LP23 Aspects analogique et numérique du traitement du signal. Etude spectrale

6 mai 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L3

Commentaires du jury

Bibliographie

- ✍ *Triatement des signaux et acquisition de données*, **Cottet, Dunod** ⟶ TF et numérisation
- ✍ *Electronique 1 et 2*, **Manneville** ⟶ Numérisation
- ✍ *Méthode et techniques de traitement du signal*, **Max et Lacoume** ⟶ Théorie

Prérequis

➢

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

En physique, lors d'une expérience, on mesure des grandeurs physiques à l'aide d'appareils électroniques la plupart du temps. Néanmoins, les paramètres d'acquisition/mesure sont souvent très importants dans la restitution du résultat. Nous allons donc nous pencher sur l'analyse et la numérisation des signaux.

1 Étude spectrale d'un signal

1.1 Analyse de Fourier

Le théorème de Fourier stipule qu'un fonction s(t) périodique de période T_0 peut s'écrire dans tous les cas sous la forme :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi n F_0 t\right) + b_n \sin\left(2\pi n F_0 t\right)\right]$$

a_0 correspond à la valeur moyenne du signal tandis que les coefficients a_n et b_n peuvent être trouvés avec :

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} s(t)\cdot\cos\left(2\pi n F_0 t\right)\cdot \mathrm{d}t \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

$$\text{et } b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} s(t)\cdot\sin\left(2\pi n F_0 t\right)\cdot \mathrm{d}t \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

Ce théorème vient du fait que mathématiquement parlant, les cosinus et les sinus de période T_0 forment une base de fonctions de période T_0. L'idée de l'analyse de Fourier est donc juste de décomposer la fonction qui nous intéresse sur cette base.

Pour décrire un signal, il est plus commode d'utiliser la forme :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(2\pi n F_0 t + \varphi_n\right)$$

avec

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad \varphi_n = \text{Arctan}\left(-b_n/a_n\right)$$

Ainsi, les coefficients c_n représentent le poids de chaque harmoniques. Pour se rendre compte de la force. Ainsi, pour un signal rectangulaire, on trouve par exemple :

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin\left(2\pi(2m+1)\frac{t}{T}\right)$$

On peut donc reconstruire un signal rectangulaire avec cette formule !

☕

Code python reconstitution carre

1.2 Transformée de Fourier

On voudrait étendre l'étude spectrale à n'importe quel type de signal car on peut en tirer des informations importantes (faire ressortir les pulsations caractéristiques ou alors une atténuation selon les fréquences). On cherche alors à décomposer la contribution de la fonction sur les différentes fréquences, comme on l'a fait avec les différentes harmoniques dans le cas précédents. On utilise pour cela la **transformée de Fourier** :

$$F\{s(t)\} = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f t}\cdot \mathrm{d}t$$

Tout comme les sinus et les cosinus plus tôt, les $\mathrm{e}^{-j2\pi f t}$ sont une base sur laquelle on décompose la fonction, chaque exponentielle représentant une fréquence (de manière continue et non plus discrète). A partir de la transformée de Fourier d'une fonction, on peut facilement remonter à la fonction elle même à l'aide de la transformée de Fourier inverse :

$$F^{-1}\{S(f)\} = s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi f t} \cdot \mathrm{d}f$$

Attention, afin que la transformée de Fourier existe, la fonction doit respectée certains critère :

- La fonction doit être bornée
- Il faut qu'elle soit de carré sommable (intégrable finie)
- Les discontinuités, maxima et minima sont en nombre fini
- Les transformée de Fourier spatiale existe aussi avec la pulsation spatiale plutôt que la pulsation temporelle

Quelques remarques cependant :

- $TF\left[\frac{ds}{dt}\right] = j\omega TF[s]$
- Pour connaitre la contribution d'une pulsation en particulier, il faut intégrer en -∞ à +∞... ce qui n'est pas possible expérimentalement. En réalité, le signal est coupé par une fonction porte, ce qui va modifier la transformée de Fourier (faut-il plus approfondir ?)
- Le fait que la mesure se fasse sur une temps fini élargi les pics dans la TF car $\Delta t \Delta \nu \sim 1$

Mais il y a encore un aspect du signal dont nous n'avons pas parlé : le bruit.

1.3 Le bruit

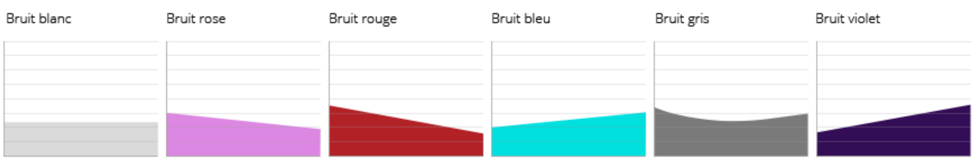
✍ Cottet p175 et suite

Le bruit est un signal aléatoire qui vient se superposer au signal que l'on étudie et qui gène donc la mesure. Il y a plusieurs sources de bruit :

- **Les bruits externes** qui proviennent de l'extérieur du système et peuvent donc en général être diminué en l'isolant mieux. Il y a pas exemple le bruit des autres appareils présents dans la salle, la Wifi, le 50 Hz ou encore le bruit cosmique
- **Les bruits internes** qui proviennent du circuit même (câbles, résistances, ect...). Il y a par exemple le bruit thermique (résistance) et le bruit de grenaille (semi-conducteurs comme diode ou transistor)

Ces bruits peuvent être classifiés selon la propriété de leur transformée de Fourier :

- Le bruit blanc par exemple, à une valeur constante sur tout le spectre. **Exemple :** bruit thermique. **Attention :** cela laisse penser (avec le théorème de Parseval), que le bruit blanc a une énergie infinie. C'est bien évidement faux : à haute fréquence, des phénomènes quantiques entre en compte et la valeur du bruit décroit.
- Le bruit rose qui suit la sensibilité de l'oreille
- Le bruit gaussien. Exemple : bruit de grenaille



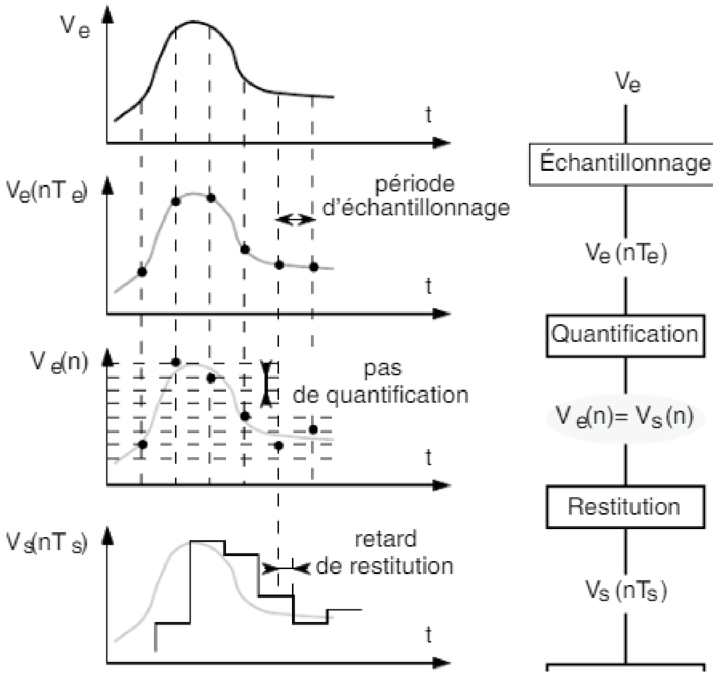
On peut s'amuser à regarder la TF de câbles pas branchés ?

PS : la page Wikipédia sur les bruits permet de les écouter. C'est pas très agréable.
Parler du rapport signal/bruit ? (✍ Cottet p.130)

On a bien décrit notre signal et ses caractéristiques ! Mais comment le récupérer ? Quelles sont les contraintes ?

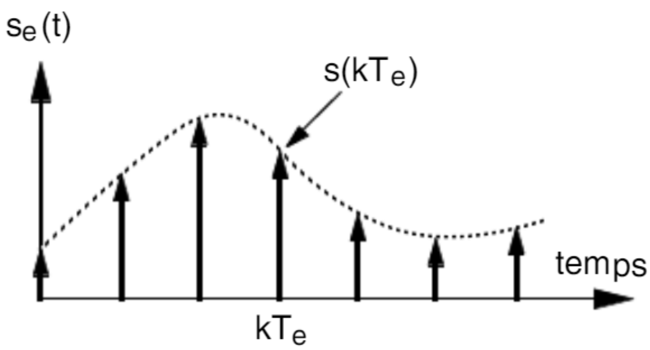
2 Numérisation des signaux

✍ Cottet p143 et suite
On explique vite fait le principe :

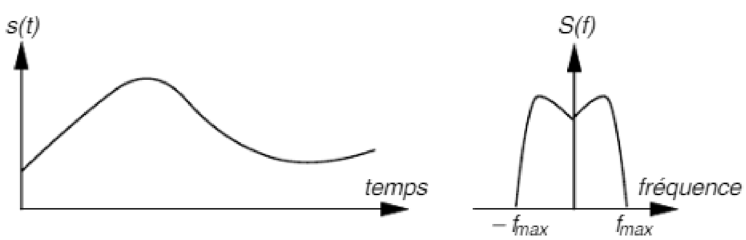


2.1 Échantillonnage

L'échantillonnage correspond à la prise de points tous les T_e. C'est à dire que pour tous $t_n = nT_e$, on relève la valeur du signal. En reliant les points, on a alors une représentation du signal.

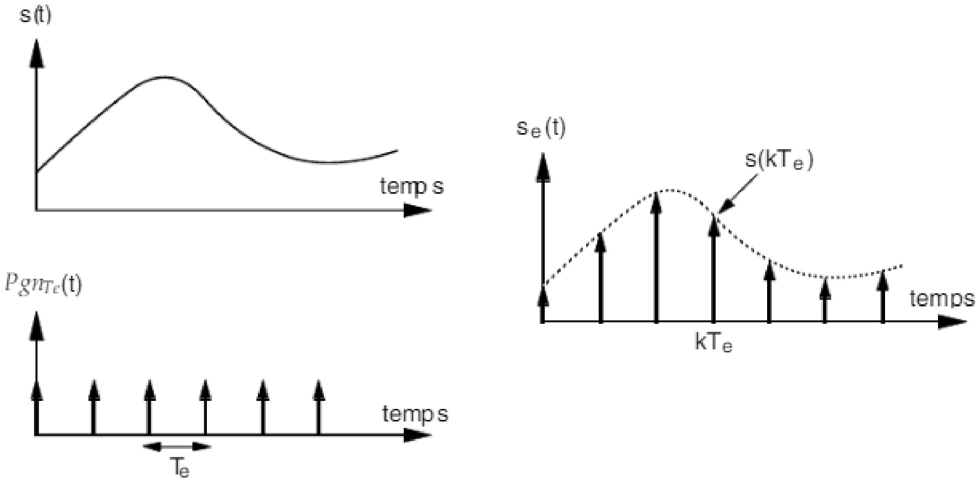


La question qui se pose alors c'est : est-ce qu'on récupère toute l'information en faisant ça ? Ou plutôt : à quelle condition ? On considère un signal sous la forme suivante :



Mathématiquement, cette opération revient à multiplier le signal par un peigne de Dirac. Autrement dit :

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s\left(kT_e\right) \cdot \delta\left(t - k \cdot T_e\right)$$



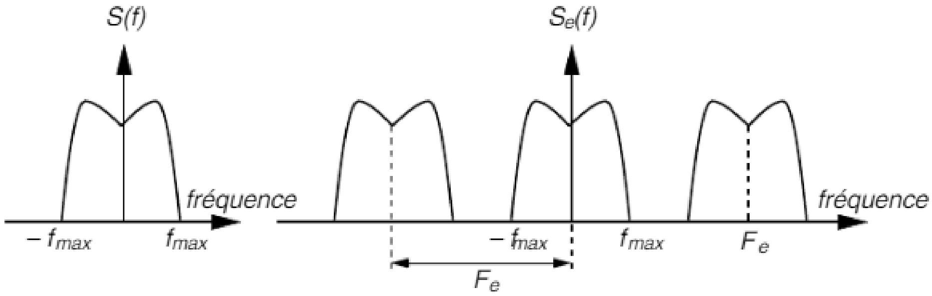
On l'a vu précédemment : réussir à obtenir la transformée de Fourier d'un signal revient à obtenir le signal lui-même. Mais qu'en est-il du signal que l'on vient de générer ? On regarde sa transformée de Fourier : le théorème de Plancherel dit que la transformée de Fourier d'un produit est le produit de convolution des TF (on admet la formule pour le peigne de Dirac) :

$$S_e(f) = S(f) * \left[F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - k \cdot F_e\right)\right]$$

Ce qui donne, par propriétés du peigne de Dirac :

$$S_e(f) = F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\left(f - k \cdot F_e\right)$$

On obtient donc le spectre suivant :



Donc si on veut pouvoir retrouver la transformée de Fourier qui nous intéresse, il ne faut pas que les différentes formes se superpose ! On trouve alors ce qu'on appelle le **théorème de Shannon** :

$$F_e \geqslant 2 \cdot f_{\max}$$

Remarques :

- pour obtenir ce que l'on veut, il faudrait récupérer seulement un motif... ce qui requiert un filtrage, point que l'on abordera plus tard
- Encore une fois, on a le problème de la TF par infinie en vrai donc élargissement des pics en $\frac{1}{T}$... Mais si on fait $T \gg T_e$, pas vraiment de problèmes

Python

On a parlé de l'échantillonnage temporel, mais qu'en est-il de la quantification du signal ?

2.2 Quantification

Selon le nombre de bits p utilisé pour mesurer la grandeur voulue, il y a 2^p valeurs possibles entre le min et le max de tension mesurable. Néanmoins, le signal réel est continu... Comment ça marche alors ? Et bien, en notant q le pas d'échantillonnage $q = \frac{max-min}{2^p}$, aux instants kT_e, d'échantillonnage, la valeurs N est attribué à ce moment d'échantillonnage si :

$$s_{e,q}\left(kT_e\right) = N \quad \text{si} \quad Nq - \frac{q}{2} \leqslant s_e\left(kT_e\right) < Nq + \frac{q}{2}$$

On peut alors montrer que cela implique une variable de $\frac{q^2}{12}$, donc plus on réduit les intervalles, plus on restitue fidèlement le signal !

☕

Python

Il y a néanmoins possibilité de modifier en amont le signal analogique avant qu'il soit numérisé.

3 Traitement analogique d'un signal

3.1 Un mot sur les SLIT ?

3.2 Filtrage linéaire

On va dans cette sous-partie nous intéresser aux **filtres linéaires**. Ils sont appelés ainsi car ce sont des composants qui coupent certaines composantes fréquentielles et qu'ils traitent indépendamment chaque fréquence. **Il ne crée pas de fréquences, il en supprime seulement.** Le filtre taitant chaque composante indépendemment, la relation entre la sortie et l'entrée du filtre s'écrit :

$$s(\omega) = H(\omega)e(\omega)$$

où $H(\omega)$ est la **fonction de transfert** du filtre. Il y a différents types de filtres :

- **Passe-bas**, qui atténue les fréquences au dessus d'une certaine fréquence de coupure
- **Passe-haut**, qui atténue les fréquences en dessous d'une certaine fréquence de coupure
- **Passe bande**, qui ne laisse passer majoritairement qu'une petite plage de fréquence
- **Coupe bande**, qui ne coupe majoritairement qu'une petite plage de fréquence

☕

Python + filtre RC

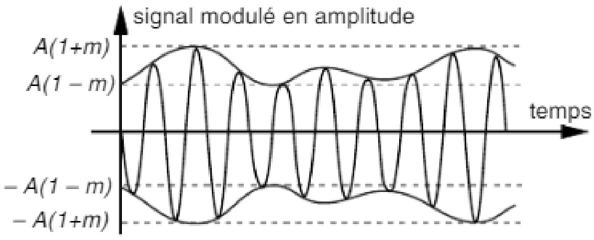
3.3 Modulation AM

✍ Krob p108 et suite, Cottet p88, Manneville tome 2

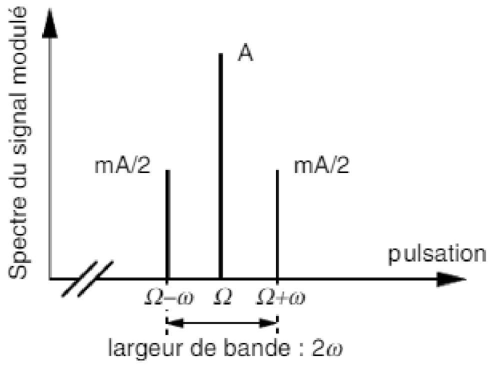
Selon le canal utilisé pour transporté l'information (lignes électriques, fibres optiques ou autre), seul certaines fréquences sont permises. Néanmoins, afin de distinguer les différentes informations envoyées simultanément, il faut que les fréquences soient assez éloignées. De plus, si la fréquence que l'on souhaite envoyée ne passe pas dans le support que l'on souhaite utilisé, on se retrouve bloqué. On utilise donc de la modulation. On va s'intéresser ici à la modulation en amplitude.

$$s(t) = A \cdot [1 + m \cdot i(t)] \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$$

i est le signal informatif, donc celui que l'on souhaite transmettre et s est le signal modulé. On suppose que i a été réduit, c'est à dire $|i| < 1$.



L'information sur i se trouve alors dans la porteuse : c'est pour ça qu'elle dépend du temps. Spectralement, on a 3 fréquences :



Pour démoduler, on utilise un détecteur d'enveloppe (✍ Krob p215).

☕

Reste plus qu'à le faire !

Questions

- Autre type de modulation que AM ? *En fréquence. La fréquence dépend du signal informatif. Elle est moins sensible au bruit.* Pourquoi elle est moins sensible au bruit ? *Le bruit bouge beaucoup l'amplitude du signal ! Spectralement, ça va.*
- Où est stockée l'information dans les 2 cas ? *Dans AM, c'est dans l'amplitude. Pour FM, c'est dans la fréquence instantanée*
- Quel montage expérimentale en pratique ? *Oscillateur commandé en tension*
- Modulation en amplitude analogique ou numérique ? *Analogique.* En phase ? *Numérique askip.*
- Autre type de modulation que AM ou FM ? *Modulation en phase*
- Différents bruits qui existent ? (cf plus haut)
- C'est quoi le bruit thermique ? *Mouvement brownien dans les résistances. C'est un bruit blanc.*

- Tu n'as pas parlé de filtrage numérique. Des trucs à dire là dessus ? (faut que je lise le ✍ Cottet à ce sujet)
- Différence signal analogique/numérique ? *Analogique : il est continu en temps et valeur. Numérique : signal qui peut prendre deux valeurs 0 ou 1 qui est discret. On cherche à passer de l'un à l'autre dans le numérique et c'est très délicat. On stocke dans des octets le signal que l'on souhaite numérisé.*
- Différence signal numérique ou numérisé ? *Numérisé c'est pas forcément des 0 ou 1 mais est quand même quantifié. Un signal informatique n'est pas un signal numérisé mais un signal numérique.*
- Des questions sur les convention des TF... Conditions d'application de la TF ? *cf plus haut* Ca pose des problèmes pour nous ? *Non les signaux sont bornés.*
- C'est quoi un multiplieur ? *On prend le ln puis on somme et on prend l'exponentielle. C'est un AO avec une diode.*
- Exemple de filtre passe bas ? *RC pour ordre 1*

Remarques

- Lors de l'introduction de la TF, il faut parler du fait que le signal réel est fini.
- La représentation sous forme de créneau d'un signal numérisé est pas vraiment correcte. C'est plutôt des points à des temps discrets.
- Parler des séries de Fourier dans cette leçon c'est important.
- Il faut parler des filtres dans cette leçon
- Manip pour bruit : on allume LED avec signal alternatif (GBF) et en face on met une photodiode qu'on branche sur l'oscillo. En laissant la lumière de la salle allumée, c'est super bruité. Si on fait la TF, on voit un beau bordel. Si on fait la moyenne (avec l'oscillo), ça devient vachement mieux, et encore plus si on éteint la lumière.