

# LP03 CARACTÈRE NON GALILÉEN DU RÉFÉRENTIEL TERRESTRE

5 juin 2020

MONNET Benjamin &

## Niveau : L3

## Commentaires du jury

## Bibliographie

- ↗ *MP*, **Sanz** → Référentiels, déviation vers l'Est et pendule de Foucault
- ↗ *Mécanique I*, **BFR** → Pour le cours
- ↗ *Mécanique*, **P.Brasselet** → Cours
- ↗ *Mécanique du point*, **Gruber Benoit** → Déviation vers l'Est, Pendule de Foucault
- ↗ *La physique par la pratique*, **Portelli** →
- ↗ [https://www.lmd.jussieu.fr/~fcodron/COURS/notes\\_dynam1.pdf](https://www.lmd.jussieu.fr/~fcodron/COURS/notes_dynam1.pdf) et [https://people.mio.osupytheas.fr/~doglioli/DoglioliPetrenko\\_NotesCoursTD\\_DynamiqueOceanique.pdf](https://people.mio.osupytheas.fr/~doglioli/DoglioliPetrenko_NotesCoursTD_DynamiqueOceanique.pdf) → Vents géostrophiques (p10-12 et p23-26 respectivement)
- ↗ <https://femto-physique.fr/mecanique/dynamique-terrestre.php> → tout

## Prérequis

- Mécanique du point
- Changement de référentiel
- Mécanique des fluides

## Expériences



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le référentiel terrestre</b>	<b>2</b>
1.1	Identification d'un référentiel galiléen . . . . .	2
1.2	Dynamique dans le référentiel terrestre . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Caractéristique de la dynamique en référentiel terrestre</b>	<b>3</b>
2.1	Forme de la Terre . . . . .	3
2.2	Poids . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Applications pratiques</b>	<b>4</b>
3.1	Déviations vers l'Est . . . . .	4
3.2	Vents géostrophiques . . . . .	5
3.3	Pendule de Foucault . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Biblio supplémentaire</b>	<b>6</b>

## Introduction

Le choix d'un référentiel et de son caractère galiléen sont deux points très importants dans un problème de mécanique. En effet, la caractère galiléen permet d'appliquer les lois que nous connaissons. A priori, le Terre tournant sur elle-même, le référentiel terrestre n'es pas galiléen ! Et pourtant, c'est ce que l'on a utilisé à de nombreuses reprises...

Nous allons donc nous attarder dans ce cours sur le référentiel terrestre et son caractère non galiléen : dans quelles limites il peut être considéré galiléen et dans le cas inverse, quelles en sont les conséquences.

## 1 Le référentiel terrestre

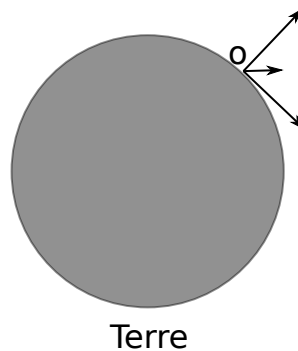
Comme on a pu le voir dans un cours précédent, on définit souvent un référentiel galiléen par rapport à un autre. Il faut donc qu'on trouve dans un premier temps le référentiel qui paraît être le plus galiléen possible.

**Faire les schémas au tableau**

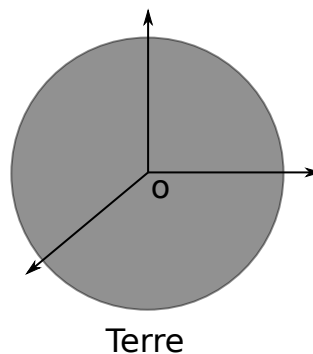
### 1.1 Identification d'un référentiel galiléen

On distingue en général trois référentiels différents :

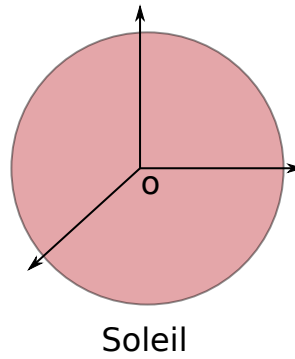
- **Le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$**  : c'est celui que l'on utilise le plus souvent. L'origine est un point sur Terre, un axe est normal à sa surface et les deux autres sont tangents. Ce référentiel est en rotation car la Terre tourne sur elle même avec une période de l'ordre de  $T_T=24\text{H}$ . Cela donne un ordre de grandeur de temps caractéristique de non galiléanité.



- **Le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$**  : l'origine est le centre de masse de la Terre et les axes points vers des étoiles lointaines... si lointaines qu'on peut les supposer fixes à l'échelle du temps de rotation de la Terre autour du soleil, qui est d'ailleurs de l'ordre de  $T_G=365$  jours.



- **Le référentiel de Copernic  $\mathcal{R}_C$**  : l'origine est au centre de masse du système solaire, il est donc légèrement à côté du centre de masse du soleil. Les axes pointes vers des étoiles lointaines considérées fixes. Sa période de révolution autour de notre galaxie est de  $T_C=200.10^6$  années.



Pour rappel, un référentiel tournant peut en général être considéré comme galiléen si le temps de l'expérience  $T_{exp}$  est tel que  $T_{exp} \ll T$ . Donc on voit que le référentiel qui se rapproche le plus d'un référentiel galiléen est le référentiel de Copernic.

On prend comme référentiel galiléen de référence le référentiel de Copernic.

En effet, il est facile d'avoir  $T_{exp} \ll T_C$  lol. On notera, que si en plus de cela,  $T_{exp} \ll T_G$ , alors le référentiel géocentrique peut aussi être considéré comme galiléen.

## 1.2 Dynamique dans le référentiel terrestre

On se placera dans le cadre situé plus tôt : on considère le référentiel géocentrique comme galiléen. On s'intéresse à la dynamique d'un point matériel M dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}'$ , en rotation autour du référentiel géocentrique  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $\omega$ . (Perez p35) La loi de composition des vitesses donne :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{M/R} &= \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_{O'/R} + \vec{\omega} \wedge O'\vec{M} \\ \vec{a}_{M/R} &= \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_{O'/R} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge O'\vec{M}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge O'\vec{M} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R'} \\ \vec{a}_{M/R} &= \vec{a}_{M/R'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge O'\vec{M}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R'} \quad \text{dans notre cas (rotation indépendante du temps et pas de translation)}\end{aligned}$$

Le PDF appliqué dans le **référentiel galiléen** (car c'est pas possible autrement!)  $\mathcal{R}$  donne :

$$m\vec{a}_{M/R} = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

En utilisant la relation entre les accélérations trouvées précédemment, on trouve l'évolution de l'accélération dans  $\mathcal{R}'$  :

$$m\vec{a}_{M/R'} = \Sigma \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$$

où :

- $\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge O'\vec{M})$  est la force d'entraînement par rotation
- $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R'}$  est la force d'inertie de Coriolis. Elle n'est présente que si le point M est en mouvement !

Bien que le référentiel terrestre ne soit pas galiléen, on a pu trouver un équivalent !

↓ Quelle est l'influence sur la dynamique en référentiel terrestre

## 2 Caractéristique de la dynamique en référentiel terrestre

### 2.1 Forme de la Terre

↪ Grubert p490

On sait que la Terre est aplatie à ses pôles : cela vient de la force centrifuge, on tend à écarter la Terre de son centre ! Au pôle, on a que la force gravitationnelle. On calcule :

$$\frac{F_{\text{equateur}} - F_{\text{pole}}}{F_{\text{moy}}} \approx \frac{\omega^2 R_{\text{equateur}}}{g}$$

Avec  $R_{\text{equateur}} = 6478 \text{ km}$  et  $R_{\text{pole}} = 6357 \text{ km}$ , on trouve bien

$$\frac{R_{\text{equateur}} - R_{\text{pole}}}{R_{\text{moyen}}} = \frac{F_{\text{equateur}} - F_{\text{pole}}}{F_{\text{moy}}} = \frac{1}{300}$$

## 2.2 Poids

➤ Brasselet p175, Grubert p490

On utilise souvent le poids, mais comment est-il défini ? Le poids est défini comme l'inverse de la force de tension appliquée sur un fil portant une masse  $m$ . Ainsi, en utilisant les équations précédentes :

$$0 = \vec{T} + \vec{F}_G - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge O'\vec{M})$$

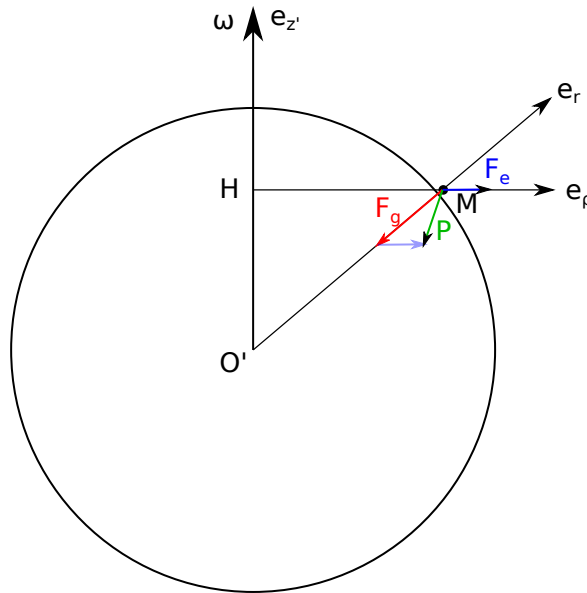
D'où :

$$\vec{P} = \vec{F}_G - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge O'\vec{M})$$

Le poids ne se résume pas à l'attraction gravitationnelle

On a donc :

$$\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \vec{e}_r + \omega^2 H \vec{M}$$



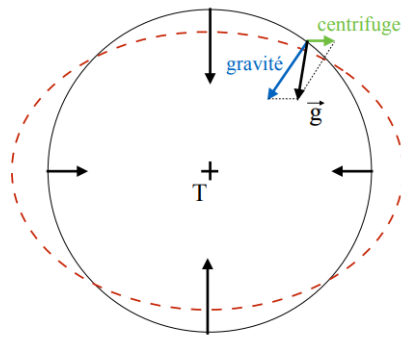
- $R_T \omega^2 \approx 3.2 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2} \ll g$
- sur les pôles, on a  $g = 9.83 \text{ m.s}^{-2}$  contre  $g = 9.78 \text{ m.s}^{-2}$  à l'équateur
- L'angle de déviation entre  $\vec{g}$  et la verticale terrestre est inférieur à  $0.1^\circ$ . Considérer  $\vec{g}$  radial, de norme  $9.8 \text{ m.s}^{-2}$  est donc une bonne approximation à  $0.5\%$  !
- Attention, le champ gravitationnel change aussi avec l'altitude :

$$\frac{\mathcal{G}M_T}{(R_T + h)^2} \approx \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \left( 1 - \frac{2h}{R_T} \right)$$

D'où

$$\frac{g(h) - g(0)}{g(h)} \approx 2 \frac{h}{R_T}$$

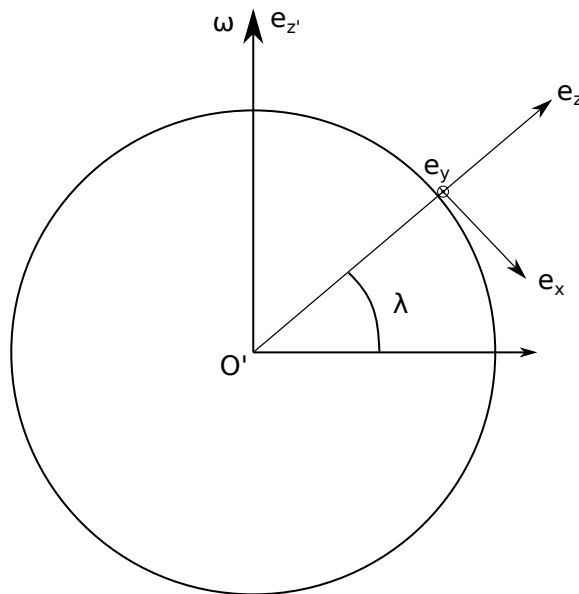
On atteint une variation de  $0.5\%$  pour une altitude de  $16 \text{ km}$ . Donc finalement, Considérer  $\vec{g}$  radial, de norme  $9.8 \text{ m.s}^{-2}$  est donc une bonne approximation à  $0.5\%$  **en dessous de 16km d'altitude**.



### 3 Applications pratiques

#### 3.1 Déviations vers l'Est

La caractèrè non galiléen de la Terre a été observé à grâce à la "déviatiòn vers l'Est". Une balle est lâchée à une certaine hauteur  $h$  et on se rend compte qu'au lieu de tomber tout droit, elle dévie légèrement vers l'est. Cela s'explique avec la force de Coriolis! **Hypothèse** : on néglige les frottements, le référentiel géocentrique est galiléen.



Résolution :

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = -2m \begin{pmatrix} -\omega \cos \lambda \\ 0 \\ \omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne, en notant  $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$  :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \sin \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega(\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y} \cos \lambda \end{cases}$$

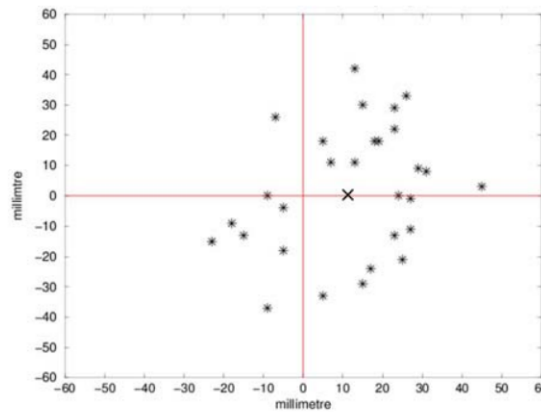
Comme  $g \gg \omega$ ,  $\Delta z \gg g\Delta x, \Delta y$  et il reste :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \sin \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega \dot{z} \cos \lambda \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

Ce qui donne finalement :

$$\begin{cases} z(t) = h - \frac{gt^2}{2} \\ y(t) = \frac{\omega gt^3 \cos \lambda}{3} \\ x(t) = \frac{\omega^2 gt^4 \cos \lambda \sin \lambda}{6} \end{cases}$$

Avec  $\lambda = 45^\circ$  et  $h=100$  m, on trouve :  $y_f = 0.011m = 1mm$  et  $x_f = 8.7 \cdot 10^{-6}m$ . Il y a donc une légère déviation vers l'est (celle vers le sud est négligeable).



**Fig.5:** Le schéma des chutes dans l'expérience de 1803 de Schlegel. La croix indique la déviation théorique.

↓ Autre manifestations : vents géostrophiques

### 3.2 Vents géostrophiques

↗ [https://www.lmd.jussieu.fr/~fcodron/COURS/notes\\_dynam1.pdf](https://www.lmd.jussieu.fr/~fcodron/COURS/notes_dynam1.pdf) p10-12 et [https://people.mio.osu.edu/~doglioli/DoglioliPetrenko\\_NotesCoursTD\\_DynamiqueOceanique.pdf](https://people.mio.osu.edu/~doglioli/DoglioliPetrenko_NotesCoursTD_DynamiqueOceanique.pdf) p 23-26

Pour décrire les fluides, l'équation utilisée est l'équation de Naviers-Stokes :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} - 2\rho \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Pour l'étude des vents géostrophiques, on décompose la vitesse selon l'axe horizontale (U) et verticale (W), de taille caractéristique L (horizontale) et H (verticale). On prend les ordres de grandeur suivant : L=1000 km, H=1000 m et U=100 m/s. L'incompressibilité donne  $W = 10^{-5}$  m/s. Le nombre de Reynolds est grand devant 1 donc on ne s'intéressera pas à la viscosité

Calculons l'ordre de grandeur des différents termes :

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{L} &= 10^{-10} m.s^{-2} = \frac{WU}{H} \gg \frac{W^2}{H} \\ \omega v &\approx 10^{-6} m.s^{-2} \\ g &\approx 10 m.s^{-2} \end{aligned}$$

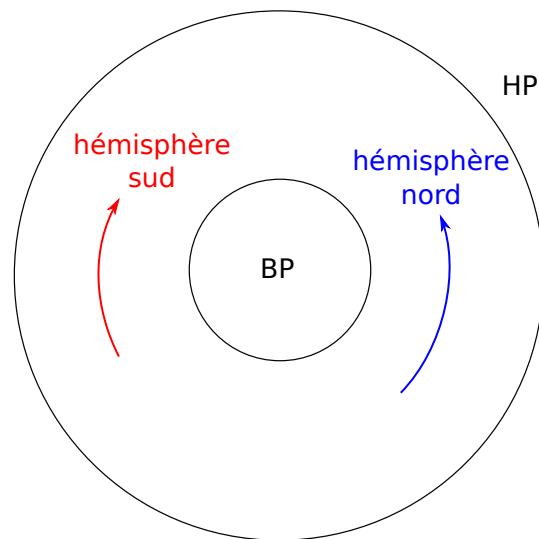
Autrement dit, les termes non linéaires sont complètement négligeables. On se place alors dans l'approximation géostrophique et on a :

$$\vec{\nabla} P = -2\rho \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

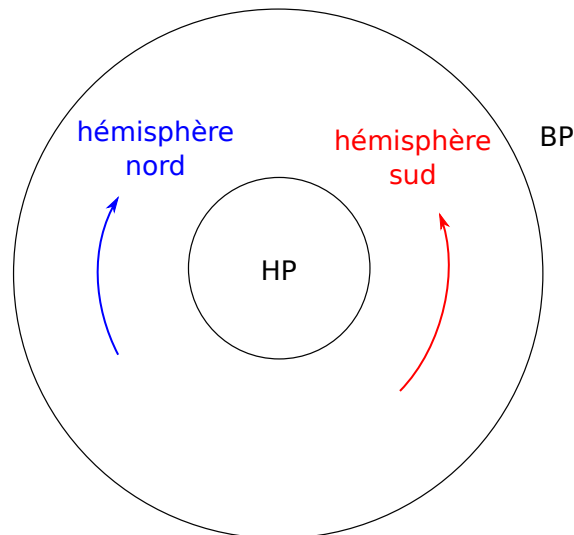
Le gradient de pression est donc perpendiculaire au gradient de pression ! En fait, la force de Coriolis se charge de compenser les gradients de pression. On peut à l'aide de cette équation retrouver le sens de rotation des cyclones et des anti-cyclones ! En effet, on peut réécrire l'équation que l'on vient de trouver comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= 2\omega g v_\theta \sin \lambda \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= -2\omega g v_r \sin \lambda \end{aligned}$$

Considérons le cas d'un cyclone, dont le centre est de plus basse pression que la périphérie. On a  $\frac{\partial P}{\partial r} > 0$ . Dans l'hémisphère nord,  $\sin \lambda > 0$  donc les cyclones tournent dans le sens trigonométrique. Dans l'hémisphère sud, on a l'inverse. Et pour des anticyclones, il suffit de tout inverser.



cyclone



anticyclone

### 3.3 Pendule de Foucault

➤ Grubert p493

Le pendule de Foucault, présent au Panthéon, permet de bien mettre en évidence la rotation de la Terre (il fait 67 m et 28 kg). Les différentes forces s'appliquant sur le pendule sont :

- La tension du fil :  $\vec{T} \approx \frac{T}{l}(-x, -y, l - z)$
- La force de gravitation :  $\vec{F}_G = (0, 0, -mg)$
- La force de Coriolis :  $\vec{F}_c = 2m\omega(\dot{y} \sin \lambda, -\dot{z} \cos \lambda - \dot{x} \sin \lambda, \dot{y} \cos \lambda)$

... résolution dans le Grubert.

<https://www.youtube.com/watch?v=q0xxAWICYdY&t=21s>

### Version de 30 minutes

Enlever le II. Mettre "Poids" dans le I et pas faire le pendule de Foucault.

## 4 Biblio supplémentaire

Cours prof Colléaux : [urlhttp://www.seigne.free.fr/Cours/TerreNG.pdf](http://www.seigne.free.fr/Cours/TerreNG.pdf)

## Conclusion

Sur les sous parties non évoquées ou sur le caractère non galiléen du référentiel géocentrique qui fait apparaître les forces de marée (↪ Brasselet p.165).

## Questions

- C'est quoi le mouvement de la Terre dans le référentiel Copernic? *Translation sous la forme d'une ellipse dont un foyer est le centre du référentiel*
- Cas concret pour la déviation vers l'Est? *Grosse Bertha pendant la guerre. ça part à 800 km/h sur 1000 km. Déviation de 1600m*
- Nombre sans dimension qui permet de déterminer l'impact de la force de Coriolis? *Nombre de Rossby  $R_o = \frac{v}{\Omega L}$*
- C'est quoi le terme de marée? *Différence de champ gravitationnel entre un point M et le point O*
- Qu'est ce que l'on peut considérer comme une pseudo force en relativité? Du au fait de la courbure de l'espace temps? *La gravité*

## Remarques

- Ne pas oublier de parler d'origine temporelle