LP 06 - Cinématique relativiste

Cléments (de la Salle + Colléaux)

25 avril 2020

Niveau : L3

Bibliographie

- ✍ *Méca*, **BFR** → à lire, askip trop bien
- ✍ *Introduction à la relativité restreinte*, **Hladik** →
- ✍ **Langlois** →
- ✍ *Dictionnaire de la physique*, **Taillet**, →
- ✍ *Relativité restreinte, base et applications*, **Semay**, →
- ✍ *Relativité et quantification*, **Perez** →
- ✍ *Relativité restreinte, de l'astrophysique aux particules*, **Eric Gourgoulhon** →

Prérequis

- ➢ Lois de Newton

Expériences

- Expérience de Michelson et Morley
- Visualisation de l'effet Doppler relativiste sur l'étoile double Albireo
- Désintégration des muons dans l'atmosphère

Table des matières

1 Principes de la relativité

Toute cette partie y moyen de la faire passer en intro sinon c'est chaud...

1.1 Incompatibilité entre mécanique classique et électromagnétisme

✍ *Langlois, chap. 1.1*
✍ *BFR, p.215*

En mécanique classique, lorsqu'un référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement rectiligne uniforme à $\mathbf{v}$ par rapport à un autre référentiel $\mathcal{R}$, on peut lier la position d'un objet d'un référentiel à un autre par le boost de Galilée (✍ *Semay, p.8* si on veut faire proprement le boost de Galilée) :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OM'} + \mathbf{v}t$$

Et donc leurs vitesses

$$\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{u'} + \mathbf{v}$$

C'est la vision intuitive qu'on a de la composition des vitesses : lorsque j'avance à $\mathbf{u'}$ dans un train à $\mathbf{v}$, un observateur me voit me déplacer à une vitesse à $\mathbf{u'}+\mathbf{v}$ À la fin du XIX^e siècle, les équations de Maxwell et l'avènement de l'életromagnétisme indiquent qu'une onde électromagnétique se déplace à une vitesse c, indépendamment du référentiel choisi. Ceci rentre en contradiction avec la vision précédente.

La mécanique est aussi mise à mal par les résultats de l'expérience de Fizeau de 1851.

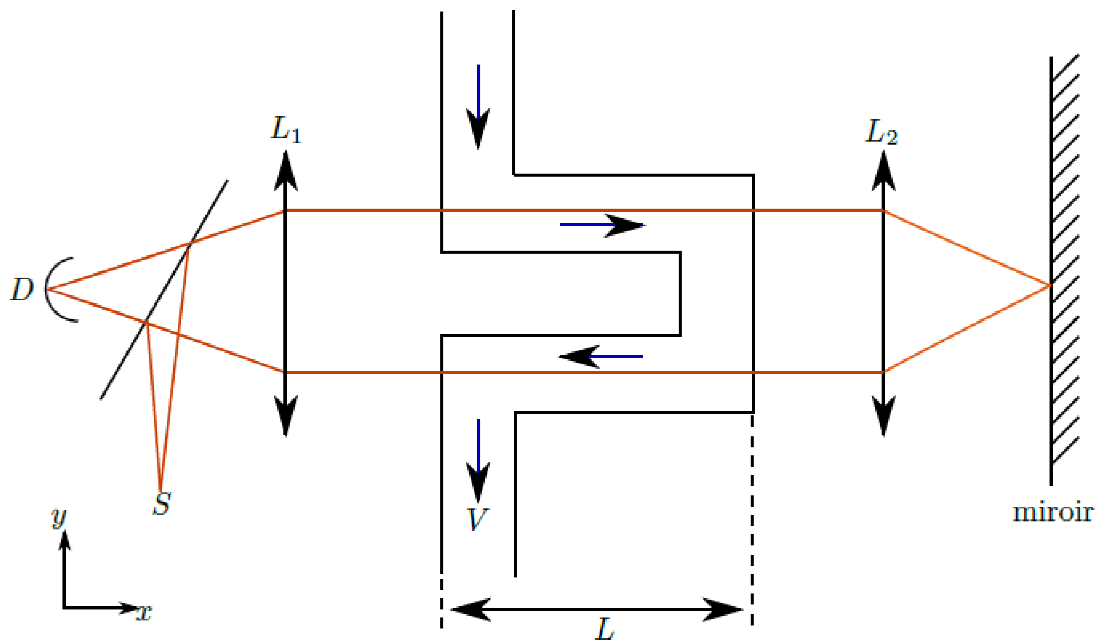

Figure 1.1 – **Expérience de Fizeau**

L'expérience de Fizeau consiste à faire interférer deux faisceaux lumineux passant par deux bras d'un circuit d'eau. Dans l'un des bras, l'eau circule à la vitesse $\mathrm{V} = V\mathrm{e_x}$, tandis que dans l'autre bras, l'eau circule à la vitesse $\mathrm{V} = -V\mathrm{e_x}$. La lumière se déplace à la célérité c/n dans le référentiel ($\mathcal{R}_{\mathrm{eau}}$) et donc à la célérité $c^{\pm} = c/n \pm V$ dans le référentiel du laboratoire ($\mathcal{R}_{\mathrm{labo}}$) si l'on suppose juste les transformations de Galilée. On s'attendrait alors à un retard de temps de parcours entre les deux faisceaux :

$$\Delta t = 2L\left(\frac{1}{c^-} - \frac{1}{c^+}\right) \simeq 4lV\frac{n^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{V}{c}\right)^2\right)$$

Ce résultat n'est pas en accord avec ce que trouva Fizeau

$$\Delta t \simeq 4LV \frac{1}{c^2\left(n^2-\right)} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{V}{c}\right)^2\right)$$

On peut aussi parler de l'expérience célébrissime de Michelson et Morley ✍ *Semay, p.10* . Les possibilités qui s'offrent aux physiciens de l'époque sont alors les suivantes :

1. Il faut revoir la méca et les lois de Newton
2. Il faut revoir l'électromagnétisme et les équations de Maxwell.

À l'époque, la communauté scientifique penchait pour la première solution, surtout que l'hypothèse d'un référentiel privilégié (l'éther) était populaire (Maxwell s'en est même servi pour ajouter le terme de "courant de déplacement"). Il a donc fallu la tester, et c'est ce qu'on fait Michelson et Morley dans leur très célèbre expérience d'interférométrie (elle valut à Michelson le prix Nobel en 1907 d'ailleurs).

> *La sérieuse remise en cause de l'existence de l'éther, grâce à cette expérience, a permis à Einstein de poser les bases de la relativité en modifiant donc les lois de la mécanique telles qu'on les connaissait.*

1.2 Postulats de la relativité

✍ *Semay, p.14*
✍ *BFR, chap. 13*
✍

1. Les lois de la physique (comme l'équation de d'Alembert pour les ondes lumineuses) sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. C'est une généralisation de la première loi de Newton, cela ne contredit donc pas notre intuition.
2. La vitesse de la lumière est identique dans tous ces référentiels (là par contre c'est totalement contre-intuitif !)

Dans le cadre de l'étude cinématique, nous allons plus particulièrement nous intéresser à ce deuxième point. L'étude des trajectoires se fait plutôt dans le cadre de la dynamique relativiste (autre leçon).

1.3 Définitions

— Référentiel : Il s'agit, comme en mécanique classique, d'une origine à laquelle on associe trois axes. La différence c'est qu'on lui ajoute une horloge qui mesure le temps propre dans ce référentiel :

$$\mathcal{R}_{mca}(O,x,y,z) \to \mathcal{R}_{rel}(O,x,y,z,t)$$

Quand le petit Einstein il a commencé son papier par "on considère dans référentiels auxquels on associe des temps propres t et t'", t'inquiète que les gens étaient pas sereins !

— Espace-temps : Il s'agit de l'espace dans lequel on décrit les évènements.

— Évènement : Il s'agit d'un point de l'espace-temps, repéré par quatres coordonnées (x,y,z,t). C'est comme dire "Rendez-vous demain 8h en BU" (mdr ça n'existe pas)

> *Puisqu'on part sur quelque chose de contre-intuitif, on va essayer au travers d'un exemple simple, de voir ce que ces principes impliquent et pourquoi ils sont cohérents.*

2 Conséquences cinématiques

2.1 Notion de simultanéité

✍ *BFR, p.236*

En classique, c'est facile, deux évènements qui ont lieu au même temps t sont dits simultanés... Mais ici puisque la notion même de temps est relative au référentiel considéré, comment adapté la notion d'instantanéité ?

On considère un train de longueur L, se déplaçant à $\mathbf{v}$ constante. Un observateur situé au centre du train lance deux photons en même temps : le premier photon vers l'avant et le deuxième photon vers l'arrière. On note A l'évènement d'arrivée du premier photon au bout du train et B celui du deuxième photon. Ces évènements peuvent être décrits dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du train ou bien dans $\mathcal{R}$ le référentiel terrestre supposé inertiel (donc celui du train aussi l'est).

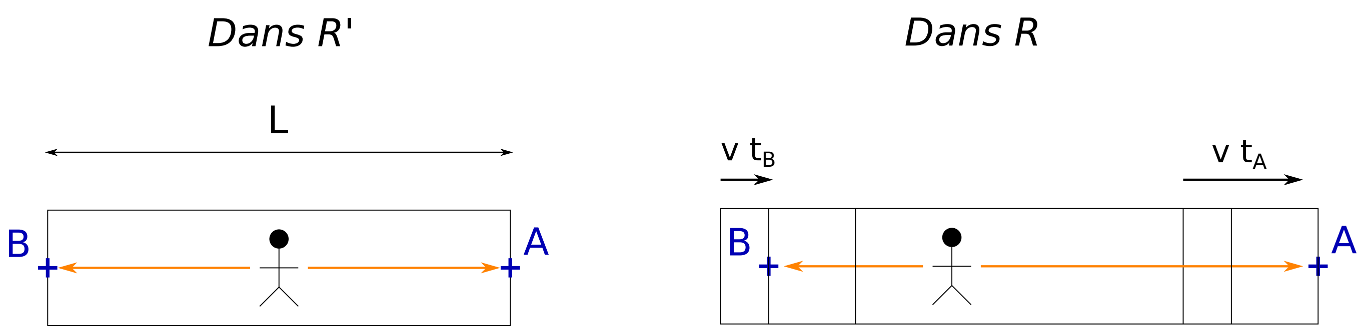

FIGURE 2.1 – Simutanéité en relativité restreinte

— Dans $\mathcal{R}'$:

$$t'_A = t'_B = \frac{L/2}{c}$$

Les évènements sont simultanés (l'observateur voit les deux photons arriver à destination en même temps.)

— Dans $\mathcal{R}$:

$$t_A = \frac{L/2 + vt_A}{c} \implies t_A = \frac{L/2}{c-v}$$
$$t_B = \frac{L/2 - vt_B}{c} \implies t_B = \frac{L/2}{c+v} \neq t_A$$

Ainsi un observateur situé à l'extérieur du train verra un photon arriver à destination alors que pour l'observateurdu train, les deux évènements sont simultanés. Ainsi, la notion même de simultanéité est relative au référentiel d'observation.

On pose alors les variables

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{1-\beta^2}}$$

Et on peut ainsi exprimer :

$$t_A - t_B = \frac{\beta\gamma^2}{c} L$$

2.2 Dilatation du temps

✍ *BFR, p.236*

Cette fois-ci, l'observateur lance un photon du sol vers le toit du train et celui-ci rebondit sur un miroir pour revenir à son emplacement initial dans le train.

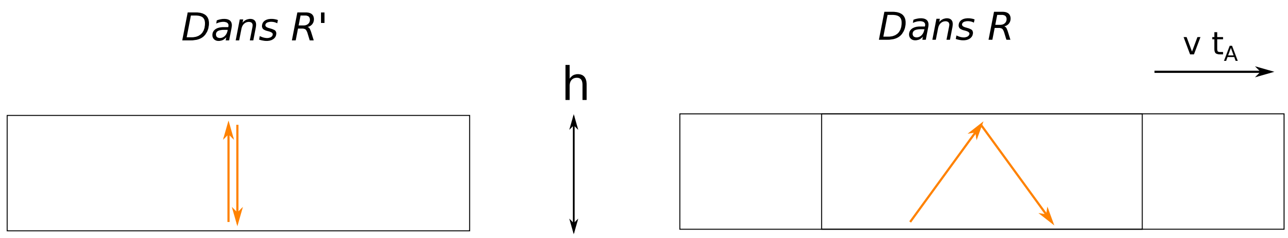

FIGURE 2.2 – Dilatation du temps en relativité restreinte

— Dans $\mathcal{R}'$:

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

— Dans $\mathcal{R}$:

$$(c\Delta t)^2 = (2h)^2 + (v\Delta t)^2 \implies (\Delta t)^2 = \frac{(2h)^2}{c^2 - v^2} = \frac{(\Delta t')^2}{1 - v^2/c^2}$$

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'}$$

En voyant cette relation, on pourrait penser naïvement que le temps s'écoule plus lentement en dehors du train. Mais dans le référentiel du train justement, c'est le sol qui bouge à **v**... Donc le temps doit s'écouler plus lentement dans le train ! En fait il n'y a pas de paradoxe : tant que les deux référentiels sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, le temps semblera toujours passer plus vite à l'extérieur. Pour pouvoir comparer les évolutions temporelles, il faudrait que les deux référentiels redeviennent immobiles l'un par rapport à l'autre, ce qui suggère une brisure de symétrie (l'un des référentiel au moins ne pourra plus être considéré comme inertiel).

Dans le paradoxe des jumeaux, par exemple, tant que l'un s'éloigne avec sa fusée, il se verra plus jeune, mais l'autre resté sur terre se verre également plus jeune... Quand le jumeau parti revient sur terre, il est pourtant bel et bien plus jeune que son frère. De même il n'y a pas de paradoxe puisque la symétrie du problème a été brisée lors du demi-tour de la fusée.

Ce phénomène est vérifié expérimentalement par exemple dans la désintégration des muons, ou de manière générale celle des particules créées au LHC (✍ *Gourgoulhon, chap. 4, 3.1*)

de muons aux deux altitudes mentionnées ci-dessus, et en ont déduit une durée de vie dans le référentiel terrestre de $\tau = (8.8 \pm 0.8)\tau_0$, en accord avec le facteur de Lorentz théorique = 8.

2.3 Contraction des distances

Si on manque de temps, on pourra balancer les résultats sans refaire de mise en situation.

Cette fois-ci on suppose que l'observateur du train se situe à l'arrière, lance un photon vers l'avant vers un miroir. Le photon est réceptionné à l'emplacement initial. On note A, B, C les évènements d'émission du photon, rebond et réception.

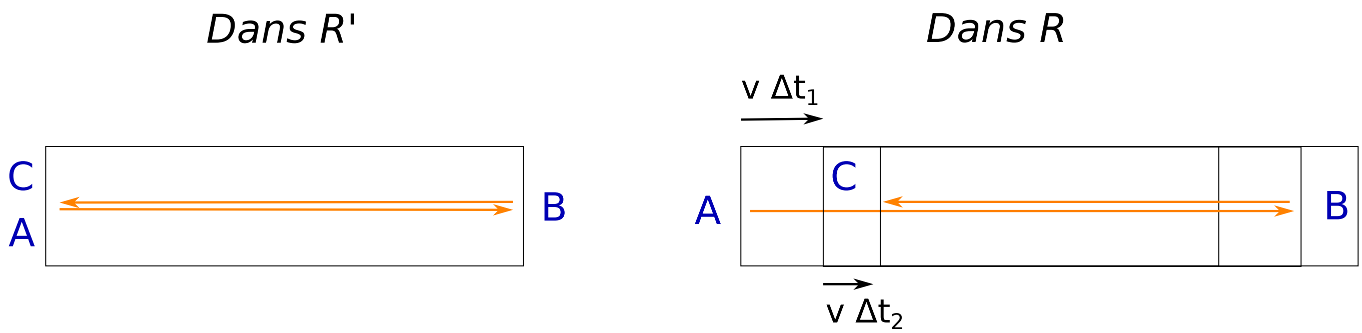

Figure 2.3 – Contraction des longueurs en relativité restreinte

— Dans $\mathcal{R}'$:

$$2L' = 2c\Delta t' = c(\Delta t'_1 + \Delta t'_2)$$

— Dans $\mathcal{R}$:

$$(L + v\Delta t_1) = c\Delta t_1$$
$$(L - v\Delta t_2) = c\Delta t_2$$
$$\Longrightarrow \ \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \gamma^2 \frac{2L}{c}$$

Or $\Delta t = \gamma \Delta t'$ donc finalement, on a

$$\boxed{L' = \gamma L \qquad L = \frac{1}{\gamma} L' < L'}$$

Ainsi, un objet en mouvement paraît contracté vu de l'extérieur. Ceci semble plus naturel, étant donné la dilatation du temps. De même que précédemment on pourrait croire à un paradoxe, vu que chaque observateur voit l'autre référentiel contracté... Ce paradoxe se résoud exactement comme le précédent.

NB : On parle de **dilatation** du temps et de **contraction** des longueurs car on se place du point de vue de l'observateur dans le train. Cela peut aider à retenir dans quel sens on doit écrire les équations.

2.4 Composition des vitesses

✍ *Langlois*

On fait les calculs qui sont dans le ✍ *Langlois* et on en profite pour revenir sur l'expérience de Fizeau.

Maintenant qu'on s'est familiarisé avec les conséquences contre-intuitives de la relativité, on va faire un pas de plus dans le formalisme utilisé afin de décrire plus facilement les phénomènes.

3 Autour du boost de Lorentz

3.1 Boost de Lorentz

✍ *BFR, chap. 13*

On considère un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\mathbf{v}$ suivant l'axe x. En mécanique classique, on peut exprimer la transformation des coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned} x &= vt + x' \\ t &= t' \end{aligned}$$

Suivant les considérations précédentes, on peut lier les coordonnées dans chacun des référentiels :

$$\begin{aligned} x &= vt + \tfrac{1}{\gamma}x' \\ x' &= -vt' + \tfrac{1}{\gamma}x \end{aligned}$$

En effet, $\mathcal{R}$ voit $\mathcal{R}'$ partir à $\mathbf{v}$, tandis que $\mathcal{R}'$ voit $\mathcal{R}$ partir à $-\mathbf{v}$. Chaque référentiel voit l'autre contracté, comme expliqué précédemment d'où le facteur $1/\gamma$.

On peut également réécrire (en utilisant ct plutôt que t)

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \beta\gamma x \\ x' &= -\beta\gamma ct + \gamma x \end{aligned}$$

On peut écrire ça sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

C'est ce qu'on appelle un **boost de Lorentz**, on pose :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

On remarque alors que

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Le boost de Lorentz est l'outil mathématique pour traduire la relation entre les vitesses dans deux référentiels. Nous n'avons fait aucune hypothèse sur ces référentiels, cette relation est **valable pour tout référentiel** et le boost de Lorentz est universel !

Ce qui est logique puisque la transformation inverse consiste à prendre $-\mathbf{v}$ plutôt que $\mathbf{v}$.

De plus, on retrouve bien les formules de transformation de Galilée lorsque l'on choisit $\beta \ll 1$.

> *Dès lors qu'on a ça, on est en mesure d'écrire une nouvelle loi de composition des vitesses.*

3.2 Composition des vitesses

Soit un objet se déplacant à **u'** $= \frac{x'}{t'}$ dans $\mathcal{R}'$, cherchons l'expression de sa vitesse dans $\mathcal{R}$:

$$u = \frac{x}{t} = c\frac{x}{ct} = c\frac{\beta ct' + x'}{ct' + \beta x'}$$

$$\boxed{u = \frac{u + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}}$$

Remarques :

- On retouve bien la composition classique des vitesse vue en intro lorsque $\beta \ll 1$.
- Si $u' = c$ (un photon), on retouve alors $u = c$, donc la vitesse de la lumière est bien indépendante du référentiel (encore heureux, vu qu'on a tout construit autour de ça).

3.3 Invariance

On peut montrer également que lors d'une transformation de Lorentz, une grandeur est conservée. Il s'agit du **carré relativiste** défini par :

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Alors cet élément de l'espace-temps est conservé au cours d'une transformation de Lorentz :

$$(\Delta s)^2 = (\gamma c\Delta t' + \beta\gamma\Delta x')^2 - (\beta\gamma\Delta t' + \gamma\Delta x')^2 = (\Delta s')^2$$

Remarques :

— Comme le boost de Lorentz représente la transformation des vitesses pour deux référentiels random, le carré relativiste est carrément invariant par changement de référentiel !

— Cette invariance est liée à l'invariance de l'équation de d'Alembert électromagnétique (on le devine dans la forme), on aurait pu partir de là et déduire les postulats de départ !

— Pour un photon, on a $\Delta s = 0$, ce qui se traduit par des doites à $45°$ sur le diagramme de Minkowski. Parler un peu de ce digramme et du cône de lumière...