LP29 Ondes electromagnetiques dans les milieux conducteurs

10 juin 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L2

Commentaires du jury

Bibliographie

✍ *Physique des solides*, **Aschcroft** [1] ⟶ Modèle de Drude, RSF et ODG
✍ *Cap prépa PSI* ⟶ Il y a tout !

Prérequis

➢ Equations de Maxwell

➢ Force de Lorentz

➢ Diffusion

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

Une définition simple des conducteurs est : un milieu qui permet des transfert de charges. (En réalité, la définition est plus complexe et fait appel à la théorie des bandes.) Il sont très utilisés au quotidien : on peut prendre pourexemple la paroi du micro-onde qui évite aux ondes à l'intérieur de se propager à l'extérieur.

Nous avons déjà vu auparavant les équations de Maxwell, qui couplent le champ électro-magnétique aux caractéristiques du milieu (courant et charge). On va maintenant essayer de relier les caractéristiques des conducteurs au champ électro-magnétique afin de déterminer l'évolution de ce dernier. Nous allosn développé cette leçon autour d'un exemple particulier : les métaux.

1 Mise en équation

✍ Un mélange du Aschcroft et du Cap Prépa

1.1 Modèle de Drude

Nous avons déjà pu voir la loi d'ohm en régime stationnaire : $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Qu'en est-il lorsque le champ électrique est de la forme $E(M,t) = \mathcal{R}\rceil(E_0 e^{i\omega t})$ donc lorsqu'il est variable ?

Nous allons utiliser ce qu'on appelle le modèle de Drüde. Dans ce modèle, on suppose que le métal peut être considéré comme des ions fixes entourés d'un nuage d'électrons dont la densité vaut n. Les intéractions entre les électrons sont négligés mais les intéractions entre un électron et les ions fixes du réseau sont représentés par une force de frottement fluide :

$$\vec{F_f} = -\frac{\vec{p}}{\tau}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué sur un électron donne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{\vec{p}}{\tau}$$

Comparons l'importance des deux termes de la force de Lorentz :

$$\frac{|\vec{v} \wedge \vec{B}|}{|\vec{E}|} \approx \frac{v}{c} \ll 1$$

Autrement dit, on fait l'approximation non relativiste. Vérifions que cela semble cohérent à l'aide de la formule $\vec{j} = -ne\vec{v}$. Pour un courant de 1A traversant un fils de section 1mm^2, on obtient une vitesse de $v \approx 0.1cm/s \ll c$. La force magnétique est donc negligeable. Il reste donc :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{\vec{p}}{\tau}$$

On remarquera que l'on considère le champ électrique comme constant spacialement. Cela suppose que les variations du champ sont faibles à l'échelle atomique, autrement dit $\lambda \gg 10^{-10}m$. En RSF, on a donc :

$$\vec{p} = \frac{-eE}{1 - i\omega\tau}$$

Puis, avec la relation $\vec{j} = -ne\frac{\vec{p}}{m}$, on trouve finalement une nouvelle relation entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$:

$$\vec{j} = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}\vec{E} \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

Pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, on retrouve en fait le cas stationnaire que l'on connaissait déjà. Pour $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, les électrons n'arrivent plus à suivre et on s'attend alors à $\sigma \to 0$.

ODG : Pour le cuivre, $n \approx 10^{-29}$, $\tau \approx 10^{14}$ et $\sigma_0 = 59.6.10^6 S.m^{-1}$

1.2 Electroneutralité

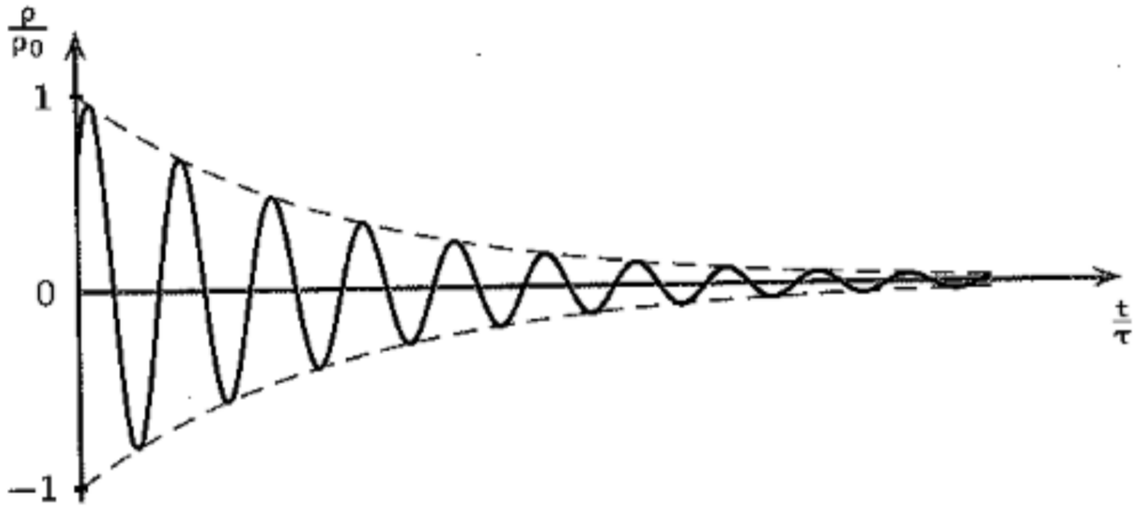
Maintenant qu'on connait $\vec{j}$, il nous reste encore à déterminer ρ. Bien entedu, l'électroneutralité globale reste vrai, mais les équations de Maxwell sont locales, donc on doit d'intéresser à l'électroneutralité locale. Pour cela, on part de

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0$$
$$\vec{j} = \sigma(\omega)\vec{E}$$
$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

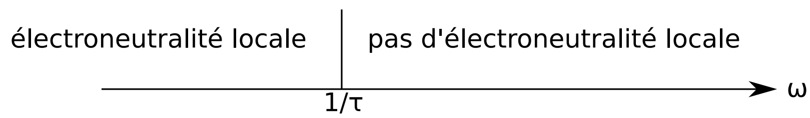
Un peu de calculs mène à :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{ne^2}{m\epsilon_0}\rho \leftrightarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\omega_p}{Q}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0$$

avec $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$ et $Q = \omega_p \tau$. La densité locale de charge se comporte donc comme une oscillateur harmonique amorti. On peut calculer que l'on a $\omega_p \approx 10^{16} rad.s^{-1}$ et donc $Q \approx 100$. Autrement, en environ 100 oscillations à la pulsation $10^{-16} rad.s^{-1}$, la charge tend vers 0.



Pour $\omega < \omega_{EN} = 10^{14} rad.s^{-1}$, le milieu pour être considéré comme localement neutre.

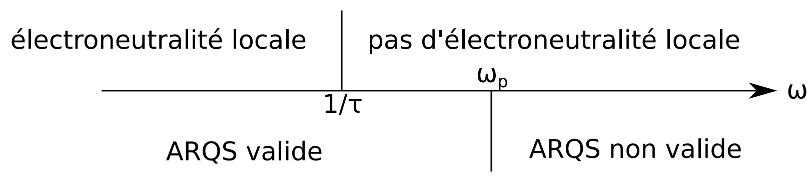


1.3 ARQS

Il reste encore une simplification des équations de Maxwell qui est possible mais dont nous n'avons pas encore parlé : l'ARQS. On cherche à savoir quand les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de charges. Autrement dit, on veut savoir quand :

$$\left|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right| \ll |\sigma_0 \vec{E}| \leftrightarrow \frac{\sigma_0}{|1 + i\omega\tau|} \gg \epsilon_0 \omega$$

Afin se simplifer l'étude, supposons $\omega \gg \frac{1}{\tau}$. On a alors la condition $\omega \ll \omega_p$. Autrement dit, la situation se résume ainsi :



Nous venons de voir que selon le domaine de fréquence dans lequel on se place, la physique n'est plus la même. Nous allons donc consacrer la suite de la leçon à explorer le comportement des différents domaines envisageables.

2 Cas des basses fréquences

A basse fréquence, la conductivité ne dépend plus du métal. On peut donc se permettre d'écrire $\vec{j}(t) = \sigma_0 \vec{E}(t)$!

2.1 Equations de Maxwell

Dans le domaine des basses fréquences, nous avons à la fois l'ARQS et l'électroneutralité ! Les équations de Maxwell s'écrivent donc :

$$\begin{array}{cc} div\vec{E} = 0 & div\vec{B} = 0 \\ r\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array}$$

En utilisant $r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{E}$, on trouve :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On reconnait là une équation de diffusion ! C'est assez inhabituel en électromagnétisme.

2.2 Effet de peau

On cherche le comportement d'une OPPH de la forme

$$\vec{E}(z,t) = E(z) e^{i\omega t} \vec{u_x}$$

pénétrant dans un métal en z=0 (schéma au tableau). L'équation de diffusion devient donc :

$$\frac{d^2 E}{dz^2} = i\omega \mu_0 \sigma_0 E(z)$$

dont la solution est de la forme :

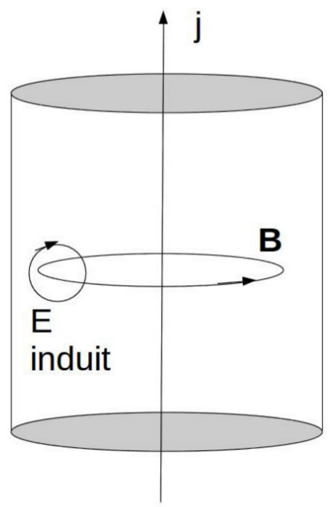
$$E(z) = Ae^{(1+i)\sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}} z} + Be^{-(1+i)\sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}} z}$$

Afin que la solution ne diverge pas , on impose A=0. La continuité tangentielle du champ impose $B = E_0$. Finalement, la solution en notations réelles est :

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$$

où δ est l'épaisseur de peau. Elle représente la distance caractéristique sur laquelle l'onde se propage. (Schéma surement)

Si y'a le temps :



Nous considérons tout d'abord un champ électrique moteur uniforme dans le conducteur, oscillant dans le temps. Il génère alors un courant axiale, qui produit un champ magnétique orthoradial oscillant.
Ce champ magnétique oscillant produit alors, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, un champ électrique qui lui "tourne autours" (voir schéma). Ce champ électrique induit s'oppose alors au courants au centre du conducteur, et les renforce sur la périphérie : c'est l'effet de peau.

Application :

- Le micro-onde : f= 2 450 MHz $\rightarrow \delta = 8\mu m$. Une très fine épaisseur de conducteur empêche donc les ondes de sortir du micro-onde
- Résistantce électrique : selon la fréquence, la section qui est vraiment traversée par un courant change. Ainsi $R = \frac{L}{\sigma_0 S'}$ avec $S' = 2\pi a\delta$ à haute fréquence.

2.3 Aspect énergétique

Mouai faut voir le temps qui reste là hein
La puissance dissipée par effet Joule vaut :

$$P = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\vec{j}.\vec{E}^*) = \frac{\sigma_0}{2}|\vec{E}^2|$$

Il y a donc dissipation d'énergie. Elle est décroissante exponentiellement dans le matériau.

3 Domaines des hautes fréquences

On se place maintenant dans le cadre $\omega > \frac{1}{\tau}$. L'électroneutralité n'est donc plus vérifiée et on a par conséquent $div\vec{E} \neq 0$. On va donc simplifer l'étude en ne consédérant ici que des OPPH **transverse**. Cela permet d'avoir $div\vec{E} = 0$. La conductivité vaut donc maintenant $sigma(\omega) = -\frac{ine^2}{m\omega} \leftrightarrow \vec{E})\frac{m}{ne^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$.

3.1 Equations de Maxwell

L'ARSQ n'étant plus forcément vérifiée, les équations de Maxwell sont :

$$\begin{array}{cc} div\vec{E} = 0 & div\vec{B} = 0 \\ \vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \vec{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array}$$

On calcule de la même manière que précédement pour trouver cette fois-ci :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{w_p^2}{c^2}\vec{E}$$

3.2 Equation de Klein-Gordon

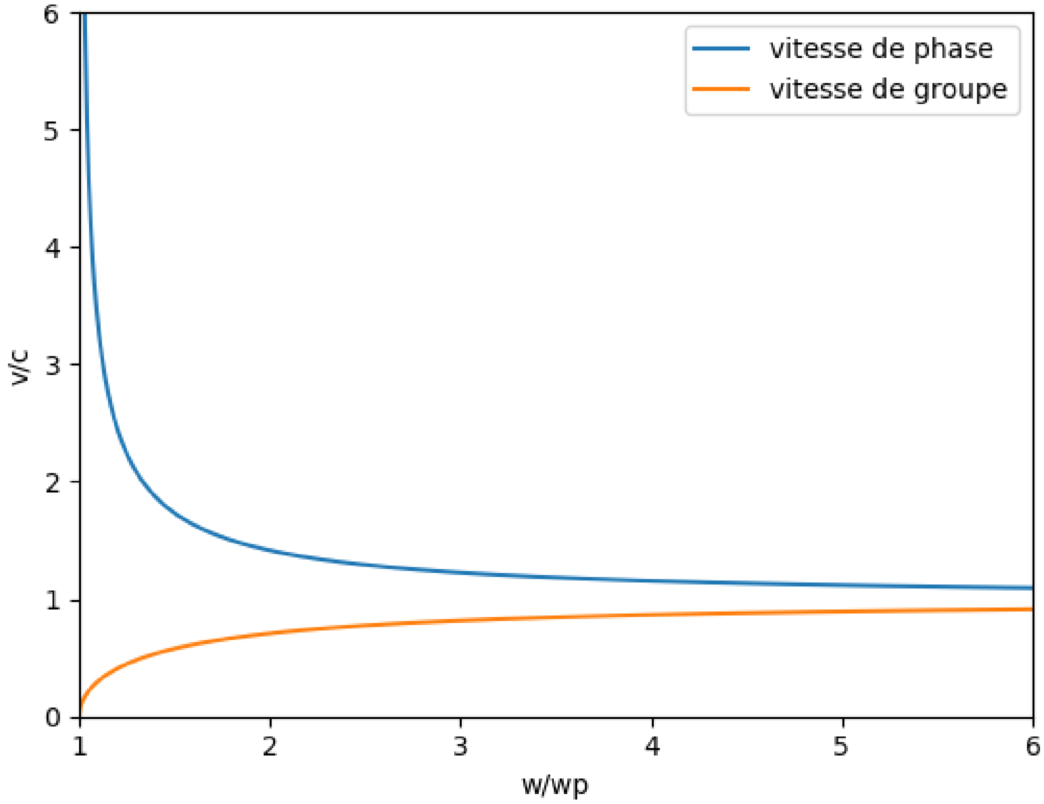
La relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

est appellée équation de Klein Grodon. Il faut distinguer deux cas :

- $\omega < \omega_p$, alors k est un imaginaire pur et l'onde est évanescente
- $\omega > \omega_p$, alors k est réel et vaut $k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$. La vitesse de phase vaut $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$ et la vitesse de groupe $v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. Le fait que $v_\phi > c$ ne pose pas de problème vient du fait que l'énergie se propage à v_g.

En somme, le milieu se comporte comme un passe haut qui ne laisse pénétrer que les pulsations supérieures à ω_p.



Application : les rayons X traversent les métaux !

3.3 Aspect énergétique

P=0 car il y quadrature de phase entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$

Conclusion

Nous avons développé un modèle qui permet de comprendre la propagation des ondes dans un milieu conducteur spécifique : les métaux. Cela permet de voir plusieurs régimes différents et plusieurs phénomènes observables. Néanmoins, il faut rester conscient du fait que les métaux ne sont pas les seuls conducteurs. L'équation de Klein-Gordon se retrouve aussi dans l'étude de la ionosphère et a une application directe : la communication.