

LP04 PRÉCESSION DANS LES DOMAINES MACROSCOPIQUES ET MICROSCOPIQUES

8 juin 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L3

Commentaires du jury

Bibliographie

✦ *Mécanique*, **Perez**¹

✦ *Mécanique*, **Gruber Benoit**²

✦ *MPhysique atomique*, **Cagnac**³

→ Angles d'Euler et gyroscope

→ Angles d'Euler et gyroscope

→ RMN

Prérequis

- Mécanique du solide
- Changements de référentiel
- Moment magnétique

Expériences



Table des matières

1	Toupie et approximation gyroscopique	2
1.1	Angles d'Euler	2
1.2	Axysymétrie et approximation gyroscopique	2
1.3	Equation de précession	3
1.4	Le Gyroscope	3
2	Rotation de moment magnétique et RMN	4
2.1	Facteur gyromagnétique	4
2.2	Equation de précession	4
2.3	Application à la RMN	4

Introduction



Lancer une toupie

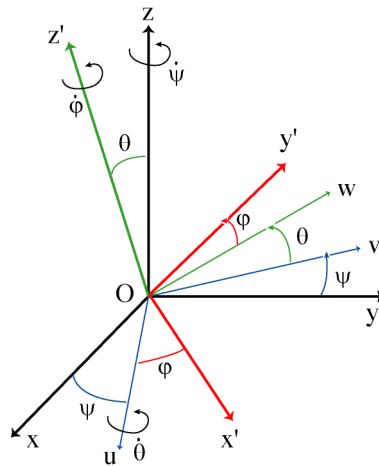
↶
⊖

https://www.youtube.com/watch?v=Mnz4QJ_qR2E à 2 minutes 10

1 Toupie et approximation gyroscopique

1.1 Angles d'Euler

Afin de mettre en équation le problème de la toupie, il va nous falloir appliquer le théorème du moment cinétique dans une base bien choisie. Nous ferons l'hypothèse ici que la toupie a un axe de symétrie qui est celui de sa rotation la plus rapide. Afin de décrire au mieux la vitesse de rotation de la toupie, nous allons utiliser les angles d'Euler qui sont définies sur la figure suivante (**Bien les expliciter à l'oral**) :



On notera dans la suite \mathcal{R} le référentiel lié au laboratoire et \mathcal{R}' celui lié à la base $(O, e_{x'}, e_{y'}, e_{z'})$. Dans \mathcal{R}' la toupie est au repos. Ce référentiel tourne donc à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par rapport à \mathcal{R} avec :

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_u + \dot{\phi} \vec{e}_{z'}$$

1.2 Axysymétrie et approximation gyroscopique

La toupie étant axysymétrique, on peut former le repère $\mathcal{R}_e = (O, \vec{e}_u, \vec{e}_w, \vec{e}_{z'})$ car la matrice de moment d'inertie ainsi que le vecteur rotation seront faciles à exprimer dans cette base. En effet, avec $\vec{e}_z = \sin(\theta) \vec{e}_w + \cos(\theta) \vec{e}_{z'}$, on a :

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_u + \dot{\psi} \sin(\theta) \vec{e}_w + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta)) \vec{e}_{z'}$$

Et le moment d'inertie s'exprime simplement :

$$I = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Le moment cinétique s'exprime alors simplement sous la forme :

$$\vec{L}_O |_{\mathcal{R}_e} = \begin{pmatrix} I \dot{\theta} \\ I \dot{\psi} \sin(\theta) \\ I_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\theta)) \end{pmatrix}$$

Avant de se lancer dans la suite des calculs, nous allons faire ce qu'on appelle l'approximation gyroscopique. Quand on voit la toupie tournée, on se rend compte que $\dot{\phi}$ a l'air d'être plus grand que $\dot{\psi}$ ou encore $\dot{\theta}$. Si on considère que

les moments d'inertie sont à peu près du même ordre de grandeur $I_3 \approx I$, alors on se rend compte que le moment cinétique selon l'axe de révolution est beaucoup plus grand que le reste et on se retrouve alors avec :

$$\vec{L}_O|_{\mathcal{R}_e} \approx I_3 \dot{\phi} \vec{e}_{z'}$$

L'approximation gyroscopique consiste à utiliser le fait que $\dot{\phi} \gg \dot{\phi}, \dot{\theta}$ pour conclure sur $L_{Oz'} \gg L_{Ou}, L_{Ow}$

1.3 Equation de précession

Maintenant que l'on a grandement simplifié le problème à l'aide des observations, nous allons pouvoir appliquer le théorème du moment cinétique dans \mathcal{R} . Pour cela on calcule :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = -l\vec{e}_{z'} \wedge mgl\vec{e}_z$$

Avec l'approximation gyroscopique, on peut réécrire cela :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\omega}_p \wedge \vec{L}_O \quad \text{avec} \quad \vec{\omega}_p = \frac{mgl}{I_3 \dot{\phi}}$$

$\vec{\omega}_p$ est appelée pulsation précession. On peut montrer que cette équation implique :

- $|\vec{L}_O| = \text{cste}$
- $L_{Oz} = \text{cste}$

Cela permet d'affirmer que le moment cinétique décrit un cône d'axe de révolution O_z . Le moment cinétique tourne autour de cet axe car la gravité entraîne la rotation. Cette remarque assez étrange sur le fait qu'une force horizontale engendre un mouvement radiale peut s'illustrer à l'aide d'un gyroscope.

1.4 Le Gyroscope



Faire joujou avec le gyroscope



On peut expliquer simplement ce phénomène à l'aide du théorème du moment cinétique au centre de gravité :

$$\left(\frac{d\vec{L}_C}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{C}A \wedge \vec{F}$$

Ainsi, si \vec{F} est verticale, la variation de moment cinétique est horizontale et réciproquement

A revoir un peu Autre manière de le voir. En notant $\vec{\Gamma}$ le couple extérieur :

$$\left(\frac{d\vec{L}_C}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{L}_C}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \omega \wedge \vec{L}_0 = \vec{\Gamma}$$

Donc

$$\omega \wedge \vec{L}_0 = \vec{\Gamma}$$

Quelques ordres de grandeur :

- période de précession de la terre : 26 000 ans
- nutation de la terre : $23^\circ 26' 12.555''$, variant de + ou - $9.2''$ avec une période de 18.6 ans.

↓ L'équation de précession que nous avons vu se retrouve aussi dans le domaine microscopique et est donc beaucoup générale que ce que l'on pourrait croire.

2 Rotation de moment magnétique et RMN

2.1 Facteur gyromagnétique

On considère un électron décrit dans le modèle de Bohr orbitant autour d'un proton. Son moment magnétique s'écrit :

$$\vec{M} = -\frac{e}{T}\pi r^2 \vec{e}_z = -\frac{evr}{2}\vec{e}_z$$

D'un autre côté, le moment magnétique de l'électron vaut :

$$\vec{L} = \vec{r}\vec{e}_r \wedge m_e v \vec{e}_\theta = mvr\vec{e}_z$$

On se rend alors compte que l'on peut écrire :

$$\vec{M} = \gamma \vec{L} \quad \text{avec} \quad \gamma = -\frac{e}{2m_e} \quad \text{le facteur gyromagnétique}$$

2.2 Equation de précession

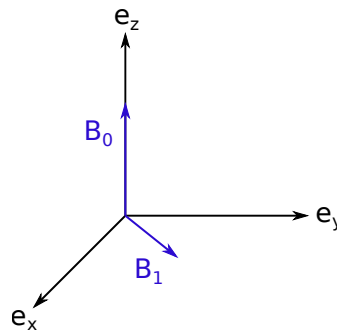
Dans le cas où l'électron étudié précédemment est plongé dans un champ magnétique \vec{B}_0 uniforme, il subit un couple $\vec{C}_0 = \vec{M} \wedge \vec{B}_0$. Le théorème du moment cinétique donne donc :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0 = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{L}_0$$

avec $\omega_0 = -\gamma \vec{B}_0$. On retrouve donc l'équation de précession que nous avons trouvée plus tôt pour le fonctionnement d'un toupie. γ étant négatif, le moment cinétique tourne bien autour du champ magnétique \vec{B}_0 extérieur.

ODG : avec un champ magnétique $B = 1T$, on trouve $\omega_0 = 8,9.10^{10}$ rad/s.

2.3 Application à la RMN



On rajoute maintenant un champ \vec{B}_1 perpendiculaire au champ \vec{B}_0 tournant à la vitesse angulaire ω . LE TMC dans le référentiel \mathcal{R} donne :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \wedge \vec{L}_0 \quad \text{avec} \quad \omega_1 = -\gamma \vec{B}_1$$

On se place ensuite dans la base \mathcal{R}' dans lequel le champ \vec{B}_1 est fixe. On trouve alors :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}) \wedge \vec{L}_0$$

On voit alors que :

- Si $|\vec{\omega} - \vec{\omega}_0| \gg |\omega \vec{e}_g|$, $\left(\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$ $(\vec{\omega}_0 - \vec{\omega}) \wedge \vec{L}_0$ et le champ tourne donc autour de \vec{B}_0
- Si $|\vec{\omega} - \vec{\omega}_0| \ll |\omega \vec{e}_g|$, $\left(\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$ $\vec{\omega}_1 \wedge \vec{L}_0$ et le champ tourne donc autour de \vec{B}_1

Le moment cinétique de l'électron tourne donc brusquement lorsque $\omega \approx \omega_1$. C'est ainsi que la RMN repère les protons.

Version 30 minutes

Enlever le gyroscope devrait suffire

Questions

- C'est quoi l'expression générale du tenseur d'inertie ? $\int \dots$
- Pourquoi les coeff off diag sont nuls ? Askip ça se voit bien dans le calcul direct.
- Bateau qui part avec un gyroscope vers le Nord il se passe quoi ? *Il faut entretenir le gyroscope pour compenser les frottements.* Ouai masi le gyroscope au cours d'une journée il fait un tour sur lui même à cause de la rotation de la Terre. **Regarder ça de nouveau dans la bilio**
- Même idée : il se passe quoi en une année ? Y'a la révolution de la Terre autour du Soleil.
- Dans la partie microscopique, quand tu fais le calcul avec l'électron autour d'un axe pour trouver le magnéton de Bohr, il est important de préciser que ce n'est pas réaliste. Qu'est-ce qu'on peut citer comme truc pour montrer que le modèle n'est pas bon ? *Puissance rayonnée de Larmor ?* Ok c'était pas ma question mais ok ! Je voulais parler du facteur de Landé.
- Si jamais je prends des spins dans un matériau et j'allume un champ magnétique. On a une précession mais la projection selon z reste la même pour chaque donc en moyenne nulle. Du coup pourquoi y'a du paramagnétisme ? *C'est parce qu'il y a des effets dissipatifs qui font un régime transitoire*
- Différence entre equation de precession et PFD ? *Le PFD c'est invariant sous inversion temporelle et pas l'équation de précession.* Après le PFD c'est la dérivée première de $\vec{p} \dots$ Y'a plus de symétrie dans l'équation de précession.

Qu'est-ce qu'un référentiel? Comment construit-on un référentiel galiléen? Premier principe de la dynamique = principe d'existence d'un référentiel galiléen.

Différence fondamentale entre le gyroscope et la toupie? Toupie : précession due à la gravité
Pas de précession pour le gyroscope

Pourquoi le gyroscope est-il plat?

Terre : Pourquoi y a-t-il précession? Période de précession? Terre pas sphérique (force centrifuge)

Qu'est-ce que les forces de marée?

Est-ce que vous connaissez d'autres types de précession? Précession de Thomas, précession de Lenses-Thirring, précession de l'orbite de Mercure

Gyroscope dans les téléphones portables? Gyroscope optique (effet Sagnac)

Pourquoi un tenseur d'inertie est-il symétrique?

Instabilités quand on fait tourner les solides

— Dans le calcul du moment magnétique de l'électron, à quelle condition peut-on approximer l'orbite de l'électron à une spire circulaire? — L'équation de précession pour le domaine microscopique nécessite-t-elle l'approximation gyroscopiques pour être établie? — Est-ce que la RMN est un problème classique ou quantique? — Que devient la relation $\mu = \gamma L$ lorsque l'on passe en mécanique quantique? — Quels sont les différents types de moments cinétiques en mécanique quantique (orbital et de spin)? Qu'est-ce que le facteur de Landé? — Que se passe-t-il à la résonance en RMN? — Que peut-on conclure en prenant le produit scalaire de l'équation du mouvement (exacte) de la toupie avec le vecteur e_z ? — Quelle importance a le fait que l'approximation gyroscopique fasse intervenir les moments d'inertie du solide? — Quelle est la géométrie la plus adaptée pour faciliter la validité de l'approximation gyroscopique? Est-ce qu'une tige longue et fine ferait une bonne toupie? — Quel est le principe d'un gyroscope? — Comment faire pour que le poids ait un moment dynamique nul? — Qu'est-ce que l'effet paradoxal? Que se passe-t-il lorsque l'on penche une roue de vélo en rotation?

- La précession des équinoxes est le lent changement de direction de l'axe de rotation de la Terre (une rotation tous les 26 000 ans environ). Cette dernière subit l'influence des effets de marée de la Lune et du Soleil qui causent une variation de l'axe terrestre de grande amplitude. En raison de l'attraction conjuguée du Soleil et de la Lune, la nutation se traduit par une oscillation de l'axe de rotation de la Terre pouvant aller jusqu'à plus ou moins 17,2"
- Forces de marée viennent du caractère non galiléen d'un référentiel, de la gravité et de l'accélération d'entraînement.
- Si on regarde la forme du tenseur d'inertie on voit directement la symétrie :

$$I = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) \rho d\tau & - \int yx \rho d\tau & - \int zx \rho d\tau \\ - \int xy \rho d\tau & \int (x^2 + z^2) \rho d\tau & - \int zy \rho d\tau \\ - \int xz \rho d\tau & - \int yz \rho d\tau & \int (x^2 + y^2) \rho d\tau \end{pmatrix}$$

- Y'a l'axe avec le plus petit moment d'inertie où ça part en steak
- On peut jamais approximer l'orbite d'un électron à une spire circulaire à cause de la MQ?
- Non, aucune approximation pour le milieu micro!
- Il me semble que RMN c'est quantique mais on peut l'expliquer quand même qualitativement avec la méca classique
- Juste en méca Q le gamma a une valeur dépendante de l'atome étudié
- Facteur de Landé c'est la correction de MQ justement
- Conservation de L_z

- La version dans la vidéo est bien car on met de la masse loin de l'axe vers le bas ainsi on maximise I_3 tout en évitant de trop monter I
- La roue se met à tourner (effet du gyroscope cf I.4)

Quelle est la différence entre jour sidéral et jour terrestre ? Expliquer le phénomène des saisons. Pourquoi parle-t-on de résonance magnétique, en quoi est-ce une résonance, pourquoi cette condition est appelée résonance ? Quelles sont les autres forces qui s'appliquent sur la toupie ? Pourquoi leurs moments sont nuls ? Pourquoi la toupie s'arrête ? Comment se traduisent les frottements dans le TMC, si on les prenait en compte ? L'équation gyroscopique n'apparaît pas dans la partie I (Cas de la toupie), pourquoi ? (choix pédagogique, elle est là quand même, il faut juste changer de référentiel). Quelle correction quantique faudrait-il rajouter dans le modèle présenté de la RMN ?

Pourquoi en résonance magnétique le champ fixe est plus intense que le champ tournant ? Pourquoi la sensibilité dépend du champ fixe ? C'est quoi la sensibilité ? Quelles origines du moment cinétique ? La résonance magnétique du neutron existe-t-elle ? Dans le cas du proton, le moment magnétique est-il orbitalaire comme vous l'avez présenté avec le modèle de Bohr ? Pour le proton, de quoi dépend le facteur gyromagnétique ? Expliquer la précession des équinoxes. Pour la résonance magnétique, quel phénomène se passe quand la pulsation est environ égale à la pulsation de Larmor ? Pour la toupie, y a-t-il que le poids comme force ? Pourquoi on ne prend pas en compte la réaction du support dans les calculs ? Quels types de frottement qui fait que la toupie tombe ?

Comment on définit formellement le référentiel propre d'inertie ? Pour un solide quelconque ? Vous avez étudié la toupie comme en contact ponctuel fixe avec le sol, pourquoi la toupie se déplace-t-elle en réalité ? Pourquoi la toupie finit par tomber ? Qu'est-ce qu'il se passe si le support de la toupie est accéléré (par exemple dans un ascenseur, ou en chute libre) ? Sur la résolution du mouvement de Poincaré d'un solide, vous avez exhibé des solutions particulières, quelles sont les solutions générales ? Pouvez-vous revenir sur le mouvement de précession de la Terre ? (partie expédiée en raison du manque de temps et peu claire) Vous avez dit que le gyroscope permettait de mettre en évidence le caractère

non galiléen du référentiel terrestre, comment exactement ? Est-ce que c'est possible d'étudier des mouvements hors du cadre de l'approximation gyroscopique ? Par exemple ? Par rapport à l'expérience d'Einstein et de Haas, vous avez dit que la valeur du rapport gyromagnétique mesurée n'était pas en accord avec le modèle semi-classique et qu'il fallait faire appel à des modèles quantiques, pouvez-vous expliciter ? Qu'est-ce qu'on mesure exactement en RMN ? Comment on effectue cette mesure en pratique ?

Application du gyro dans le domaine maritime (en lien avec l'expression du couple gyroscopique) ? Dans bateau, quelle partie du gyro (que j'avais montré) serait elle relié à la coque ? Garder le cap, quel domaine est ce utilisé ? (les avions de chasse notamment, système de rétroaction). Sur un échelle de temps de 24h, qu'observe t on si on maintient la rotation du gyro ? sur un an ? Pour la RMN, quel type de particule est étudiée ? (les protons H). Autre type de moment cinétique ? (orbitalaire). Influence des voisins ? couplage, décalage en fréquence. Résolution typique d'un spectro RMN pour la détermination de la fréquence ? Intérêt de faire varier le champ B_0 plutôt que f ? (les équations sont les mêmes, juste plus simple à réaliser).

Matériau para, plonge dans champ B et acquiert une aimantation induite. Pourquoi, alors qu'on a vu que ça ne devrait que faire précesser les moments magnétiques autour de la direction du champ ? (pas de réponse). Comment à partir de l'expression de l'état initial, on obtient l'état au temps t ? (application de l'opérateur évolution)

- Jour solaire c'est ce que l'on connaît mais le jour sidéral c'est un tour de la Terre autour de soi même et en fait un peu moins que 24H : 23H56 minutes
- Les saisons c'est simplement parce que la Terre est penchée par rapport au soleil du coup un endroit donné de la planète n'a pas le même éclaircissement selon le moment de l'année.

Remarques

- Au niveau L2/L3, c'est difficile de parler autant du macro et du micro...