|\boldsymbol{PM}\|^3} \mathrm{d}S.$$
Calculer, à partir de cette relation, le champ magnétique créé par le solénoïde en un point de son axe sous la forme d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à expliciter.

Solution: Le champ créé par le solénoïde sur son axe est dirigé selon $\boldsymbol{e_z}$. Ainsi, on a :
$$B(z) = \boldsymbol{B}(M)\cdot\boldsymbol{e_z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{P\in\Sigma} \frac{(\boldsymbol{j_\mathrm{s}} \wedge \boldsymbol{PM})\cdot\boldsymbol{e_z}}{\|\boldsymbol{PM}\|^3} \mathrm{d}S.$$
Pour un point P du solénoïde, on a $\boldsymbol{OP} = R\boldsymbol{e_r} + z'\boldsymbol{e_z}$, de sorte que $\boldsymbol{PM} = -R\boldsymbol{e_r} + (z-z')\,\boldsymbol{e_z}$. Ainsi, on peut calculer le produit vectoriel avec $\boldsymbol{j_\mathrm{s}}$:
$$\boldsymbol{j_\mathrm{s}} \wedge \boldsymbol{PM} = \frac{NI}{\ell}\left[-R\boldsymbol{e_\theta}\wedge\boldsymbol{e_r} + (z-z')\,\boldsymbol{e_\theta}\wedge\boldsymbol{e_z}\right] = \frac{NI}{\ell}\left[R\boldsymbol{e_z} + (z-z')\,\boldsymbol{e_r}\right],$$
mais aussi la norme du vecteur :
$$\|\boldsymbol{PM}\| = \sqrt{R^2 + (z-z')^2}.$$
Par ailleurs, l'élément infinitésimal de surface s'écrit $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$. Ainsi, en réinjectant tout ceci dans la loi de Biot et Savart, on obtient :
$$B(z) = \frac{\mu_0 NIR^2}{4\pi\ell}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\mathrm{d}z'\frac{1}{\left[R^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{\mathrm{d}z'}{\left[R^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}. \quad (4)$$

4. Écrire l'intégrale précédente en fonction de l'angle α et en déduire que le champ magnétique selon l'axe du solénoïde s'écrit :
$$\boldsymbol{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\ell}\left[\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right]\boldsymbol{e_z}.$$
Commenter la limite où $\ell \gg R$.



Solution: On exprime la norme du vecteur $\boldsymbol{PM}$ en fonction de α :
$$\sin\alpha = \frac{\|\boldsymbol{HP}\|}{\|\boldsymbol{PM}\|} = \frac{R}{\sqrt{R^2+(z-z')^2}},$$
soit :
$$\frac{1}{\sqrt{R^2+(z-z')^2}} = \frac{\sin\alpha}{R}.$$
Par ailleurs, on a également :
$$\tan\alpha = \frac{\|\boldsymbol{HP}\|}{\|\boldsymbol{HM}\|} = \frac{R}{z'-z},$$

(de sorte que si $z < z'$ comme sur le schéma, on a $\alpha < \pi/2$ et donc $\tan\alpha > 0$), soit

$$z' = z + \frac{R}{\tan\alpha}.$$

On fait donc le changement de variable $z' = z + R/\tan\alpha$ dans l'expression intégrale du champ magnétique, sachant que $\mathrm{d}z' = -R\left(1+\tan^2\alpha\right)\mathrm{d}\alpha/\tan^2\alpha$:

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I R^2}{2\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{\mathrm{d}z'}{\left[R^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} = -\frac{\mu_0 N I}{2\ell}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\mathrm{d}\alpha\frac{\left(1+\tan^2\alpha\right)\sin^3\alpha}{\tan^2\alpha},$$

où les facteurs R se sont simplifiés. On obtient finalement, en utilisant le fait que $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ et $1+\tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$:

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I}{2\ell}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\alpha\sin\alpha = \frac{\mu_0 N I}{2\ell}\left[-\cos\alpha\right]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\mu_0 N I}{2\ell}\left[\cos\theta_1-\cos\theta_2\right], \tag{5}$$

d'où le résultat demandé.
Dans la limite où $\ell \gg R$, alors $\theta_1 \to 0$ and $\theta_2 \to \pi$. On obtient alors :

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I}{\ell}, \tag{6}$$

qui est uniforme sur tout l'axe du solénoïde infini.

5. Exprimer le champ magnétique en fonction de la position z.

Solution: On exprime les angles en fonction des distances :

$$\begin{cases}\tan\theta_1 &= \dfrac{R}{\ell/2-z} \\ \tan\theta_2 &= -\dfrac{R}{\ell/2+z}\end{cases},$$

en utilisant la π-périodicité de la fonction tangente, et son imparité. On peut alors en déduire les expressions des cosinus, en utilisant le fait que $1+\tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$. Par exemple, pour θ_1 :

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_1}} = \frac{\ell/2-z}{\sqrt{R^2+(\ell/2-z)^2}},$$

avec le signe choisi de telle sorte que $\cos\theta_1 > 0$. Pour l'angle θ_2, on constate que $\cos\theta_2 < 0$, et on trouve :

$$\cos\theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_2}} = -\frac{\ell/2+z}{\sqrt{R^2+(\ell/2+z)^2}}.$$

Ainsi le champ magnétique s'écrit finalement, sur l'axe du solénoïde :

$$\boldsymbol{B}(z) = \frac{\mu_0 N I}{2\ell}\left[\frac{\ell/2-z}{\sqrt{R^2+(\ell/2-z)^2}}+\frac{\ell/2+z}{\sqrt{R^2+(\ell/2+z)^2}}\right]\boldsymbol{e_z}. \tag{7}$$

6. Donner l'expression du champ au centre. Simplifier dans l'hypothèse où $\ell \gg R$. Commenter.

Solution: On prend $z = 0$ dans l'expression précédente et on obtient :

$$\boldsymbol{B}(0) = \frac{\mu_0 N I}{2\sqrt{R^2 + (\ell/2)^2}}\boldsymbol{e_z}. \tag{8}$$

Ce champ augmente avec le nombre de spires et le courant traversant les bobines. Par contre, l'intensité du champ diminue quand les dimensions du solénoïde augmentent. Dans l'hypothèse où $\ell \gg R$, on trouve :

$$\boldsymbol{B}(0) \simeq \frac{\mu_0 N I}{\ell}\boldsymbol{e_z}, \tag{9}$$

qui est l'expression du champ magnétique pour un solénoïde infini.

7. Estimer la norme du champ magnétique au centre pour $I = 1\,\mathrm{A}$, $R = 2\,\mathrm{cm}$, $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ et $N = 100$. Comparer au champ magnétique terreste $B_\mathrm{T} \simeq 4 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

Solution: On estime la norme du champ magnétique au centre en remarquant que $\ell \gg R$:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{B}(0)\| &\simeq \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^2 \times 1}{0{,}5} \\ &\simeq 8\pi \times 10^{-5} \\ &\simeq 2{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{T}\end{aligned}. \tag{10}$$

Le champ magnétique créé par la bobine est d'un ordre de grandeur supérieur à celui du champ créé par la Terre. Il s'agit d'un champ parasite qui s'ajoute au champ créé par le solénoïde.

3 Principe de la sonde à effet Hall

On considère un matériau semi-conducteur dopé n dans lequel la conduction électrique est assuré par les électrons de conduction uniquement, dont la densité volumique est uniforme et notée n. Le matériau est un pavé de dimensions (L, ℓ, h) selon les directions $(\boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y}, \boldsymbol{e_z})$. On suppose qu'un courant électrique I constant s'établit selon la direction $\boldsymbol{e_x}$. On suppose également que le matériau est soumis à un champ magnétique constant $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e_z}$.

1. En supposant que le courant s'établit uniformément dans tout le volume du semi-conducteur, donner la relation entre la densité volumique de courants $\boldsymbol{j}$ et la vitesse moyenne $\boldsymbol{v}$ des électrons. On notera $-e$ la charge électrique des électrons.

Solution: Par définition, la densité volumique de courants est le nombre de charges par unité de temps et de surface traversant une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ de vecteur unitaire normal $\boldsymbol{u}$. Pendant $\mathrm{d}t$, les électrons traversant l'élement de surface $\mathrm{d}S$ sont dans un cylindre de base $\mathrm{d}S$ et de hauteur $\|\boldsymbol{v}\|\,\mathrm{d}t$ dirigée par le vecteur $\boldsymbol{v}$. Ce cylindre a pour volume

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}S\mathrm{d}t\,(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u})\,,$$

et donc le nombre d'électrons qu'il contient est

$$\mathrm{d}N = n\mathrm{d}V = n\,(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

Chaque électron portant une charge $-e$, la charge électrique qui traverse $\mathrm{d}S$ pendant $\mathrm{d}t$ vaut

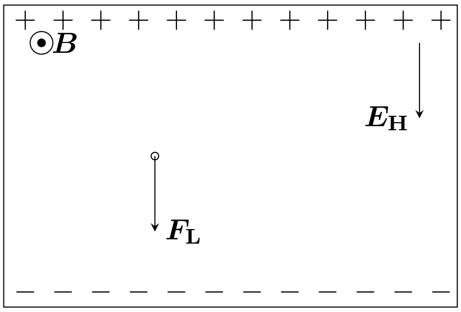
$$\mathrm{d}Q = -e\mathrm{d}N = -ne\,(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S\mathrm{d}t = (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

la deuxième égalité découlant de la définition de $\boldsymbol{j}$. On aboutit finalement à :

$$\boldsymbol{j} = -ne\boldsymbol{v}. \tag{11}$$

2. Décrire qualitativement le phénomène. En déduire l'existence d'un champ électrique $\boldsymbol{E}_{\mathbf{H}}$ dit de Hall dont on précisera la direction et le sens.

Solution: En présence d'un champ magnétique, chaque électron libre subit une force de Lorentz magnétique $\boldsymbol{F}_{\mathbf{L}} = -e\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$. Si $\boldsymbol{j}$ est dirigé selon $+\boldsymbol{e_x}$ alors $\boldsymbol{v}$ est dirigé selon $-\boldsymbol{e_x}$. Par ailleurs, $\boldsymbol{B}$ étant dirigé selon $+\boldsymbol{e_z}$, on obtient que la force $\boldsymbol{F}_{\mathbf{L}}$ est dirigé selon $-\boldsymbol{e_y}$. Ainsi la trajectoire des électrons se courbe et ils s'accumulent sur le bord inférieur du matériau, tandis que le bord supérieur, déficitaire en électrons, se charge positivement. Il apparait donc un champ électrique $\boldsymbol{E}_{\mathbf{H}}$ dirigé du haut vers le bas, c'est-à-dire selon $-\boldsymbol{e_y}$.



3. Justifier qu'en régime permanent, la densité de courants $\boldsymbol{j}$ est dirigée selon $\boldsymbol{e_x}$ et donner son expression en fonction de I et des dimensions du matériau.

Solution: En régime transitoire, la trajectoire des électrons est courbée du fait du champ magnétique et les charges s'accumulent sur les bords du matériau. À mesure que les charges s'accumulent, le champ de Hall augmente, de sorte que les électrons subissent également une force électrostatique de Hall $\boldsymbol{F}_{\mathbf{H}} = -e\boldsymbol{E}_{\mathbf{H}}$ dirigée selon $+\boldsymbol{e_y}$, qui augmente et qui s'oppose donc à la force de Lorentz magnétique $\boldsymbol{F}_{\mathbf{L}}$. Quand le champ de Hall est tel que $\boldsymbol{F}_{\mathbf{H}} = -\boldsymbol{F}_{\mathbf{L}}$, la trajectoire des électrons n'est plus courbée mais plutôt rectiligne selon $\boldsymbol{e_x}$. Dans ce cas, la densité volumique $\boldsymbol{j}$ de courants s'écrit :

$$\boldsymbol{j} = \frac{I}{\ell h}\boldsymbol{e_x}. \tag{12}$$

4. En déduire l'expression de $\boldsymbol{E}_{\mathbf{H}}$ d'abord en fonction de $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{B}$ puis en fonction des données du problème.

Solution: Le champ de Hall est tel que

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{H}} = -e\boldsymbol{E}_{\mathbf{H}} = -\boldsymbol{F}_{\mathbf{L}} = e\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B},$$

soit

$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{H}} = -\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} = \frac{1}{ne}\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{B}. \tag{13}$$

En utilisant l'expression de $\boldsymbol{j}$ obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{H}} = -\frac{IB}{ne\ell h}\boldsymbol{e_y}. \tag{14}$$

5. Calculer la différence de potentiel de Hall U_{H} entre les deux bords inférieur et supérieur du matériau. Commenter.

Solution: On calcule la différence de potentiel de Hall en calculant l'opposée de la circulation du champ de Hall :

$$U_{\mathrm{H}} = -\int_0^{\ell} (\boldsymbol{E_{\mathrm{H}}} \cdot \boldsymbol{e_y})\,\mathrm{d}y = \int_0^{\ell} \frac{IB}{ne\ell h}\mathrm{d}y = \frac{IB}{neh}. \tag{15}$$

On constate que cette différence de potentiel augmente avec I et B, mais aussi quand n ou h diminuent. On peut alors se servir d'un tel dispositif pour mesurer un champ magnétique. Pour être le plus précis possible, on prendra alors un matériau de faible épaisseur, pour lequel n est plutôt faible (un semi-conducteur au lieu d'un métal) et auquel on imposera un courant important.

6. Obtenir un ordre de grandeur de U_{H} pour un courant de $I = 1\,\mathrm{A}$, un champ magnétique $B = 1\,\mathrm{mT}$, une épaisseur $h = 1\,\mathrm{mm}$ et une densité de porteurs $n = 10^{16}\mathrm{cm}^{-3}$. Commenter.

Solution: On obtient comme ordre de grandeur (avec $n = 10^{16}\mathrm{cm}^{-3} = 10^{22}\mathrm{m}^{-3}$) :

$$U_{\mathrm{H}} = \frac{10^{-3}}{10^{22} \times 10^{-3} \times 1{,}6 \times 10^{-19}} = \frac{10^{-3}}{1{,}6} = 0{,}6\,\mathrm{mV}. \tag{16}$$

C'est une tension faible, mais mesurable. On peut néanmoins l'amplifier avec un circuit à base d'amplificateurs opérationnels pour être plus résolu.