LP27 Propagation guidée des ondes

10 juin 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L2

Commentaires du jury

Bibliographie

- ✍ *Optique*, **Houard** ⟶ des infos intéressantes sur la fibre
- ✍ *Oprtique physique*, **Taillet** ⟶ fibre
- ✍ *Electromagnétisme*, **Pérez** ⟶ guide plan-plan
- ✍ http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/ondes_poly_2015.pdf ⟶ bonne base pour la leçon

Prérequis

- ➢ Optique géométrique
- ➢ Optique ondulatoire
- ➢ Ondes électromagnétiques dans le vide (équations de Maxwell)
- ➢ Relations de passage

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

La propagation d'onde est intéressante car elle équivaut à de la propagation d'informations. Néanmoins, des ondes libres dans l'air s'atténue rapidement à cause de l'atténuation géométrique ! Comment y remédier ? On va essayer de la guide !

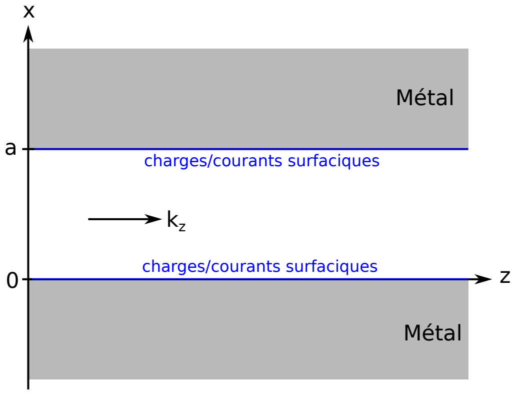
> **Guidage d'ondes ultrasonores**
> On utilise l'émetteur et le récepteur à leur fréquence de fonctionnement optimale. On met pas de guide dans un premier temps : on a un signal ; mais beaucoup plus faible qu'à la sortie de l'émetteur. On rajoute un tube PVC : damn c'est vachement mieux !

Le guidage permet donc de perdre beaucoup moins d'énergie ! Nous allons voir comment cela fonctionne

1 Guide plan-plan

1.1 Positionnement du problème

La première idée que l'on peut avoir pour propager une onde, c'est de la bloquer entre deux plans. On considère donc le cas suivant :



- On considère une onde se déplaçant avec une vecteur k_z selon $\vec{e_z}$
- On suppose que les plans sont infiniements longs selon $\vec{e_y}$
- On suppose que le métal est un conducteur parfait. Cela implique que le champ électromagnétique dans ce dernier est nul, mais il peut y avoir des charges ou des courants surfaciques

On rappelle que dans tous les cas, le champ électrique trangentiel et le champ magnétique normale sont continus. Les conditions aux limites sont donc :

$$\begin{aligned} E_y(x=0^-) &= E_y(x=0^+) = 0 \\ E_z(x=0^-) &= E_z(x=0^+) = 0 \\ B_x(x=0^-) &= B_x(x=0^+) = 0 \end{aligned}$$

Vu qu'il y a invariance selon l'axe O_y, on prendra une champ électrique de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}(x,z)e^{i(\omega t - k_z z)}$$

1.2 Modes TE et TM

On suppose qu'il y a du vide entre les deux plans. Les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday donnent :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= \begin{pmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial_t B_x \\ \partial_t B_y \\ \partial_t B_z \end{pmatrix} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \begin{pmatrix} -\partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ \partial_x B_y \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \partial_t E_x \\ \partial_t E_y \\ \partial_t E_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On voit alors deux jeux découplés d'équations qui ressortent :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial_t B_x \\ \partial_t B_y \\ \partial_t B_z \end{pmatrix}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} -\partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ \partial_x B_y \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \partial_t E_x \\ \partial_t E_y \\ \partial_t E_z \end{pmatrix}$$

- Le **groupe transverse électrique** : E_y, B_x et B_z : connaître E_y permet de déterminer les autrs composantes
- Le **groupe transverse magnétique** : B_y, E_x et E_z : connaître B_y permet de déterminer les autrs composantes

Dans le mode TE (resp TM), le champ électrique (resp magnétique) est transverse à la direction de propagation d'où le nom. La linéarité des équations de Maxwell permet d'étudier chaque cas individuellement, puis de supersposer les solutions.

1.3 Etude des modes TE

On va s'intéresser ici aux modes TE, sachant que l'étude des modes TM est sensiblement identique. Le champ électrique s'écrit donc :

$$\vec{E} = E_0(x) e^{i(\omega t - k_z z)} \vec{e_y}$$

Comme on étudie la propagation d'un onde dans le vite, les champs électriques et magnétiques suivent l'équation de d'Alembert. On obtient donc :

$$\frac{d^2 E_0(x)}{dx^2} - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right) E_0 = 0$$

On distingue alors trois cas, tout en gardant à l'esprit les conditions aux limites $E(0) = E(a) = 0$

- $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 < 0$: on a une combinaison linéaire d'exponentielle... ça s'annulera pas 2 fois
- $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = 0$: fonction linéaire qui s'annule 2 fois... la fonction nulle
- $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 > 0$: on a des sinus ou des cosinus... ça peut s'annuler 2 fois !

La symétrie du problème donne donc :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - k_z z) \vec{e_y}, p \in \mathcal{N}^*$$

On remarque alors que la quantification des modes et le guidage d'onde est assurée par la présence de conditions aux limites ! Quelles sont les propriétés de ces ondes ?

- Si on calcule la relation de dispersion, on a $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2$. Or, pour qu'il y ait propagation, il faut $k_z > 0$, ce qui impose que, pour chaque mode p, on trouve une pulsation de coupure :

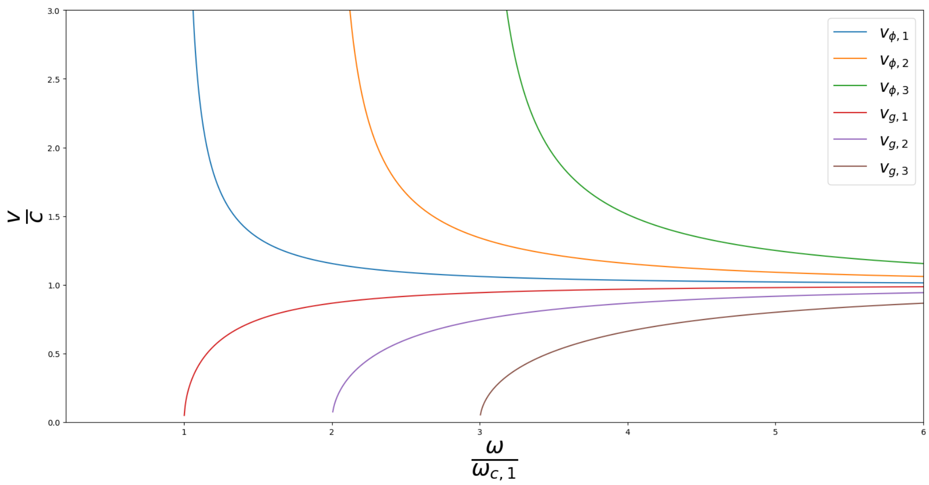
  $$f > f_{c,p} = \frac{pc}{2a}$$

  En particulier, on remarque qu'il y a une fréquence minimale !

  ODG : Pour a= 3cm, ontrouve 5 GHz ($\lambda = 6$ cm.

- **Vitesse de groupe et vitesse de phase :** On voit qu'on a une relation de dispersion de type Klein-Gordon. On a donc :

  $$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c,p}^2}{\omega^2}}}$$
  $$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_{c,p}^2}{\omega^2}}$$



On parle alors de **dispersion intermodale** qui est la différence de vitesse effective entre deux ondes harmoniques et de **dispersion intramodale** qui caractérise la différence de vitesse effective d'un mode fixé. Les conditions aux limites et donc ici le confinement sont la source de ces dispersions !

- **Aspect énergétique :** on peut montrer avec Maxwell-Faraday que le champ magnétique a la forme suivant :

$$\vec{B} = -\frac{E_0 k_z}{\omega}\left[\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - k_z z) + \frac{p\pi}{k_z a}\cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - k_z z)\right]$$

On remarque avec cette expression qu'il n'y a pas de modes TM dans les modes TE ! Ce qui donne pour le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_0 k_z}{2\mu_0\omega}\sin^2\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\vec{e_z}$$

L'énergie se propage donc bien selon $\vec{e_z}$ comme voulu mais sans atténuation ici ! Le but voulu est donc atteint.

Remarque (surement pas le temps) : Le groupe TM contient lui une onde TEM :

$$\vec{B} = B_0 e^{i(\omega t - k_z z)}\vec{e_y}$$
$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - k_z z)}\vec{e_x}$$

Il existe un seul mode TEM. De plus, il existe pas de modes TEM pour un vrai guide d'onde rectangulaire mais il en existe dans les câbles coaxiaux.

1.4 Guide réel

Cette partie est maléable selon le temps disponible.
Bien évidement, un guide d'onde ne peut pas être infini selon une direction en réalité. Il est rectangulaire. En notant b la nouvelle longueur, on a une nouvelle relation de dispersion :

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{q\pi}{a}\right)^2$$

On voit donc apparaitre de nouvelles pulsations de coupure :

$$\omega_{c,p,q} = \pi c\sqrt{\frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{a^2}}$$

ODG : b=6 cm, a=3 cm donc $f_{0,1} = 2.5GHz$, $f_{1,0} = 5GHz$ et $f_{1,1} = 5.6GHz$. On peut donc avoir un guide monomode si

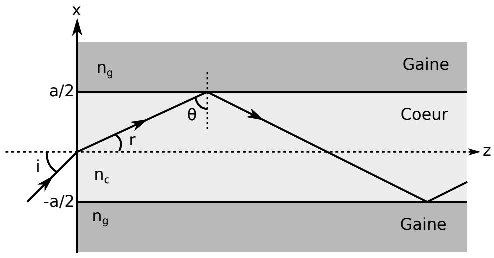
$$\omega_{0,1} < \omega < \omega_{1,0}$$

Néanmoins, la technologie qui est utilisée aujourd'hui, ce ne sont pas les guides rectangulaires, mais les fibres optiques dont vous avez sûrement déjà entendu parler.

2 Fibre à saut d'indices

2.1 Condition de guidage

On considère le cas suivant :



Dans notre cas, on souhaiterait que les rayons lumineux restent dans la gaine. Autrement dit, on veut que

$$n_c \sin\theta > n_g \Leftrightarrow \theta > \theta_{lim} = \arcsin\frac{n_g}{n_c}$$

ODG :

- Fibre optique : $n_g = 1.475$ et $n_c = 1.515 \Rightarrow \theta_{lim} = 13°$
- Filet d'eau dans l'air : $n_g = 1$ et $n_c = 1.33 \Rightarrow \theta_{lim} = 40°$

Cette condition permet de remonter à l'angle minimal d'entrée de la fibre :

$$\sin(i) = n_c\sin(r) = n_c\cos\theta = n_c\sqrt{1-\frac{n_g^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$

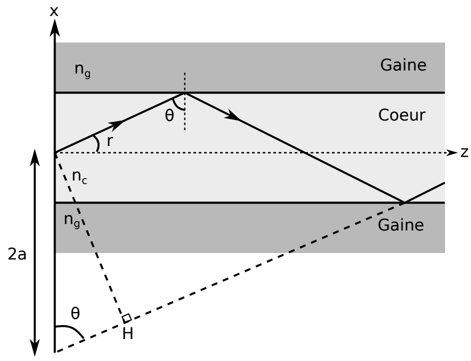
ODG :

- Fibre optique : $n_g = 1.475$ et $n_c = 1.515 \Rightarrow i_{lim} = 20°$
- Filet d'eau dans l'air : $n_g = 1$ et $n_c = 1.33 \Rightarrow i_{lim} = 60°$

On voit donc que le guidage se détermine sur un choix judicieux de conditions aux limites, encore une fois !

2.2 Modes de propagation

Afin de déterminer les modes permis, nous allons ici utiliser une approche interférentielle. On associe chaque rayons lumineux à une onde monochromatique. On a donc propagation d'ondes lumineuses, qui peuvent interférer que manière destructive ou constructive.



A l'aide du théorème de Malus, on déduit la différence de marche :

$$\delta = 2an_c \cos\theta$$

On a donc interférences constructives pour :

$$\frac{2a\cos\theta}{\lambda} = p, p \in \mathrm{Z}$$

Cette relation est particulièrement importante car elle montre que pour un λ fixé, tous les angles d'entrée ne donne pas des interférences constructives. De même, pour un éventail d'angles, seuls quelques longueures d'ondes sont permises. On a donc des modes.

2.3 Etude des modes de propagation

Tout d'abord, on remarque que la fibre est un passe haut en fréquence. En en effet, il faut que l'on vérifié toujours $\cos\theta < \cos\theta_{lim}$, donc :

$$\lambda < \lambda_{lim} = \frac{2a}{p}\cos\theta_{lim} \Leftrightarrow \nu > \nu_{lim} = \frac{pc}{2a\cos\theta_{lim}}$$

On peut donc facilement autoriser un seul mode à circuler.

Vitese de l'onde :

On aimerait maintenant déterminer la vitesse à laquelle se transmet l'on. Tout d'abord, la vitesse parcourue par l'onde vaut :

$$L_{eff} = \frac{L}{\sin\theta}$$

De plus, la lumière ne se propage pas dans le vite mais dans un molieu d'indice n_c donc sa vitesse vaut $\frac{c}{n_c}$. La vitesse finalement ressentie par l'utilisation est donc :

$$c_{eff} = \frac{L}{\frac{L_{eff}n_c}{c}} = \frac{c}{n_c}\sin\theta$$

Ce que l'on peut réécrire :

$$c_{eff,p} = \frac{c}{n_c}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda p}{2a}\right)^2}$$

On remarque en particulier que plus p est grand, plus la vitesse est faible.

ODG : $a = 15\mu m$, $\lambda = 633$ nm

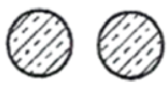
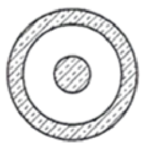
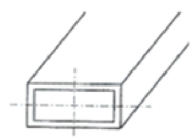
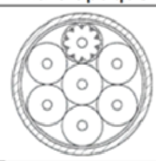
- mode p=1 : $c_{eff,1} = 1.97\ 10^8 ms^{-1}$
- mode p=42 : $c_{eff,2} = 9.90\ 10^7 ms^{-1}$

De plus, on remarque que l'on a un ordre maximal :

$$p_{max} = \frac{2a}{\lambda}$$

ce qui donne 47 dans le cas précédent.

Rajouter ✍ Houard, p 67 s'il y a le temps, sinon tant pis.

	Ligne bifilaire	Ligne coaxiale	Guide d'ondes	Fibre optique
Vue en coupe				
Fréquence d'utilisation	10^9 Hz	10^{10} GHz	3 - 90 GHz	10^{14} Hz
Bande passante	Très faible	12 - 60 MHz	10 GHz	1 GHz
Modes	-	TE, TM, TEM	TE, TM	-
Atténuation	-	-	-0.1 dB/m	-0.01 dB/m
Débit de données	1 communication téléphonique par ligne	Plusieurs centaines de communications	-	10^{10} bits/s

Questions

- Pourquoi y'a moins de bruit dans les fibres ? *Surement grâce au choix des fréquences (lien avec le rayonnement)*
- C'est quoi comme matériaux les fibres optiques ? *Plastiques ou SC.* C'est quoi le risque avec le plastique ? *On risque de modifier les indices de la fibre en la courbant (biréfringence)*
- Dans les circuits électriques, on est obligé de réamplifier régulièrement. C'est fait comment (avec quoi surtout) avec les fibres optiques ? *Fibre optique dopée pour faire de l'excitation stimulée avec l'onde incidente.*
- Comment est codé un signal dans les fibres optiques ? *Des pulses pour faire des 0 et des 1.*
- Le modèle pour la fibre optique il faut bien l'expliquer.
- C'est quoi le problème des monomodes vu que la densité de puissance est plus grande ? *Non linéarité*
- Fibre monomode bcp utilisé pour épurer les faisceaux (en filtrer que le mode que l'on veut)
- Définis dispersion intra et inter modale
- Un exemple de guidage avec un seul plan ?
- Est-ce que c'est logique (physiquement) qu'à haute fréquence, v_g tende vers c ? *Longueur d'onde devient très petite devant le guide du coup on a l'impression d'être dans un truc infini.*
- Perte possible dans le guide plan-plan ? *Conducteur réel : dissipation par effet Joule dans les conducteurs*

Pas mal de question sur des analogies entre la leçon et la mécanique quantique : donner la relation de dispersion pour un électron en propagation libre. Exemple du confinement de l'électron qui implique de la quantification (comme pour le guide). Le fait que la vitesse de groupe soit inférieure à c implique-t-il que le photon a une masse ? (Il voulait que je lui parle de la théorie de Broca . . .) et enfin connaissez vous l'effet Casimir et pouvez vous l'interpréter ?

Guide d'onde monomode : ça sert à quoi ? Comment le résout-on, approche géométrique ou ondulatoire ?

Autre type de dispositifs à gradient d'indice ?

Comment procède-t-on en pratique pour transporter de l'information ?

Quelle structure a le champ ELM dans une fibre optique à saut d'indice ?

Vous avez présenté une condition de guidage issue de l'optique géométrique (réflexion totale), que devient cette condition dans un modèle ELM ?

Vous avez mesuré une vitesse de propagation dans un câble coaxial, pourquoi cette vitesse est-elle inférieure à la vitesse des ondes ELM dans le vide ?

Pouvez-vous donner les grandes étapes du calcul de la fréquence de coupure d'un mode (non fondamental) dans un câble coaxial ? Quelle est l'origine physique de cette fréquence de coupure ?

Dans le guide d'onde rectangulaire (hyperfréquence), vous vous êtes intéressé à un mode transverse électrique. Existe-t-il d'autres solutions, et dans ce cas, donner les directions du champ E et du champ B ?

Vous avez parlé de polarisation, l'onde incidente est-elle toujours polarisée ? Comment traite-t-on alors le problème ?

Pour le câble coaxial, vous avez dit vous placer dans l'ARQS, pourtant vous parlez de propagation. N'est-ce pas contradictoire ? En fait, on est plus dans l'ARQS comme on veut étudié une propagation. A la place on utilise le modèle des constantes réparties pour le câble coaxial.

Autres domaines de la physique dans lesquels on retrouve de la propagation guidée ?

Pertes par effet Joule dans le câble coaxial ?

Comment expliquer simplement à un élève de seconde que les pertes par effet Joule augmentent avec la résistance, alors qu'ils connaissent la relation P = U*U/R ? Effet joule dû au mvt des électrons donc on garde le courant constant.
Quand on augmente R, U^2 augmente en R^2.

Dans le guide d'ondes assimilé à un conducteur parfait, pourquoi Bint=0 ?

Avantages de la fibre à gradient d'indice par rapport à celle à saut d'indice ?

Remarques

- Vecteur d'onde est un terme réservé aux OPPS !