LP08 Notion de viscosité. Ecoulements visqueux

24 juin 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L2

Commentaires du jury

- 2017 : Il peut être judicieux de présenter le fonctionnement d'un viscosimètre dans cette leçon.
- 2016 : Le jury invite les candidats à réfléchir d'avantage à l'origine des actions de contact mises en jeu entre un fluide et un solide.
- 2015 : Afficher un tableau d'ordres de grandeur de viscosité ne suffit pas en soi pour illustrer la leçon. Tout exemple donné d'écoulement visqueux doit être maîtrisé par le/la candidat(e).
  Jusqu'en 2013, le titre était : Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux. Nombre de Reynolds. Exemples simples.
- 2011, 2012, 2013, 2014 : L'exemple de l'écoulement de Poiseuille cylindrique n'est pas celui dont les conclusions sont les plus riches. Les candidats doivent avoir réfléchi aux différents mécanismes de dissipation qui peuvent avoir lieu dans un fluide. L'essentiel de l'exposé doit porter sur les fluides newtoniens : le cas des fluides non newtoniens, s'il peut être brièvement mentionné ou présenté, ne doit pas prendre trop de temps et faire perdre de vue le message principal.
- 2009, 2010 : Il importe de mettre clairement en évidence le caractère diffusif des forces de viscosité. Dans l'illustration expérimentale de l'écoulement de Couette plan, il faut s'assurer que l'on a bien atteint un régime permanent.
- 2008 : La signification physique du nombre de Reynolds est ici centrale.
- 2006 : Les notions d'écoulement tourbillonnaire et d'écoulement turbulent sont souvent mal assimilées. Les conditions d'applications de l'équation de Navier-Stokes sont ignorées.
- 2005 : La relation entre la valeur du nombre de Reynolds et la nature de l'écoulement sont mal dégagées. Il y a souvent confusion entre tourbillon et turbulence. Les conditions d'application de l'équation de Navier-Stokes sont ignorées.
- 2001 : Il est souhaitable de présenter un modèle microscopique simple de la viscosité. Il est utile de noter que le nombre de Reynolds s'interprète comme le rapport de deux temps caractéristiques de transport par diffusion et convection. La notion de couche limite peut être évoquée. On peut également présenter des écoulements autour d'obstacles.
- 2000 : L'interprétation microscopique des forces de viscosité est souvent sacrifiée.
- 1999 : La leçon doit permettre de montrer la compétition entre transfert convectif et transfert diffusif de quantité de mouvement.

Bibliographie

✍ *Hydrodynamique physique*, **Guyon-Hulin-Petit** ⟶ Complet
✍ http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCours_Agreg.pdf ⟶ cours de Cachan

Prérequis

- ➢ Mécanique newtonienne
- ➢ Description eulérienne et lagrangienne
- ➢ Écoulement incompressible

Expériences

- ☕

Table des matières

Introduction

☕

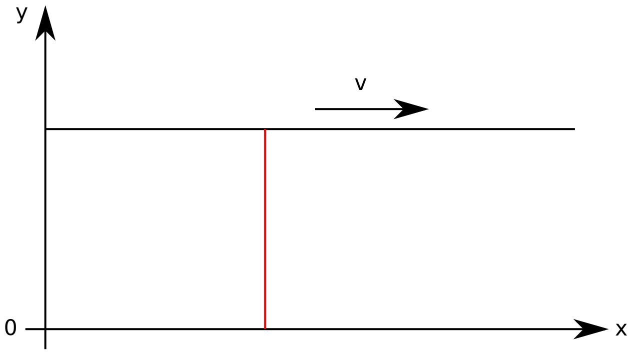
On peut faire s'écouler 2 fluides différents genre Miel et Eau.

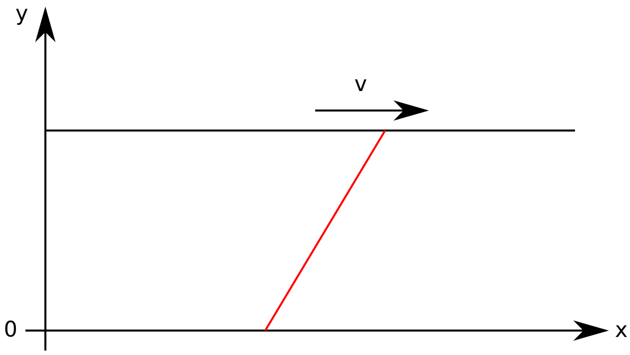
La notion de viscosité est souvent déjà un minimum connue du grand public. On va essyer de l'expliquer. Le but de cette leçon va donc être de trouver une équation qui puisse décrire l'écoulement d'un fluide visqueux.

1 Notion de viscosité

1.1 Force surfacique

https://www.youtube.com/watch?v=p08_KlTKP50





☕

Ecoulement Couette Plan

✍ ⏲

P0.33. Il faut du glycérol et du colorant pour glycérol. On montre que la vitesse du fluide semble se transmettre de haut en bas dans le fluide...

Remarque : on obtient pas un profil linéaire car on crée un gradient de pression dans la cuve du coup on a Couette + Poiseuille

Or qui dit transmission de vitesse dit transmission de quantité de mouvement et donc présence d'une force ! On remarque que :

- La vitesse tout en bas reste toujours nulle
- Le fluide est déplacé toujours selon $\vec{e_x}$
- Transmission de vitesse présente que si la vitesse n'est pas homogène

Ces observation traduisent en fait la présence d'une force de viscosité :

$$\vec{F} = \eta \frac{dv}{dy} S \vec{e_x}$$

η est la viscosité dynamique et s'exprime en Pa.s.

Remarques :

- Cette expression n'est juste que si le fluide est considérée comme incompressible
- L'hypothèse d'une relation linéaire n'est pas forcément vérifiée. Si elle est vérifiée, on parle de fluide Newtonien mais il existe des fluides non-newtonien dont les comportements sont multiples

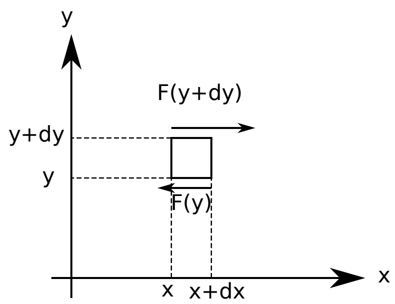
ODG :

Fluide	Air	Eau	Glycérol	Miel
Viscosité (Pa.s)	2.10^{-5}	10^{-3}	1.5	10

On oublie pas notre but : comprendre le comportement d'une particule fluide. Voyons donc l'impact de cette force sur une particule fluide.

1.2 Equivalent volumique

Restons dans le cas précédent où la vitesse est sous la forme $\vec{v} = v(y,t)\vec{e_x}$. On considère une particule fluide située en y ey y+dy.



Les forces de viscosité s'appliquant dessus sont :

$$\vec{F} = \eta\frac{dv}{dy}(y+dy)dzdx - \eta\frac{dv}{dy}(y)dzdx = \eta\frac{d^2v}{dy^2}dydzdx$$

Autrement dos, on trouve une force volumique égale à $\eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$. Cette expression se généralise sous la forme :

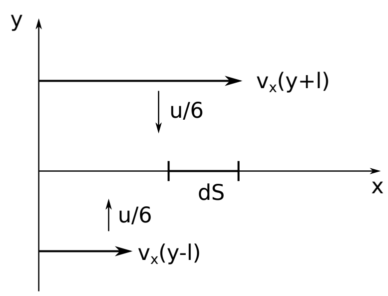
$$\vec{f_v} = \eta\Delta\vec{v}$$

En effet, on peut imaginer que si la vitesse avait dépendu des autres directions , on aurait juste rajouté les contributions et obtenu chaque dérivée partielle.

Avant d'établir l'équation du comportement d'une particule fluide, intéressons-nous un peu à l'aspect microscopique de la viscosité.

1.3 Modèle microscopique (gaz)

On considère un gaz dont la vitesse moyenne liée à l'agitation thermique est u. De plus, on suppose qu'il y a un mouvement d'ensemble de la forme $\vec{v} = v(y)\vec{e_x}$. On adopte le modèle 1/6 résultant du chaos moléculaire vu en thermodynamique : il y a autant de particules bougeant à u selon $\pm O_{x,y,z}$. On note n la densité de particules.



Calculons la quantité de mouvement traversant la surface dS :

$$\Delta\vec{p} = -\frac{1}{6}nmv(y+l)Sudt\vec{e_x} + \frac{1}{6}nmv(y-l)Sudt\vec{e_x} = \frac{1}{6}nuSm\left(-2l\frac{dv}{dy}\right)dt\vec{e_x} = \frac{1}{3}nmul\frac{dv}{dy}$$

On trouve donc une expression de la viscosité :

$$\eta = \frac{1}{3}nmul$$

Pour un gaz parfait, $u = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$ et de manière générale, la viscosité d'un **GAZ** croit avec la température.

ODG : Pour l'air : $u \approx 700m/s$ et $l \approx 100nm$. On trouve $\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1}{3}ul \approx 2.3\ 10^{-5}Pa.s$. La valeur expérimentale est de 1.5 10^5 (CNTP), l'ordre de grandeur est donc bon !.

Pour les liquides, la situation est plus complexe et ne sera donc pas abordée dans la leçon. ✍ GHP p 70.
Pour les fluides, la viscosité diminue avec la température

2 Equation de Navier-Stokes

2.1 Démonstration

On considère un fluide incompressible et Newtonien. On applique le principe fondamentale de la dynamique dans le référentiel du laboratoire. On prendra comme force : les forces de pression, de visqueusité et de gravité. On a alors :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$$
$$div\vec{v} = 0$$

La première ligne correspond l'équation de **Navier-Stokes**. Elle est impossible à résoudre analytiquement dans l'état actuel des choses. Cette équation combinée à l'hypothèse d'incompressibilité représente un système fermé car on a 4 inconnues (P $+\vec{c}$) et 4 équations ($\vec{NS}$ + incompressibilité). Il ne reste plus que les conditions au limites. Afin que la force ne diverge pas au voisinage des solides, on suppose que la vitesse tangentielle du fluide est la même que celle du solide. De plus, on suppose que le fluide ne peut pas s'enfoncer dans le solide ou s'en décoller. Donc on a finalement comme conditions aux limites :

$$\vec{v} = \vec{v}_{solide}$$

On a un système fermé... mais ça ne sert pas à grand chose si on ne peut pas détermienr la forme de la solution ! Il va donc falloir simplifier l'équation de Navier-Stokes.

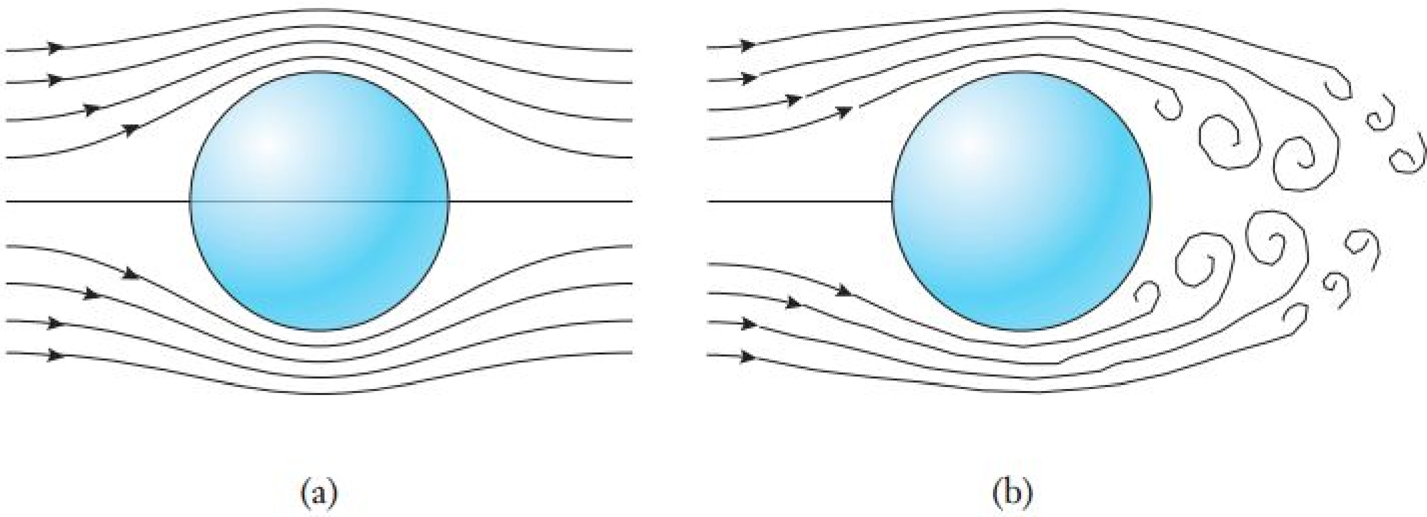
2.2 Nombre de Reynolds

On cherche à simplifer l'équation qui vient d'être trouvée. Le terme le plus complexe est le terme non linéaire est l'object de le leçon était la viscosité, nous allons nous intéresser à ces deux termes. On constuit donc le nombre adimenssioné de Reynolds :

$$Re = \frac{convection}{diffusion} \approx \frac{\rho\frac{U^2}{L}}{\eta\frac{U}{L^2}} = \frac{UL}{\nu}$$

On distingue en général 2 cas :

- $Re \ll 1$: les forces visqueuses sont prépondérantes. On parle d'écoulement laminaire ou rampant
- $Re \gg 1$: on a un écoulement turbulent



Prenons quelques exemple : **ODG :**

- un jet d'eau en sortie de robinet : $U \approx 0.1ms^{-1}$, $L \approx 0.1m$ et $\nu = 10^{-6}m^2s^{-1}$ donne $Re = 10^4 \gg 1$
- L'air autour d'une voiture : $U \approx 10ms^{-1}$, $L \approx 1m$ et $\nu = 10^{-5}m^2s^{-1}$ donne $Re \gg 1$
-

En réalité, c'est bien plus complexe que cela et certains écoulements avec des Reynolds de 100 peuvent être considérés laminaires. On se restreindra ici uniquement au cas laminaire.

2.3 Notion de couche limite

Dans le cadre de l'approximation laminaire, l'équation de Navier-Stokes devient l'équation de Stokes :

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \eta\Delta$$

Propriétés de l'équation :

- Linéarité ! ! ! !
- Irréversibilité
- Equation de Stokes en stationnaire avec réversibilité (possibilité de manip, voir ✍ GHP p423)... Le problème c'est le temps

Cette équation reste valable tant que les forces visqueuses sont prédominantes. Néanmoins comme on a pu le voir plus tôt, ce n'est pas exemple pas le cas pour l'écoulement de l'air autour d'une voiture. Mais il faut bien garder à l'esprit qu'il y a toujours une zone dans laquelle les effets visqueux sont prédominants. Cette zone est la **couche limite**. On peut trouver une estimations de sa longueur caractéristique toujours en comparant les termes de visqueusité et de convection. On note δ la longueur caractéristique de la couche limite.

$$\rho\frac{U^2}{L} \approx \eta\frac{U}{\delta^2} \Leftrightarrow \delta \approx \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

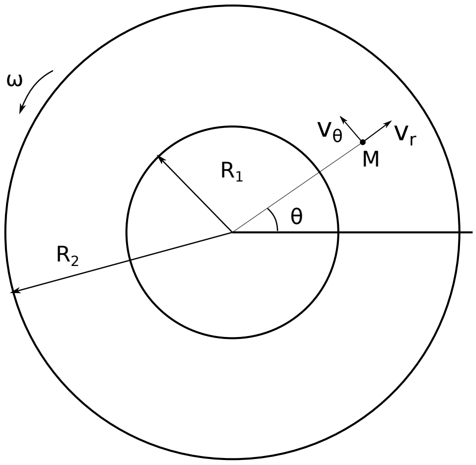
On voit bien que plus le nombre de Reynolds est petit, plus la couche limite est grande. Dans le cas où le nombre de Reynolds est vraiment petit, on peut donc imaginer que la couche limite englobe toute l'expérience et que les effets visqueux prédominent de partout : l'équation de Stokes est alors partout valable.

Mais j'insiste, il est important de se rappeler que cette couche limite existe dans **tout type d'écoulements**, même à haut Reynolds ! Les effets visqueux ne sont donc jamais complètement négligeable !

3 Application (à modifier selon le temps restant)

3.1 Ecoulement Couette cylindrique

✍ GHP p176



On néglige ici le poids et les forces de pression de dépendent que de r. En écoulement stationnaire, l'équation de Stokes selon $\vec{e_\theta}$ devient alors juste :

$$\Delta\vec{v} = \vec{0}$$

Avec les symétries du problème, la vitesse se met sous la forme : $\vec{v} = v_r(r)\vec{e_r} + v_\theta(r)\vec{e_\theta}$. Avec l'imcompressibilité, on a finalement $v_r(r) = cste$. L'équation de Stokes devient donc :

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = 0$$

Pour résoudre ce problème, on pose $V = \frac{v_\theta}{r}$. On obtient alors :

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{dV}{dr} = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^3}$$

et donc :

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r}$$

Afin de finir la résolution, il faut utiliser les CAL :

$$v_\theta(r = R_1) = R_1\Omega_1$$
$$v_\theta(r = R_2) = R_2\Omega_2$$

On prendra $\Omega_2 = \omega$ et $\Omega_1 = 0$. On obtient alors :

$$v_\theta = \frac{R_2^2\omega}{R_2^2 - R_1^2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)$$

3.2 Application : viscosimètre

Le profil de vitesse que l'on a trouvé précédement est indépendant du fluide considéré est ne permet pas à lui seul de remonter à la viscosité d'un fluide. Néanmoins, on sait que le liquide exerce une force sur la paroi et donc un couple. La force appliquée sur la paroi extérieure vaut :

$$\vec{F} = \left(-\eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r \frac{v}{r}}\vec{e_\theta}\right)(R2)$$

Et par conséquennt, le couple exercé sur la paroi vaut :

$$C = 2\pi R_2 h \times F = 4\pi h\eta \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\omega$$

En mesurant le couple, on peut donc remonter à la viscosité du fluide ! Néanmoins, ce dispositif a ses limites :

- Si la vitesse est trop rapide, on entre en régime turbulent et l'expression trouvée n'est plus valable
- Si le couple est trop faible ou trop important, on ne peut pas la mesurer

3.3 Couette plan si il faut combler ou débit en poiseuille

4 Annexes

4.1 Fluides non newtonien

Différents types de fluides non newtonien :

- **Rhéofluidifiants :** quand on les agite ou qu'on les presse, ils deviennent plus fluides. (la viscosité diminue avec la contrainte)
- **Rhéoépaississants :** la viscosité augmente avec la contrainte
- **Fluides à seuil :**ils ne s'écoulent pas en dessous d'un seul de contrainte

Loi mathématique (proposée par Ostwald), qui ne marche pas pour les faibles taux de cisaillement :

$$\eta = D\dot{\gamma}$$

avec $\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$ dans le cas d'un cisaillement simple. La difinition prise pour η est $\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}}$ et fais donc le lien contrainte/déformation. Pour les fluides rhéofluidifiants, $\alpha > 0$ alors que $\alpha < 0$ pour les rhéoépaississants. Ce modèle marche pas toujours, y'en a plusieurs différents... (cf ✍ GHP p.145-147) :

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{1 + \beta^2\dot{\gamma}^2}^{p}$$

4.2 Modèle pour la viscosité pour un liquide

On suppose en gros que les molécules de liquides sont toutes identiques et se comportent comme des grains de poudre et doivent donc passer une barrière de potentiel de hauteur Δg_0 pour passer un autre grain. On trouve alors

$$\eta \propto e^{-\frac{\Delta g_0}{k_B T}}$$

4.3 NS dans le cas compressible

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}\right) = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}P + \eta\Delta\vec{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right)\vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}v)$$

4.4 Force de frottements fluides

D'une manière générale, on écrit :

$$F = \frac{1}{2}\rho U^2 D^2 f(Re)$$

- Pour une écoulement laminaire, $f(Re) \propto \frac{1}{Re}$ donc on a une force proportionnelle à la vitesse
- Pour un écoulement turbulent $f(Re) \propto 1$ et on a donc une vitesse quadratique avec un coefficient C_x qui varie avec le Reynolds

Questions

Vous parlez d'irréversibilité, quelles en sont les causes ?

Qu'est-ce qu'un fluide newtonien ? Donnez des exemples de fluide non newtoniens. Est-ce que vous pouvez décrire son comportement ? Mathématiquement ça se traduit comment ?

Le dentifrice est-il non-newtonien, qu'est-ce qui le montre dans son comportement ?

Que devient l'équation que vous avez présentée (navier-stokes avec div(v)=0) dans le cas compressible ?

Vous avez dit qu'expérimentalement on pouvait mesurer la vitesse d'un fluide dans un écoulement de Couette plan. Comment fait-on en pratique ?

Vous avez fait une analogie entre la conduction thermique et la viscosité, qui joue l'analogue de la loi de Fourier ?

Pour Reynolds, vous avez pris l'exemple du modèle d'avion et vous avez dit que c'est le seul nombre important pour mettre à l'échelle un écoulement ?

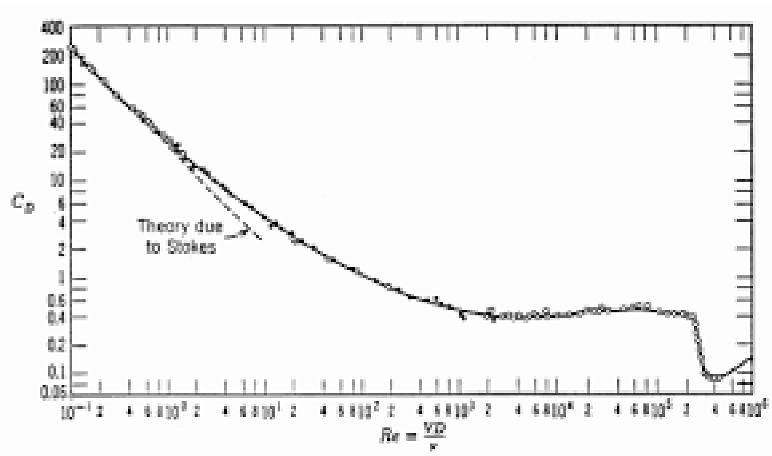
Pour le viscosimètre à bille, vous avez donné la force de Stokes, comment vous justifiez à un élève qu'elle est proportionnelle à la vitesse et non la vitesse au carré ? Est-ce qu'il existe une formule universelle qui donne la force exercée par un fluide sur un solide ? Parlez nous de la force de traînée. Comment varie le coefficient de traînée avec le Reynolds ?

"Question pour l'amusement parce qu'il reste 30s, est-ce que vous savez comment varie la viscosité en fonction de la température dans un fluide supercritique ?"

Vous n'avez parlé que de viscosité de cisaillement, il y en a d'autres, effets ?

Comment définir la taille caractéristique d'un écoulement pour un industriel qui fait une étude avec un modèle réduit en soufflerie ?

Comment jouer sur les paramètres du viscosimètre de Couette pour augmenter la sensibilité ?

- Je pense que ça vient des dissipations visqueuses ?
- cf annexe 1
- Dentifrice = fluide à seuil
- cf annexe 3
- 

- Le terme de viscosité élongationnelle est utilisé en rhéologie pour caractériser l'écoulement d'un corps incompressible soumis à une contrainte uniaxiale. La viscosité élongationnelle vaut $\eta_e = 3\eta$ (loi de Trouton).

- La viscosité turbulente désigne une quantité utilisée pour décrire la dissipation turbulente. Elle est l'analogue de la viscosité dynamique pour la relation contraintes-déformations dans le milieu mais n'est pas une caractéristique de ce milieu et son expression doit être adaptée à chaque situation physique.
- Ce qui compte pour lui c'est Reynolds !

Si à haut Re, viscosité négligeable, comment expliquer à un élève l'origine de la trainée ? La trainée existe aussi pour un fluide parfait ? Il y a d'autres forces qui s'exercent sur une aile d'avion ? Et la portance existe aussi pour un fluide parfait ? Evolution du Cx en fonction du Reynolds ?

Comment on définit un écoulement turbulent ?

Pour modéliser un bateau, quel terme faut-il ajouter dans l'équation de Navier-Stokes ? Est-ce que ça crée un nouveau nombre caractéristique ou Re est suffisant ?

Différence entre fluide incompressible et écoulement incompressible ?

L'expression de la force visqueuse (en laplacien de la vitesse) est-elle toujours valable en écoulement incompressible ?

Dans le modèle microscopique, qu'obtient-on si on s'intéresse aux composantes des quantités de mouvement perpendiculaires à l'interface ?

Questions sur le nombre de Reynolds. Retour sur la définition (j'avais donné la définition termes advectifs/termes diffusifs). Si$\vec{v} \cdot \vec{grad}\vec{v} = 0$ **strictement, cas pour le Poiseuille, alors peut on dire que Re = 0 ?**

Pourquoi parle t-on de viscosité dynamique ou cinématique ?

Pourquoi des chercheurs utilisent des cellules de Helle-Shaw pour simuler un fluide de viscosité égale à 0 ?

- Fluide incompressible = ρ dépend pas de la pression ou d'un autre paramètre. Ecoulement incompressible : le long d'une ligne de courant, $\rho = cste$
- Une cellule de Hele-Shaw consiste en deux plaques de verre très rapprochées l'une de l'autre entre lesquelles on injecte un ou plusieurs fluides. Ce système est utilisé comme modèle bidimensionnel d'un milieu poreux.
- La turbulence désigne l'état de l'écoulement d'un fluide, liquide ou gaz, dans lequel la vitesse présente en tout point un caractère tourbillonnaire : tourbillons dont la taille, la localisation et l'orientation varient constamment

La dernière question était à propos de l'Hélium Superfluide. Est ce qu'il existe un fluide parfait ? Que se passe-t-il si l'on met ce fluide dans un cylindre et que l'on tourne le cylindre ?

pourquoi lors de l'expérience de l'écoulement de Couette vous n'avez pas obtenu un profil totalement linéaire ?

Si dans l'écoulement de Poiseuille on a un fluide pesant, que se passe-t-il ?

Soit un cycliste se déplaçant à 10 m/s dans l'air ou un nageur se déplaçant à 1m/s dans l'eau ; le Reynolds vaut 10^6 **typiquement donc la viscosité peut être négligée ; pourquoi est-ce fatiguant ?**

- Le verre c'est particulier il y a une transition vitreuse qui fait passer du verre solide au verre liquide... Mais du coup on peut dire qu'il a une très très grande viscosité de l'ordre de 10^{20} Pa.s

Remarques

-