

# LP36 DIFFRACTION PAR DES STRUCTURES PÉRIODIQUES

16 juin 2020

MONNET Benjamin &

## Niveau : L3

### Commentaires du jury

- 2017 : Il faut traiter de diffraction par des structures périodiques et pas seulement d'interférences à N ondes.
- 2015 : Il est important de bien mettre en évidence les différentes longueurs caractéristiques en jeu.
- 2012, 2013, 2014 : Cette leçon donne souvent l'occasion de présenter les travaux de Bragg ; malheureusement, les ordres de grandeur dans différents domaines ne sont pas toujours maîtrisés.
- 2009, 2010 : La notion de facteur de forme peut être introduite sur un exemple simple. L'influence du nombre d'éléments diffractants doit être discutée.
- 2008 : Diffraction par des structures périodiques dans différents domaines spectraux.
- 2007 : Le jury souhaite que la diffraction d'ondes autres que les ondes électromagnétiques soit envisagée. C'est pourquoi l'intitulé 2008 précise dans différents domaines de la physique.
- 2005 : On peut admettre que l'expression mathématique du principe de Huygens-Fresnel est acquise, ainsi que son application au cas d'une ouverture unique, plus particulièrement d'une fente fine.
- 2004 : Il faut veiller au bon équilibre de l'exposé : il est inutile de faire l'étude de la diffraction de Fraunhofer qui doit être supposée connue et il est souhaitable de consacrer plus de cinq minutes à l'étude de la diffraction des rayons X par les cristaux par exemple.
- 2003 : La leçon ne peut pas se limiter à une étude du réseau plan en optique. Il faut donc pouvoir dégager les idées importantes assez rapidement pour pouvoir passer à l'étude d'autres domaines.
- 2002 : Cette leçon doit être illustrée expérimentalement de manière efficace. Le pouvoir de résolution d'un réseau est toujours présenté, mais la détermination de son expression théorique pose systématiquement des problèmes aux candidats.

### Bibliographie

↗ *Optique*, **Houard**

→ très bien pour le cours, un peu moins pour le calcul des fentes

↗ *Optique*, **Perez**

→ Moins bien que le Houard mais le calcul des fentes est bien

↗ *Physique des solides*, **Aschcroft**

→ Diffraction par rayons X

### Prérequis

- Transformée de Fourier
- Diffraction de Fraunhofer
- Matière condensée (cristallographie)
- Longueur d'onde de De Broglie

### Expériences



### Table des matières

1.1	Généralités . . . . .	3
1.2	Formule des réseaux . . . . .	3
1.3	Calcul de l'intensité diffractée . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Spectromètre à réseau</b>	<b>5</b>
2.1	Pouvoir dispersif (partie que l'on peut ignorer) . . . . .	5
2.2	Pouvoir de résolution : critère de Rayleigh . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Propriétés d'un réseau de diffraction</b>	<b>6</b>
3.1	Propriétés d'un cristal . . . . .	6
3.2	Critère de Bragg . . . . .	6
3.3	Critère de Von Laue . . . . .	7
3.4	Mise en évidence des paramètres de maille du graphite . . . . .	8
3.5	Construction d'Ewald . . . . .	8

## Introduction



### Illustration du phénomène

☞ un DVD



Montrer les couleurs sur un DVD qui apparaissent

On voit sur le DVD apparaître tout un spectre de couleur. Cela vient en fait de la diffraction par une structure périodique. Nous nous sommes pour l'instant arrêté à de la diffraction par des objets simples, mais nous allons maintenant nous intéresser à de la diffraction par des structures périodiques et voir les applications possibles.

## 1 Le réseau de fentes

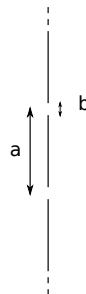
### 1.1 Généralités

Il existe deux types de réseaux :

- Les réseaux de phase, qui modifient périodiquement la phase de l'onde incidente en faisant par exemple une lame de verre dont l'épaisseur varie périodiquement.
- Les réseaux d'amplitude, qui consiste à modifier périodiquement l'amplitude de l'onde incidente. C'est le cas qui nous intéressera.

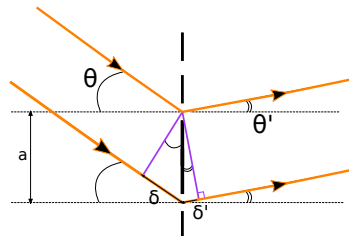
Le réseaux d'amplitude que nous allons considérer est une association de fentes de largeur  $b$ , séparées d'une distance  $a$ . On notera  $L$  la longueur total du réseaux de tel sorte que le nombre de fente par mètre s'écrit :

$$n = \frac{L}{a}$$



### 1.2 Formule des réseaux

On aimerait maintenant savoir ce qu'il se passe si on envoie une lumière sur ce réseau. On va en particulier s'intéresser ici au cas d'un réseau par transmission et non pas par réflexion (comme c'était le cas du CD présenté en introduction).



On note  $\theta$  l'angle de l'onde incidente sur le réseau et  $\theta'$  l'angle avec lequel il repart. Avec le théorème de Malus, on sait que les plans perpendiculaires aux rayons sont des plans d'équiphases. On en déduit donc que la différence de marche vaut :

$$\delta_{tot} = \delta + \delta' = a \sin(\theta) - a \sin(\theta') = a(\sin \theta - \sin \theta')$$

## Il faut bien faire attention au signe dans cette relation

La condition d'interférences constructives impose :

$$\delta_{tot} = n\lambda \quad n \in \mathcal{Z}$$

On trouve alors ce qu'on appelle la formule des réseaux qui s'écrit :

$$\sin \theta - \sin \theta' = \frac{n\lambda}{a}$$

**Remarque :** pour une arrivée en incidence normale, on remarque que le nombre d'ordre observable est limité :

$$\sin \theta' \leq 1 \Leftrightarrow n \leq \frac{a}{\lambda}$$

Autrement dit : si la distance entre deux fentes est trop faible, on observe aucun ordre. Dans le sens inverse, si  $a$  est trop grand, on verra pleins d'ordres, ce qui est ensuite dur à interpréter.



*On a toujours pas l'intensité observée !*

## 1.3 Calcul de l'intensité diffractée

On calcule comme d'habitude l'amplitude de l'onde dans un premier temps. Pour cela, on se place dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer, ce qui permet d'écrire :

$$\psi(u) = \int t(x)e^{-i2\pi ux} dx$$

avec, dans notre cas,  $u = \frac{\sin(\theta) - \sin(\theta')}{\lambda}$ . Le réseau est composé de  $N$  fentes identiques régulièrement espacées, ce qui permet d'écrire :

$$t(x) = \sum_{m=N/2}^{m=N/2} t_f(x - ma)$$

où  $t_f$  est la transmittance d'une unique fente. Ainsi, l'amplitude vaut :

$$\psi(u) = \int \sum_{m=N/2}^{m=N/2} t_f(x - ma)e^{-i2\pi ux} dx = \sum_{m=N/2}^{m=N/2} e^{-i2\pi uma} \int t_f(X)e^{-i2\pi uX} dX$$

On note  $\Phi = 2\pi ua$ , de telle sorte que :

$$\psi(u) = \hat{t}_f(u) \frac{\sin(N\Phi/2)}{\sin(\Phi/2)}$$

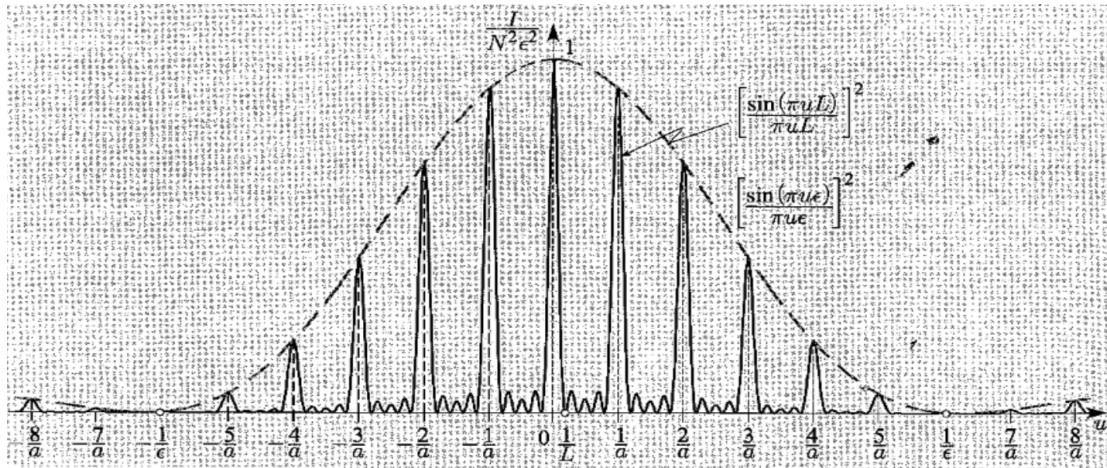
En utilisant la formule de diffraction d'une fente de largeur  $b$  :

$$\hat{t}_f = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-i2\pi ux} dx = b \frac{\sin(\pi ub)}{\pi ub}$$

On trouve finalement une intensité diffractée valant :

$$I = I_0 \left( \frac{\sin(\pi ub)}{\pi ub} \right)^2 \left( \frac{\sin(N\pi ua)}{\sin(\pi ua)} \right)^2$$

On voit que l'intensité est maximale pour  $u = \frac{n}{a}$ , ce qui permet de retrouver la formule des réseaux établies plus tôt.



Source : Optique, Perez

**Diffraction de la lumière d'une lampe à vapeur de Mercure**

↗ Sextant

⊙

Faire l'image d'une fente sur un écran à l'aide d'une lentille convergente. Placer entre le réseau juste après la lentille. Faire d'abord avec un filtre qui sélectionne une longueur d'onde puis ensuite avec toutes les couleurs.

**2 Spectromètre à réseau**

**2.1 Pouvoir dispersif (partie que l'on peut ignorer)**

Nous venons de voir que les réseaux permettent de disperser les différentes longueurs d'onde. On peut donc l'utiliser pour étudier le spectre d'une lumière. Pour cela, on peut caractériser un spectromètre par sa capacité à séparer deux longueurs d'onde. La grandeur physique qui traduit cela s'appelle le pouvoir dispersif et vaut :

$$D = \frac{d\theta'}{d\lambda}$$

Avec la formule des réseaux, on trouve :

$$D = \frac{n}{a \cos \theta'}$$

On peut noter que pour de petits angles, le pouvoir dispersif est constant et ne dépend donc pas de  $\lambda$ , ce qui signifie que le décalage observé sur l'écran est proportionnel à la longueur d'onde observée.

**Calcul de ↗ Houard p321 ?**

**2.2 Pouvoir de résolution : critère de Rayleigh**

Afin de pouvoir différencier deux pics de longueur d'onde différente, il faut **que le maximum du pic principal de diffraction pour la raie de longueur d'onde  $\lambda + \delta\lambda$  corresponde au premier minimum du pic principal de diffraction pour la raie de longueur d'onde  $\lambda$ .**

**Schéma**

Le maximum du pic d'ordre  $n$  est observé pour  $\sin \theta - \sin \theta' = n \frac{\lambda}{a}$  et son premier minimum est observé pour  $\Phi = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{N}$ , ce qui correspond à  $\sin(\theta + \epsilon) - \sin(\theta') = n \frac{\lambda}{a} \pm \frac{\lambda}{aN}$ . Autrement dit, cela correspond à un écart angulaire de  $\delta(\sin(\theta)) = \frac{\lambda}{aN}$ .

De plus, les deux maximum sont séparés par  $\delta(\sin(\theta)) = n \frac{\delta\lambda}{a}$ .

Le critère de Rayleigh impose donc :

$$n \frac{\delta\lambda}{a} > \frac{\lambda}{aN}$$

Le pouvoir de résolution intrinsèque est alors défini par :

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{min}} = nN$$

Autrement dit, plus le nombre de traits du réseaux est important, plus on pourra distinguer des longueurs d'onde proches !

**On doit pouvoir le mettre en évidence en directe avec le doublet jaune du mercure**

↓ *Nous nous sommes ici intéressés à la diffraction dans le visible afin de pouvoir étudier le spectre de la lumière. Néanmoins, il est aussi d'envisager d'étudier une structure périodique et c'est ce que nous allons voir dans la prochaine partie*

### 3 Propriétés d'un réseau de diffraction

↗ Aschcroft

#### 3.1 Propriétés d'un cristal

Nous allons maintenant essayer de sonder la matière solide, que l'on sait ordonnée.

**Rappels :** un cristal est défini par un motif qui se répète le long d'un réseau de Bravais  $\vec{R} = n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}$ , les nombres de ces trois vecteurs engendrant le paramètre de maille.

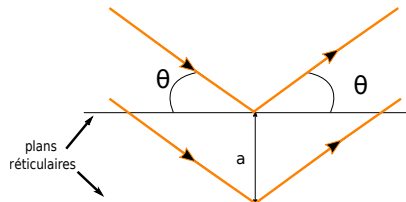
**Quelques ordres de grandeurs :** Les distances interatomiques sont de l'ordre de la centaine de picomètre. Afin de sonder la matière par diffraction, il va falloir des ondes dont la longueur d'onde est environ du même ordre de grandeur, donc de l'ordre de  $10^{-10}m$ , ce qui correspond à des rayons X (entre  $10^{-8}$  et  $10^{-12}m$ )

**Selon le temps, choisir entre le critère de Bragg ou le critère de Von Laue**

↓ *Que se passe-t-il lorsque l'on envoie une telle onde sur un cristal*

#### 3.2 Critère de Bragg

On suppose que les rayons peuvent se réfléchir sur les plans réticulaires du cristal.



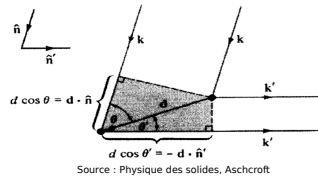
Ainsi, on trouve la condition de Bragg (pour des interférences constructives) :

$$n\lambda = 2d \sin(\theta)$$

**On pourrait faire ici une rapide analogie avec un réseau par réflexion avec le même angle à l'arrivée qu'après la réflexion !**

### 3.3 Critère de Von Laue

On suppose ici que la lumière ne peut se réfléchir que sur un atome du cristal.



La différence de marche vaut :

$$\delta = d \cos \theta + d \cos \theta' = \vec{d} \cdot (\vec{n} - \vec{n}')$$

La condition d'interférences constructives donne donc :

$$\vec{d} \cdot (\vec{k} - \vec{k}') = 2\pi n$$

En prenant en compte que l'on souhaite avoir des interférences constructives pour **tous le réseau**, on se retrouve avec :

$$\vec{R} \cdot (\vec{k} - \vec{k}') = 2\pi n \Leftrightarrow \vec{k} - \vec{k}' = \vec{K}$$

$\vec{k} - \vec{k}'$  appartient donc au réseau réciproque ! Or il est possible de montrer que  $\vec{K} = m \frac{2\pi}{d}$ . De plus, avec la figure suivante :

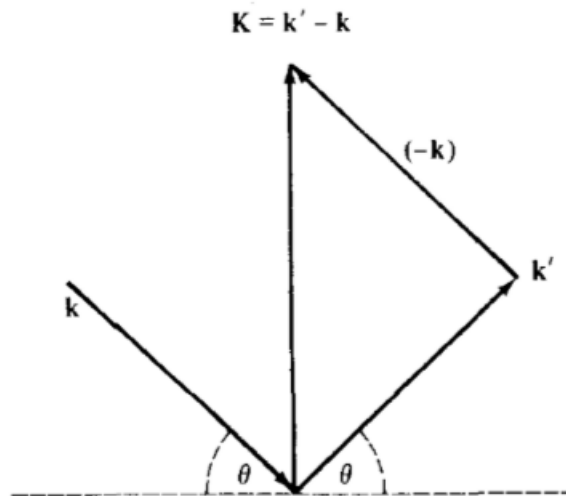


FIG. 6.6 – Le plan du papier contient le vecteur d'onde incident  $\mathbf{k}$ , le vecteur d'onde réfléchi  $\mathbf{k}'$ , et leur différence  $\mathbf{K}$  satisfaisant à la condition de Laue. Puisque la diffusion est élastique ( $k' = k$ ), la direction de  $\mathbf{K}$  est la bissectrice de l'angle entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$ . La droite en pointillé est l'intersection du plan perpendiculaire à  $\mathbf{K}$  avec le plan du papier.

On montre que  $K = 2k \sin \theta$  (on suppose une diffusion élastique). Donc finalement :

$$k \sin \theta = \frac{\pi n}{d}$$

appelée relation de Bragg.

### 3.4 Mise en évidence des paramètres de maille du graphite

On utilise un faisceau d'électrons accélérés plutôt que des rayons X (car dangereux).

On a  $\lambda = 2d \sin(\theta) \approx \frac{dD}{2L}$  avec D le diamètre des anneaux. Ensuite, avec  $\lambda = \frac{h}{p}$  et  $eU = \frac{p^2}{2m}$ , on trouve :

$$\frac{1}{D} = d \frac{\sqrt{2meU}}{2hL}$$



#### Mise en évidence des paramètres de maille du graphite



BIEN LIRE LA NOTICE

### 3.5 Construction d'Ewald

Y'aura jamais le temps de le faire.

## Conclusion

Ouverture sur la spectroscopie en astrophysique.

## Questions

- 

Revenir sur les réseaux de phase et d'amplitude, comment peut-on décrire cela mathématiquement ? Comment faire sentir à un élève ayant déjà eu un cours sur la diffraction la séparation en un facteur de forme et un facteur de structure ? Comment fonctionne un réseau blazé ? Revenir sur le critère de Rayleigh pour repréciser les notations (conflit de notation avec le début de la leçon). Question sur la courbe de l'éclairement tracée avec python, comment justifier rapidement les propriétés énoncées ? Peut-on faire un lien avec une fonction que les élèves connaissent déjà ? ( $1 + \cos x$ , éclairement des fentes d'young si  $N = 2$ ). Diffraction des électrons : dans quel sens est le graphite, pourquoi on observe un cercle ? S'agit-il d'un réseau en transmission ou en réflexion ?

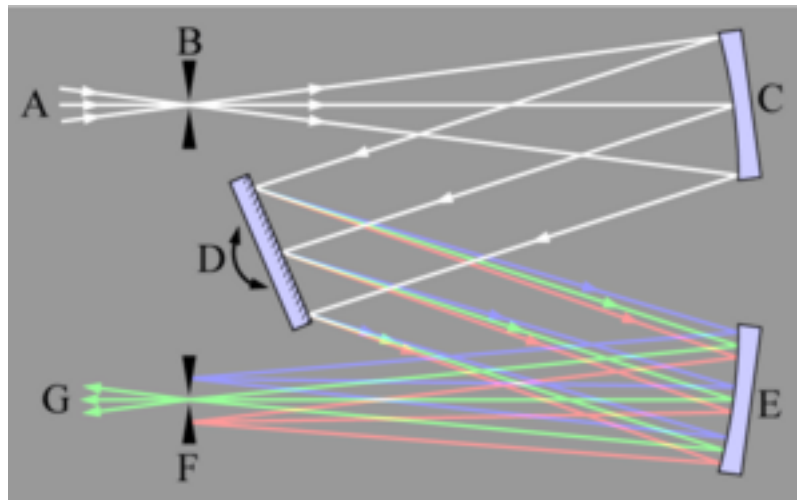
Les questions ont été surtout posées par une examinatrice, l'autre en a posé quelques-unes, la troisième était muette. Pour la 1ère partie : Pouvez-vous préciser la notion de diffraction cohérente/incohérente ? Pouvez-vous expliquer à un élève pourquoi le montage de diffraction avec une lentille est équivalent à celui avec deux lentilles ? Pouvez-vous expliquer qualitativement la formule des réseaux ? Comment le réseau blazé joue-t-il sur le pouvoir de résolution ? Comment fait-on un monochromateur ? Pour la 2ème partie : Pouvez-vous expliquer qualitativement la figure de diffraction obtenue avec le canon à électrons ? Comment génère-t-on des rayons X ? Dans quels laboratoires de France en trouve-t-on ? Quel est le lien entre la symétrie de la figure de diffraction et celle du cristal ? Que signifie une symétrie d'ordre 5 de la figure de diffraction ? (Cela correspondrait à des quasi-cristaux) Vous avez parlé de cristaux où tous les atomes étaient bien à leur place, est-ce vraiment le cas ? Qu'est-ce que ça change ? Quelles informations tirer de la figure de diffraction ? N'y a-t-il pas un problème pour remonter à la densité électronique à partir de la figure de diffraction ? Comment fait-on un monochromateur à neutrons ? Comment expliquer à un élève qu'on passe de la diffraction des rayonnements électromagnétiques à celle des électrons pendant la leçon ?

Réexpliquer ce que vous vouliez montrer avec la manip' avec le sodium ? Pouvoir de résolution : dépendance en N ? C'est quoi N ? Redessiner le réseau avec les différentes longueurs caractéristiques ; redessiner l'éclairement en fonction de z et mettez les échelles correspondantes ; on voit que la dispersion augmente avec l'ordre... supposons qu'on puisse aller à l'ordre infini, n'y aura-t-il pas un autre pb ? (recouvrement des ordres) Comment définir le chemin optique ? N'est ce que  $n \cdot AB$  ? Connaissez vous d'autres système d'interférence à ondes multiples ? Comment est définie sa résolution ? Comment se voit-elle ? Réseau acoustique : pq la longueur a du transducteur ne doit pas être trop grande ?

- Phase :  $t = e^{i\Phi}$ . Amplitude :  $t = r < 1$
- Réseau blazé = en dents de scie.



- Graphite = poudres donc isotrope donc cercle. Dans le matos de l'ENS c'est un réseau en réflexion je pense ?
- Diffraction cohérente = avec des sources cohérentes. Du coup on somme les amplitude et pas les intensités.
- La deuxième lentille est juste une lentille de projection, comme celle que l'on met souvent en optique pour bien observer ce que l'on souhaite.
- <http://ressources.univ-lemans.fr/AccessLibre/UM/Pedago/physique/02/optiondu/blaze.html> Figure de diffraction d'un réseau blazé. Ça change rien au pouvoir de résolution j'ai l'impression. Y'a juste un décalage d'angle.



La lumière est diffracté par un réseau D ou bien dispersé par un prisme puis ensuite on met un trou là où il y a la couleur que l'on souhaite récupérer

- Une haute tension électrique est établie entre 2 électrodes pour générer un courant d'électrons dont la longueur de De Broglie est dans le domaine des rayons X

**Pourquoi historiquement on a continué à utiliser des prismes alors que les réseaux existaient encore ? Comment fabrique-t-on un réseau blazé ? Réalisation précise d'un émetteur ultrasonore utilisé pour l'échographie ? Dans quelle démarche épistémologique s'inscrit l'expérience de Davisson et Germer (diffraction d'électrons en 1925) ?**

Plusieurs questions pour repréciser des hypothèses de calcul exposées trop rapidement (par exemple pourquoi on fait un calcul unidimensionnel pour le réseau, à quelle approximation cela revient dans la direction verticale ?). Retour sur la figure de diffraction du réseau : pouvoir de résolution ? Comment déterminer le nombre de traits éclairés, le rapport  $a/e$ , etc. Matière condensée : qu'est-ce qu'on sonde avec des neutrons ? Quelle est la forme de la figure de diffraction ? Étude des biomacromolécules : c'est facile de faire des cristaux ? Comment expliquer la couleur bleue du papillon « machin » ?

**Quelques mots sur Evald ?** Physicien allemand, pionnier sur la diffraction.

**Limite des grandes longueurs d'onde ?**  $\vec{k}$  avec norme très petite donc sphère très petite, trop petite pour qu'il y ait intersection avec les vecteurs du réseau réciproque.

**Sources d'erreur sur la mesure ?** Mesure du rayon : très diffus et surface courbée.

**Types de réseau de diffraction ? Comment les faire ?** Transmission, réflexion

**Est-ce que tu connaît le réseau à échelle ? A quoi ça sert ?** C'est un réseau blazé, permet de déplacer le pic d'intensité (en général sur le pic d'ordre 0 qui ne donne pas beaucoup d'informations).

**Que permet de mesurer la diffraction sur réseau ?**

**A quoi correspond le vecteur  $\vec{K}$  ? Analogie diffraction sur structure cristalline et diffraction avec un réseau macroscopique ?**  $K$  est une fréquence spatiale du réseau. Facteur de forme = diffraction, facteur de structure = interférences à ondes multiples.

Pour le cristal : Huygens-Fresnel volumique

**Autres ondes que électrons ou rayons X** Neutrons qui sont diffractés par les noyaux

**Qu'est-ce qui fait la largeur des anneaux pour la diffraction des électrons ? pour la diffraction sur un réseau ?** Plus le nombre de sites éclairés est important, plus les pics sont fins.

Sur un réseau : nombre de fentes éclairées,, largeur des fentes, largeur de la fente source.

Pareil pour les électrons, la source n'est pas ponctuelle donc les anneaux sont larges.

**Où peut-on faire des rayons X ? des neutrons ? Est-ce qu'on peut faire toutes les longueurs d'onde ?**

Rayons X : A Saclay (synchrotron), à Grenoble, à Zurich, à Lund. Synchrotron : à peu près toutes les longueurs d'onde.

Neutrons : à Lund, à Grenoble, en Allemagne. Neutrons thermiques (0.7 - 10 angstroms)

**Matériau dont la couleur est due à de la diffraction/interférences à ondes multiples ?** Opales

**Revenir sur les réseaux de phase et d'amplitude, comment peut-on décrire cela mathématiquement ?**

**Comment faire sentir à un élève ayant déjà eu un cours sur la diffraction la séparation en un facteur de forme et un facteur de structure ?**

**Comment fonctionne un réseau blazé ?**

**Diffraction des électrons : dans quel sens est le graphite, pourquoi on observe un cercle ? S'agit-il d'un réseau en transmission ou en réflexion ?**

**Pouvez-vous préciser la notion de diffraction cohérente/incohérente ?**

**Pouvez-vous expliquer à un élève pourquoi le montage de diffraction avec une lentille est équivalent à celui avec deux lentilles ?**

Pouvez-vous préciser la notion de diffraction cohérente/incohérente ?

Pouvez-vous expliquer à un élève pourquoi le montage de diffraction avec une lentille est équivalent à celui avec deux lentilles ?

Pouvez-vous expliquer qualitativement la formule des réseaux ?

Comment le réseau blazé joue-t-il sur le pouvoir de résolution ?

Comment fait-on un monochromateur ?

Pouvez-vous expliquer qualitativement la figure de diffraction obtenue avec le canon à électrons ?

Quel est le lien entre la symétrie de la figure de diffraction et celle du cristal ? Que signifie une symétrie d'ordre 5 de la figure de diffraction ? (Cela correspondrait à des quasi-cristaux) Vous avez parlé de cristaux où tous les atomes étaient bien à leur place, est-ce vraiment le cas ? Qu'est-ce que ça change ? Quelles informations tirer de la figure de diffraction ? N'y a-t-il pas un problème pour remonter à la densité électronique à partir de la figure de diffraction ?

Comment fait-on un monochromateur à neutrons ?

Comment expliquer à un élève qu'on passe de la diffraction des rayonnements électromagnétiques à celle des électrons pendant la leçon ?

Connaissez vous d'autres systèmes d'interférence à ondes multiples ? Comment est définie sa résolution ? Comment se voit-elle ?

Réseau acoustique : pourquoi la longueur  $a$  du transducteur ne doit pas être trop grande ?

Pourquoi historiquement on a continué à utiliser des prismes alors que les réseaux existaient encore ?

Comment fabrique-t-on un réseau blazé ?

---

## Remarques

-