LP31 Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat

12 juin 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L3

Commentaires du jury

2017 : Les applications à des systèmes optiques réels sont trop souvent absentes de cette leçon.

Jusqu'en 2013, le titre était : ***Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat. Exemples.***

2014 : La leçon doit illustrer ce que le principe de Fermat apporte de plus que les lois de la réfraction et de la réflexion. Les analogies avec d'autres principes variationnels sont appréciées.

2013 : La leçon doit illustrer ce que le principe de Fermat apporte de plus que les lois de la réfraction et de la réflexion.

Bibliographie

✍ *Optique géométrique*, **BFR** [1] ⟶ Le cours
✍ *Optique physique*, **Taillet** ⟶ Cours
✍ *Optique*, **Perez** ⟶ Pareil
✍ *Optique géométrique : Cours. Tome 1*, **Maurel** ⟶ Synthétise bien (mais trop)

Prérequis

➢ Principe de moindre action

➢ Optique géométrique

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

Vous avez déjà eu l'occasion de faire de l'optique géométrique plus jeunes, sans forcément démontrer les relations énoncées. Nous allons dans cette leçon trouver un principe de base pour l'optique géométrique (le principe de Fermat) à partir duquel nous allons reconstruire l'optique géométrique.

1 Le principe de Fermat

1.1 Approximation du rayon lumineux

Nous allons considérer la lumière comme des rayons lumineux. Afin que cela soit vérifié en réalité, il faut que la taille typique des objets recontrés (ou de leurs variations), soit telle que :

$$\lambda \ll D$$

Pour des objets tels que des lentilles ou des miroirs, dont la taille est supérieure au centimètre, cette approximation est largement vérifiée. De plus, il faut que les milieux que l'on considère soient transparents bien entendu.

L'électromagnétisme nous permet de savoir que regarder un rayon lumineux, c'est regarder son vecteur de Poynting. On ne regarde en fait dans notre étude que le vecteur de Poynting et sa direction. Cette vision des choses ne peut pas être réaliste car on suppose que la lumière est un rayon infiniment fin donc la densité d'énergie serait infinie.

Quel chemin emprunte ces rayons ?

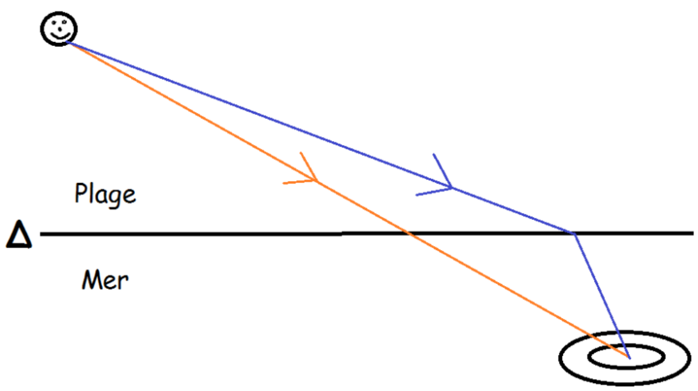
1.2 Notion de chemin optique

Afin de déterminer cela, il va falloir un principe qui est le principe de Fermat. Il stipule que pour aller d'un point A à un point B, le chemin emprunté est le plus rapide. On rappelle que la vitesse de la lumière dans un milieu d'indice n vaut $v = \frac{c}{n}$. On définit alors le chemin optique :

$$(AB) = \int_A^B n \; \mathrm{d}s$$

tel que le temps que mette un rayon lumieux pour aller de A à B s'exprime simplement par $t = \frac{(AB)}{c}$. Le problème qui se pose est alors : comment minimiser cette grandeur.

Dans la vie de tous les jours, un maitre nageur en bord de côte peut se retrouver confronter à cette question.



En effet, le sauveteur qui veut aller sauver la personne qui se noie sait qu'il avance beaucoup moins vite dans l'eau que sur la plage (même si courir dans le sable c'est difficile). Il a donc tout intérêt à minimiser la distance à faire dans l'eau. Mais quel est le juste milieu ?

Pour minimiser des choses on a un principe très bien : les principes variationnels

1.3 Énoncé du principe de Fermat

Les principes variationnels en physique reposent sur l'hypothèse qu'une certaine quantité reste stationnaire lors de l'évolution du système. C'est un principe qui cherche donc à minimiser une quantité physique afin d'apporter des informations. On définit alors une action à minimiser, qui est l'intégrale d'un Lagrangien :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

La condition de minimisation de l'action aboutit aux équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Il faut donc déterminer ce que l'on cherche à minimiser. Dans notre cas, on le sait : c'est le temps de trajet... Donc en fait on a déjà l'action !

	Optique géométrique	Mécanique
Lagrangien	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - U$	n
Action	$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}mv^2 - U$	$S = \int_A^B n\ \mathrm{d}s = \int_a^b n(\vec{r})\lvert\dot{\vec{r}}\rvert \mathrm{d}t$

Il est possible avec ce principe de redémontrer les lois de l'optique géométrique ! Let's go !

2 Lois de l'optique géométrique

2.1 Milieu homogène isotrope

Dans le cas d'un milieu homogène isotrope, l'indice ne dépend plus du point considérer et donc :

$$L(AB) = n\ AB$$

Le trajet le plus rapide est donc la ligne droite allant de A vers B. On retrouve donc le fait qu la lumière se propage en ligne droite dans un milieu homogène isotrope !

2.2 Retour inverse de la lumière

On aimerait retrouver le fait que la lumière emprunte le même chemin pour A→B que pour B→A.

$$L(BA) = \int_B^A n\mathrm{d}s' = \int_A^B n\,(-\mathrm{d}s')$$

En notant ds=-ds' l'élément curviligne allant de A vers B :

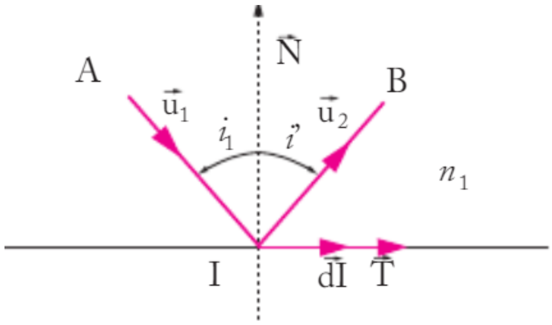
$$L(BA) = \int_A^B n\mathrm{d}s = L(AB)$$

L'action étant la même, sa minimisation donne le même résultant et on trouve donc que **le trajet parcouru par le lumière est indépendant du sens emprunté.**

2.3 Lois de Snell-Descartes

Il y a 2 choses à montrer : la loi de réflexion et la loi de réfraction.

- **Loi de réflexion :**



Le but est de trouver le point I tel que L(AB) soit minimale.

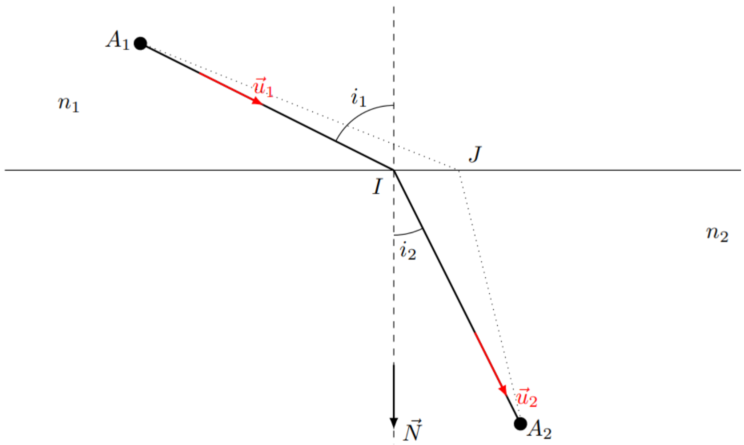
$$dL(AB) = 0 \Leftrightarrow dL(AI) + dL(IB) = 0$$
$$dL(AB) = nd(AI) + nd(IB) = n(\vec{u_1} - \vec{u_2}).\vec{dI} = 0$$

Le vecteur de déplacement $\vec{dI}$ est selon $\vec{T}$. Donc en exprimer selon les sinus, on trouve (on peut aussi dire que du coup le résultant est selon $\vec{N}$ ainsi on a le fait que c'est **contenu dans le plan** !!!) :

$$\sin i = -\sin i' \Leftrightarrow i = -i'$$

On retrouve la loi de la réflexion.

- **Loi de réfraction :**



On utilise la même méthode et on trouve :

$$dL(AB) = (n_1\vec{u_1} - n_2\vec{u_2}).\vec{dI} = 0$$

On en déduit que $n_1\vec{u_1} - n_2\vec{u_2}$ est colinéaire à $\vec{N}$ donc la **réfraction se déroule dans le plan formé par la normale du dioptre et le vecteur directeur du plan incident**. En utilisant les sinus, on obtien :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

2.4 Théorème de Malus

✍ BFR, Perez

Revenons sur un aspect du caractère ondulatoire de la lumière. On considère deux surfaces d'ondes Σ_A et Σ_B infiniment proches. Avant Σ_A, le milieu est d'indice n_1 mais entre les 2 surfaces d'onde, il est d'indice n_2.

2.5 Retour rapide sur le stigmatisme

La définition du stigmatisme rigoureux est la suivant : soit un objet A dont un fait l'image par un système optique. Son image A' par ce système optique est rigoureusement stigmatique si tous les rayons issus de A passent par A'. On veut donc :

$$L(AA') = cste$$

On s'est limité à des milieux linéaire homogène isotrope. Voyons ce qu'il en est des milieux non homogène.

3 Propagation en milieu non homogène

3.1 Eikonale

On rappelle que $\int_a^b n(\vec{r})|\dot{\vec{r}}|\mathrm{d}t$ avec ds=$|\dot{\vec{r}}|\mathrm{d}t$. L'équation d'Euler-Lagrange donne :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}$$
$$\Leftrightarrow |\dot{\vec{r}}|\vec{\nabla}n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(n\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}\right)$$

Avec ds=$|\dot{\vec{r}}|\mathrm{d}t$:

$$\vec{\nabla}n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right)$$

On l'écrit en générale avec $\vec{u} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}$ le vecteur directeur du rayon.

EQUATION DU RAYON LUMINEUX

$$\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \vec{\mathrm{grad}}\, n \quad (1) \qquad \vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$a = \frac{s}{n} \qquad da = \frac{ds}{n}$$

$$\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{da}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{da^2}$$

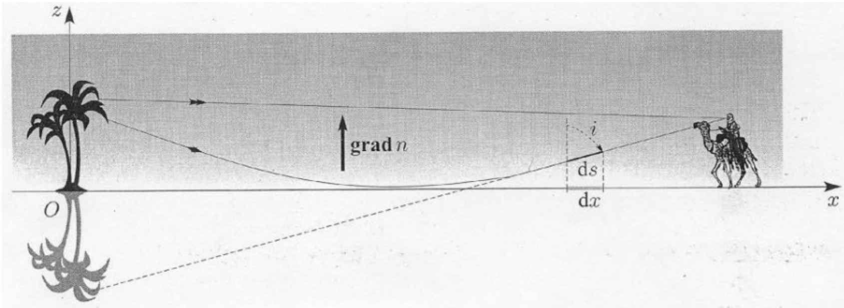
$$(1) \longrightarrow \boxed{\underbrace{\frac{d^2\vec{r}}{da^2}}_{\text{“accélération”}} = n\,\vec{\mathrm{grad}}\, n = \underbrace{\vec{\mathrm{grad}}\left(\frac{n^2}{2}\right)}_{\text{“}\vec{F}/m\text{”}}}$$

3.2 Mirages

✍ Houard p.46 pour de belles explications et expérience, Perez pour le calcul
Il existe différents types de mirages :

- **Les mirages supérieurs :** On a l'impression que l'objet se trouve dans le ciel. Il s'agit du cas où le haut est plus chaud que le bas

- **Les mirages inférieurs :** c'est le cas inverse. On voit alors des images renversées !



On va s'intéresser à celui que l'on croise le plus. Pour un gaz, l'indice évolue selon la loi de Galdstone : (n-1)$\propto$ ρ. Si on considère en plus que le gaz est parfait : (n-1)$\propto$ T^{-1}. Typiquement, l'été, les routes sont plus chaudes que l'air, ce qui provoque un gradient d'indice. Une modélisation possible :

$$n(z) = az + b$$

On a :

$$\vec{\nabla} n = \frac{d}{ds}\left(n(z)\frac{d\vec{r}}{ds}\right)$$

Cherchons le gradient d'indice :

$$\frac{\partial\left(n^2\right)}{\partial z} = 2n\frac{\partial n}{dz} = a$$

Donc :

$$\vec{\nabla} n = \left(0, 0, \frac{a}{2n}\right)$$

En notant θ l'angle que fait le rayon avec la verticale :

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$$

Selon x on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}(n\sin\theta) = 0$$

Selon z :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(n\cos\theta) = \frac{a}{2n}$$

Avec $\cos\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{dx}{dz}}$,

$$\frac{d}{ds}(n(z)\cos\theta) = \frac{d}{ds}\left(n(z)\sin\theta\frac{dz}{dx}\right) = n(z)\sin\theta\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{dx}\right) = n(z)\sin\theta\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{dx}{ds} = n(z)\sin^2\theta\frac{d^2z}{dx^2}$$

Ce qui donne :

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{a}{2n^2(z)\sin^2\theta} = \frac{aK}{2}$$

Equation typique d'une parabole qui se courbe selon le signe de a et donc le gradient de température.

Questions

- A un moment t'as fais un dessin avec une interface courbe puis un autre avec une interface plane. Tu peux justifier ? *Rayon de courbure petit devant λ du coup localement plan*
- T'as dis avec démontrer les lois de Descartes mais y'avait pas tout. C'est quoi les lois complètes ? *Reste dans le même plan*
- C'est quoi les approx pour l'Eikonale ? *Distance de variation de l'indice grande devant λ*
- T'as parlé de méthodes variationnelles... tu connais la théorie pour ce que tu as fait ? *non...*
- Pourquoi l'indice augmente avec la concentration ? C'est quoi un indice optique ? Tu peux nous définir ϵ ?

Remarques

- Faire une sous partie pour introduire les différentielle de chemin optique en milieu homogène ? C'est sûrement mieux pédagogiquement
- Pour démontrer l'Eikonale on peut aussi faire selon x avec $L = \int_A^B n(x, y, z)(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z})^{1/2} dt$ puis généraliser en 3D.
- Commentaire du jury : il faut une analogie.