LP05 Lois de conservation en dynamique

8 juin 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L3

Commentaires du jury

2017 : Des exemples concrets d'utilisation des lois de conservation sont attendus.

2016 : Lors de l'entretien avec le jury, la discussion peut aborder d'autres domaines que celui de la mécanique classique.

2015 : Cette leçon peut être traitée à des niveaux très divers. L'intérêt fondamental des lois de conservation et leur origine doivent être connus et la leçon ne doit pas se limiter à une succession d'applications au cours desquelles les lois de conservation se résument à une propriété anecdotique du problème considéré.

Jusqu'en 2014, le titre était : *Lois de conservation en dynamique des systèmes.*

Jusqu'en 2013, le titre était : *Exemples d'utilisation des lois de conservation en dynamique des systèmes.*

Bibliographie

✍ *Mécanique I*, **BFR** ⟶ Problème à deux corps
✍ *Quantique*, **Perez** ⟶ Effet Compton

Prérequis

➢ Mécanique du point

➢ Mécanique du solide

➢ Mécanique relativiste (que pour l'effet Compton !)

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

Le but se de cette leçon, c'est de comprendre pour quoi certaines quantités sont conservées dans des cas particules.

1 Exemple et origines des lois de conservation

1.1 Conservation de l'impulsion

L'équation qui régit l'évolution de l'impulsion, c'est le second principe de Newton. On considère donc une système S hypothétique (comme par exemple un balle). On applique le PFD dans $\mathcal{R}$ supposé galiléen :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F}$$

On peut considérer plusieurs cas :

- Le cas le plus facile : le système est isolé ou peudo-isolé. Dans ce cas là, l'impulsion se conserve.
- Cas plus intéressant : la force dérive d'un potentiel. On suppose que la force dérive d'un potentiel U et qu'il y a **invariance par translation** selon $\vec{e_x}$. Dans ce cas : $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, ce qui signifie que $\frac{dp_x}{dt} = 0$. Autrement dit, l'**invariance par translation entraîne la conservation de l'impulsion**. D'ailleurs, on peut remarquer que le cas d'un système isolé ou pseudo-isolé est lui aussi invariant par translation.

Exemple : recul d'un fusil. Une balle de Colt 45 est projetée à 300 m/s en moyenne et pèse environ 14g. Le pistolet pèse lui 1271 g. La conservation de l'impulsion au moment du tire donne la vitesse du pistolet :

$$\vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}$$

On trouve que le Colt a une vitesse de 3.3 m/s. Cela explique le recul des pistolets. En plus lourd, on peut imaginer les canons qui recul quand ils tirent. (beaucoup de vidéos youtube là dessus)

1.2 Conservation du moment cinétique

L'équation qui décrit l'évolution du moment cinétique est le TMC :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\vec{M}$$

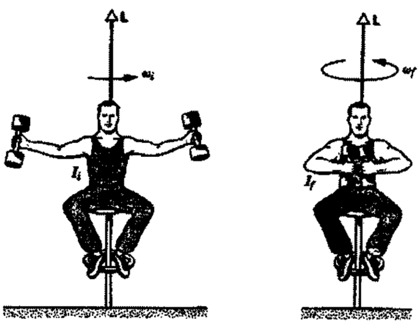
Comme précédemment, on peut distinguer différents cas :

- La résultante des moments est nulle : le moment cinétique est conservé
- Imaginons le cas d'un potentiel tridimensionnel en coordonnées sphériques. Si le problème ne dépend que de la coordonnée radiale r (**invariance par rotation**), alors on a : $\vec{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e_r}$ et par conséquent :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -r\vec{e_r} \wedge \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e_r} = \vec{0}$$

  Le moment cinétique est donc conservé. On a donc trouvé que cette fois-ci, **l'invariance par rotation entraine la conservation du moment cinétique**.

Exemple : chaise tournante



Pendant la rotation, on peut considérer le système {homme + chaise} isolé. En réalité, il y a une force : le poids, mais celle-ci ne travaille pas. La chaise est supposée parfaite donc pas de frottements solides pendant la rotation et on néglige les frottements fluides. Pour rappel, le moment cinétique vaut :

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$\vec{L}$ étant conservé, si I augmente (ouverture des bras) alors $\vec{\omega}$ diminue.

Faire l'expérience de la chaise si c'est possible

Pas mal de vidéos sur YouTube là encore.

1.3 Conservation de l'énergie

Le dernier cas que nous allons étudier dans cette première partie est la conservation de l'énergie. On suppose que le système que l'on considère est soumis à un potentiel U($\vec{r}$,t). Dans ce cas-là :

$$dU = \vec{\nabla} U \vec{dr} + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

On applique alors le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{C2} - E_{C1} = \Delta W = \int_1^2 -\vec{\nabla} U.\vec{dr} = -\int_1^2 dU + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

On obtient donc :

$$\Delta E_m = \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

Ainsi, si U est indépendant du temps, ce qui correspond à **l'invariance temporelle** du problème, alors l'énergie mécanique est conservée.

Exemple : chute libre. U=mgz, ne dépend pas du temps. Dans ce cas là on trouve v=... Attention : c'est vrai que s'il n'y a pas de frottements

Pour conclure cette partie, on a pu voir que **ce qui génère la conservation d'un quantité est l'invariance du problème selon un paramètre**. Il existe en réalité un théorème, appelé Théorème de Noether, qui a été démontré en 1915 par Emmy Noether, généralisant ce concept. Il sera plus amplement discuté et démontré dans de futurs cours de mécaniques analytiques.

Invariant	Grandeur conservée	Phrase de Emmy Noether
Translation	Impulsion	"La conservation de la quantité de mouvement est une conséquence de l'homogénéité spatiale de l'univers, c'est à dire l'invariance par translation dans l'espace"
Rotation	Moment cinétique	"la conservation du moment cinétique est une conséquence de l'isotropie de l'univers, c'est-à-dire de l'invariance par rotation dans l'espace"
Temps	Énergie	"La conservation de l'énergie est une conséquence de l'homogénéité temporelle de l'univers, c'est-à-dire de l'invariance par translation dans le temps"

Nous allons nous intéresser à un cas concret servant souvent, et donc les invariances ne sont pas triviale.

2 Problème à deux corps : mouvement à force centrale

2.1 Position du problème

On va s'intéresser au mouvement d'un point m de masse M dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ n'étant soumis qu'à une force étant toujours dirigée vers un même point : c'est ce que l'on appelle une force centrale.

Trois exemples connus de ce genre de force :

- Attraction gravitationnelle $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\vec{e}_r$
- Interaction électrostatique
- Force élastique

En fait le problème que l'on souhaite étudié est le cas d'un problème à deux corps. On peut simplement écrire :

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r_1}} = \vec{F}_{2\to1} \\ m_2\ddot{\vec{r_2}} = \vec{F}_{1\to2} \end{cases}$$

On note G le barycentre : $O\vec{M}_1m_1 + O\vec{M}_2m_2 = m_tO\vec{G} \Leftrightarrow O\vec{G} = \frac{O\vec{M}_1m_1+O\vec{M}_2m_2}{m_t}$. Le système {M$_2$+M$_2$} est isolé :

$$m_t\ddot{O\vec{G}} = \vec{0}$$

Le référentiel du centre de masse peut donc être pris comme référentiel galiléen pour notre étude. Or :

$$\begin{aligned} r_1 = GM_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}M_1M_2 \\ r_2 = GM_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}M_1M_2 \end{aligned}$$

On va nous s'intéresser au vecteur $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ et on pose $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$. Ainsi :

$$\begin{cases} \vec{r_1} = \vec{r_G} - \frac{m_2}{m_t}\vec{r} \\ \vec{r_2} = \vec{r_G} + \frac{m_1}{m_t}\vec{r} \end{cases}$$

En soustrayant les deux équation on a :

$$m_2\ddot{\vec{r_2}} - m_1\ddot{\vec{r_1}} = 2\vec{F} = (m_2 - m_1)\ddot{\vec{r_G}} + 2\mu\ddot{\vec{r}}$$

On s'est donc ramené à :

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

On a donc un problème à un corps de masse μ.

Remarque : dans la plupart des cas, on aura $m_1 \gg m_2$. Par exemple $m_{soleil} \approx 10^5 m_{terre}$ et $m_{proton} \approx 10^3 m_{electron}$. Dans ce cas là, le barycentre est confondu avec M_1 et $\mu = m_2$: on retrouve le cas simple d'un problème à 1 corps.

2.2 Loi des aires

Dans le référentiel barycentrique, le théorème du moment cinétique donne :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

car la seule force est une force centrale, donc de bras de levier nul. On en déduit deux choses :

- Avec la relation $\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$, on en déduit que la trajectoire est plane : elle est contenu dans le plan formé par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$. Exemple de la Terre autour du Soleil
- En coordonnées polaires (dont l'axe O_z est perpendiculaire au plan du mouvement), $\vec{r} = r\vec{e_r}$, $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{r}\vec{e_r}$ et donc $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}$ est conservé. On pose $C = r^2\dot{\theta}$ la constante de la loi des aires. Pour l'interpréter, calculons la surface balayée par le vecteur $\vec{r}$ pendant un temps dt :

$$dA = \frac{1}{2}r^2d\theta + \frac{1}{2}drrd\theta \approx \frac{1}{2}r^2d\theta \Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$$

La constante C représente donc l'aire balayée par unité de temps.

On a pu rapidement dégager avec la conservation des informations sur le mouvement, dont celle de la loi des aires. Néanmoins, le système comporte d'autres invariants... donc encore plsu d'informations !

2.3 Nature du mouvement : état lié, état diffusif

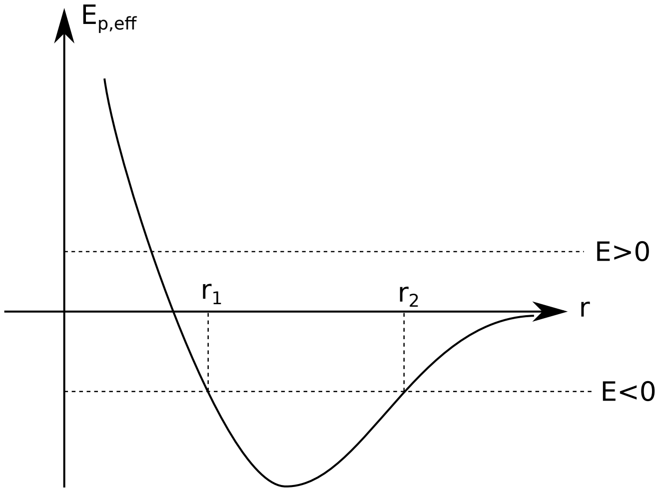
On a invariance dans le temps du problème et donc conservation de l'énergie ! L'énergie vaut :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p$$
$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{r^2} + E_p$$
$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

On s'est donc ramener à un cas unidimensionnel à l'aide d'un énergie potentielle effective ! Dans le cadre de l'étude de la rotation de la Terre autour du soleil :

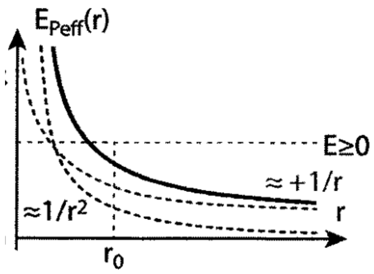
$$E_{p,eff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r}$$

On distingue alors plusieurs cas :



- E<0 : l'état est lié et on oscille entre deux rayons
- E>0 : état de diffusion, on part à l'infini

Cas répulsif aussi ? Toujours des états de diffusion.



Forme du potentiel effectif : $E_{peff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{|K|}{r}$ $K<0$.

Dans ce cas, le potentiel ne présence pas de minimum et la particule se trouve toujours dans un état de diffusion.

2.4 Vecteur de Runge-Lenz

On peut peut trouver une autre quantité encore : le vecteur de Runge-Lenz : $\vec{A} = \frac{1}{K}\dot{\vec{r}} \wedge \vec{L} - \vec{e_r}$.

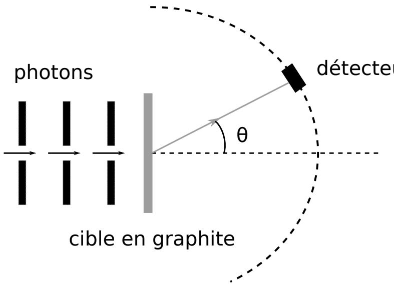
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{K}(\ddot{\vec{r}} \wedge \vec{L} + \dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{L}}) - \dot{\theta}\vec{e_\theta} = \frac{1}{K}\ddot{\vec{r}} \wedge \vec{L} - \dot{\theta}\vec{e_\theta} = \frac{1}{\mu r^2}\mu r^2\dot{\theta}\vec{e_\theta} - \dot{\theta}\vec{e_\theta} = \vec{0} \quad \text{(utiliser le PFD)}$$

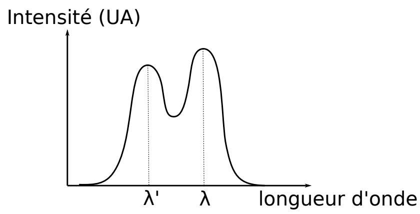
Ce vecteur permet de retrouver l'expression de la trajectoire :

$$Ar\cos\theta = \vec{A}.\vec{r}$$
$$Ar\cos\theta = mC^2 - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mu}r$$
$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \quad \text{avec} \quad p = \frac{mC^2\mu}{\mathcal{G}m_1m_2} \qquad e = \frac{A\mu}{\mathcal{G}m_1m_2}$$

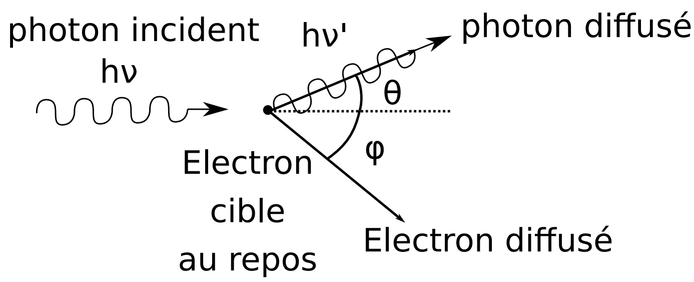
3 Effet Compton

En 1923, Arthur Compton réalise l'expérience suivante : il envoie des photons sur une cible de graphite. Avec un détecteur placé derrière la cible en graphite avec un angle donné, il regardait le spectre qu'il obtenait. Il remarqua alors étonnement qu'il y avait deux pics principaux.





Afin d'interpréter le résultat, il faut écrire la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement du système électron + photon qui est considéré isolé :



$$e_\gamma + E_e = e'_\gamma + E'_e \quad \text{et} \vec{p_\gamma} = \vec{p_\gamma}' + \vec{p_{e'}}$$

On remplace ces expressions dans $E'_e = p_{e'}^2 c^2 + m_e^2 c^4$ ce qui donne :

$$(e_\gamma - e_\gamma e)^2 + 2m_e c^2(e_\gamma - e'_\gamma) - p_\gamma^2 c^2 - p'_\gamma + 2p_\gamma p'_\gamma \cos\theta = 0$$

Autrement dit, avec $e_\gamma = p_\gamma c$:

$$2m_e c^2(e_\gamma - e_\gamma) = 2e_\gamma e'_\gamma(1 - \cos\theta) \Leftrightarrow \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta) \quad \text{avec} \quad \lambda_C = \frac{h}{m_e c}$$

Cela explique donc l'observation des deux pics pour une angle θ donné.

4 Version 30 minutes

- Ne pas faire Runge Lenz mais s'attendre à des questions dessus (la page wikipédia est pas mal !)
- Mettre Compton en conclusion pour attirer les questions
- Attention à la première partie qui est assez longue déjà... et la deuxième un peu courte

Questions

-

Remarques

-