Gravitation

Références

[1] Pascal Brasselet. *Mécanique (PCSI-MPSI)*. 2000.

[2] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. 1972.

[1] pour tous les rappels de mécanique classique, et [2] uniquement l'introduction, le reste ce n'est que de la relativité générale.

Note : On a laissé ici certains calculs avec le potentiel gravitationnel, qu'on a finalement pas fait à l'oral. Tout ce qui est en italique sont donc des choses qu'on a pas forcément présenté, mais peut être juste rapidement mentionné.

Prérequis

— Lois de Kepler et lois de Newton
— Analyse vectorielle
— Electrostatique
— Distribution δ de Dirac

Table des matières

Première partie
Leçon

1 Introduction

- L'une des quatre forces fondamentales, à longue portée, et la première que l'on a découverte.
- Elle a une densité énergétique très faible :
  $\frac{E_{\mathrm{grav}}}{m} \sim \frac{\mathcal{G}}{R}$ et $\frac{E_{\mathrm{elec}}}{q} \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Or $\frac{1}{4\pi\mathcal{G}\varepsilon_0} \sim 10^{23}$ Donc il faut 23 ordres de grandeurs de différences entre la masse et la charge d'un objet pour que les forces soient égales. En ce sens l'attraction gravitationnelle est énergétiquement moins dense.

2 Masse et interaction gravitationnelle

2.1 Approche historique

Brumaghupta au VII : "La terre est ronde et tous les corps chutent vers le centre de la terre"

Kepler au XVI : Il énonce ces trois lois : la loi des trajectoires, la loi des aires et la loi des périodes qui stipule que pour tous les astres le rapport entre le demi grand axe de la trajectoire au cube avec le carré de la période est une constante du système solaire.

Galilée au XVII : Tout corps en chute libre a la même vitesse, donc indépendante de la masse.

Newton à la fin du XVII : Il énonce lui aussi ses trois lois, notamment le principe fondamental de la dynamique et le principe des actions réciproques.

2.2 Construction d'une force gravitationnelle terrestre

D'après l'observation de Galilée et la seconde loi de Newton, la force doit nécessairement être proportionnelle à la masse de l'objet étudié. D'après la principe des actions réciproques de Newton, la force est donc également nécessairement proportionnelle à la masse de la Terre.

De la loi des périodes de Kepler, on a que R^3/T^2 est une constante. Or on peut noter la vitesse $v = R/T$ et l'accélération $a = v/T = R/T^2$. Or l'accélération est proportionnelle à la force et $R^2a = R^3/T^2 =$ constante. Donc nécessairement, la force est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux corps.

Avec les observations de Brahmagupta, la force est radiale et entrante. Donc en définissant $\vec{u}$ un vecteur unitaire radial sortant, on a :

$$\vec{F}_{\mathrm{grav}} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}$$

N'ayant observé aucun autre paramètre intervenant dans la force, $\mathcal{G}$ est bien une constante, qu'on va appeler *constante universelle de la gravitation.*

Mesure de $\mathcal{G}$ La constante définie précédemment se mesure à l'aide d'un pendule à distorsion de CAVENDISH (expliciter l'expérience ...)

2.3 Masse inertielle et charge de champ

Lorsque l'on a construit la force d'attraction gravitationnelle on a montré par la seconde loi de Newton qu'elle était proportionnelle à la masse sous entendue inertielle de l'objet. Or il n'y a aucune raison que la charge sensible à l'attraction gravitationnelle soit la masse inertielle ce qui semble d'ailleurs contradictoire car la masse inertielle quantifie la faculté qu'à un objet à résister à un changement de mouvement.

On montre en fait expérimentalement que le rapport de ces deux masses est une constante, en prenant l'égalité des deux masses (ce qu'on appelle le PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE DE EINSTEIN), on fixe en fait la valeur de $\mathcal{G}$.

3 Champ gravitationnel

3.1 Caractérisation

Considérons deux masses ponctuelles de masse m_1 et m_2. La force subie par la masse 2 est :
$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^3}(\vec{r_1}-\vec{r_2}) = m_1\vec{G}(\vec{r_1})$. Ainsi pour une masse ponctuelle, on peut définir le champ gravitationnel (dans le repère associé à la masse) $\vec{G}(\vec{r}) = -\mathcal{G}\frac{m}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$

En pratique on a une distribution volumique de masse, on va sommer les contributions de chaque volume infinitésimal situé en $\vec{r'}$ de masse $\rho(\vec{r'})\mathrm{d}^3r'$. Ainsi le champ gravitationnel $\vec{G}(\vec{r})$ s'exprime comme :

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\mathcal{G}\iiint_{\vec{r'}\in\mathcal{V}} \rho(\vec{r'})\mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

Une remarque fondamentale est que loin de la source, on retrouve un comportement asymptotique en $1/r^2$, ainsi le champ s'annule à l'infini. On peut donc utiliser le théorème de HELMOTZ-HODGE qui stipule que tout champ vectoriel s'annulant partout à l'infini est parfaitement déterminé par son rotationnel et sa divergence. Ce qui justifie qu'on va s'intéresser dans la suite à ces relations.

$\vec{\nabla}\times\vec{G}$: On a : $\vec{\nabla}\times\vec{G} = -\mathcal{G}\iiint_{\vec{r'}\in\mathcal{V}}\rho(\vec{r'})\mathrm{d}^3r'\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$.

Première méthode : Ainsi on somme des rotationnels de champs de la forme $f(r)\vec{e_r}$ (après un changement de référentiel par translation de $\vec{r'}$ pour ce centrer en le volume considéré, et une translation ne modifie pas le rotationnel) qui sont de rotationnels nuls. Donc

$$\vec{\nabla}\times\vec{G} = 0$$

Cette relation nous permet de plus d'affirmer qu'il existe un champ scalaire Φ qu'on appellera potentiel gravitationnel, tel que $\vec{G} = -\vec{\nabla}\Phi$

Seconde méthode : On remarque que : $\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)$ et donc

$$\vec{G}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\mathcal{G}\iiint_{\vec{r'}\in\mathcal{V}}\rho(\vec{r'})'\frac{\mathrm{d}^3r}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)$$

Où on a sorti le gradient de l'intégral car la variable du gradient est $\vec{r}$ et on intègre sur $\vec{r'}$. Ainsi Le champ gravitationnel est un gradient d'une fonction dont l'opposée sera appelée le potentiel gravitationnel. Or le rotationnel d'un gradient est nul, donc le champ gravitationnel est à rotationnel nul. Donc

$$\vec{\nabla}\times\vec{G} = 0$$

$\vec{\nabla}.\vec{G}$: Reprenons l'expression de $\vec{G}$ précédente pour calculer sa divergence, on a :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}.\vec{G} = \mathcal{G}\iiint_{\vec{r'}\in\mathcal{V}}\rho(\vec{r'})\mathrm{d}^3r'\vec{\nabla}_{\vec{r}}.\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)$$

Or on admettera encore une fois le résultat mathématique : $\vec{\nabla}_{\vec{r}}.\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right) = \Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'})$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_{\vec{r}}.\vec{G} &= -4\pi\mathcal{G}\iiint_{\vec{r'}\in\mathcal{V}}\rho(\vec{r'})\delta(\vec{r}-\vec{r'})\mathrm{d}^3r' \\ &= -4\pi\mathcal{G}\rho(\vec{r})\end{aligned}$$

On a donc les deux équations constitutives de notre champs qui suffisent à calculer complètement le champ gravitationnel d'après le théorème de HELMOLTZ-HODGE, on a de plus donner une définition du potentiel gravitationnel.

En pratique calculer avec le rotationnel ou la divergence est compliqué, on va donc pouvoir démontrer deux formules qui vont être utiles dans certains cas. En intégrant l'équation de la divergence sur une surface **fermée**, et en utilisant le théorème de GREEN-OSTROGRADSKY, on trouve le théorème de GAUSS gravitationnel :

$$\iint \vec{G}.\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$

Et on peut également utiliser la définition du potentiel dans la formule de la divergence et on trouve l'équation de POISSON *:*

$$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\rho$$

3.2 Lois analogue à l'électrostatique

Comme on vient de le voir toutes les formules sont analogues au champ électrostatique.

	Electrostatique	Gravitation
Charge du champ	q	m
Champ	$\vec{E}$	$\vec{G}$
Force	$q\vec{E}$	$m\vec{G}$
Constante	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,9\times10^9\mathrm{F.m^{-1}}$	$-\mathcal{G} = -6,67\times10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$
Relation champ - potentiel	$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$	$\vec{G} = -\vec{\nabla}\Phi$
Equations locales	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$	$\vec{\nabla}\times\vec{G} = 0$
	$\vec{\nabla}.\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$	$\vec{\nabla}.\vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho$
Théorème de GAUSS	$\iint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = Q_{int}/\varepsilon_0$	$\iint \vec{G}.\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$
Equation de POISSON	$\Delta V = -\rho/\varepsilon_0$	$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\rho$

Bien que l'analogie soit flagrante, il faut bien comprendre ses limites. Premièrement ce n'est valable qu'en statique, dès que les charges se déplacent, les lois ne sont plus valables. De plus dans le cadre de la gravitation le charge du champ (les masses) sont toujours positives, tandis que les charges électriques peuvent être négatives. La force résultante peut donc être attractive ou répulsive ce qui n'est pas le cas de la gravitation qui, a priori, est toujours attractive. Une autre différence fondamentale est que deux charges de mêmes signes se repoussent alors que deux masses de même signe s'attirent.

3.3 Une application : La mer de Lindenbrok

Dans l'oeuvre de Jules Verne "Voyage au centre de la Terre", les protagonistes arrivent dans une cavité sous la terre dans laquelle se trouve un lac qui est décrit comme extrêmement plat (tandis qu'un lac à la surface de la terre est légèrement courbé selon la courbure de la terre). Nous allons vérifier cet observation romanesque.

On assimile la terre à une boule homogène de rayon R et de densité ρ centrée en O, la cavité est modélisée par une cavité sphérique de rayon R' centrée en O'.

Comme toutes les équations de la gravitation sont linéaires par rapport aux masses et densités, on dispose d'un principe de superposition affirmant que le champ gravitationnel en un point résultant de deux distributions de masse est égale à la somme de chaque champ créé par une seule distribution de masse comme si elle était seule.

Ainsi on peut séparer notre système en deux sous systèmes, le premier est la terre sans la cavité, et le second est la boule correspondant à la cavité mais de densité $-\rho$ ainsi, la somme des deux reproduit bien la terre et une cavité vide.

On n'a donc qu'à calculer le champ créé par une distribution sphérique et homogène de masse. En utilisant un repère de projection sphérique (r, θ, ϕ), avec les symétries de rotation, tout plan passant par le centre O est un plan de symétrie positive des sources, ainsi le champ est contenu dans tous ses plans, donc le champ est colinéaire au vecteur radial $\vec{e_r}$. On a également une invariance par rotation selon les anglesθ et ϕ donc le champ ne dépend que de la coordonnée radiale r. On a donc $\vec{G} = G(r)\vec{e_r}$. Pour $r < R$ on le champ créé par le premier système par application directe du théorème de GAUSS :

$$4\pi r^2 G(r) = -\frac{4}{3}\pi\rho r^3 4\pi\mathcal{G}$$

Donc

$$\vec{G}_1(M) = -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\vec{OM}$$

On réalise le même raisonnement pour le second sous système. Et par principe de superposition, si M est dans la cavité :

$$\begin{aligned}\vec{G}(M) &= -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\vec{OM} + -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\vec{O'M} \\ &= -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\vec{OO'}\end{aligned}$$

Ainsi le champ est uniforme dans la cavité, et un lac serait effectivement plat.

4 Retour sur le principe d'équivalence

**À aborder que s'il y a du temps

4.1 Balance à distorsion de Eötvös

L'expérience de Eötvös est constituée d'une balance à distorsion, constituée de deux masses. La torsion mesurée est proportionnelle à la différence entre les rapports de la masse inertielle et de la masse grave des deux masses. Expérimentalement on ne mesure pas de torsion, ce qui montre que le rapport m_i/m_p est constant pour tous les matériaux à un précision de 10^{-9}. La définition qu'on a choisi de $\mathcal{G}$ impose que cette constante vaut 1.

4.2 Principe d'équivalence

L'égalité $m_i = m_p$ s'appelle le principe d'équivalence énoncé par Einstein comme l'un des principes de base de la relativité générale, qui décrit plus correctement la gravitation en général, mais c'est au delà du niveau L3.

5 Conclusion

On a donc pu à partir de simples observations construire une force gravitationnelle. A partir de cette force on a pu définir un champ gravitationnel et on l'a parfaitement caractérisé avec ses equations locales. Avec cela on peut calculer theoriquement le champ gravitationnel de n'importe quel objet, comme on l'a montré dans une cavité terrestre. On a également exposé le principe d'équivalence de EINSTEIN, qui va être l'un de ses principes fondamentaux pour la théorie de la relativité générale. Cette théorie est effectivement nécessaire car lors de cette leçon on a toujours supposé que si on place une masse à un endroit, son champ est directement défini partout dans l'espace, alors que l'information ne peut pas se propager plus vite que la vitesse de la lumière, on devrait donc considérer se retard que mettrai cette "onde gravitationnelle" à se propager. Mais c'est uniquement décrit par la relativité générale.

Deuxième partie
Entretien

6 Questions

Lors de la construction de la force, on l'a construit avec la masse inertielle apparaissant dans la seconde loi de Newton, alors pourquoi revenir dessus en disant que ce n'est pas la bonne masse ?

On a jugé important de revenir sur cette notion de masse grave dont le rôle semble s'opposer à la masse inertielle et pourtant on les prend égales. Cette notion est importante quand on parle de gravitation.

C'est quoi l'ordre de grandeur que la force exerce sur toi (par exemple) ?

On a fait quelques calculs, la force qu'exerce le Terre sur moi est de l'ordre de la centaine de Newton. La force que j'exerce sur l'ordinateur est elle de l'ordre de 10^{-9}N.

C'est quoi la relativité générale ?

On ne considère plus le temps universel, mais propre à chaque référentiel. (*ça c'est la relativité restreinte*)

C'est quoi une onde gravitationnelle ?

On peut utiliser la définition d'une onde (propagation d'une perturbation). Une onde gravitationnelle est donc une perturbation du champ gravitationnel qui se propage dans l'espace.

Comment on la mesure ?

On peut la mesurer avec un interféromètre de Michelson géant.

Peux tu revenir sur l'importance du rapport entre de $\mathcal{G} et 1/4\pi\varepsilon_0$ *?*

Prenons l'exemple du champ électrostatique induit par un électron immobile. Pour que l'intensité du champ gravitationnel soit le même que l'électrostatique, il faudrait que l'électron ait une masse de 100kg

Dans l'exemple de la cavité tu considère la masse volumique uniforme, est ce le cas ?

Non la terre n'est pas uniforme en masse, le noyau est bien plus lourd que les couches extérieures, on l'a supposé pour avoir des arguments de symétries également dans la cavité.

En as tu vraiment besoin ?

Oui puisque la seconde cavité est excentrée.

en fait, on pourrait dire que si la taille caractéristique des variations de ρ *est petites devant la taille de la cavité, on peut en prendre la valeur moyenne dans l'intégrale de Gauss pour simplifier le calcul, mais dans ce cas ce ne sera pas la même masse volumique moyenne qu'on a avec la première intégrale, donc pour avoir la simplification des vecteurs et avoir un champ uniforme on en a besoin.*

Qu'est ce qu'une force centrale ? une force centrale Newtonienne

Une force uniquement radiale, une force radiale en $\sim 1/r^2$

7 Commentaire

Il faut aller plus loin dans l'interprétation des équations, on a décrit le champ par des équations locales, il faut les expliquer, voir ce qu'elles impliquent. C'est comme les ordres de grandeurs, ils devraient être présents.

Attention en relativité restreinte, on suppose uniquement une vitesse limite, le fait est que c'est celle de la lumière, mais c'est pas le postulat de base.

Passe toute la relativité générale sous silence si tu ne sais pas vraiment ce que c'est (là ca allait). Encore une fois, il ne faut pas tendre le bâton pour se faire battre.

Sur une leçon comme ça on pourrait demander par exemple de retrouver les lois de Kepler, il faut savoir faire ces calculs.