LP39 Aspect ondulatoire de la matière.Notion de fonction d'onde

12 juin 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L3

Commentaires du jury

Bibliographie

✍ *Quantique, fondements et applications*, **Perez** ⟶ La plupart de la leçon
✍ *Quantique*, **Basvedant** ⟶ Y'a tout
✍ *J'intègre PC-PC**, **Sanz** ⟶ Très bien aussi

Prérequis

➢ Notion de photons

➢ Diffraction et interférences en optique

➢ Ondes planes, relation de dispersion

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

Au XIX ème siècle, on distingue encore la matière d'un côté, caractérisé par des particules dont les coordonnées peuvent être connues et les ondes, qui sont des champs continus, définis partout dans l'espace. Néanmoins, l'idée d'une lumière composée de photons émis ; idée qui entremêle ces deux visions jusqu'alors bien distinctes. La question se pose alors : la lumière est-elle une onde ou une particule ?

1 Aspect ondulatoire de la matière

1.1 L'hypothèse de De Broglie

En 1923, De Broglie généralise la relation $p = \hbar k$, qui est alors une caractéristique des ondes, à la matière :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$$

Autrement dit, dans le cadrede la physique newtonienne, cela revient à :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{mv}$$

La notion d'onde est étendue ainsi à la matière et les deux s'entremêlent. Néanmoins, si on considère ce que l'on sait des ondes : les phénomène ondulatoires ne sont visibles que si on s'intéresse à des distances inférieures à la longeur d'onde. Prenons donc des ordres de grandeurs :

ODG :

- Pour une balle de tennis de 58 g évoluant à 35 m/s, on trouve $\lambda_{DB} = \frac{6.63.10^{-34}}{58.10^{-3}\times 35} \approx 3.10^{-34}$m. Donc pour une balle de tennis, les effets ondulatoires ne sont pas visibles et l'approche par les mécanique newtonienne est valable
- Pour un électrons avec une énergie de 10 eV : $\lambda_{DB} = \frac{h}{\sqrt{2m_eE}} \approx 0.4$nm, ce qui est caractéristique de la distance interatomique ! Les effets ondulatoires sont donc visibles

Et bien si les effets ondulatoires sont visibles, visions les !

1.2 Experience de Davisson et Germer

L'expérience de Davisson et Germer consister à étudier la diffraction d'électrons par un monocristal de Nickel. Les électrons sont accélérés par une tension V_a de telle sorte que la longueur de De Broglie soti égale à :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{\sqrt{2m_eeV_a}}$$

On oublie pas que l'on considère ici les électrons comme une onde, donc l'angle θ de diffraction respecte la relation de Bragg :

$$2d\sin(\theta) = p\lambda_{DB} = p\frac{h}{\sqrt{2m_eeV_a}}$$

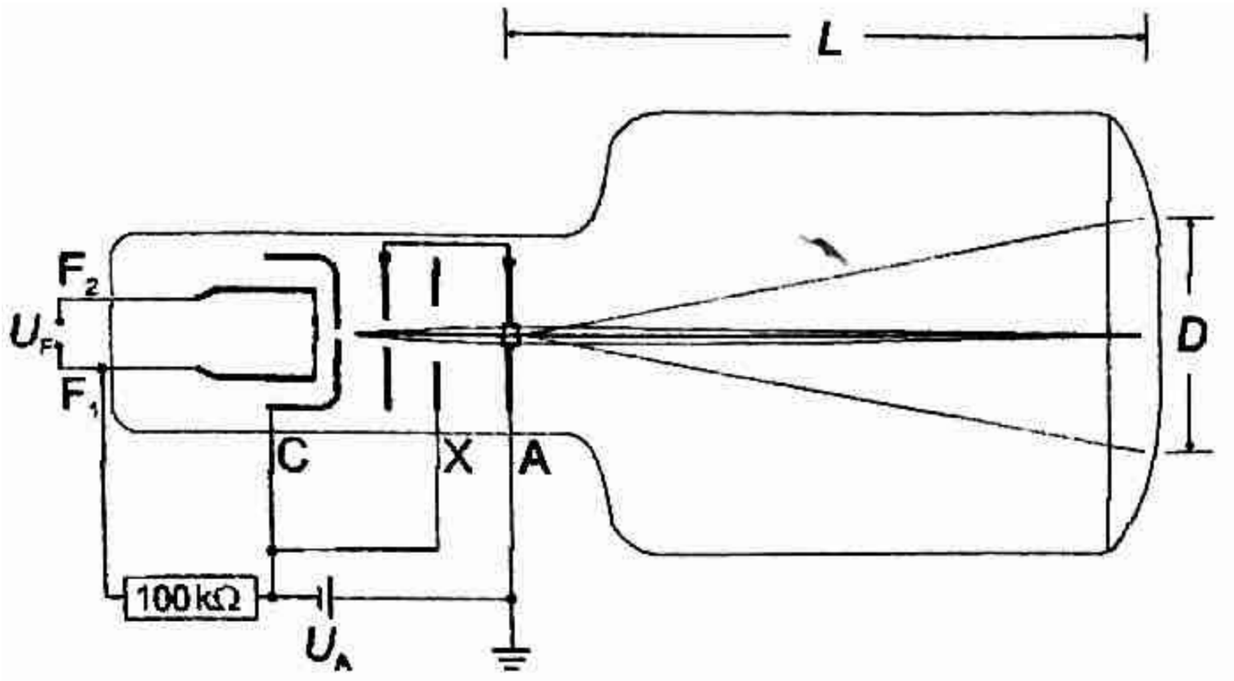
Davisson et Germer ont pu ainsi observer des pics d'intensité dont l'angle dépend de la tension appliquée pour accélérer les électrons.

Diffraction des électrons par du graphite

On fait ici en fait l'expérience de Debye et Scherrer. On a à l'ordre 1 On a $\lambda_{DB} = 2d\sin(\theta) \approx \frac{dD}{2L}$, ce qui donne :

$$\frac{1}{D} = d\frac{\sqrt{2meU}}{2hL}$$

Remonter aux 2 d différents.



Il nous faut un formalisme pour décrire cette nouvelle onde

2 Description ondulatoire de la matière

On décrit une particule de masse m à un instant t par une fonction d"onde complexe $\psi(x, t)$. Mais la question qui se pose alors c'est : comment interpréter cette objet mathématique que l'on introduit ?

2.1 Expérience des fentes d'Young

Afin de nosu aider dans cette démarche, nous allons parler d'une autre expérience qui est celle des interférences. Pour cela, le montage le plus connu est les fentes d'Young.

http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/quantique/quantique.htm askip c'est bien mais ça marche que sous certains navigateurs.

On observe bien des interférances, comme pour des ondes... mais en fait cela signifie que les chances de voir un électron à certains endroits est nulle quand elle est max à d'autres endroits.

Ca donne l'interprétation de Born

2.2 Interprétation de Born

Born propose une interprétation probabiliste de la fonction d'onde :

La probabilité de trouver la particule dans une petit colume $d^3\vec{r}$ à l'instant t est

$$d^3P = |\psi(\vec{r},t)|^2 d^3\vec{r}$$

Ainsi, on peut faire un parallèle avec l'optique : ψ est une amplitude de probabilité là où $\vec{A}$ est une amplitude de champ et $|\psi|^2$ est une densité de probabilité là où $I = |\vec{A}|^2$ est l'intensité. Ainsi, on peut interpréter les expériences des fesntes d'Young comme la surperposition de deux ondes ψ_1 et ψ_2 qui interfèrent. Cette interprétation impose :

$$\int |\psi(\vec{r},t)|^2 d^3\vec{r} = 1$$

On voit donc que la fonction d'onde à une dimension et qu'elle est homogène à $L^{-3/2}$ (parce qu'on est ici en 3D). Deux fonctions ne différenciant que par une phase représentent le même état physique ! Les fonctions d'ondes sont donc définis à une phase complexe prêt.

Maintenant que nous avons introduit l'objet physique à étudier, il nous reste à connaitre son évolution temporelle

3 Dynamique d'une fonction d'onde

3.1 Equation de Schödinger

Une particule dans un potentiel $V(\vec{r},t)$ vérifie l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$

Cette équation est un postulat de la mécanique quantique et par conséquent ne se démontre pas.

- Cette équation est linéaire, ce qui signifie que l'on peut superposer les solutions
- La dérivée première en temps en fait une équation irréversible
- On peut remarquer une certaine analogie avec la diffusion même si les fonctions ainsi que l'équations sont complexes

3.2 Particule libre

Comme on l'a dit, cette équation est linéaire, ce qui suppose que l'analyse de Fourier est applicable. Essayons d'analyser la propagation d'une particule libre sous forme d'onde plane. L'équationde Schrödinger donne :

$$i\hbar(-i\omega) = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 = \frac{p^2}{2m}$$

On retrouve donc $E = \hbar\omega$ en utilisant $p = \hbar k$ la relation de De Broglie. On peut aussi obtenir la vitesse de groupe et la vitesse de phase :

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar^2}{2m}$$
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar^2}{m}$$

La propagation est donc dispersive ! La fonction d'onde se met donc sous la forme $\psi = e^{i(\omega t - kx)}$, ce qui n'est pas une solution acceptable car elle n'est pas normalisable ! Comme pour les ondes dans les autrds domaines, il faut donc considérer un paquet d'onde.

3.3 Paquet d'onde et incertitude d'Heisenberg

✍ Perez, p109

On peut néanmoins montrer qu'un tel paquet d'onde est soumis au principe d'incertitudes d'Heisenberg :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Cela signifie que la position ou l'impulsion d'une particule ne peut pas être connue avec une précision infinie. Cela se ressent bien évidement dans le paquet d'onde car son étalement spatial et impulsionnel doivent donc respecter cette inégalité.

ODG :

- Pour un objet macroscopique, on peut connaitre sa position à quelques nanomètres près donc $\Delta x \approx 10^{-9}$. Cela donne $\Delta v \geq 5.10^{-17} m.s^{-1}$, ce qui est bien plus précis que ce que permet nos capteurs !
- Retour sur l'expérience des fentes ? ✍ Perez p 111

Insister sur le fait que c'est pas juste une histoire d'incertitudes expérimentales.

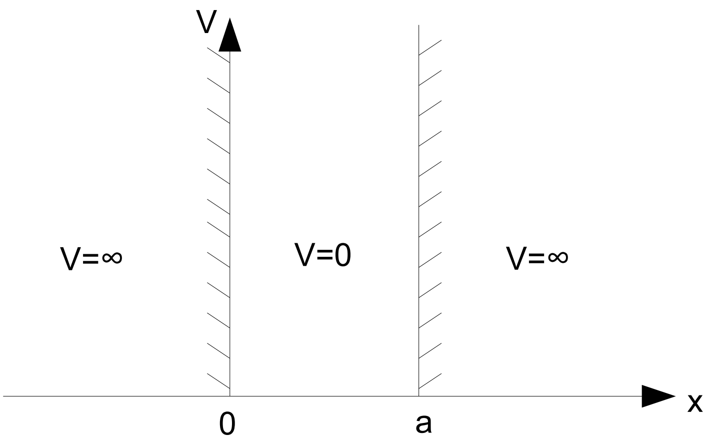
3.4 Si y'a le temps : le puit infini ?

✍ Basdevant

On se place ici à une seule dimension avec un puit infini de potentiel. On peut réécrire l'équation de Schrödinger :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi(x) = 0$$

On considère un potentiel de la forme suivante :



On remarque alors que l'on a la même équation et les mêmes conditions limites que pour la corde de la melde avec cette fois $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. On en déduit $kL = n\pi$ donc $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ avec la condition de normalisation. On trouve donc bien une énergie quantifiée :

$$\boxed{E_n = n^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*}$$

L'analogie avec la corde de Melde peut être résumée dans le tableau suivant :

On voit bien que la quantification vient donc de l'aspect ondulatoire de la lumière.

	Corde de Melde	Fonction d'onde
Solution stationnaire	$y(x,t) = f(x)g(t)$	$\phi(x,t) = \Psi(x)\exp(-iEt/\hbar)$
Équation d'onde	$f'' + kf = 0$	$\Psi'' + k\Psi = 0$
Vecteur d'onde	$k = \frac{\omega}{c}$	$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$
Conditions aux limites	$f(0) = f(L) = 0$	$\Psi(0) = \Psi(L) = 0$
Quantification	$k_n = \frac{n\pi}{L}$	$k_n = \frac{n\pi}{L}$

Questions

Retour sur le calcul de la vitesse de groupe : bornes intégrale, condition sur fonction d'onde (continuité et continuité de la dérivée),

Pourquoi dans fentes d'Young, si on bouche une fente on retrouve figure classique ?

Définition des moyennes ?

Vous avez parlé de psi1 et psi2 comme étant les fonctions d'onde des particules passées par chacune des fentes. Pourtant vous avez indiqué qu'on ne pouvait pas savoir par où était passées les particules. Est-ce correct de parler de psi1 et psi2 ? Faut-il sommer ces deux fonctions d'onde pour avoir des interférences sur l'écran ?

Comment expliquez-vous à un élève que lorsqu'on ajoute un détecteur de position les interférences disparaissent ? Quel est l'impact sur la fonction d'onde ? Après la mesure de position, dans quel état se trouve le système ?

Comment expliquez-vous à un élève que la particule n'a pas de trajectoire propre contrairement à la mécanique classique ? - Pouvez-vous me parler de la loi de Malus avec des ondes de matière ?

Qu'est-ce qu'une particule libre ? Que devient l'équation de Schrödinger pour une telle particule ?

Comment expliquer que la particule « passe par les deux fentes » ? Que pouvez vous me dire des problèmes de cohérence spatiale et temporelle si on poursuit l'analogie avec l'optique ?

si je place une fente et que je la rétrécis autant que je veux j'ai un delat x tout petit si je place ensuite une seconde fente très fermée je sélectionne un delta px très petit, est ce que ça contredit Heisenberg ?

Comment faire interférer des atomes (refroidir) ? Quelles sont les plus grosses particules que l'on a fait interférer ? (il faut les refroidir, écrire la longueur d'onde de de Bröglie et dire qu'il faut mv faible, refroidissement laser

Avec quelles autres particules a-t-on déjà fait l'expérience des fentes d'Young ?

- Lorsqu'on la mesure, on la force à passer par une des deux fentes. C'est comme si on localisait tout notre faisceau lumineux sur un trou. Finalement, en mesurant , on a la même chose qu'avec 2 rayons lumineux (1 pour chaque trou). Le fait de mesurer localise spatialement la fonction.
- Incertitudes d'Heisenberg qui force une délocalisation spatiale. En méca classique, elle est souvent négligeable.
- Particule libre : V=0
- Si les trous sont trop écartés on a rien j'imagine. Faut que la distance entre les deux trous soit de l'ordre de Δx
- Plus grosses particules : 50 atomes de carbones en forme de sphère

C'est quoi le facteur limitant qui historiquement a fait qu'on a mit longtemps avant de voir des interférences en optique ?

Pour l'ODG de la longueur d'onde de De Broglie pour un humain, s'il reste immobile, alors elle devient infinie et il devient quantique ; comment lever ce paradoxe ?

En optique, on a des objets pour manipuler les ondes (miroirs, lentilles ...) y a-t-il des équivalent pour les ondes de matières et comment les réalisent-on ?

Pouvez vous écrire une équation de diffusion ? Pourquoi est-elle irréversible ? Mais alors Schrödinger aussi est irréversible ?

Qu'est ce qu'apporte Heisenberg dans le cas d'une particule dans un put de potentiel comparé à la méca classique ?

Si l'évolution de la fonction d'onde est entièrement donnée par Schrödinger, est-on sur qu'elle restera toujours normée ? Comment peut-on le montrer ?

Vous avez montrer Heisenberg à partir des propriétés des TF, comment peut-on le montrer autrement ?

Equation de Schrödinger : est-ce toujours une équation d'onde ? ça peut être un hamiltonien qui décrit un spin

Dans quels cas peut-on considérer une énergie négative ? En choisissant l'origine des énergies.

- la longueur de cohérence ?
- Contrairement à la mécanique classique, la particule sort un peu du puit.

Schéma interférences des électrons : où sont les interférences ? Quelle est la direction des franges ?

Message à transmettre/ écueil ?

Deux minutes pour expliquer la MQ à quelqu'un dans la rue ? Comportement des corps infiniment petits. Modèle que l'expérience n'a pas mis en défaut.

C'est quoi un laplacien ? Sens physique ? Anomalie locale, écart à la moyenne locale.

La longueur d'onde d'un photon est modifiée avec l'indice du milieu, comment ça se passe pour un électron ?

Tu as dit que la longueur d'onde du neutron est bien plus grande que son rayon, comment on mesure son rayon alors ? Par diffusion. Il faut préciser dans quelle situation car la taille d'une particule est définie par la taille de son paquet d'onde qui dépend de nombreux paramètres. A priori, on cherche à connaître la taille du neutron dans un noyau.

Pourquoi plusieurs anneaux pour la figure de diffraction des électrons ? Pourquoi des anneaux ? Si on prend un cristal anisotrope, qu'est-ce qu'on voit ?

Tu as décrit la fonction d'onde comme une fonction de l'espace et du temps, est-ce qu'on pourrait choisir d'autres paramètres ?

Définition impulsion ?

Est-ce que la définition d'un état stationnaire est vraiment un produit d'une fonction de l'espace et d'une fonction du temps ?

Manips avec paquets d'onde ?

Que se passe-t-il pour le paquet d'onde avec des photons ? pas de masse pour le photon donc pas d'étalement dans le vide.

- même chose que Fente d'Young
- Message à transmettre : tout est une onde. Attention, l'aspect ondulatoire ne se voit pas forcément
- Plusieurs anneaux car plusieurs plan possibles. Des anneaux par isotropie de l'échantillon.
- Impulsion et temps
- Impulsion lié à longueur d'onde et TF

Remarques

-