

LP31 — Présentation de l'optique géométrique par le principe de Fermat

1^{er} Octobre 2015

« La plus belle théorie n'a de prix que par les œuvres où elle s'accomplit. »

Romain BERTHELARD & Paul EPRON

ROMAIN ROLLAND

Niveau : 1^{er} cycle universitaire

Pré-requis

- Lois et phénomènes classiques de l'optique géométrique dans des milieux homogènes.
- Lois de la mécanique newtonienne.
- Optique ondulatoire.
- Ondes électromagnétiques.

Bibliographie

- | | |
|--|---|
| ⚡ <i>Dictionnaire de physique</i> ; Taillet, Villain, Febvre | Toujours utile pour les définitions et l'énoncé précis des principes, lois, théorèmes. |
| ⚡ <i>Optique : fondement et application</i> ; J-P. Pérez | Le grand classique, la plupart des démonstrations mathématiques s'y trouvent et sont assez claires. |
| ⚡ <i>Optique : une approche expérimentale et pratique</i> ; S. Houard | Pour les explications détaillées des phénomènes et contient des pistes pour les manipulations classiques. |

Commentaires du jury

Il faut mettre l'accent sur le fait que le principe de Fermat a un caractère variationnel. Les analogies avec d'autres principes du même type sont assez appréciées (comme souvent en physique de manière très générale : dès qu'on peut faire des analogies on ne s'en prive pas !). De plus, on ne peut pas se contenter de redémontrer les lois de réfraction et de la réflexion sans aller plus loin dans les conséquences qu'a le principe de Fermat en optique.

Table des matières

I	Le principe de Fermat	3
I.1	Première approche du rayon lumineux	3
I.2	Principes variationnels et principe de Fermat	4
I.3	Énoncé du principe de Fermat	4
II	Retrouver les lois de l'optique géométrique	5
II.1	Trajet de la lumière dans un milieu homogène isotrope	5
II.2	Retour inverse de la lumière	5
II.3	Lois de Snell-Descartes	6
II.4	Lois de la réflexion	7
II.5	Bref retour à l'optique ondulatoire	7
II.6	Théorème de Malus	8
II.7	Stigmatisme	8
II.8	Relation de conjugaison d'un dioptre sphérique	8
III	Les rayons lumineux dans des milieux non homogènes	9
III.1	L'équation fondamentale de l'optique – Analogie avec la mécanique	9
III.1.1	Établir l'équation fondamentale	9
III.1.2	Analogie avec la mécanique	9
III.2	Mirages	10
III.3	Fibre optique	11
III.3.1	Présentation d'une fibre	11
III.3.2	Fibre à gradient parabolique	11
III.3.3	Ouverture numérique	12

Notations

Symbole	Grandeur physique
λ	longueur d'onde
n	indice optique
v	vitesse de la lumière dans un milieu
c	célérité de la lumière dans le vide
ε_0	permittivité du vide
μ_0	perméabilité du vide
\vec{E}	champ électrique
\vec{B}	champ magnétique
L	chemin optique
i_1	angle d'incidence
i_2	angle de réfraction
\mathcal{C}	courbe (chemin)
s	abscisse curviligne
\vec{r}	position
δX	petite variation de la quantité X
\bar{X}	valeur algébrique de X
t	temps
$\vec{\nabla}$	opérateur gradient

Introduction

⚡ Dictionnaire de physique

L'optique est la branche de la physique qui décrit les phénomènes relatifs à la lumière. Comme tout domaine de la physique, la description de ce phénomène nécessite une modélisation. Plusieurs approches ont été développées, toutes avec leurs avantages et leurs inconvénients selon le domaine d'étude.

- On considère que la lumière est une onde électromagnétique. L'optique est alors une sous-branche de l'électromagnétisme. Cette approche peut vite conduire à des calculs très lourds pour décrire des phénomènes simples (exemple : la réfraction).
- On considère que la lumière est une onde que l'on considère selon le modèle scalaire. Aucune hypothèse n'est faite sur sa nature. On parle d'**optique ondulatoire**. Cette approche décrit très bien les phénomènes d'interférences et de diffraction.
- On décrit la lumière à l'aide de rayons lumineux. C'est l'**optique géométrique**.
- Si des phénomènes quantiques interviennent, on a recours à l'**optique quantique**.

Dans la mesure où les hypothèses classique de l'optique géométrique sont vérifiées, c'est un outil d'une efficacité redoutable pour la description des effets lumineux. Elle a été développée entre le XI^{ème} siècle et le XVIII^{ème} siècle mais demeure largement d'actualité. On verra dans cette leçon que l'optique géométrique peut être retrouvée à partir d'un principe variationnel (le principe de Fermat) duquel nous allons partir afin de déduire les propriétés auxquelles nous sommes familiers et expliquer des phénomènes classique de propagation de la lumière.

I Le principe de Fermat

I.1 Première approche du rayon lumineux

⚡ Dictionnaire de Physique

Le rayon lumineux est au centre de la description des phénomènes optiques par le biais de l'optique géométrique. Il matérialise la région de l'espace qui est traversée par la lumière par un pinceau très fin. Dans cette considération, on exclut tout phénomène de diffraction, ce qui amène à considérer une première hypothèse importante pour travailler en optique géométrique :

Si on note D la plus petite dimension géométrique impliquée pour les obstacles et les diaphragmes que va rencontrer une radiation lumineuse de longueur d'onde λ , on peut négliger les phénomènes de diffraction si on vérifie la condition :

$$\lambda \ll D$$

Dans la pratique, les dimensions de systèmes optiques comme des lentilles ou des miroirs sont de l'ordre de la dizaine de centimètres (voire du mètre pour des montages de grande envergure), tandis que la longueur d'onde la lumière visible est de l'ordre du micromètre. La condition est donc vérifiée.

D'autre part, du point de vue de l'électromagnétisme, considérons le vecteur de Poynting pour le champ électromagnétique qu'est la lumière :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Ce vecteur caractérise l'énergie transportée par l'onde électromagnétique. Dans le cas particulier d'une onde plane, le vecteur de Poynting est dirigé selon le vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_k$:

$$\vec{\Pi} = \frac{\varepsilon_0 c \|\vec{E}\|^2}{2} \vec{u}_k$$

Cela s'interprète comme le fait que l'énergie est transportée dans la direction de propagation de l'onde. On retrouve dans cette interprétation du vecteur de Poynting une idée du rayon lumineux. Ce dernier s'apparenterait à la trajectoire de l'énergie transportée par la lumière. On pourrait assimiler cette trajectoire à celle d'une particule qui transporterait cette énergie.

I.2 Principes variationnels et principe de Fermat

Les principes variationnels sont fondés sur l'hypothèse qu'une certaine quantité physique demeure (localement) stationnaire lors de l'évolution d'un système. Ce principe de chercher à minimiser une quantité physique qui contient des informations sur le système étudié est une démarche qui est devenue très utilisée en physique et qui s'est révélée très efficace pour déterminer les équations régissant l'évolution d'un système quelconque, en plus d'être un principe dont la formulation (donnée par Maupertuis) est très élégante.

Bien que chronologiquement Maupertuis ait énoncé le principe de moindre action après que Fermat ait formulé le sien, c'est le premier que l'on connaît généralement le mieux car il a été repris par Euler et formalisé par Lagrange de sorte que l'on retrouve les équations de la mécanique à l'aide des équations portant leur nom. Dans le domaine de la mécanique, le principe de moindre action est énoncé ainsi : au cours du mouvement, l'action du système est extrémale. L'action est définie comme l'intégrale du lagrangien du système sur le temps que dure la transformation mécanique.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - U$$

Lorsque l'on minimise l'action au cours du mouvement, on aboutit aux équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

On montre que ces équations sont équivalentes à celles obtenues avec le principe fondamental de la dynamique.

Ces rappels sur les principes variationnels ont leur importance dans le cadre de la leçon, car l'analogie entre la mécanique et l'optique sera souvent reprise et les deux domaines peuvent être décrits selon de tels principes. Le caractère de cette démarche semblait tellement métaphysique à l'époque où elle a été formulée qu'elle s'est attirée de nombreux détracteurs, mais son efficacité pour retrouver des lois déjà bien établies fût telle que leur pertinence ne pouvait plus être mise en cause. Cette méthode de raisonnement fonctionne tellement bien que Richard Feynman a cherché à adapter ce principe de moindre action à la mécanique quantique et a parfaitement réussi.

I.3 Énoncé du principe de Fermat

✦ Pérez

L'indice optique est défini en physique comme le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide et de la vitesse (de phase) de la lumière dans le milieu dans lequel elle transite :

$$n = \frac{c}{v}$$

Le long d'une courbe \mathcal{C} quelconque pour laquelle on note s l'abscisse curviligne, on a :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

On obtient donc la relation

$$n ds = c dt$$

et l'expression du **chemin optique** :

$$L(AB) = \int_{\mathcal{C}_{AB}} n ds \qquad (1)$$

Le chemin optique est relatif au temps que mettrait la lumière dans le vide pour parcourir le chemin \mathcal{C} . On dit parfois que le chemin optique n'est autre que la durée de propagation exprimée en mètres.

Le principe de Fermat repose sur précisément sur la définition du chemin optique. Fermat a considéré que la lumière lors de son déplacement ne cherchait non pas à minimiser la distance qu'elle parcourt, mais à minimiser son temps de transit. Cette formulation est ancienne et physiquement incomplète, car elle ne tient pas compte de certaines ambiguïtés pour des cas particuliers comme les miroirs ellipsoïdaux.

La formulation actuelle du principe de Fermat part de la situation suivante : on considère une trajectoire \mathcal{C} qui relie les points A et B par lesquels passe la lumière. Soit un chemin \mathcal{C}' légèrement différent mais reliant les mêmes points. Le principe de Fermat est alors exprimé de la façon suivante :

Entre deux points A et B atteints par la lumière, le chemin optique le long du trajet suivi par la lumière est stationnaire.

Mathématiquement, cela signifie que la différence de chemin optique entre deux trajets infiniment voisins est nulle au premier ordre et que c'est ce chemin que la lumière emprunte parmi tous ceux possibles.

$$\delta L = L' - L = 0 + \mathcal{O}(\|\delta \vec{M}\|^2)$$

Dans l'expression ci-dessus, $\delta \vec{M}$ représente le déplacement infinitésimal entre un point appartenant à L et son analogue sur le chemin L' .

À noter que ce principe ne préjuge aucunement de la nature de la lumière (onde, corpuscule). Initialement, Fermat énonçait ce principe non pas en utilisant le vocabulaire de « stationnaire » mais en formulant plutôt le fait que le chemin est extrême. La dénomination actuelle est moins restrictive et permet de prendre en compte certaines ambiguïtés dans des cas particuliers (milieu homogène par morceaux, présence de réflexion).

On vient de donner le principe de Fermat qui découle d'un principe variationnel classique de la physique : on cherche à rendre extrême une quantité physique (ici c'est le chemin optique) pour décrire le comportement du système (la lumière) lors d'un processus (son déplacement dans un milieu). Montrons à présent que le principe de Fermat permet de retrouver les lois classiques de l'optique géométriques, connues depuis l'Antiquité pour certaines, tout comme le principe de Maupertuis aboutissait aux équations du mouvement de la mécanique newtonienne et justifiait sa pertinence.

II Retrouver les lois de l'optique géométrique

✦ Pérez

II.1 Trajet de la lumière dans un milieu homogène isotrope

Dans un milieu homogène et isotrope, l'indice optique est constant. De ce fait, partant de l'équation (1), on a :

$$L(AB) = \int_C n ds = n \times (AB)$$

Le principe de Fermat stipule que le chemin optique est stationnaire, et cela signifie que l'arc (AB) est en fait une droite.

$$L = n \times \overline{AB}$$

C'est le plus court chemin que peut suivre la lumière dans un milieu homogène et c'est donc celui qu'elle emprunte. On retrouve un résultat connu depuis l'Antiquité mais démontré à l'aide d'un principe variationnel. On verra dans la partie consacrée aux applications plus élaborées du principe de Fermat que ce trajet en ligne droite est à mettre en analogie avec des principes bien connus de la mécanique newtonienne.

II.2 Retour inverse de la lumière

On considère désormais le trajet le trajet non pas $A \rightarrow B$ mais $B \rightarrow A$.

$$L(BA) = \int_B^A n ds' = \int_A^B n(-ds')$$

On note alors $ds = -ds'$ l'élément curviligne orienté de A vers B . On trouve :

$$L(BA) = \int_A^B n ds = L(AB)$$

Étant donné que $L(AB)$ est stationnaire, $L(BA)$ l'est aussi et constitue donc un trajet convenable pour la lumière.

Le trajet suivi par la lumière ne dépend pas du sens dans lequel il est parcouru.

II.3 Lois de Snell-Descartes

Les lois de Snell-Descartes décrivent le comportement de la lumière lorsqu'elle passe d'un milieu homogène continu à un autre milieu homogène continu dont l'indice optique est différent. On considère donc un rayon lumineux voyageant dans un milieu d'indice n_1 et frappant un dioptre en un point I pour passer dans un milieu d'indice n_2 (voir figure 1).

Il est possible de retrouver à partir du principe de Fermat les lois de Snell-Descartes. On considère le trajet du rayon provenant de A_1 (dans le milieu 1) et allant à A_2 (dans le milieu 2). Le chemin optique s'écrit :

$$L = n_1 A_1 I + n_2 I A_2$$

Faisons varier la trajectoire de sorte que le rayon frappe le dioptre en un point J infiniment proche de I . On va chercher à écrire la variation de chemin optique. Dans le milieu 1, le chemin optique s'est accru de $n_1 \vec{IJ} \cdot \vec{u}_1$. Dans le milieu 2, il a été raccourci de $n_2 \vec{IJ} \cdot \vec{u}_2$. De ce fait, la variation de chemin optique s'écrit :

$$\delta L = n_1 \vec{IJ} \cdot \vec{u}_1 - n_2 \vec{IJ} \cdot \vec{u}_2 = \vec{IJ} \cdot (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2)$$

D'après le principe de Fermat, on a $\delta L = 0$ (au moins au premier ordre en $\|\vec{IJ}\|$). D'où la relation de colinéarité :

$$\boxed{n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2 = a \vec{N}} \quad (2)$$

où a désigne un réel et \vec{N} le vecteur normal au dioptre. Ceci constitue l'énoncé vectoriel des lois de Descartes.

On déduit de la relation de colinéarité avec \vec{N} la première loi de Snell-Descartes :

La réfraction se déroule dans le plan formé la normale au dioptre et le vecteur directeur du rayon incident.

On déduit la deuxième loi de Descartes en réalisant le produit vectoriel à gauche de l'égalité vectorielle :

$$n_1 \vec{N} \times \vec{u}_1 - n_2 \vec{N} \times \vec{u}_2 = \vec{0}$$

et en notant $i_1 = (\vec{N}, \vec{u}_1)$ et $i_2 = (\vec{N}, \vec{u}_2)$. On obtient alors :

Le rapport entre les sinus de l'angle d'incidence et de réfraction est proportionnel à une constante qui ne dépend que des deux milieux :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

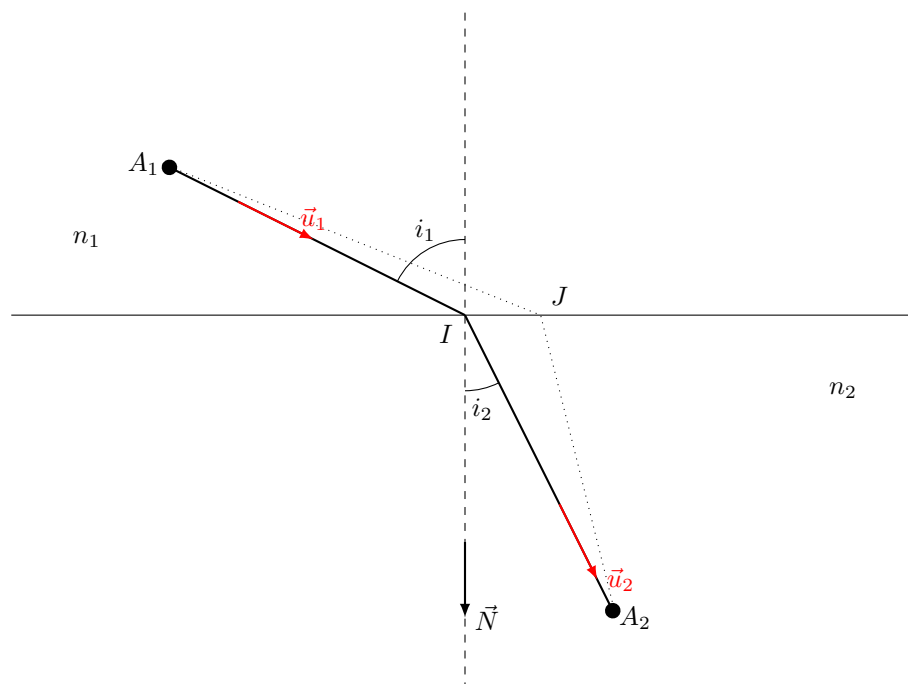


FIGURE 1 – Schéma du phénomène de réfraction à l'interface entre deux milieux d'indice différent.

II.4 Lois de la réflexion

♣ Feynman

Voici une première façon de voir le problème : on schématise de nouveau (figure 2) le problème de la réflexion, mais sur un miroir plan.

La source est située en A et son image en B . La rayon se déplace dans un milieu dont l'indice optique est uniforme, et *a priori* il pourrait frapper n'importe où sur le miroir pour rejoindre B . Cependant, on peut considérer qu'en fait le rayon réfléchi provient d'une source A' située derrière le miroir, et dont le rayon traverserait le milieu d'indice homogène. Dans ces conditions, le principe selon lequel la lumière se propage en ligne droite dans un milieu homogène (qui résulte du théorème de Fermat) impose finalement l'allure du trajet pour aller de A' à B . On retrouve alors la loi de la réflexion : l'angle d'incidence est identique à l'angle de réflexion.

Une autre manière de voir le problème est de considérer la démarche réalisée pour la réfraction et aboutissant à des relations vectorielles. Le résultat obtenu demeure valable, mais le point image est situé dans le même milieu que le point objet. Tenant compte du fait que l'on compte les angles orientés, on aboutit au résultat :

$$i_1 = -i_2$$

Bien sûr, formellement on pouvait inclure la réflexion dans l'étude de la réfraction en attribuant un indice $-n_1$ au second milieu, le signe négatif provenant du changement d'orientation du chemin suivi par la lumière.

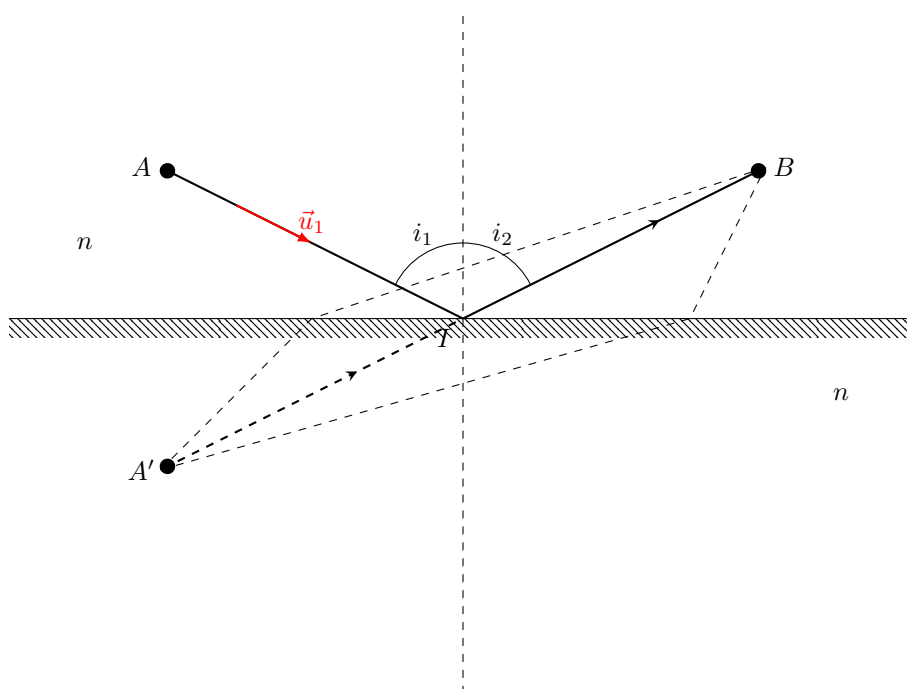


FIGURE 2 – Schéma du phénomène de réflexion à l'interface d'un dioptre plan réfléchissant.

II.5 Bref retour à l'optique ondulatoire

Le chemin optique est intimement lié à la phase d'une onde. Les deux quantités ne diffèrent que d'une constante multiplicative qui est liée à la longueur d'onde. En effet, si on considère l'écriture du chemin optique donné par (1), il est possible de montrer que :

$$n\vec{u} = \vec{\nabla}L$$

Si on multiplie cette équation de part et d'autre par le nombre d'onde, il vient :

$$k_0 n \vec{u} = \vec{\nabla}(k_0 L)$$

et donc

$$\vec{k} = \vec{\nabla}\phi$$

d'où l'expression de la phase :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} L$$

Les surfaces d'ondes sont par définition des surfaces **équiphase**, et correspondent à des chemins optiques constants.

II.6 Théorème de Malus

Considérons de nouveau la lumière sous sa forme ondulatoire et deux surfaces d'onde Σ_A et Σ_B infiniment proches l'une de l'autre. Avant Σ_A , le milieu est d'indice n_1 et entre les deux surfaces d'ondes, le milieu est d'indice n_2 . Soient les chemins optiques $(SAB) = n_1 SA + n_2 AB$ et $(SA'B') = n_1 SA' + n_2 A'B'$, très proches l'un de l'autre également. La différence de chemin optique s'écrit :

$$\delta L = n_1 d(SA) + n_2 d(AB)$$

Or, S n'a subi aucune variation. On applique de plus le principe de Fermat qui dit que cette différence de chemin optique est nulle.

$$n_1 \vec{u} \cdot (d\vec{A}) + n_2 \vec{u}' \cdot (d\vec{B} - d\vec{A}) = 0$$

On reconnaît dans cette expression les lois de Descartes vectorielles. On obtient alors :

$$d\vec{A} \cdot a\vec{N} + n_2 \vec{u}' \cdot \vec{B} = 0$$

Or par définition, le vecteur $d\vec{A}$ appartient à la surface Σ_A à laquelle le vecteur \vec{N} est normal. Leur produit scalaire est donc nul et on déduit donc que le vecteur \vec{u}' qui porte le rayon réfracté est normal à la surface d'onde Σ_B . On retrouve le théorème de Malus :

Après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'ondes.

II.7 Stigmatisme

Le stigmatisme rigoureux est défini ainsi : soit un point objet A dont on fait l'image par un système optique (composé de divers dioptries). Son image A' par ce système optique est rigoureusement stigmatisme si tous les rayons issus de A passent par A' . Du point de vue ondulatoire, si A est considéré comme un point source, il émet une onde sphérique. Si à la suite de la traversée du système optique le point A' est considéré comme l'image de A , alors on a aussi une onde sphérique qui se rétracte sur A' . Les surfaces d'ondes étant les lieux des chemins optiques constants, on peut dire que si deux points sont conjugués par un système optique, alors le chemin optique reliant ces deux points est stationnaire :

$$L(AA') = C^{\text{te}}$$

II.8 Relation de conjugaison d'un dioptre sphérique

On considère un dioptre sphérique faisant l'image A' d'un point objet A . Géométriquement, il est possible de montrer la relation de conjugaison qui relie ces deux points et la vergence du dioptre (qui elle-même est reliée à son rayon de courbure). Mais on peut évidemment retrouver cette relation de conjugaison en utilisant le principe de Fermat !

La démarche globale consiste à écrire le chemin optique entre les points objet et image, passant par le point de contact avec le dioptre :

$$L = n_0 A_0 I + n_i I A_i$$

On exprime directement ces quantités à l'aide du rayon de courbure et de la distance séparant A du dioptre, ainsi que de l'angle formé entre le point de contact et le point aligné avec A et le centre du dioptre, situé à la surface de celui-ci. Dans l'approximation de Gauss, ce dernier angle est très petit (car les rayons sont supposés paraxiaux) et le chemin optique ne doit pas en dépendre puisque le stigmatisme est supposé être rigoureux. En écrivant les équations sous leur forme algébrique et faisant les développements appropriés aux hypothèses, on peut aboutir à la relation de conjugaison des dioptries sphériques :

$$\frac{n_i}{p_i} - \frac{n_0}{p_0} = V \quad \text{avec } V = \frac{n_i - n_0}{R}$$

où dans cette relation : $p_0 = \overline{SA_0}$; $p_i = \overline{SA_i}$ sont des mesures algébriques, et $\overline{R} = R$.

On vient de redémontrer les principaux résultats de l'optique géométrique en ce qui concerne la description du comportement des rayons lumineux dans les milieux homogènes et isotropes. Dans la suite, on va déterminer une loi beaucoup plus générale dont on pourra interpréter la forme, très proche de résultats connus de la mécanique.

III Les rayons lumineux dans des milieux non homogènes

III.1 L'équation fondamentale de l'optique – Analogie avec la mécanique

✎ Pérez

III.1.1 Établir l'équation fondamentale

À partir de la formulation vectorielle (2) des lois de Descartes que l'on a tirées du principe de Fermat, on peut aboutir à une équation différentielle qui donne la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu qui n'est pas homogène. Appliquons en effet la relation entre deux points infiniment proches et situés de part et d'autre d'une surface équiindice (un dioptre) :

$$d(n\vec{u}) = a\vec{N}$$

En l'occurrence, on remarque que la normale au dioptre et le gradient d'indice sont colinéaires. On peut donc écrire :

$$d(n\vec{u}) = a'\vec{\nabla}(n)$$

Calculons la valeur de la constante a' :

$$dn\vec{u} + n d\vec{u} = a'\vec{\nabla}(n)$$

sachant que :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \text{et} \quad dn = \vec{\nabla}(n) \cdot d\vec{r}$$

On peut alors multiplier les deux équations par le vecteur \vec{u} et on obtient $a' = ds$. D'où finalement **l'équation fondamentale de l'optique** :

$$\boxed{\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \vec{\nabla}(n)} \quad (3)$$

Cette équation décrit la marche d'un rayon lumineux en fonction de la variation du gradient d'indice du milieu dans lequel il se propage.

III.1.2 Analogie avec la mécanique

Rappelons l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

On peut la réécrire sous une forme plus proche de celle de l'équation (3) en notant $\vec{p} = p\vec{u}$ et en introduisant la vitesse curviligne $v = \frac{ds}{dt}$:

$$\frac{d(p\vec{u})}{ds} = \frac{\vec{F}}{v}$$

L'analogie pousse donc à décrire la trajectoire du rayon lumineux comme celle d'une particule newtonienne fictive de masse unité soumise à la « force » :

$$\vec{F} = v\vec{\nabla}(n) = \vec{\nabla}\left(\frac{n^2}{2}\right)$$

La dernière forme de \vec{F} fait apparaître le « potentiel » dont elle dérive. La « force » qui dévie un rayon lumineux est reliée à la variation de l'indice optique du milieu. La déviation se fait dans le sens de l'augmentation de la valeur de l'indice.

On remarque que dans un milieu homogène, $\vec{\nabla}(n) = \vec{0}$ et aucune « force » ne vient perturber la trajectoire d'un rayon lumineux. Celui-ci a donc une trajectoire rectiligne. On retrouve ici une analogie avec le principe d'inertie ! Cette analogie entre l'optique et la mécanique servira grandement à l'interprétation des phénomènes que nous verrons par la suite : la propagation d'un signal dans une fibre optique et les mirages.

III.2 Mirages

✎ Houard

Les mirages optiques se produisent lorsque l'indice du milieu traversé par la lumière varie de façon continue. Dans l'air, cela peut résulter d'une variation de température à faible altitude ou bien qu'un changement de pression à haute altitude. Globalement, les mirages sont scindés en deux catégories : les mirages supérieurs et inférieurs.

Mirage supérieur

✎ S.Houard

⊙Durée de préparation : 15 minutes

Matériel :

- cuve étroite
- solution saline saturée
- eau
- seringue
- laser
- support boy

Dans la vie courante, ce sont les mirages inférieurs les plus courants : ils proviennent du fait que l'air près du sol est plus chaud que les couches d'altitude supérieure, du fait que le sol lui-même a été échauffé par le rayonnement solaire. En effet pour un gaz, la loi de Galdstone établit que pour un gaz, $(n-1) \propto \rho$ et la modèle du gaz parfait permet de montrer qu'alors $(n-1) \propto T^{-1}$. Des variations de l'ordre d'une dizaine de degrés sur une hauteur d'un mètre suffisent à provoquer un mirage. Il s'agit du cas typique de la route en été ou bien du sable dans le désert.

Qualitativement et à partir de l'analogie entre la mécanique et l'optique que nous avons développée dans la partie précédente, on peut déjà prévoir le comportement d'un rayon lumineux : le gradient d'indice étant dirigé vers le haut, le rayon sera courbé de sorte que sa trajectoire prend le même sens que cette variation d'indice. En d'autres termes, les rayons émis par l'objet seront dévié vers le haut.

Quantitativement¹, on va mettre en évidence la courbure du rayon lumineux. Pour ce faire, considérons un modèle de l'évolution de l'indice optique :

$$z = an^2 + b \quad (a > 0)$$

Le gradient d'indice est très fort à basse altitude, ce qui est une des conditions requises pour former un mirage. Dans le cas d'un gradient constant par exemple, l'image serait simplement déformée et unique. Pour ce modèle, on a choisi $a > 0$ pour simuler un mirage supérieur. L'expression du gradient d'indice est donc :

$$\vec{\nabla}(n) = \frac{dn}{dz} \vec{u}_z = \frac{1}{2an} \vec{u}_z$$

Dans ce problème, on va considérer que le rayon lumineux est contenu au départ dans le plan xOz ce qui signifie qu'aucune des variables du problème ne dépendra de la coordonnée y .

Partons à présent de l'équation fondamentale de l'optique (3) que l'on explicite en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = 0 \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{1}{2an}$$

La première équation est aisée à interpréter : c'est la loi de la réfraction de Descartes. On a :

$$n \frac{dx}{ds} = C$$

où C désigne une constante. Si on désigne i l'angle entre une droite verticale et l'élément d'arc ds on montre que $\sin i = \frac{dx}{ds}$. On donc conserve la quantité $n \sin i$.

La deuxième équation va fournir la trajectoire du rayon lumineux.

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{dx} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{1}{2an}$$

1. Calcul tiré de ✎ Pérez

On peut sortir la constante C la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne. Ensuite, on exprime la dérivée non pas par rapport à l'abscisse curviligne, mais par rapport à x (la coordonnée cartésienne) :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \right) \frac{dx}{ds} = \frac{1}{2anC}$$

On utilise encore une fois l'expression de la constante pour aboutir *in fine* à :

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{2aC}$$

Cette expression fournit une trajectoire parabolique lorsqu'on l'intègre.

Le cas du mirage supérieur est traité de manière parfaitement identique, puisque $a < 0$ est le seul changement dans le problème. On trouve encore une parabole, mais dont l'orientation est inversée. Ce type de mirage, plus rare, survient lorsque l'air est plus froid près du sol. Typiquement, il peut s'agir du bord d'un lac en fin de journée, l'eau ayant une inertie thermique plus grande que l'air.

III.3 Fibre optique

III.3.1 Présentation d'une fibre

La fibre optique, utilisée de nos jours pour transmettre les informations à la vitesse de la lumière, est essentiellement un guide d'onde. Le principe de base pour concevoir un tel guide est d'avoir un milieu de « cœur » à l'indice élevé et entouré d'une « gaine » dont l'indice est plus faible. Si le cœur est à indice constant, les rayons bien orientés à l'entrée de la fibre ne subissent que des réflexions totales et sont effectivement guidés le long de celle-ci.

Guider un laser avec de l'eau



⊕Durée de préparation : 10 minutes

Matériel :

- un réservoir transparent de quelques litres avec une ouverture à la base
- un laser
- un support boy
- un écran
- une bassine de récupération (ou avoir un évier à proximité)

Protocole :

1. Remplir le réservoir avec de l'eau.
2. Viser avec le laser à travers le réservoir de sorte que le faisceau traverse la cuve et s'échappe par l'ouverture.
3. Placer un écran en face du trou.
4. Laisser l'eau s'échapper dans la bassine de récupération.

On constate que le laser est guidé par le jet d'eau expulsé du réservoir : il n'apparaît pas sur l'écran et on illumine le bas de la bassine de récupération. Cette expérience fonctionne tant que le débit en sortie du réservoir est assez élevée pour que le jet soit presque vertical au départ. Si l'on attend assez longtemps pour que le débit s'affaiblisse, le laser rencontrera l'interface eau-air avec un angle d'incidence suffisamment petit pour passer au travers.

Il existe plusieurs types de fibres, mais dans le cadre de cette leçon nous allons mettre en évidence le fonctionnement de la fibre à gradient d'indice.

III.3.2 Fibre à gradient parabolique

La fibre est constituée d'une gaine d'indice constant, et d'un cœur dont l'indice varie en fonction de la distance au centre de l'axe². Dans le cas typique, on peut considérer une variation de type parabolique :

$$n(r) = n_c \left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2} \right)$$

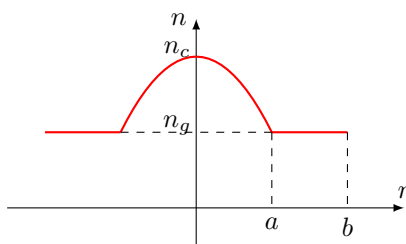


FIGURE 3 – Profil de l'indice dans la fibre optique. Le rayon a est relié à la valeur r_0 par la relation $r_0 = \frac{a}{\sqrt{2\Delta}}$, la valeur Δ étant elle-même définie par $\Delta = \frac{n_c - n_g}{n_c}$

On va donner les équations régissant la trajectoire du rayon lumineux en adoptant les conditions de Gauss. On va considérer un rayon initialement contenu dans le plan xOy (voir figure 4), de sorte que tout le problème peut y être décrit³. Dans les conditions de Gauss, la trajectoire d'un rayon lumineux est telle que l'élément d'abscisse curviligne s'écrit $ds \simeq dx$. Aussi l'équation (3) se réécrit-elle suivant l'axe transversal :

$$\frac{d}{dx} \left(n \frac{dz}{dx} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}$$

On introduit la coordonnée radiale r telle que $r^2 = x^2 + z^2$ et on peut écrire :

$$\frac{\partial n}{\partial z} = \frac{dn}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{n_c z}{r_0^2}$$

On peut considérer que n ne dépend pas de x et on faire l'approximation $n \simeq n_c$ au centre de l'axe pour négliger les effets non linéaires. L'équation devient alors :

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{z}{r_0^2} = 0$$

Le rayon adopte donc une trajectoire sinusoïdale dans la fibre. Si on impose comme conditions initiales que le rayon attaque la fibre sur son axe ($z(x = 0) = 0$) et que l'angle d'attaque est non nul ($\frac{dz}{dx}(x = 0) = z'_0 \neq 0$) alors la solution prend la forme :

$$z(x) = r_0 z'_0 \sin \left(\frac{z}{r_0} \right)$$

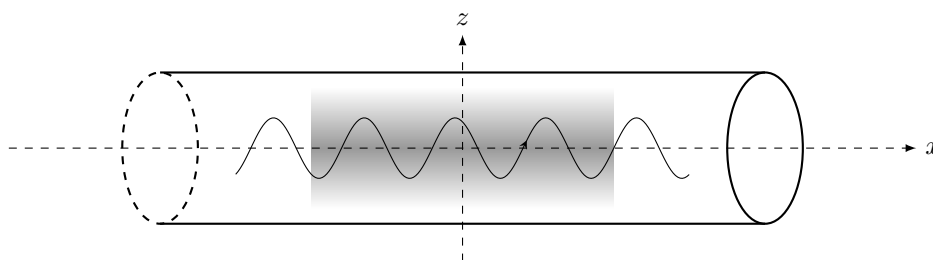


FIGURE 4 – Schéma et notations pour la fibre optique étudiée

III.3.3 Ouverture numérique

L'ouverture numérique d'une fibre définit le cône de rayons à son entrée qui pourront être transmis dans la fibre. On peut considérer que la fibre est placée dans un milieu d'indice n_0 et attaquée par un rayon qui fait un angle θ_0 par rapport à l'axe optique. Les lois de la réfraction indiquent :

$$n_0 |\sin \theta_0| = |n_c z'_0|$$

2. Les fibres que l'on considère ont une géométrie cylindrique.
 3. Plus rigoureusement, ça se démontre en écrivant les équations en coordonnées cartésiennes.

D'autre part, la valeur de $z(x)$ doit être telle que $|z| \leq a$ (le rayon du cœur) ce qui implique naturellement $|r_0 z'_0| \leq a$. On trouve donc comme condition :

$$n_0 |\sin \theta_0| \leq \frac{n_c a}{r_0}$$

Ce qui permet de trouver les angles d'attaque possible pour le rayon lumineux.

Conclusion

Le principe de Fermat a été énoncé (et reformulé) sous la forme d'un principe variationnel : lorsqu'un rayon lumineux se déplace dans un milieu donné, le chemin optique est stationnaire. Cet énoncé a permis (comme d'autres principes variationnels du même type après lui dans des domaines différents) de retrouver les lois de l'optique géométrique. Les principes variationnels se sont pas souvent à l'origine d'une découverte dans un domaine de la physique, mais ouvrent plutôt à un nouveau formalisme qui en facilite la description ou bien permettent de consolider un modèle en décrivant les mêmes phénomènes par une autre voie de calcul ou de raisonnement.

L'analogie puissante qui est permise entre les équations régissant l'optique et la mécanique autorise à décrire qualitativement les phénomènes de réflexion et de réfraction de la lumière avec une grande efficacité. L'analyse quantitative est bien sûr également accessible puisque le principe de Fermat permet d'aboutir à l'équation fondamentale des rayons lumineux qui décrit leurs trajectoires dans la plus grande généralité.