LP26 Propagation avec dispersion

15 juin 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L2

Commentaires du jury

Bibliographie

- ✍ *La physique parla pratique*, **Portelli** [1] ⟶ Bien pour définitions et ondes de surface
- ✍ *BUP649* ⟶ ondes de surface
- ✍ *PC-PC**, **Tech et Doc** ⟶ Définitions
- ✍ *Ondes*, **HPrépa** ⟶ Définitions
- ✍ *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs*, **Garing** ⟶ Plasma

Prérequis

- ➢ Ondes électromagnétiques dans le vide
- ➢ Transformée de Fourier

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

Nous avons vu jusqu'à présent uniquement des cas simple de relation de dispersion, du type $k = \frac{\omega}{c}$ comme pour les ondes EM dans le vide par exemple. On peut alors se demander ce qu'il se passe dans un cas où la relation de dispersion est plus complexe. Pour cela, nous allons nous intéresser à l'étude d'un plasma.

1 Introduction de la notion de dispersion par l'exemple du plasma

1.1 Mise en équation

On considère un gaz d'électrons (masse m) et d'ions positifs (masse M) dilué soumis à un champ électromagnétique de la forme $\underline{\vec{E}(z,t)} = \underline{\vec{E_0}}^{-i(\omega t - kz)}$. On suppose ici que la force magnétique est négligeable devant la force électrique (nous y reviendrons plus tard) donc le PDF donne en notation complexe :

$$-i\omega M\underline{V} = e\underline{\vec{E}} \quad - i\omega m\underline{V} = -e\underline{\vec{E}}$$

Le courant de charge $\underline{\vec{j}}$ vaut donc :

$$\underline{\vec{j}} = i\frac{ne^2}{\omega}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \approx i\epsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega}\underline{\vec{E}}$$

où $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}$ est appelée "pulsation plasma". Enfin, pour obtenir la relation de dispersion, on utilise la même méthode que dans le vide en calculant $\vec{rot}\vec{rot}\vec{E}$, ce qui donne :

$$\Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Finalement, en passant en notation complexe, on obtient :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

1.2 Notion de vitesse de phase

On remarque que l'on a deux cas à distinguer. Intéressons-nous d'abord au cas $\omega > \omega_p$. Dans ce cas, $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$. On remarque que si on calcule $\frac{\omega}{k}$, on obtient plus c comme pour les ondes EM dans le vide ! On définit alors la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

Dans notre cas $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}}$. On remarque que cette vitesse dépend de ω. C'est ce que l'on appelle la dispersion.

Définition : on parle de dispersion quand la vitesse de phase dépend de la pulsation.

Le nom de cette vitesse vient tout simplement du fait qu'elle décrit à quelle vitesse la phase se déplace.
Retour sur hypothèse : avec Maxwell-Faraday : $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$ donc $B \approx \frac{E}{v_\phi}$. Donc $\frac{v\wedge\vec{B}}{\vec{E}} \approx \frac{v}{v_\phi} \ll 1$ pour des particules non relativistes.
Si $\omega_p > \omega$, k est imaginaire pure et on voit alors que l'on de ne se propage pas et s'atténue : c'est une onde évanescente. On a réflexion totale. C'est utilisé pour communiquer.

> *Nous venons de voir qu'il existe des cas où la vitesse de phase dépend de ω. Néanmoins, les conséquences de ce résultat ne semble pas évidentes. C'est ce que nous allons chercher à développer dans la seconde partie.*

2 Conséquence d'un milieu dispersif

2.1 Notion de paquet d'onde

Nous avons utilisé jusqu'à présent des ondes planes progressives. Néanmoins, ces ondes n'ont aucune réalité physique. En effet, l'inégalité $\Delta\omega\Delta t > 2\pi$ suppose qu'un onde ayant une pulsation parfaitement définie existe depuis un temps infini, ce qui est impossible. Néanmoins, elles sont un outil mathématique très puissant étant donné qu'elle constitue une base des solutions. On peut alors décrire un signal physique comme une superposition d'OPPM : c'est ce que l'on appelle un paquet d'ondes. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int_R \frac{d\omega}{2\pi}\vec{E}(\vec{k}(\omega))e^{i(\vec{k}(\omega).\vec{r}-\omega t)}$$

$\vec{E}(\vec{k}(\omega))$ représente le poids que l'on donne à l'OPPM de pulsation ω.

2.2 Vitesse de groupe et vitesse de phase

Considérons un paquet d'ondes centré autour de (k_0, ω_0) avec un étalement $\Delta\omega$ autour de ω_0 : on suppose que notre paquet d'onde est piqué. Le caractère dispersif du milieu ne se ressent pas pareil selon les cas. Si $\Delta\omega$ est très faible devant l'échelle de variation typique de k avec ω, alors le paquet d'onde voit un milieu non dispersif. Dans le cas contraire, il ressent la dispersion (**voir p219 du Portelli**).
Le paquet d'onde étant piqué autout de ω_0, on effectue le développement limité suivant :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} \Leftrightarrow \Omega = v_g K$$

avec $\Omega = \omega - \omega_0$, $K = k(\omega) - k(\omega_0)$ et $v_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{\omega_0}$. v_g est appelé vitesse de groupe. Afin de l'interpréter, réinjectons cette expression dans l'expression du paquet d'onde.

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \int \tfrac{d\omega}{2\pi} exp\left[i\left(k_0 x + \tfrac{\partial k}{\partial \omega}(\omega-\omega_0) - \omega_0 t + (\omega_0 - \omega)t\right)\right] \\ &= E_e(x - v_g t)e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \\ &= E_e(x - v_g t)e^{ik_0(x - v_\phi t)} \end{aligned}$$

avec $E_e(x - v_g t) = \int \frac{d\Omega}{2\pi} E(K(\Omega))e^{iK(x - v_g t)}$. On voit alors que le paquet d'onde est en fait une enveloppe qui se déplace à la vitesse v_g dans laquelle on a un signal sinusoïdale donc les fronts se déplacent à v_ϕ. **Animation de Jérémy ?**

Dans le cas d'un milieu non dispersif, $k \propto \omega$ donc $v_\phi = v_g$. Dans un milieu dispersif, les deux vitesses sont identiques et l'enveloppe n'a donc pas la même vitesse que l'onde sinuoïdale qu'elle porte. L'information étant transporté par l'enveloppe, le fait d'avoir $v_\phi > c$ ne pose pas de problème tant que $v_g < c$. Il faut néanmoins bien garder en tête que ces résultats sont valables que si le développement limité est faisable.

2.3 Déformation du paquet d'onde

Pour pouvoir montrer la déformation d'un paquet d'onde il faut prendre en compte l'ordre 2 du développement limité fait plus tôt.

Tous les calculs ou juste un trucs qualitatifs ?

3 Exemple d'application et approfondissement : les ondes de surface

✍ Portelli et BUP649

3.1 Formule de Rayleigh

La formule de Rayleigh s'écrit :

$$v_g = v_\phi - \lambda \frac{\partial v_\phi}{d\lambda}$$

La dispersion est dite normale si $\frac{\partial v_\phi}{d\lambda} > 0$, c'est à dire si les grandes londueurs d'ondes sont plus rapides que les petites. Dans le cas contraire, on parle de dispersion anormale.

Ce phénomène se voit bien avec les ondes de surface.

3.2 Calcul des vitesses

La relation de dispersion s'écrit, pour $\lambda \gg l_c$:

$$\omega^2 = gkth(kh)$$

Dans l'hypothèse d'eau profonde, on trouve $\omega^2 = gk$, ce qui donne :

$$v_\phi = \frac{g}{\omega} = \sqrt{g\lambda} = 2v_g$$

On a une dispersion normale : c'est ce que l'on observe sur la photo.

Dans le régima capillaire :

$$\omega^2 = \frac{\gamma k^3}{\rho} th(kh)$$

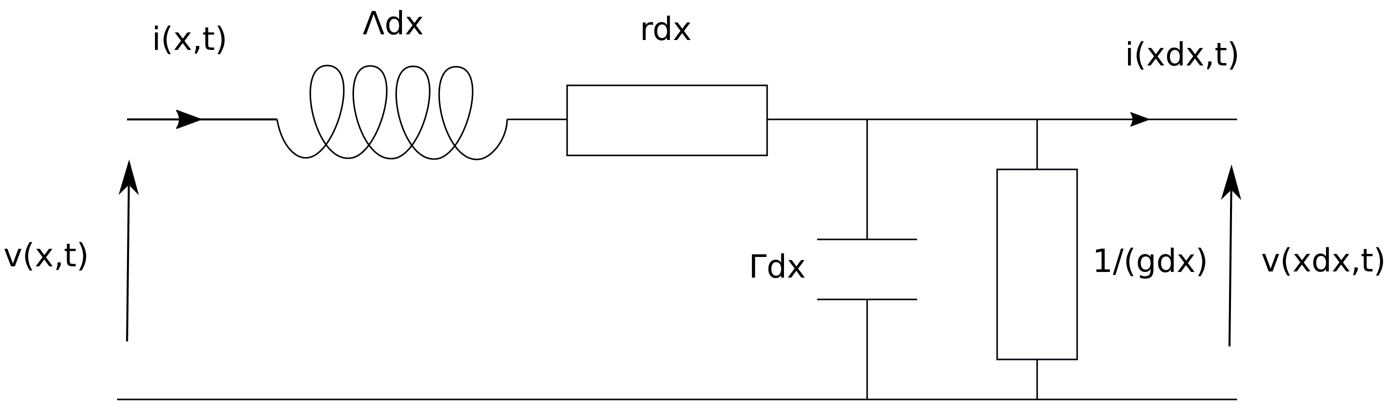
On trouve

$$v_\phi = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\lambda}} = \frac{2}{3} v_g$$

cf l'autre photo

4 Le câble coaxial

4.1 Modèle électrocinétique



Avec loi des noeuds et loi des mailles on a :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -gu - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ri - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$$

Ce qui mène à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma\Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r\Gamma + g\Lambda)\frac{\partial u}{\partial t} + rgu$$

appelée équation des télégraphistes (suivie aussi par i)

4.2 Relation de dispersion

La relation de dispersion obtenue est alors :

$$k^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 + j\omega(r\Gamma + g\Lambda) - rg$$
$$k^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 \left(1 + j\frac{g}{\omega\Gamma}\right)\left(1 + j\frac{r}{\omega\Lambda}\right)$$

On remarque donc que le vecteur d'onde est complexe : on s'attend à avec de la dispersion et de l'atténuation. Néanmoins, la formule comme telle est complexe à étudier. On utilise alors la **condition d'Heaviside** : $\frac{r}{\Lambda} = \frac{g}{\Gamma}$. Il est alors facile de déduire :

$$k = \pm\omega\sqrt{\Gamma\lambda}\left(1 + j\frac{g}{\omega\Gamma}\right)$$

On remarque alors que la vitesse de phase vaut :

$$v_\Phi = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$$

On obtient donc comme résultat que le milieu est non dispersif mais k étant complexe, le l'onde sera atténuer !

Le câble coaxial ayant été largement utilisé au XXème siècle pour transmettre des signaux analogiques. Pour un signal analogique aussi bien la phase que la "forme" du signal est essentiel à l'information. D'où la nécessité de minimiser la dispersion quitte à s'accommoder d'un effet d'atténuation.

Questions

Le lien entre absorption et dispersion est-il général ? Oui, Kramers-Krönig

Pourquoi u(x+dx,t) devient u(x,t) dans la loi des mailles ?

La dispersion a-t-elle un intérêt ? Prismes

Pour le modèle de Lorentz (électron élastiquement lié), que se passe-t-il si les électrons sont considérés comme quantiques ? Pourquoi v est petit par rapport à c pour l'électron ?

Où a-t-on de la dispersion, à part le coax ?

Question d'élève : comment voir la dispersion sans calcul, sans équation ?

Comment mesurer expérimentalement la vitesse de phase et la vitesse de groupe ? Quand on envoie à l'aide d'un GBF via un haut parleur un signal d'une fréquence que mesure-t-on, la vitesse de phase ou la vitesse de groupe ? Et si on frappe dans les mains ?

L'air est-il un milieu dispersif pour les ondes sonores ? Dans le cadre d'un concert que se passe-t-il, qu'entendons-nous si on est tout près, à un mètre, ou à un kilomètre ?

Signification du temps caractéristique dans la relation de dispersion du conducteur ?

Comment démontre-t-on l'expression de la vitesse de phase ? Idem pour la vitesse de groupe ; ne pas faire la démo, mais donner le principe physique qui permet de la faire.

Air vraiment pas dispersif pour les ondes électromagnétiques ?

Cas où k imaginaire pur, quel type d'onde obtient-on ? Est-ce un problème que la vitesse de phase soit supérieure à la vitesse de la lumière ? Onde évanescente

Quelle loi permet d'écrire la première équation pour le cornet acoustique ?

Pourquoi utilise-t-on habituellement une décomposition en séries de Fourier pour caractériser une onde plane et une transformée de Fourier dans le cas d'un paquet d'onde ? Une onde plane est périodique, elle peut se décomposer en séries de Fourier et son spectre est donc discret. Un paquet d'onde n'est pas périodique, et on ne peut pas le décomposer en séries de Fourier. Il faut alors introduire la notion de transformée de Fourier afin de remonter à son spectre continu.

Pourquoi considère-t-on les noyaux immobiles dans le modèle de l'électron élastiquement lié ? La masse d'un électron étant très inférieure à celle d'un noyau, son mouvement peut être négligé. C'est l'approximation de Born-Oppenheimer.

Quelle est l'origine du terme de frottement fluide dans le modèle de l'électron élastiquement lié ? Le terme de frottement fluide est introduit de manière phénoménologique dans le modèle. Il permet de prendre en compte la dissipation par rayonnement de l'électron, ainsi que les collisions dans un gaz ou les interactions avec les vibrations du réseau cristallin dans un solide.

Que représentent les parties réelles et imaginaires d'un vecteur d'onde ? On décompose habituellement le vecteur d'onde de la forme k = k' + ik". Sa partie réelle k' est liée à la dispersion de l'onde, et sa partie imaginaire k00 correspond à l'évolution de son amplitude au cours de sa propagation. Si k"< 0, le milieu est absorbant, c'est le cas de la plupart des milieux. Si k"> 0,le milieu est amplificateur, les cavités laser en sont un exemple.

Comment sont reliés les phénomènes de dispersion et d'absorption ? La partie réelle k' et la partie imaginaire k" d'un vecteur d'onde sont reliées par les relations de Kramers-Kronig.

Est-ce que la vitesse de propagation de l'énergie est toujours égale à la vitesse de groupe ? Non, ce n'est pas le cas lorsque les milieux sont fortement dispersifs et avec un étalement important. La résonance d'une onde dans un diélectrique est un bon contre-exemple, car la vitesse de groupe est alors supérieure à la célérité de la lumière.

Citer un exemple d'onde se propageant dans un milieu dispersif mais pour laquelle sa dispersion est compensée. Un soliton (ou onde solitaire) se propage sans se déformer dans un milieu dispersif à cause des nonlinéarités du milieu. C'est une solution de l'équation de Korteweg-de Vries qui modélise par exemple les ondes à la surface de l'eau dans le cas d'une faible profondeur.

Pour les exemples présentés, la pulsation ω est réelle et le vecteur d'onde k est complexe, est-ce que l'inverse est possible ? Lorsque l'on fixe la pulsation ω d'une onde, on étudie sa propagation dans l'espace en remontant à son vecteur d'onde k, qui peut être complexe. Mais par analogie il serait également possible de fixer son vecteur d'onde k réel, puis d'étudier l'évolution temporelle de l'onde avec sa pulsation ω, qui pourrait être complexe.

Bande passante de l'oscilloscope ? Ca dépend du modèle mais environ 100 MHz.

Exemple de dispersion classique ? Prisme, on peut aussi parler de la ionosphère, chaine de pendules couplés, fibre optique.

Remarques

•