

LP09 MODELE DE L'ÉCOULEMENT PARFAIT D'UN FLUIDE

8 mai 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L3

Commentaires du jury

- 2017 : La multiplication des expériences illustrant le théorème de Bernoulli n'est pas souhaitable, surtout si celles-ci ne sont pas correctement explicitées.
- 2016 : Les limites de ce modèle sont souvent méconnues.
- 2015 : Le jury invite les candidats à réfléchir davantage à l'interprétation de la portance et de l'effet Magnus. Les exemples cités doivent être correctement traités, une présentation superficielle de ceux-ci n'étant pas satisfaisante.
- Jusqu'en 2013, le titre était : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide ; validité. Relation de Bernoulli ; limites et applications.
- 2011, 2012, 2013, 2014 : La notion de viscosité peut être supposée acquise.
- 2010 : Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et de ses limites sans faire appel à la notion de viscosité que l'on pourra supposer connue. Les conditions aux limites imposées à un fluide s'écoulant autour d'un obstacle solide doivent être justifiées. L'interprétation énergétique de la relation de Bernoulli est très mal connue.
- 2009 : Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et de ses limites sans faire appel à la notion de viscosité. Les conditions aux limites imposées à un fluide s'écoulant autour d'un obstacle solide doivent être justifiées. L'interprétation énergétique de la relation de Bernoulli est très mal connue.
- 2005 : La différence entre écoulement incompressible et fluide incompressible est souvent ignorée, de même qu'entre écoulement parfait et fluide parfait.
- 2003 : L'équation d'Euler ne constitue pas le sujet central de la leçon et ne doit pas prendre une place excessive. Diverses expressions du théorème de Bernoulli peuvent être présentées. Il est plus intéressant de présenter des illustrations concrètes ou des applications pratiques que d'exposer une longue suite de formulations.

Bibliographie

- ♣ *Hydrodynamique physique*, Guyon, Hulin, Petit ¹ → Il y a tout
- ♣ Dunod, PC-PC* → Là aussi
- ♣ Jolidon → Pour les expériences
- ♣ Compétences Prépa PC-PC* → démo propre du théorème de Bernoulli énergétique (p318)

Prérequis

- Viscosité
- Equation de Navier-Stokes
- Bilan macroscopique en système ouvert

Expériences



Table des matières

1.1	Fluide et écoulement parfaits	3
1.2	Validité du modèle	3
1.3	Application : l'effet Coanda	4
2	Le théorème de Bernoulli	5
2.1	Démonstration du théorème	5
2.2	Approche énergétique du théorème de Bernoulli	5
2.3	Exemple d'application : l'effet Venturi	6
3	Applications pratique	6
3.1	Le tube de Pitot	6
3.2	L'effet Magnus	7

Introduction

Nous avons déjà eu l'occasion d'établir l'équation de Navier-Stokes et de parler d'incompressibilité. Néanmoins, ces deux équations ne sont pas suffisantes pour permettre une résolution analytique et il va donc falloir faire des approximations. C'est pour cela que nous allons parler dans ce cours de la notion d'écoulement parfait.

1 Modèle de l'écoulement parfait

1.1 Fluide et écoulement parfaits

Un **fluide parfait** est un fluide pour lequel la viscosité dynamique η est considérée comme strictement nulle. Cela signifie qu'il n'y a aucune dissipation visqueuse. Ce genre d'hypothèse est réalisable uniquement avec des superfluides, ce qui restreindrait énormément notre étude. On va donc plutôt faire l'hypothèse d'un écoulement parfait.

Un **écoulement parfait** est un écoulement pour lequel les forces visqueuses sont négligeables. L'équation de Navier-Stokes est alors simplifiée et devient l'équation d'**Euler** :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}$$

Deux remarques :

- Cette équation est aussi vérifiée pour un fluide compressible étant donné que le terme lié à la compressibilité disparaîtrait aussi
- Négliger la viscosité, c'est négliger la dissipation et donc la notion d'irréversibilité introduit par les frottements disparaissent

Au niveau des CAL, on a toujours :

$$\vec{v}_f \cdot \vec{n} = \vec{v}_s \cdot \vec{n}$$

à l'interface fluide/solide qui montre la non-pénétrabilité du solide. Et plus généralement, on a toujours :

$$\vec{v}_f = \vec{v}_s$$

Cela vient du fait que l'on est par juste dans le cas $\eta = 0$! Il reste du coup de la viscosité au niveau des parois qui entraîne ces conditions aux limites !

1.2 Validité du modèle

Nous avons déjà pu voir que pour comparer le terme convectif au terme visqueux/diffusif, on s'intéresse au nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} = \frac{UL}{\nu}$$

où $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ est la **viscosité cinématique** du fluide (analogue à un coefficient de diffusion). Quelques exemples de nombres de Reynolds :

- un jet d'eau en sortie de robinet : $U \approx 0.1 \text{ m s}^{-1}$, $L \approx 0.1 \text{ m}$ et $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ donne $Re = 10^4 \gg 1$
- L'air autour d'une voiture : $U \approx 10 \text{ m s}^{-1}$, $L \approx 1 \text{ m}$ et $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ donne $Re \gg 1$

Néanmoins, il ne faut pas oublier que la viscosité est tout de même présente dans tous les cas que nous avons cités si l'on regarde la **couche limite**. Elle est justement définie comme étant la région dans laquelle la viscosité n'est pas négligeable. En notant δ la taille caractéristique de la couche limite, on peut estimer sa taille avec :

$$\rho \frac{U^2}{L} \approx \eta \frac{U}{\delta^2} \Leftrightarrow \delta \approx \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

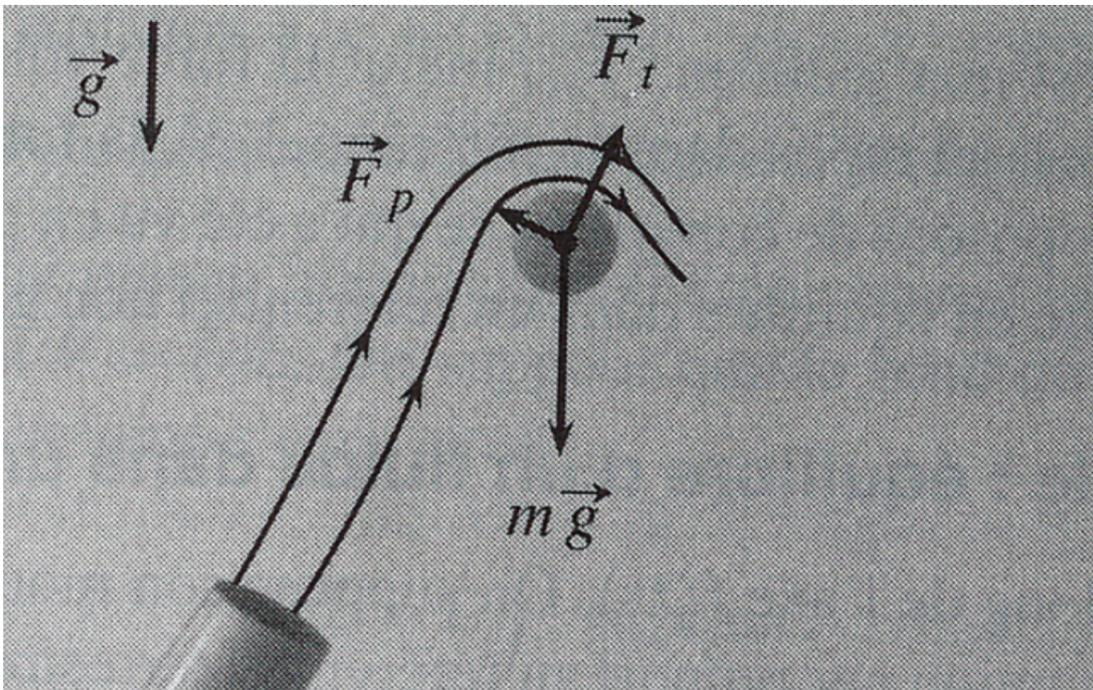
Dans cette zone, l'équation d'Euler n'est plus valable. Néanmoins, si on considère le cas de l'écoulement de l'air autour d'une voiture, on trouve $\delta = 1mm$, ce qui signifie qu'une faible partie de l'écoulement seulement ne vérifie pas le modèle parfait.

Cet écart au modèle parfait reste cependant très important car il impose les conditions aux limites! Il faut donc bien le garder en tête pour tout ce qui va suivre.

↓ Essayons d'utiliser l'équation que l'on vient de trouver pour expliquer une effet de la vie de tous les jours : l'effet Coanda.

1.3 Application : l'effet Coanda

On place une balle de ping-pong au dessus d'un sèche-cheveux qui souffle dessus. Si on est dans cette configuration, la force exercée par le sèche-cheveux compense le poids. Néanmoins, si on met de l'angle, on voit que la balle reste suspendu encore, ce qui paraît bizarre! Afin de l'expliquer, on prend une vitesse sous la forme $\vec{v} = v(r, z, t)\vec{e}_\theta$ dans des coordonnées polaires. Le centre du repère est en fait le centre de courbure des lignes de courants.



L'équation d'Euler donne :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_\theta + \rho v \frac{1}{r} \frac{\partial(v \vec{e}_\theta)}{\partial \theta} &= - \frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r \\ \Leftrightarrow \rho \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_\theta - \rho \frac{v^2}{r} \vec{e}_r &= - \frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r \\ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} &= \rho \frac{v^2}{r} > 0 \end{aligned}$$

Autrement dit, on trouve que plus on s'éloigne, plus la pression est forte. Ainsi, une nouvelle force apparaît et stabilise la balle car elle tend à la faire aller vers l'intérieur du flux. Ce phénomène est appelé **l'effet Coanda**.

↓ Nous nous sommes pour l'instant uniquement reposés sur l'équation d'Euler, qui reste encore assez complexe à manipuler. Il en découle néanmoins un théorème beaucoup plus pratique : le théorème de Bernoulli



2 Le théorème de Bernoulli

2.1 Démonstration du théorème

On se place toujours dans le cas d'un écoulement **parfait et incompressible** mais on rajoute ici en plus l'hypothèse de **stationnarité**. On intègre l'équation de Stokes le long d'une ligne de courant :

$$\int_A^B \rho \left(\text{grad} \frac{v^2}{2} + \text{rot} \vec{v} \wedge \vec{v} \right) \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \text{grad} P \cdot d\vec{l} + \rho \int_A^B \vec{g} d\vec{l}$$

Comme $\vec{v} // d\vec{l}$, l'intégration donne :

$$\left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right]_A^B = 0$$

Autrement dit, sur une **ligne de courant**, la quantité $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz$ est conservée : c'est le théorème de Bernoulli. Quelques remarques :

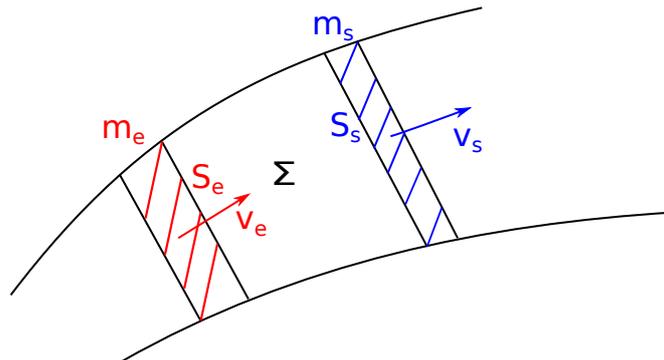
- On retrouve la statique des fluides
- Une deuxième version de ce théorème consiste à supposer que l'écoulement est non pas stationnaire mais irrotationnel. Cela permet de généraliser le théorème de Bernoulli à tout l'espace. Néanmoins, la charge conservée n'est plus la même mais $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz$



Ce théorème a en fait une interprétation énergétique comme nous allons le voir.

2.2 Approche énergétique du théorème de Bernoulli

On se place dans le cadre d'un écoulement **stationnaire**. Nous allons faire un bilan d'énergie sur un système ouvert.



La variation d'énergie cinétique de Σ :

$$dE_c = \left(E_c(t + dt) + \frac{1}{2} \delta m_s v_s^2 \right) - \left(E_c(t) + \frac{1}{2} \delta m_e v_e^2 \right)$$

De part la conservation du débit due à l'incompressibilité de l'écoulement, on a $\delta m_e = D_m dt = \delta m_s$ où $D_m = \rho v S$ est le débit massique. On a donc finalement :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} D_m (v_s^2 - v_e^2) = P_{int} + P_{ext}$$

P_{ext} est dû aux forces de pression et au point donc :

$$P_{ext,p} = P_e S_e v_e - P_s S_s v_s = D_m \left(\frac{P_e}{\rho} - \frac{P_s}{\rho} \right)$$

$$P_{ext,g} = \rho g (S_e v_e z_e - S_s v_s z_s) = D_m g (z_e - z_s)$$

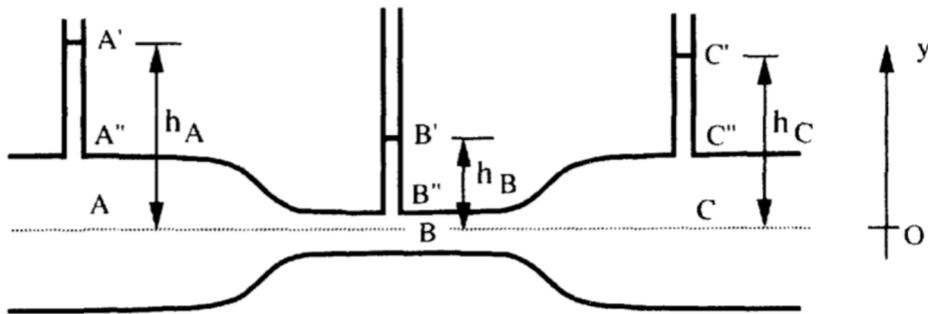
On a donc finalement :

$$P_{int} = D_m \left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right]$$

On en conclut donc que le théorème de Bernoulli est vérifié si la puissance interne du système se conserve et réciproquement. Cela fait écho au fait que la viscosité doit être négligée afin qu'il n'y ait pas de dissipation visqueuse !

2.3 Exemple d'application : l'effet Venturi

On considère la montage suivant :



On a $P_0 = P_{A'} = P_{B'} = P_{C'}$. La loi de la statique des fluides donne :

$$P_i = P_0 + \rho g h_i$$

En combinant cela au théorème de Bernoulli, on trouve :

$$\frac{v_A^2}{2} + gh_A = \frac{v_B^2}{2} + gh_B = \frac{v_C^2}{2} + gh_C$$

Et finalement, on utilise $vS = cste$ et on comprend ce qui est observé.

Effet Venturi

🔗 Jolidon

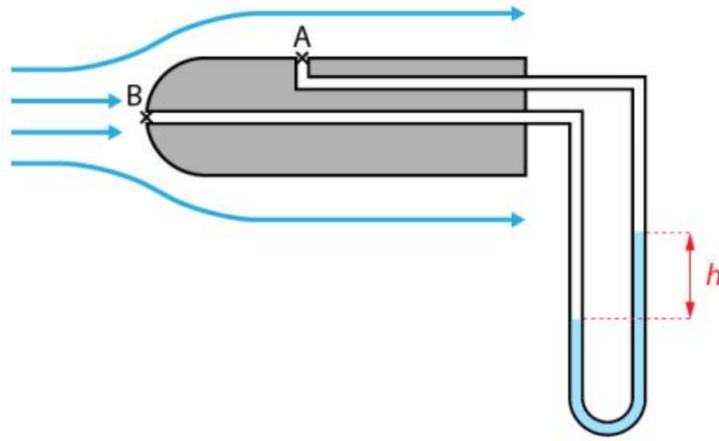


Lire le Jolidon, qui parle en particulier des pertes par frottements visqueux qui impliquent $h_C < h_A$

3 Applications pratiques

3.1 Le tube de Pitot

Dans une soufflerie ou même dans un avion, il est important de connaître la vitesse de l'écoulement. On utilise pour ça un tube de Pitot.

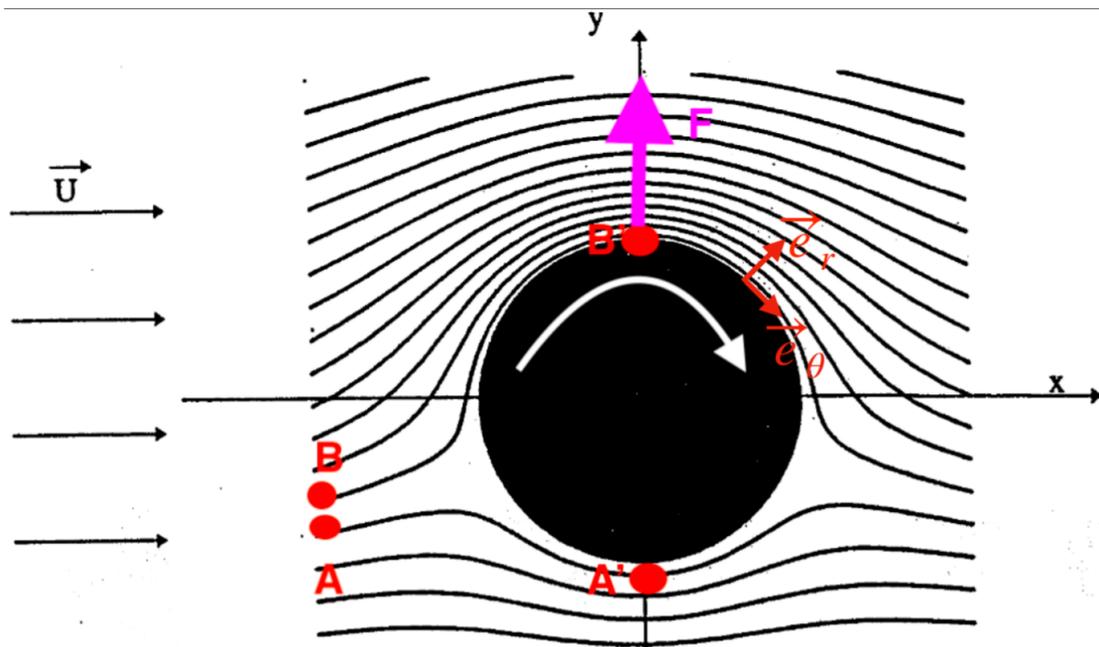


A est considéré comme un point d'arrêt, c'est-à-dire $v(A) = 0$ et la vitesse en B est la vitesse que l'on souhaite déterminée. On note $\Delta P = P_A - P_B = \rho_{liq}gh$ obtenu par la statique des fluides. De plus, avec Bernoulli, on a $\Delta P = \frac{1}{2}\rho_{air}V^2$, ce qui donne :

$$V^2 = 2 \frac{\rho_{eau}}{\rho_{air}} gh$$

3.2 L'effet Magnus

L'effet Magnus est observé aux sports avec des balles auxquelles on donne un effet. Le fait que la balle tourne sur elle-même engendre une force qui modifie sa trajectoire.



On suppose l'écoulement parfait, incompressible et stationnaire. Ainsi, le théorème de Bernoulli donne :

$$\begin{aligned} P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} &= P_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2} \\ P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} &= P_{B'} + \rho \frac{v_{B'}^2}{2} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$P_{B'} + \rho \frac{v_{B'}^2}{2} = P_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2}$$

Or, on voit sur le dessin que suite à la rotation de la balle, on a $v_{B'} > v_{A'}$. On a donc $P_{B'} < P_{A'}$ et la balle part vers le haut ! Cela explique donc que la trajectoire ne soit pas droite.

<https://www.youtube.com/watch?v=20SrvzNW9FE>

On peut s'attarder un peu sur ce qu'on vient de dire. On suppose que la balle "entraîne" l'air dans sa rotation, ce qui explique la différence de vitesse. Néanmoins, cela n'est possible que s'il y a de la viscosité ! Et c'est là tout l'importance de la couche limite

Normalement, ici il n'y a plus de temps et il faut passer à la conclusion. Néanmoins, voici de quoi combler les dernière minutes si besoin :

On considère l'écoulement **parfait, incompressible, irrotationnel et stationnaire**. Le théorème de Bernoulli donne :

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \frac{P(R)}{\rho} + \frac{v^2(R)}{2}$$

Par analogie électrostatique/mécanique des fluides, on peut écrire le potentiel :

$$\Phi = Ur \cos \theta - \frac{p \cos \theta}{2\pi r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Le premier terme vient de l'écoulement à l'infini, le deuxième à celui d'un dipole et le troisième terme traduit la rotation du cylindre sur lui même. On en déduit :

$$\begin{aligned} v_r &= U \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{2\pi r^2} \\ v_\theta &= -U \sin \theta + \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2} + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned}$$

La condition $v_r(R) = 0$ donne $p = -2\pi R^2 U$. D'où :

$$\begin{aligned} v_r &= U \cos \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \\ v_\theta &= -U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned}$$

Le théorème de Bernoulli permet ensuite d'obtenir la pression au niveau de la balle :

$$P(R) = P_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 \left[1 - \left(-2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R U} \right)^2 \right]$$

On obtient alors l'expression des deux composantes de la force :

- La force de traînée :

$$F_t = \int_0^{2\pi} P \cos \theta d\theta = 0$$

On en déduit donc que la force de traînée est nulle ici.

- La force de portance

$$F_p = \int_0^{2\pi} P \sin \theta d\theta = \rho \Gamma U$$

On en déduit donc qu'il y a bien une force qui dévie la balle ! Cette force serait nulle sans rotation de la balle sur elle-même, qui est à l'origine du facteur Γ

Questions

Explications sur la portance Forme de l'aile implique une vitesse de l'écoulement plus élevée au-dessus de l'aile qu'en-dessous, donc (thm de Bernoulli) dépression qui maintient l'avion en l'air.

Années pour l'équation d'Euler et Navier-Stokes ? Historiquement Euler en premier mais pédagogiquement on présente l'équation qui a le plus de termes en premier puis on simplifie.

Comment vérifier que l'écoulement est incompressible ? Pourquoi est-ce qu'on peut appliquer le thm de Bernoulli à un avion ? On compare le nombre de Mach $Ma = \frac{v}{c_{son}}$ à 1.

On entend parfois parler de décollement de la couche limite, à quoi est-ce que ça correspond ?

Que signifie que l'écoulement est isentropique ? Un fluide parfait incompressible est isentropique.

Que devient l'équation d'Euler pour un fluide compressible ?

Quand tu as fait les ODG, tu as pris la même masse volumique pour le sèche-cheveux que pour l'avion, pourquoi ? La masse volumique diminue avec l'altitude

Tu as parlé de couche limite visqueuse, existe-t-il d'autres types de couches limites ? Couche limite thermique

Tu as mentionné des exemples où le Re et le Pe sont du même ODG, connais-tu des cas où ils sont très différents ?

Est-ce que les coefficients de viscosité et de diffusion thermique sont reliés ?

Définition d'un fluide barotrope ? La masse volumique ne dépend que de la pression et alors on peut faire rentrer $\frac{P}{\rho}$ dans le *grad*.

Bernoulli est-il valable si le ref n'est pas galiléen ? Non car extrait de NS

Effet Venturi Fluide incompressible donc conservation du débit et $v_1 S_1 = v_2 S_2$.

Euler est-elle valable en ref non galiléen ?

- Pour plus de précision historique : l'équation d'Euler a été proposée en 1823, puis Navier et Stokes donne la forme finale en 1845
- Décollement de la couche limite = la couche limite ne suit plus les contours du corps
- Pour l'équation d'Euler compressible : cf LP08, annexe 3.
- Relation d'Einstein : $D = \eta k_B T$

Cavitation ? Bernoulli à la pression de vapeur saturante : si la vitesse augmente trop, la pression diminue et apparition de bulles. **Sur l'effet Venturi, peut on atteindre un vide poussé ? Y a-t-il une limite pour la pression ?** oui, c'est la pression saturante lors du changement d'état de l'eau liquide en vapeur

Comment s'écrivent la force de Coriolis volumique et la force d'accélération d'entraînement volumique ?

Pour une aile d'avion, connaissez vous le paradoxe de d'Alembert ?

Sur l'effet Coanda, pourquoi la balle tournait ? Viscosité

L'épaisseur de la couche limite est de l'ordre de 1 cm pour une voiture roulant à 100km/h. Pour un élève 1cm est négligeable devant 1m, faut-il pour autant négliger cette couche limite ?

Comment s'écrit l'équation de Navier-Stokes pour un fluide compressible ? - Comment prendre en compte un fluide compressible dans le théorème de Bernoulli ?

Vous avez dit que l'hélium est un fluide parfait, vous pouvez en dire plus ? (J'ai répondu à propos de l'hélium 4 au dessous de 2.17 K.) Et pour l'hélium 3 ?

Vous avez dit qu'on a pour l'énergie interne $U(S, V, N)$, pourquoi ces variables là ?

Vous avez des exemples de fluides non simples ?

- Paradoxe de d'Alembert : si on étudie une cylindre dans un fluide à la vitesse V , on trouve avec un écoulement irrotationnel et incompressible que aucune force de portance ne s'applique sur l'aile.⁷
- Il suffit d'être en dehors de cette couche limite pour que ce soit bon, pas besoin non plus d'être très loin
- La compressibilité pour Bernoulli est pas évidente parce qu'on peut pas rentrer la densité dans les gradients. Du coup on laisse sous forme intégrale. Après on peut avoir fluide compressible et écoulement incompressible.
- Sur wiki : "La différence entre les deux isotopes de l'hélium est que les atomes d'hélium 4 sont des bosons, alors que les atomes d'hélium 3 sont des fermions, ce qui fait que leur comportement à très basse température suit des lois radicalement différentes." ³He devient superfluide en dessous de 2,65 mK.
- Pour les fluides non newtonien, voir LP08
- Les fluides complexes sont des mélanges binaires présentant une coexistence entre deux phases : solide-liquide (suspensions ou solutions contenant des macromolécules telles que des polymères ou des micelles géantes), solide-gaz (milieux granulaires), liquide-gaz (mousses) et liquide-liquide (émulsions).

Que devient la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant si on n'est pas dans un référentiel galiléen ?

Quand la pompe à vide est en marche, on voit nettement le débit d'eau ralentir, pourquoi ? Et pourquoi y a-t-il un retour d'eau si on coupe l'eau sans casser le vide ? Comment pouvez-vous estimer expérimentalement la vitesse de l'eau en sortie de la pompe ?

Vous dites que l'épaisseur des couches limites est en l'inverse de la racine du nombre de Reynolds, comment le démontrez-vous ? Est-ce vrai si la couche est turbulente ? Est-elle alors plus grande, plus petite ?

Pour l'aile d'avion, comment savoir si l'écoulement est plus rapide au dessus ou au dessous de l'aile ? Toujours pour l'aile, vous dites que dans un écoulement potentiel incompressible, la force de portance est nulle, pouvez-vous développer ? Et donc, quel est le rôle des couches limites ? Cette notion de portance s'applique-t-elle aussi sous l'eau ? (Se démontre à partir de calculs un peu longs...) (Il s'y crée de la vorticité, qui rend l'écoulement non potentiel, et la portance et la traînée peuvent être non nuls.)

  quoi ressemble la couche limite autour d'une aile profil e ? C'est quoi le décollement de la couche limite ?

  quoi ressemble la couche limite autour d'une aile profil e ? C'est quoi le décollement de la couche limite ? Quelle équation peut-on donner pour le vecteur tourbillon ?

- Faut rajouter des termes pour les forces de Coriolis et entraînement. Pour Coriolis, on peut mettre sous forme d'un gradient mais pour la force d'entraînement c'est plus complexe.
- si la couche est turbulente, c'est plus grand

Remarques

-