LP06 Cinematique relativiste

8 juin 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L3

Commentaires du jury

2016 : Les notions d'événement et d'invariant sont incontournables dans cette leçon.

2015 : Le jury rappelle qu'il n'est pas forcément nécessaire de mettre en œuvre des vitesses relativistes pour être capable de détecter et de mesurer des effets relativistes.

Jusqu'en 2013, le titre était : *Principes de la cinématique relativiste. Conséquences.*

2014 : Cette leçon exige une grande rigueur dans l'exposé tant sur les notions fondamentales de relativité restreinte que sur les référentiels en jeu. Elle invite les candidats à faire preuve d'une grande pédagogie pour présenter des notions a priori non intuitives et faire ressortir les limites de l'approche classique. Un exposé clair des notions d'invariant relativiste est attendu.

2013 : Cette leçon exige une grande rigueur dans l'exposé tant sur les notions fondamentales de relativité restreinte que sur les référentiels en jeu. Elle invite les candidats à faire preuve d'une grande pédagogie pour présenter des notions a priori non intuitives et faire ressortir les limites de l'approche classique. Un exposé clair des notions d'invariant relativiste et de composition des vitesses et de ses propriétés est incontournable dans cette leçon. La réciprocité des effets de dilatation des durées et de contraction des longueurs doit être soulignée.

Bibliographie

✍ *Relativite resteinte*, **Semay** ⟶ Le cours

Prérequis

➢ Mécanique classique

➢ Électromagnétisme

➢ Interférences optiques

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

1 Fondements de la relativité restreinte

1.1 Incompatibilité de la mécanique classique et de l'électromagnétisme

Commençons par rappeler que pour étudier un mouvement, il faut un **référentiel** : 3 axes spatiaux et un axe temporel. Nous avons postulé l'existence de référentiels privilégiés appelés référentiels inertiels dans lesquels la deuxième loi de Newton s'applique. Lorsque l'on a considéré un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme à la vitesse v_e selon l'axe Ox par rapport au référentiel inertiel de référence (ex : référentiel du labo) $\mathcal{R}$, nous avons utilisé la transformation de Galilée pour passer d'un référentiel à un autre :

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Autrement dit, on additionne simplement les vitesses (en dérivant une fois) :

$$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{v_e}$$

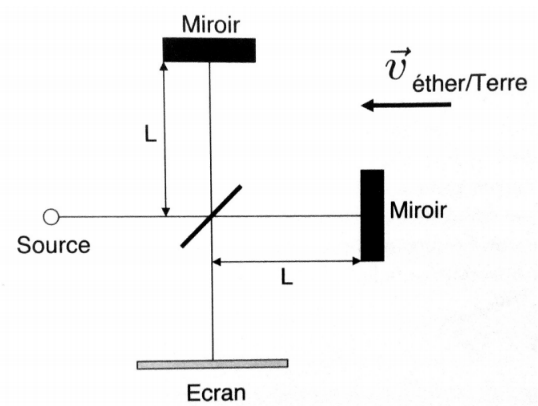
Et en dérivant une seconde fois, on trouve que le PFD est identiques dans les deux référentiels. De ce point de vue, la transformée de Galilée est satisfaisante. Néanmoins, en 186, Maxwell publie les équations de l'électromagnétisme et celles-ci supposent l'existence d'une vitesse unique pour la lumière, notée c. Cela pose problème car si la vitesse de la lumière vaut c dans un référentiel, elle peut valoir $c - v_e$ avec une transformation de Galilée. A ce stade là, plusieurs choix se proposent alors (✍ Semay p14) :

- Admettre que la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell est fausse
- Rendre compatible les postulats de la mécanique classique et de l'électromagnétisme
- Admettre que les postulats de la mécanique sont faux

Face aux résultats remarquables de la théorie de Maxwell dans sa confrontation aux expériences, le premier choix fut vite écarté. Le deuxième choit conduisit à l'élaboration du concept d'éther, référentiel privilégié servant de support à la propagation des ondes électromagnétiques et seul référentiel où les équations de Maxwell seraient strictement valables. Afin d'affirmer ou d'infirmer cette hypothèse, de nombreuses expériences furent proposées. Nous allons en particulier nous pencher sur l'expérience de Michelson et Morlay.

1.2 Expérience de Michelson et Morlay

Afin de tester l'hypothèse de l'éther, Michelson et Morlay propose une expérience interférométrique. Ils supposent l'existence de l'éther, dans lequel la vitesse de la lumière est c. Ils supposent aussi que la composition des vitesses est toujours vrai et construisent alors un interféromètre de la forme suivante :



Supposons de plus que la vitesse de la Terre par rapport à l'éther soit selon un bras de l'interféromètre. Le temps que met la lumière dans ce bras là vaut :

$$t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{c^2}{c^2}\right)$$

Dans l'autre bras, la vitesse vaut $|\vec{c}-\vec{v}| = \sqrt{c^2-v^2}$ donc le temps de parcours dans ce bras là vaut :

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}} \approx \frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

On attend donc une différence de temps de propagation de :

$$\Delta t = \frac{L}{c}\frac{v^2}{c^2}$$

Ce qui correspond à un décalage d'odre de frange de :

$$\Delta p = \frac{\Delta\delta}{\lambda} = \frac{c\Delta t}{\lambda}$$

ODG : L=10m, $c = 3\ 10^8 m.s^{-1}$ et on prend pour v la vitesse de rotation de la Terre autour du soleil : $v = 30000m/s$. On trouve $\Delta p = 0.2$. A l'époque, il était possible de détecter des décalage de 0.02 franges. Néanmoins, pas de décalage notable fut observé par Michelson et Morlay, et ce malgré leurs efforts pour améliorer le dispositif autant que possible.

Remarques :

- Bien évidement, il ne savait pas selon quel bras était réellement la vitesse v à prendre en compte. Ils tournaient donc le Michelson en espérant observer quelque chose
- Cette expérience ne réfute pas directement l'existence de l'éther... en effet, elle peut juste montrer que l'éther à un caractère "visqueux" qui fait qu'il est entrainé par la Terre et donc il n'y a plus de vitesse relative... Bref, cette expérience à elle seule ne permet pas de conclure.

Une des interprétation possible reste la remise en cause de l'existence de l'éther. Ce n'est pas particulièrement cette expérience mais plutôt une accumulation d'expérience remettant en doute l'existence de l'éther qui va pousser la communauté scientifique à plus s'attarder sur le dernier point cité plus tôt : les postulats de la mécanique connus à ce jour sont faux.

1.3 Les postulats d'Einstein

Afin de remédier à cela, Einstein propose deux postulats en 1905, qui seront alors à la base de la **relativité restreinte** :

- Tous les référentiels d'inertie sont équivalents. Autrement dit, la formulation mathématique des lois de la physique doit être la même dans tous ces référentiels
- La vitesse de la lumière dans le vide est indépendante de l'état de mouvement de la source

Remarques :

- Pour expliciter un peu cela, le premier principe suppose donc que les équations de Maxwell conserve la même forme, mais où tout est remplacé par des '! E devient E', t devient t', ect...
- Le premier principe fait disparaitre la notion de référentiel privilégié. **Le seul mouvement que l'on puisse observer est le mouvement relatif d'un objet par rapport à un autre.**
- C'est ainsi qu'on été posé historiquement les deux postulats. Néanmoins, le deuxième postulat est en fait une conséquence du premier, à condition de faire des hypothèses raisonnables sur la structure de l'espace-temps (cf ✍ Semay P.102)

1.4 Invariant relativiste et transformation de Lorentz

Faisons rapidement un point de notation et de vocabulaire : on note $\mathcal{R}$ dont les coordonnées sont (x,y,z,t) un référentiel d'inertie et $\mathcal{R}'$ dont les coordonnées sont (x',y',z',t') un autre référentiel d'inertie en translation par rapport au premier. On remarque que maintenant, on ne prend plus un référence de temps unique pour tous les référentiels mais un par référentiel. Un **évènement** correspond à un point infiniment précis d'un des référentiel, c'est à dire la donnée de (x,y,z,t) pour $\mathcal{R}$ et (x',y',z',t') pour $\mathcal{R}'$.

✍ Semay p.30. Considérons qu'à l'instant t=0=t', les origine O et O' coïncident et qu'un signal lumineux soit envoyé depuis ce point. La vitesse de la lumière ne dépendant pas du référentiel, on a :

$$x^2+y^2+z^2 = c^2t^2 \quad et \quad x'^2+y'^2+z'^2 = c^2t'^2$$

Autrement dit, on trouve que la quantité

$$\Delta s = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

est un invariant relativiste. (On a ici pris uniquement le cas d'un rayon de lumière, mais on peut montrer que c'est toujours vrai).

Pour rappel, en mécanique classique, on utilisait les transformées de Galilée pour passer d'un référentiel à un autre. On aimerait ici trouver un équivalent, qui s'appelle en fait les transformée de Lorentz. On cherche donc une transformation de la forme :

$$\begin{cases} t = t(t', x', y', z') \\ x = x(t', x', y', z') \\ y = y(t', x', y', z') \\ z = z(t', x', y', z') \end{cases}$$

On peut montrer que cette transformation est forcément linéaire. En utilisant l'invariant trouvé plus tôt, on peut finalement montrer que dans le cas d'une vitesse relative $v_x = v$ et $v_y = 0 = v_z$, on trouve la transformation suivante (✍ Semay p30-34) :

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}$$

Avec $\beta = \frac{v}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Remarques :

- On peut montrer que cette transformation laisse bien l'invariant relativiste...invariant (mais ne le faire que s'il y a le temps) (PS : on s'en fout de y et z) :

$$s^2 = ct^2 - x^2 = \gamma^2(ct'^2 + \beta^2x'^2 + 2\beta ct'x') - \gamma^2(x'^2 + \beta^2c^2t'^2 + 2x'\beta ct') = \gamma^2(c^2t'^2(1+\beta) + x'^2(1+\beta)) = c^2t'^2 + x'^2$$

- On a donné ici un exemple particulier dans la cas d'un translation selon Ox. La cas général est plus complexe... et je le connais pas en fait mdr.
- Dans la limite $v \ll c$, on retrouve Galilée.

Contrairement aux transformations de Galilée, les transformations de Lorentz mêlent temps et espace. On va voir que ça a des répercutions très impressionnantes et contre intuitives.

2 Conséquences de la relativité restreinte

Ca vaut sûrement le coup d'introduire tout de suite le diagramme de Minkowski puis de faire l'application à chaque fois

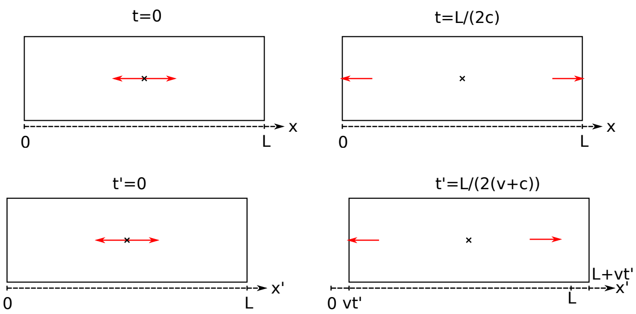
2.1 Perte de simultanéité

Imaginons que l'on ait 2 évènements simultanés dans le référentiel $\mathcal{R}$. Cela signifie concrètement que la coordonnée temporelle des deux évènements est identique : $t_1 = t_2 \Leftrightarrow \Delta t = 0$. On a alors :

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = -\gamma\frac{v\Delta x}{c} \neq 0$$

Deux évènements simultanés dans $\mathcal{R}$ ne sont donc pas simultanés dans $\mathcal{R}'$!

Exemple : Imaginons qu'un passager de train se mette au milieu du wagon. Il envoie une signal lumineux de chaque côté. Pour lui les signaux lumineux arrivent en même temps de chaque côté. Pour une personne sur le quai, il voit la lumière d'abord arrivée au fond du wagon car ce dernier se rapport du signal lumineux.



2.2 Dilatation du temps

Supposons cette fois que dans $\mathcal{R}$, deux évènements arrivent au même endroit, mais pas au même moment. On a alors :

$$\Delta t' = \gamma\delta t$$

On a donc $\Delta t' > \Delta t$. Donc une horloge dans $\mathcal{R}$ semble ralentie du point de vue de l'horloge dans $\mathcal{R}'$. Néanmoins, si on inverse les rôles, on trouve que dans $\mathcal{R}$, l'horloge de $\mathcal{R}'$ semble ralentie elle aussi ! La dilatation du temps est **réciproque**. Mais est-ce un paradoxe ? (✍ Semay p.61)

Prenons un exemple connu du grand public : le paradoxe des jumeaux. Un jumeau part en voyage dans l'espace et l'autre reste sur Terre. Lequel est le plus jeune lors du retour de celui parti dans l'espace ? Et bien on peut montrer avec la relativité restreinte qu'en faisant faire l'aller-retour à une horloge dans une fusée... elle finit synchronisée avec celles sur Terre quand elle atterrit ! On ne peut pas réellement comparé deux horloges tant qu'elles ne sont pas mises côte à côte ! En réalité, on voit que le jumeau qui a voyagé a rajeuni, mais ce n'est pas dû à la relativité restreinte : c'est en fait le résultat des moments où le référentiel ne peut pas être considéré comme **inertiel !**

La vérification expérimentale de la dilatation des durées la plus frappante date de 1963 (Frisch et Smith). Elle consista à déterminer le temps de vie des muons émis par la haute atmosphère. La durée de vie moyenne des muons étant de $\tau_0 = 2,2\ 10^{-6}$ s (soit une distance moyenne de parcours majorée par $c\tau_0 = 660$ m) on s'attendrait en physique non relativiste à ce que le flux de muons détecté au niveau de la mer soit au moins 18 fois plus faible qu'à une altitude de 1910 m.
Ceci n'est pas vérifié parce que les muons sont ultra-relativistes et donc dans le référentiel du laboratoire, le muon a un temps de vie moyen bien plus long en vertu de la dilatation du temps. Après avoir sélectionné les muons dont la vitesse est comprise entre $0.9950c$ et $0.9954c$, Frisch et Smith ont mesuré les flux de muons aux deux altitudes mentionnées ci-dessus, et en ont déduit une durée de vie dans le référentiel terrestre de $\tau = (8.8 \pm 0.8)\tau_0$, en accord avec le facteur de Lorentz théorique = 8.

> *Bon on s'est uniquement intéressé au temps. Regardons ce qu'il en est des longueurs*

2.3 Dilatation des longueurs

Prenons pas exemple le cas d'une règle, immobile dans $\mathcal{R}$, de longueur $L = \Delta x$. Dans $\mathcal{R}'$, on a :

$$L' = \Delta x' = \gamma(L - v\Delta t)$$

et

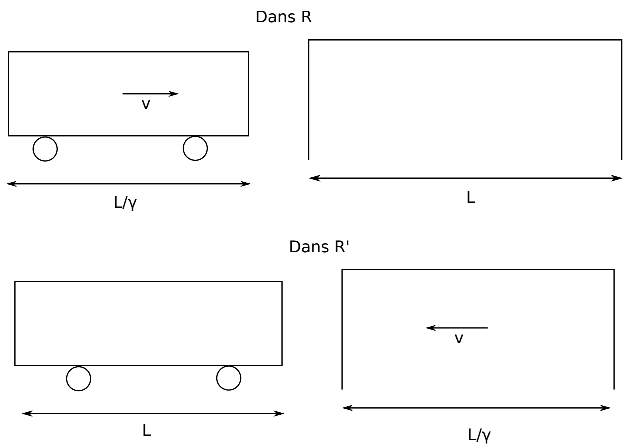
$$\Delta t' = 0 = \gamma\left(\Delta t - \frac{vL}{c^2}\right)$$

Donc finalement :

$$L' = \gamma L\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{L}{\gamma}$$

On remarque alors que **la longueur mesurée dans un référentiel en mouvement sera toujours inférieure à la longueur mesurée dans le référentiel où l'objet est immobile.** C'est ce que l'on nomme la contraction des longueurs.

Un exemple impressionnant : un train ne peut donc pas entièrement rentré dans un tunnel "de même taille" que lui ! Enfin si ? En fait ça dépend du référentiel !



2.4 Composition des vitesses (pas la partie la plus intéressante)

Avec les transformations de Galilée, c'était pas trop dur. Voyons ce que ça donne avec les transformations de Lorentz ! En différenciant, on a :

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$
$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

Donc :

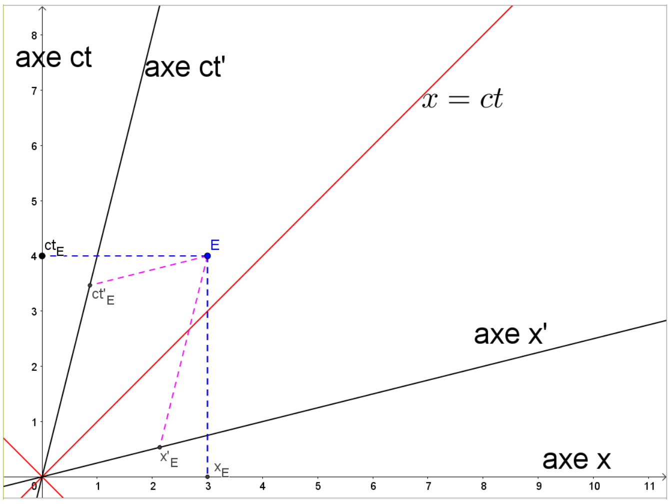
$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}v_x}$$
$$v'_{y,z} = \frac{v_{y,z}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}v_x}$$

Remarque :

- dans la limite classique, on retrouve le cas Galilée !
- Cette fois, même les vitesse orthogonales sont affectées

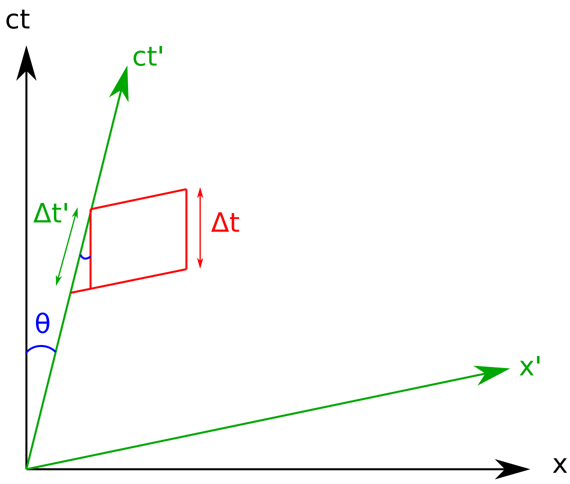
On va voir un petit truc qui permet de bien se représenter tout ça

2.5 Diagrammes de Minkowski



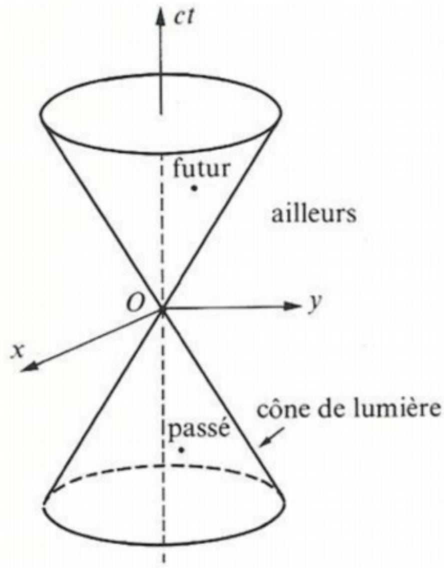
Pour aider à répondre rapidement aux problèmes de relativité restreinte, on peut utiliser un diagramme de Minkowski.

- Axe ct' trouvé avec $x' = 0 \Leftrightarrow x = \beta ct$
- Axe x' trouvé avec $ct' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\beta}ct$
- On a un angle θ tel que $\tan\theta = \frac{x}{ct}$ entre les deux repères
- On considère un évènement E : on peut trouvé ses coordonées dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$
- On peut y observer les contractions/dilatations dont on a parlé. Les calculs pour la dilatation du temps sont en annexes.



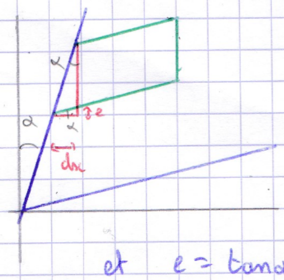
2.6 Les intervalles

- $\Delta s^2 < 0$: ailleurs : on ne peut pas rejoindre cette zone
- $\Delta s^2 > 0$ et $\Delta t < 0$: passé
- $\Delta s^2 > 0$ et $\Delta t > 0$: futur



3 Annexes

3.1 Calculs avec diagramme de Minkowski



$$\begin{cases} c^2 t'^2 = dx^2 + (ct + e)^2 \\ \tan\alpha\,(ct + dx\tan\alpha) = dx \quad (2) \end{cases}$$

(2) vient de la tangente du grand ~~rectangle~~ triangle rectangle.

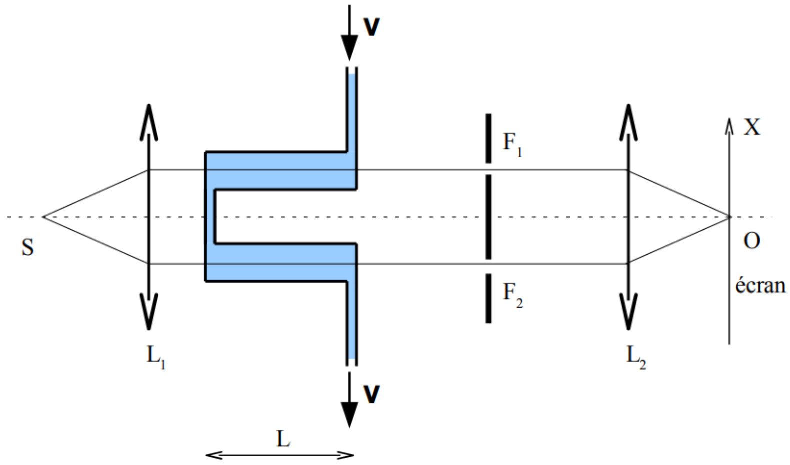
Donc $dx = \dfrac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\,ct$ et $e = \tan\alpha\,dx$

D'où $c^2t'^2 = \dfrac{\tan^2\alpha}{(1-\tan^2\alpha)^2}\,c^2t^2 + c^2t^2\left(1+\dfrac{\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right)^2$

$$= c^2t^2\,\frac{1+\tan^2\alpha}{(1-\tan^2\alpha)^2}$$

$$\Leftrightarrow c^2t'^2 = \frac{c^2t^2}{1-\tan^2\alpha} \iff ct' = \gamma\,ct$$

3.2 Expérience de Fizeau



Avec la composition des vitesses on trouve $\delta t = -2\frac{L}{\frac{c}{n}+u} + 2\frac{L}{\frac{c}{n}-u}$. On observe alors un décalage de frange avec u=0 de l'ordre de $\Delta p \approx \frac{4Ln^2u}{\lambda c}$. Désaccord théorie expérience.

Dans le cas relativiste :

$$v' = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{v}{cn}}$$

Donc

$$v' =\approx \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v$$

... on a pas le même résultat.

4 Questions

- *Aujourdh'ui, vitesse de la lumière fixée.*
- Est-ce que tu peux réexpliquer en quelques mots l'expérience de Michelson-Morlay ? *Ils ont supposé une composition des vitesses.* Est-ce que c'est important de connaitre la direction du Michelson ? Pourquoi l'avoir tourné ? *Dans les faits, ils connaissaient pas la direction de la vitesse du Michelson par rapport à l'éther. Simplification des calculs.* **Attention la conclusion de l'expérience c'est sur l'existence de l'éther ! Et encore...**
- C'est la seule expérience Michelson-Morlay pour montrer la relat ? *Fizeau*
- Tu entends quoi par "les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel" ?
- Ce principe il sert à quoi dans la suite ?
- Une preuve expérimentale de la constance de la vitesse de la lumière ? *Experience d'Arago, pions dans des accélarateurs de particules.*
- Comment on retrouve les transformations de Lorentz ?
- C'est quoi un invariant par translation temporelle ? Un exemple ? *Les intervalles de temps* Donc les différences sont invariantes. Donc les transformations de Lorentz sont linéaires ! Et ensuite ? *On utilise $x - ct = x' - ct'$.*
- Est-ce que l'invariant est une conséquence des transfo de Lorentz ou l'inverse ? Est-ce que c'est un invariant de toutes les transfo de Lorentz ? *C'est invariant implique Lorentz*
- Dans l'espace de Minkowski, l'invariant c'est quoi ? *Le produit scalaire avec la métrique de Minkowski*
- C'est quoi la simultanéité ?
- Perte de simultanéité = perte de causalité ? *NON !*

Démonstration de la non-invariance des équations de Maxwell par transformation de Galilée.

Autres transformations que la transformation de Lorentz qui satisfont à la RR ?

Comment est déterminée la vitesse de la lumière ? Bien détaillé dans "Relativité restreinte" de Simon.

Cube en mouvement à une vitesse proche de c, que se passe-t-il ?

Qu'est-ce que l'expérience de Michelson et Morley ? Que voulaient-ils observer ? Quelle a été leur conclusion ? — Est-ce qu'il y a seulement les transformations de Lorentz qui conservent l'intervalle d'espace-temps ? — Comment retrouve-t-on les transformation de Galilée comme limite non relativiste des transformations de Lorentz ? (il ne suffit pas d'avoir

petit) — Qu'est-ce que le paradoxe des jumeaux ? Comment se résout-il ? — Est-il théoriquement possible de traverser la galaxie en une vie humaine ? Et dans la pratique ? — En quoi est-ce que l'effet Doppler relativiste est un effet du second ordre ? — La norme de la vitesse de la lumière est identique dans tous les référentiels galiléens, qu'en est-il de sa direction de propagation ? — Quelle est la conséquence de cet effet sur l'observation d'une étoile (aberrations de la lumière) ? — Dans l'expérience du temps de désintégration des muons, d'où viennent les muons ? Comment sont-ils détectés ?

Quelle est la particularité des ondes lumineuses par rapport aux autres ondes ? Vis-à-vis de la constance de c ? (je n'ai pas trop compris le sens de cette question). Existe-t-il une grandeur invariante par transformation de Lorentz ? (carré de l'intervalle relativiste). Quel est l'intérêt de cet invariant et sa signification physique concrète ? Connaissez-vous le paradoxe des jumeaux ? Pouvez-vous expliquer en quelques mots ce paradoxe et le lever ? Pouvez-vous donner les grandes lignes de la démonstration permettant d'aboutir à la transformation de Lorentz ? Existe-t-il une distinction entre le caractère homogène et le caractère absolu du temps ? Plus précisément, le caractère absolu entraîne-t-il le caractère homogène ? (rires du jury qui a précisé que ça pourrait être un bon sujet de philosophie). Vous avez donné une valeur numérique de c : comment cette valeur est-elle déterminée expérimentalement aujourd'hui ? Les systèmes atomiques sont-ils soumis à la notion de temps propre ? Dans quels systèmes d'utilisation courante utilise-t-on des horloges atomiques ? (GPS). Concernant les détecteurs de muons, y a-t-il une condition sur le déclenchement du comptage ? (pas compris). Vous avez donné des dates tout au long de la leçon, pouvez vous préciser quand a été établie la transformation de Lorentz, par rapport aux travaux d'Einstein ? Pourquoi on ne l'appelle pas la transformation d'Einstein ? (apparemment, l'expression mathématique de la transformation de Lorentz a vu le jour avant Einstein, mais n'a été interprétée physiquement qu'ensuite).

5 Remarques

- L'expérience de Michelson-Morlay montre pas grand chose en fait... Il faut + décrire l'expérience en tout cas ! La présenter comme une expérience qui pose problème. Ou présenter Fizeau.
- Invariance = c'est la même force ! ie les eq de maxwell ont la même forme. Mais on a pas E'=E qui sera la covariance.
- Les postulats c'est l'essentiel à noter.
- On impose la linéarité, puis la vitesse de la lumière qui impose l'invariance de l'espace temps. Ensuite avec $ds^2 = 0$, on trouve les transfo Lorentz.
- Regarder les premières pages du Langlois.
- Mettre la perte de simultanéité juste après les postulats c'est mieux
- C'est important de montrer comment ça marche les calculs avec Lorentz
- Important de donner les dates, quelques ODG
- Il peut y avoir des questions sur Doppler relativiste
- Faire des diagrammes de Minkowski si y'a le temps et la maitrise c'est un +