HMEF104 — Electromagnétisme

TP3 - Induction

1 Objectifs du TP

- Proposer un protocole permettant la mise en évidence du phénomène d'inductance mutuelle, et la mesure quantitative du coefficient d'inductance mutuelle.
- Mettre en place ce protocole, en effectuant un traitement rigoureux des incertitudes.
- Matériel :
  - Double solénoïde
  - Générateur Basses Fréquences
  - Résistance variable

Pour réaliser ce TP, on pourra s'inspirer des exercices ci-dessous.

2 Exercices complémentaires

2.1 Champ créé par un solénoïde sur son axe

On considère un solénoïde de longueur ℓ et de rayon R, constitué d'un enroulement de N spires, et parcouru par un courant permanent I. On notera O le milieu du solénoïde, et (Oz) son axe.

1. On admet que le champ magnétique en un point M de l'axe du solénoïde (d'altitude $-\ell/2 \leq z \leq \ell/2$) s'écrit :

$$\boldsymbol{B_0}(z) = B_0(z)\boldsymbol{e_z} = \frac{\mu_0 NI}{2\ell}\left[\frac{\ell/2 - z}{\sqrt{R^2 + (\ell/2 - z)^2}} + \frac{\ell/2 + z}{\sqrt{R^2 + (\ell/2 + z)^2}}\right]\boldsymbol{e_z}.$$

Donner le développement limité à l'ordre le plus bas non nul de la norme de $\boldsymbol{B_0}$. On simplifiera l'expression finale en supposant $\ell \gg R$.

Solution: On remarque $\boldsymbol{B_0}(z)$ est une fonction impaire de z. Ainsi, tous les termes d'ordre d'impair dans le développement limité seront nuls. On commence par un développement limité à l'ordre 2 :

$$\boldsymbol{B_0}(z) = \boldsymbol{B_0}(0) + \frac{z^2}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{B_0}}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=0} = \frac{\mu_0 NI}{2\sqrt{R^2 + (\ell/2)^2}}\boldsymbol{e_z} + \frac{z^2}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{B_0}}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=0}.$$

On calcule les dérivées successives du champ magnétique, d'abord la dérivée première :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B_0}}{\mathrm{d}z} &= \frac{\mu_0 NI}{2\ell}\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + (\ell/2 - z)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\ell/2 + z)^2}}\right]\boldsymbol{e_z} \\ &+ \frac{\mu_0 NI}{2\ell}\left[\frac{(\ell/2 - z)^2}{\left[R^2 + (\ell/2 - z)^2\right]^{3/2}} - \frac{(\ell/2 + z)^2}{\left[R^2 + (\ell/2 + z)^2\right]^{3/2}}\right]\boldsymbol{e_z}\end{aligned}.$$

On peut alors vérifier qu'elle s'annule bien en $z = 0$. Quant à la dérivée seconde, elle vaut :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{B_0}}{\mathrm{d}z^2} &= -\frac{3\mu_0 NI}{2\ell}\left[\frac{\ell/2 - z}{\left[R^2 + (\ell/2 - z)^2\right]^{3/2}} + \frac{\ell/2 + z}{\left[R^2 + (\ell/2 + z)^2\right]^{3/2}}\right]\boldsymbol{e_z} \\ &+ \frac{3\mu_0 NI}{2\ell}\left[\frac{(\ell/2 - z)^3}{\left[R^2 + (\ell/2 - z)^2\right]^{5/2}} + \frac{(\ell/2 + z)^3}{\left[R^2 + (\ell/2 + z)^2\right]^{5/2}}\right]\boldsymbol{e_z}\end{aligned}.$$

Ainsi, quand $z = 0$, cette dérivée seconde vaut :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{B_0}}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=0} &= \left\{-\frac{3\mu_0 NI}{2\left[R^2+(\ell/2)^2\right]^{3/2}} + \frac{3\mu_0 NI}{\ell}\frac{(\ell/2)^3}{\left[R^2+(\ell/2)^2\right]^{5/2}}\right\}\boldsymbol{e_z} \\
&= \frac{3\mu_0 NI}{2\left[R^2+(\ell/2)^2\right]^{5/2}}\left\{-\left[R^2+(\ell/2)^2\right]+(\ell/2)^2\right\}\boldsymbol{e_z} \qquad , \\
&= -\frac{3\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+(\ell/2)^2\right]^{5/2}}\boldsymbol{e_z}
\end{aligned}$$

soit finalement :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B_0}(z) &= \frac{\mu_0 NI}{2\sqrt{R^2+(\ell/2)^2}}\boldsymbol{e_z} - \frac{3\mu_0 NIR^2}{\left[R^2+(\ell/2)^2\right]^{5/2}}z^2\boldsymbol{e_z} \\
&= \frac{\mu_0 NI}{2\sqrt{R^2+(\ell/2)^2}}\left\{1-\frac{3}{2}\left[\frac{Rz}{R^2+(\ell/2)^2}\right]^2\right\}\boldsymbol{e_z}
\end{aligned} \qquad . \tag{1}$$

Dans l'hypothèse où $\ell \gg R$, on obtient :

$$\boldsymbol{B_0}(z) = \frac{\mu_0 NI}{\ell}\left\{1-\frac{3}{2}\left[\frac{4Rz}{\ell^2}\right]^2\right\}\boldsymbol{e_z} = \frac{\mu_0 NI}{\ell}\left\{1-\left[\frac{2\sqrt{6}Rz}{\ell^2}\right]^2\right\}\boldsymbol{e_z}. \tag{2}$$

2. Justifier dans quelles conditions on peut faire le développement limité précédent. En déduire la distance caractéristique z_c de variation du champ magnétique dans le solénoïde. Faire l'application numérique pour $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ et $R = 5\,\mathrm{cm}$. Conclure.

Solution: On peut justifier que ce développement limité est valide tant que $2\sqrt{6}R\,|z|\,/\ell^2 \ll 1$, soit $|z| \ll \ell^2/(2\sqrt{6}R)$. La distance caractéristique de variation du champ magnétique dans le solénoïde est donc :

$$z_\mathrm{c} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{6}R}. \tag{3}$$

On fait l'application numérique :

$$z_\mathrm{c} \simeq \frac{\left(5\times10^{-1}\right)^2}{2\sqrt{6}\times5\times10^{-2}} \simeq \frac{5}{2\sqrt{6}} \simeq 1\,\mathrm{m}. \tag{4}$$

Le développement limité est acceptable lorsque $|z| \ll z_\mathrm{c}$, soit ici $|z| \lesssim z_\mathrm{c}/10 \lesssim 10\,\mathrm{cm}$, ce qui représente un domaine de taille moitié du solénoïde.

2.2 Induction entre deux solénoïdes coaxiaux

On considère un second solénoïde de même axe et centre que le solénoïde étudié dans l'exercice précédent, de rayon $R' < R$, de longueur ℓ' et comportant N' spires.

1. Dans l'hypothèse où $R' < R$, on peut raisonnablement assimiler le champ magnétique créé par le premier solénoïde sur la section du second solénoïde à sa valeur sur l'axe donnée à l'exercice précédent. Montrer que le flux du champ magnétique créé par le premier solénoïde à travers le second solénoïde Φ' peut s'écrire comme une intégrale de $B_0(z)$. On orientera les deux solénoïdes de la même manière.

Solution: Considérons une tranche élémentaire dz centré sur z du second solénoïde. Cette tranche comporte $N'\mathrm{d}z/\ell'$ spires. Ainsi, le flux élémentaire du champ magnétique créé par le premier solénoïde à travers cette tranche vaut :

$$\mathrm{d}\Phi'(z) = \frac{N'}{\ell'}\mathrm{d}z \int_0^{R'} \mathrm{d}r 2\pi r B_0(z) = \frac{\pi N' R'^2}{\ell'} B_0(z)\mathrm{d}z.$$

Le flux total à travers le solénoïde s'obtient en intégrant ce flux sur toute la longueur du second solénoïde :

$$\Phi' = \int_{-\ell'/2}^{\ell'/2} \mathrm{d}\Phi'(z) = \frac{\pi N' R'^2}{\ell'} \int_{-\ell'/2}^{\ell'/2} B_0(z)\mathrm{d}z. \tag{5}$$

2. On rappelle qu'un développement limité à l'ordre 2 de $B_0(z)$ s'écrit, dans l'hypothèse où $z \ll z_\mathrm{c}$ et $\ell \gg R$:

$$B_0(z) = \frac{\mu_0 N I}{\ell}\left[1 - \left(\frac{z}{z_\mathrm{c}}\right)^2\right].$$

En supposant que $\ell' \leq z_\mathrm{c}$, simplifier l'expression du flux Φ'.

Solution: On utilise le résultat de la question précédente, ainsi que le développement limité fourni ici :

$$\begin{aligned}
\Phi' &= \frac{\pi N' R'^2}{\ell'} \int_{-\ell'/2}^{\ell'/2} B_0(z)\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mu_0 \pi N N' I R'^2}{\ell\ell'} \int_{-\ell'/2}^{\ell'/2} \mathrm{d}z \left[1 - \left(\frac{z}{z_\mathrm{c}}\right)^2\right] \\
&= \frac{\mu_0 \pi N N' I R'^2}{\ell\ell'} \left[z - \frac{z^3}{3z_\mathrm{c}^2}\right]_{-\ell'/2}^{\ell'/2} \\
&= \frac{\mu_0 \pi N N' I R'^2}{\ell\ell'} \left[\ell'/2 - \frac{(\ell'/2)^3}{3z_\mathrm{c}^2} - (-\ell'/2) - \left(-\frac{(-\ell'/2)^3}{3z_\mathrm{c}^2}\right)\right] \\
&= \frac{\mu_0 \pi N N' I R'^2}{\ell\ell'} \left[\ell' - \frac{\ell'^3}{12 z_\mathrm{c}^2}\right] \\
&= \frac{\mu_0 \pi N N' I R'^2}{\ell} \left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{\ell'}{z_\mathrm{c}}\right)^2\right]
\end{aligned}. \tag{6}$$

3. En déduire le coefficient d'inductance mutuelle M entre les deux bobines. Simplifier dans l'hypothèse où $\ell \ll z_\mathrm{c}$. Donner un ordre de grandeur de M. On prendra $R' = 2\,\mathrm{cm}$, $N = 1000$, $N' = 100$.

Solution: Par définition, le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux solénoïdes est tel que $\Phi' = MI$, d'où l'on tire :

$$M = \frac{\mu_0 \pi N N' R'^2}{\ell}\left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{\ell'}{z_\mathrm{c}}\right)^2\right] \simeq \frac{\mu_0 \pi N N' R'^2}{\ell}, \tag{7}$$

la dernière égalité étant obtenue dans l'hypothèse $\ell \ll z_\mathrm{c}$. On fait un ordre de grandeur avec les données fournies dans la question et $\ell = 50\,\mathrm{cm}$:

$$M \simeq \frac{4\pi \times 10^{-7} \times \pi \times 10^3 \times 10^2 \times (2 \times 10^{-2})^2}{5 \times 10^{-1}} \simeq \frac{(4\pi)^2}{5} \times 10^{-5} \simeq 3 \times 10^{-4}\,\mathrm{H}. \tag{8}$$

4. En utilisant la loi de Faraday, calculer la force électromotrice e' aux bornes du second solénoïde. Simplifier dans l'hypothèse où $\ell' \ll z_c$. Commenter.

> **Solution:** On utilise la loi de Faraday :
>
> $$e' = -\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0\pi N N' R'^2}{\ell}\left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{\ell'}{z_c}\right)^2\right]\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \simeq -\frac{\mu_0\pi N N' R'^2}{\ell}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \tag{9}$$
>
> la dernière égalité étant obtenue dans le cas où $\ell' \ll z_c$.
> On retrouve bien que la force électromotrice s'annule quand le courant est constant.

5. On branche le second solénoïde aux bornes d'un oscilloscope qu'on assimilera à une résistance R_{osc}. En notant L' le coefficient d'auto-induction du second solénoïde, donner l'équation différentielle vérifiée par I', le courant traversant le second solénoïde. On introduira $\tau' = L'/R_{\mathrm{osc}}$ dont on précisera la dimension et l'interprétation physique.

> **Solution:** La tension aux bornes du second solénoïde vaut $u' = L'\frac{\mathrm{d}I'}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$. En utilisant la loi des mailles, on obtient que :
>
> $$\begin{aligned} u' + R_{\mathrm{osc}}I' &= 0 \\ L'\frac{\mathrm{d}I'}{\mathrm{d}t} + R_{\mathrm{osc}}I' &= -M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \\ \tau'\frac{\mathrm{d}I'}{\mathrm{d}t} + I' &= -\frac{M}{R_{\mathrm{osc}}}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \end{aligned}. \tag{10}$$
>
> La constante τ' homogène à un temps correspond au temps caractéristique de décroissance de I' pendant le régime transitoire.

6. On rappelle que l'inductance propre d'un solénoïde s'écrit :

$$L = \frac{\mu_0\pi N^2 R^2}{\ell}.$$

Estimer le temps caractéristique τ' et comparer à la période T de I. On prendra $T = 1\,\mathrm{ms}$, $N' = 100$, $R' = 2\,\mathrm{cm}$ et $\ell' = 10\,\mathrm{cm}$. En déduire qu'on peut supposer le régime permanent atteint à chaque instant.

> **Solution:** On commence par estimer τ', en prenant $R_{\mathrm{osc}} = 1\,\mathrm{M\Omega}$:
>
> $$\begin{aligned} \tau' &= \frac{L'}{R_{\mathrm{osc}}} \\ &= \frac{\mu_0\pi N'^2 R'^2}{\ell' R_{\mathrm{osc}}} \\ &\simeq \frac{4\pi\times10^{-7}\times\pi\times10^4\times\left(2\times10^{-2}\right)^2}{10^{-1}\times10^6} \\ &\simeq (4\pi)^2\times10^{-12} \\ &\simeq 1{,}5\times10^{-10}\,\mathrm{s} \ll T \end{aligned}. \tag{11}$$
>
> On peut donc bien considérer que le régime permanent est atteint à chaque instant.

7. Commenter l'expression de I' en régime permanent, puis en donner un ordre de grandeur. Comparer I' à I.

Solution: En régime permanent, on a :

$$I' = -\frac{M}{R_{\mathrm{osc}}}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{12}$$

On constate que si I augmente, alors $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t > 0$, et donc $I' < 0$ car $M > 0$. On retrouve bien la loi de modération de Lenz car si le courant traversant le premier solénoïde augmente, alors le flux du champ magnétique à travers le second solénoïde augmente lui-aussi, et le second solénoïde réagit en créant un courant négatif. Le second solénoïde crée donc un champ magnétique opposé à celui créé par le premier solénoïde de sorte à minimiser la variation de flux.
On peut également faire un ordre de grandeur de I' :

$$I' \simeq -\frac{MI}{R_{\mathrm{osc}}T}. \tag{13}$$

On fait l'application numérique avec $M = 3 \times 10^{-4}\,\mathrm{H}$, $R = 1\,\mathrm{M\Omega}$ et $T = 1\,\mathrm{ms}$:

$$\left|\frac{I'}{I}\right| \simeq \frac{M}{R_{\mathrm{osc}}T} \simeq \frac{3 \times 10^{-4}}{10^6 \times 10^{-3}} \simeq 3 \times 10^{-7} \ll 1. \tag{14}$$

Ainsi, le courant I' est négligeable devant le courant I.

8. En réalité, le premier solénoïde est branché à une résistance variable R_{v} et à un générateur basses fréquences de tension $E(t)$ de période T. Donner l'équation différentielle vérifiée par le courant I. On introduira $\tau = L/R_{\mathrm{v}}$ et on utilisera le résultat de la question précédente.

Solution: On applique là encore la loi des mailles :

$$u + R_{\mathrm{v}}I = E,$$

où u désigne la tension aux bornes du premier solénoïde

$$u = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}I'}{\mathrm{d}t} \simeq L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},$$

d'après la question précédente. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + R_{\mathrm{v}}I &= E \\ \tau\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + I &= \frac{E}{R_{\mathrm{v}}} \end{aligned}. \tag{15}$$

9. Estimer τ et comparer à T. Commenter sur le fait de supposer I périodique de période T. On prendra $N = 10^3$ et $R_{\mathrm{v}} = 1\,\mathrm{k\Omega}$.

Solution: On estime τ à partir de l'expression de l'inductance propre du solénoïde :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\mu_0\pi N^2R^2}{\ell R_{\mathrm{v}}} \\ &\simeq \frac{4\pi \times 10^{-7} \times \pi \times 10^6 \times \left(5 \times 10^{-2}\right)^2}{5 \times 10^{-1} \times 10^3} \\ &\simeq 20\pi^2 \times 10^{-7} \\ &\simeq 2\pi^2 \times 10^{-6} \\ &\simeq 2 \times 10^{-5}\,\mathrm{s} \ll T \end{aligned}. \tag{16}$$

On peut donc considérer le régime permanent atteint à chaque instant pour I, de sorte que :

$$I = \frac{E}{R_{\mathrm{v}}}. \tag{17}$$

On peut donc considérer que le courant est de même période que la tension aux bornes du GBF.

10. En déduire l'expression de la tension u_{osc} aux bornes de l'oscilloscope en fonction des données du problème.

Solution: On synthétise les résultats des questions précédentes. La tension aux bornes de l'oscilloscope est l'opposée de la tension aux bornes de la bobine, et donc égale à la force électromotrice e', soit :

$$u_{\mathrm{osc}} = e' = -\frac{\mu_0 \pi N N' R'^2}{\ell}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 \pi N N' R'^2}{\ell R_{\mathrm{v}}}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \tag{18}$$

11. On suppose que la tension $E(t)$ est une sinusoïde de la forme $E(t) = E_0 \cos(2\pi t/T)$. Calculer $u_{\mathrm{osc}}(t)$. Commenter.

Solution: Dans ce cas, on calcule u_{osc} :

$$u_{\mathrm{osc}}(t) = \frac{2\mu_0 \pi^2 N N' R'^2 E_0}{\ell R_{\mathrm{v}} T} \sin\left(2\pi t/T\right). \tag{19}$$

On obtient donc une tension sinusoïdale, de même période que la tension aux bornes du GBF, et en quadrature de phase par rapport à cette dernière.

12. On suppose que la tension $E(t)$ est un signal triangulaire de moyenne nulle et d'amplitude crête-à-crête $2E_0$. Calculer $u_{\mathrm{osc}}(t)$. Commenter.

Solution: Dans ce cas, l'expression de $E(t)$ est :

$$E(t) = \begin{cases} E_0\left(\dfrac{4t}{T} - 1\right) & \text{si } 0 \leq t \leq T/2 \\ E_0\left(-\dfrac{4t}{T} + 3\right) & \text{si } T/2 \leq t \leq T \end{cases},$$

soit pour la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{cases} \dfrac{4E_0}{T} & \text{si } 0 \leq t \leq T/2 \\ -\dfrac{4E_0}{T} & \text{si } T/2 \leq t \leq T \end{cases},$$

d'où l'on déduit u_{osc} :

$$u_{\mathrm{osc}}(t) = \begin{cases} -\dfrac{4\pi\mu_0 N N' R'^2 E_0}{\ell R_{\mathrm{v}} T} & \text{si } 0 \leq t \leq T/2 \\ \dfrac{4\pi\mu_0 N N' R'^2 E_0}{\ell R_{\mathrm{v}} T} & \text{si } T/2 \leq t \leq T \end{cases}. \tag{20}$$

On obtient donc une tension créneau de même période que le signal triangulaire, dont l'amplitude est proportionnel à la pente de ce dernier.