LP02 Gravitation

8 juin 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L2

Commentaires du jury

Bibliographie

✍ *Mécanique du point*, **Gibaud Henry** [1] ⟶ Toute la première partie
✍ *Mécanique*, **Pérez** ⟶ forces de marée

Prérequis

➢ Mécanique du point (PFD et TMC)

Expériences

☕

Table des matières

1 Force gravitationnelle **2**
1.1 Loi de Newton . . . 2
1.2 Champ gravitationnel et généralisation . . . 2
1.3 Potentiel gravitationnel et analogie . . . 3

2 Applications **3**
2.1 L'expérience de Cavendish . . . 3
2.2 La mer de Lidenbrok . . . 4
2.3 Les forces de marée . . . 4

3 Annexes **5**

Introduction

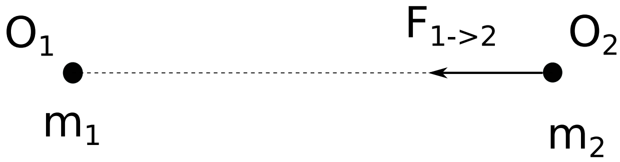
On distingue 4 forces fondamentales : la force faible, forte, électromagnétique et gravitationnelle. Nous allons nous intéresser dans cette leçon à la force qui a été découverte en première : la force gravitationnelle.

1 Force gravitationnelle

1.1 Loi de Newton

La force de gravitation a été découverte en 1665 par Newton. La loi de Newton s'énonce de la façon suivante :

Les masses de deux corps s'attirent en raison de leurs masses et de l'inverse du carré de leur distance



Par conséquent, la force gravitationnelle a pour expression mathématique :

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{O_1 O_2^2}\vec{u}_{1\to 2}$$

où $G = 6.6710^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ est la constante d'intéraction gravitationnelle. Les points O_1 et O_2 sont les centres de masses de objets que l'on considère. On remarque que cette force respecte la troisième loi de Newton. Il est important de souligner le fait que les masses présentes dans l'expression de la force sont les masses gravitationnelles et non pas les masses inertielles. Elles n'ont à priori pas de raison d'être identique mais l'expérience montre que les deux sont égales. On suppose alors que pour tout corps $m_i = m_g$. C'est ce que l'on appelle le principe d'équivalence.

1.2 Champ gravitationnel et généralisation

Pour une masse m, on définit le champ gravitationnelle qu'elle génère par $\vec{G}(\vec{r}) = -\mathcal{G}m\frac{\vec{r}}{r^3}$ où $\vec{r}$ est le vecteur en coordonnées sphériques dont l'origine est la masse m. Ainsi, une masse M subit une force gravitationnelle $\vec{F} = M\vec{G}$. Dans le cas d'une distribution de masse avec une densité volumique ρ dans un volume V, la superposition des forces impliquent :

$$\vec{G}(M) = -\mathcal{G}\iiint_V \rho(P)\frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

ou encore :

$$\vec{G}(\vec{r}') = -\mathcal{G}\iiint_V \rho(\vec{r'})\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}d^3r'$$

En remarquant que $\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)$, on peut en déduire que $\vec{rot}\vec{G} = \vec{0}$. De plus, on peut montrer avec $\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'})$ que $div(\vec{G}) = -4\pi\mathcal{G}\rho(\vec{r})$.

Ainsi, avec le théorème de Green-Ostrogradsky, on en déduit la formule :

$$\iint \vec{G}.\vec{dS} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$

Ce théorème implique un fait important : a la surface d'un objet ou loin de celui-ci, celui-ci peut être considéré comme un point dans lequel est contenu toute sa masse.

Exemple : Prenons pour exemple la Terre que l'on supposera ronde. La géométrie sphrérique de la distribution de masse nous permet d'écrire $\vec{G}(\vec{r}) = G(r)\vec{e_r}$ en coordonnées sphérique. Ainsi, le théorème de Gauss donne :

$$\vec{G}(R_T) = \mathcal{G}\frac{M_T}{R_T^2} = 9.83 m^2 s^{-1}$$

On retrouve ainsi à peu près la valeur du champ gravitationnel. Attention ! Le champ gravitationnel n'est pas uniquement le champ de pesanteur comme nous pourrons le voir dans une autre leçon.

1.3 Potentiel gravitationnel et analogie

Etant donné que nous avons $\vec{rot}\vec{G} = \vec{0}$, on peut écrire que le $\vec{G} = -\vec{grad}\Phi$. Ainsi, avec $div(\vec{G}) = -4\pi\mathcal{G}\rho(\vec{r})$, on a :

$$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\rho \text{ appelée équation de Poisson}$$

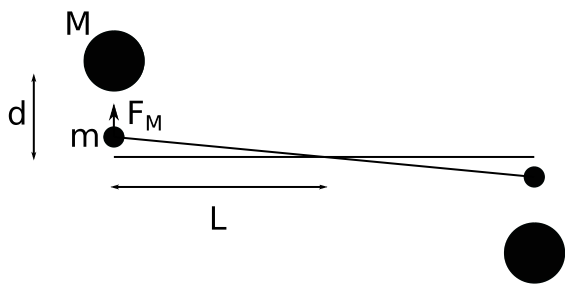
On se rend alors compte que l'on a une forte analogie entre les équations régissant la gravitation et celles régissant l'électrostatique car nous retrouvons le théorème de Green-Ostrogradsky et l'équation de poisson. Cette analogie peut être résumé ainsi :

	Electrostatique	Gravitation
Charge du champ	q	m
Champ	$\vec{E}$	$\vec{G}$
Equations locales	$\vec{rot}\vec{E} = \vec{0}$	$\vec{rot}\vec{G} = \vec{0}$
	$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$div\vec{g} = -4\pi\mathcal{G}\rho$
Théorème de Gauss	$\iint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\iint \vec{G}.\vec{dS} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$
Equation de Poisson	$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\rho$
Caractère de la force	Attractif ou répulsif	Attractif

Maintenant que nous avons présenté la force gravitationnelle et ses propriétés, on peut s'interroger d'une part sur le mesure de la constante gravitationnelle G et de l'autre sur les applications des lois que l'on vient de trouver.

2 Applications

2.1 L'expérience de Cavendish



Sans les deux masses supplémentaires M, le pendule devrait être à $\theta_{eq} = 0$. Avec la force gravitationnelle exercée par ces masses, l'angle d'équilibre est modifié. A l'équilibre, on a donc :

$$C\theta_e = 2M_M$$

On supposera que le nouvel angle d'équilibre $\theta_e \ll 1$, de tel sorte que $d \ll L$. On supposera aussi pour le calcul des moments que les masses m restent à peu près à $\theta = 0$. Ainsi le moment exercé par une masse M vaut :

$$M_M = \mathcal{G}mM\frac{L}{(d-L\theta)^2} \approx \mathcal{G}mM\frac{1}{d^2} \text{ a l'ordre le plus bas}$$

On en déduit donc :

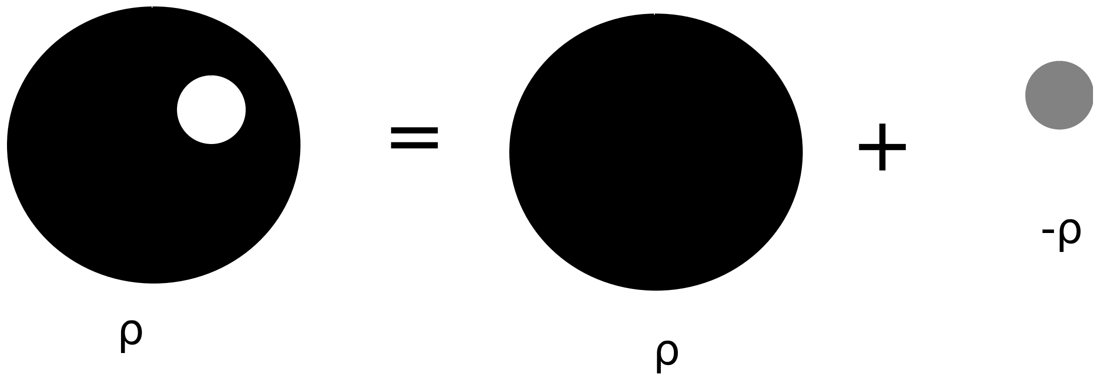
$$\mathcal{G} = \frac{C\theta_e d^2}{2mML}$$

On fait ici plusieurs hypothèses : on coupe net au développement limité et en plus on néglige complètement la force de la masse M de droite sur la masse m de gauche. C'est une version donc très simplifiée qui est proposée là.

En utilisant cette expérience, Cavendish propose pour la première fois une valeur expérimentale de la constante gravitationnelle : $\mathcal{G} = 6,754.10^{-11}Nm^2kg^{-2}$. Etant donné que les forces mises en jeu sont très faibles, les angles le sont aussi. Lors de son expérience, Cavendish a monté son dispositif dans une salle complète et à utiliser un télescope pour mesurer l'angle. Il trouva un angle de 0.247 degré.

2.2 La mer de Lidenbrok

Dans "Voyage au centre de la Terre" de Jules Verne, les protagonistes arrivent dans une cavité sphérique sous terre dans laquelle setrouve un lac extrêmement plat.



On assimilera la Terre à une sphère de densité constante ρ.

Afin de déterminer le champ de gravitation dans la cavité, on va utiliser le théorème de superposition : on considère que l'on a le champ de la Terre remplie de densité ρ et aussi le champ d'une cavité de densité $-\rho$.

Pour une sphère de densité uniforme, le théorème de Gauss donne :

$$4\pi r^2 G(r) = -\frac{4}{3}\pi\rho r^3 4\pi\mathcal{G}$$

Donc :

$$\vec{G_1}(M) = -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\vec{OM}$$

Finalement, par superposition, on a dans la cavité :

$$\vec{G}(M) = -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}(\vec{OM} - \vec{O'M}) = -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\vec{OO'}$$

On trouve alors que le champ gravitationnel est en fait constant dans tout la cavité. Ceci explique le fait que le lac est "extrêmement plat".

2.3 Les forces de marée

Pour comprendre ce que sont les forces de marée, on commence par appliquer le théorème de la résultante cinétique à un objet en P dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_T$ en translation autour du référentiel héliocentrique $\mathcal{R}_h$ que l'on supposera galiléen :

$$m\vec{a} = m\vec{G}_T(P) + m\vec{G}_a(P) + \vec{F}_{ie}$$

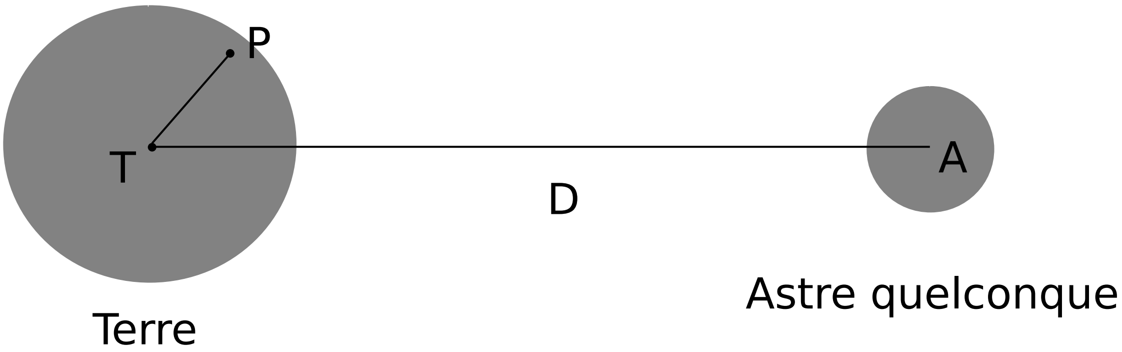
Pour exprimer la force d'entrainement, on se palce dans le référentiel héliocentrique et on calcule l'accélération du référentiel géocentrique :

$$M_T\vec{a_e} = M\vec{G}_a(T)$$

Donc finalement, avec $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e}$, on trouve :

$$m\vec{a} = m\vec{G}_T(P) + m(\vec{G}_a(P) - \vec{G}_a(T))$$

Le deuxième terme de droite est ce que l'on appelle les forces de marée. On considère maintenant la situation suivante :



Le champ de marrée vaut donc :

$$\vec{C_m} = \vec{G}_a(P) - \vec{G}_a(T) = \mathcal{G}M_a \left(\frac{\vec{PA}}{PA^3} - \frac{\vec{TA}}{TA^3} \right)$$

Avec $\vec{PA} = \vec{PT} + \vec{TA}$ et en supposant $d \ll D$, on a :

$$\frac{1}{PA^3} = \frac{1}{D^3} \left(1 + 3\frac{\vec{TP}.\vec{TA}}{D^2} \right)$$

D'où finalement :

$$\vec{C_m} = \mathcal{G}\frac{M_a}{D^3} \left(\vec{PT} + 3\frac{\vec{PA}(\vec{TP}.\vec{TA})}{D^2} \right)$$

On remarque plusieurs choses :

- Au pôle, la Terre est écrasée
- A l'équateur, la Terre est étirée
- La force me marée est proportionnelle au rapport $\frac{M}{D^3}$

On peut alors donner les ordres de grandeur suivants, pour le rapport $\frac{M}{D^3}$:

	Soleil	Lune	Venus	Jupiter
$\frac{M}{D^3}.10^3$	0.595	1.296	7.10^{-5}	6.10^{-6}

Cela permet donc d'expliquer les marrées bi-quotidiennes.

3 Annexes

Questions

Quelle est la charge gravitationnelle ? Quel principe lui est liée ? A quel ordre est-il actuellement vérifié ? (Masse grave égale à la masse inerte d'après le principe d'équivalence. Universalité de la chute libre. Vérifié à l'heure actuelle à 10^{-13})

Quel est la force à l'intérieur d'un astre homogène à symétrie sphérique ? Champ dans une cavité interne ? Comment cela est-il utilisé ?

(Force linéaire en la distance, champ constant dans une cavité interne. Utilisé pour faire de la gravimétrie, recherche de gisement de pétrole, archéologie)

Validité du théorème de Gauss ? Équations locales du champs ?

Si le Soleil disparaissait, quel serait le mouvement de la Terre ? Cela ce ferait-il de manière instantanée ?

(Mouvement rectiligne uniforme instantanément d'après Newton, en contradiction avec la relativité. Propagation du champ à une vitesse limite c, 8 minutes environ entre la Terre et le Soleil)

Qu'est ce qu'une onde gravitationnelle ? Quel événement à donné lieu à l'observation récente des signaux d'onde gravitationnelles par LIGO ?

(Une onde gravitationnelle est une faible déformation de l'espace-temps, similaire à une onde à la surface de l'eau. Coalescence de deux trous noirs.

Qu'est ce qu'un trou noir ? (Région localisée de l'espace-temps de laquelle rien pas même la lumière ne peut s'échapper.)

La lumière est-elle influencée par la gravitation ? (Déviation des rayons lumineux, même en théorie newtonienne (prédit une valeur deux fois trop faible).)

Remarques

-