

# LP41 EFFET TUNNEL

29 mai 2020

MONNET Benjamin &

## Niveau : L3

### Commentaires du jury

- **2017** : Cette leçon est une leçon de physique et ne doit donc pas se limiter à des calculs.
- **2015** : Trop de candidats pensent que l'effet tunnel est spécifique à la physique quantique.
- **2011-2014** : Dans le traitement de l'effet tunnel, les candidats perdent souvent trop de temps dans les calculs. Le jury invite les candidats à réfléchir à une présentation à la fois complète et concise sans oublier les commentaires physiques relatifs à la dérivation de la probabilité de transmission. Certains candidats choisissent d'aborder le cas de la désintégration alpha mais ne détaillent malheureusement pas le lien entre la probabilité de traversée d'une barrière et la durée de demi-vie de l'élément considéré. La justification des conditions aux limites est essentielle ! Le microscope à effet tunnel peut être un bon exemple d'application s'il est analysé avec soin (hauteur de la barrière, origine de la résolution transverse, . . .).
- **2008** : Une justification physique des conditions aux limites adoptées est attendue.

### Bibliographie

- *tout en un Physique MP-MP\**, **auteur** → Beaucoup de choses pour ce cours
- *Mécanique quantique*, **Perez** → le seul endroit où y'a le détail du calcul...
- **BUP** en pdf → Radioactivité  $\alpha$

### Prérequis

- Équation de Schrödinger
- Ondes
- Électrostatique
- Radioactivité

### Expériences



### Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation de l'effet tunnel</b>	<b>2</b>
1.1	Barrière de potentiel : positionnement du problème . . . . .	2
1.2	Conditions aux limite : résolution . . . . .	3
1.3	Transmission . . . . .	3
<b>2</b>	<b>La désintégration alpha</b>	<b>4</b>
2.1	Rappels . . . . .	4
2.2	Modèle de Gamow . . . . .	4
2.3	Loi de désintégration exponentielle . . . . .	5
2.4	Limite du modèle . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Microscopes à effet tunnel</b>	<b>5</b>
3.1	Principe du microscope . . . . .	6
3.2	Étude théorique . . . . .	6
3.3	Utilisation expérimentale . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Annexe</b>	<b>7</b>
4.1	Courants de probabilité . . . . .	7

## Introduction

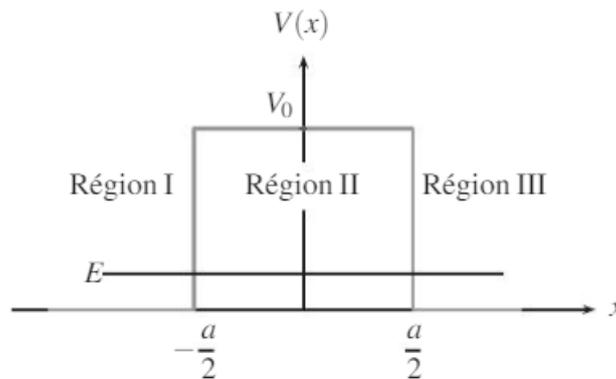
En mécanique classique, lorsque l'on considère par exemple un skieur, on sait que ce dernier ne pourra pas monter en haut d'une colline dont l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie totale du skieur. Néanmoins, la physique quantique permettant de tout nouveau phénomène par rapport à la physique classique, nous allons voir que ce genre de situation donne lieu à ce qui est appelé l'effet tunnel. C'est la possibilité d'une particule à franchir une barrière de potentiel dont l'énergie est supérieure à la sienne

## 1 Présentation de l'effet tunnel

### 1.1 Barrière de potentiel : positionnement du problème

Pour présenter l'effet Tunnel, nous allons prendre le cas le plus simple d'une barrière de potentiel.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -\frac{a}{2} & \text{(région I)} \\ V_0 & \text{pour } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} & \text{(région II)} \\ 0 & \text{pour } x > \frac{a}{2} & \text{(région III)} \end{cases}$$



Dans le cadre de notre étude, on se limite au cas  $0 < E < V_0$ . Pour rappel, l'équation de Schrödinger donnant l'évolution d'une fonction d'onde est, dans le cas unidimensionnel que l'on étudie ici :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t)$$

Comme pour ce que l'on a pu faire dans l'étude du confinement des particules, on se limitera aux solutions stationnaires, ce qui donne dans notre cas  $\psi(x, t) = \Phi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ . En réinjectant dans l'équation différentielle :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + V(x)\Phi(x) = E\Phi(x)$$

On distingue alors les différentes régions :

$$\text{Régions I et III : } \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k^2 \varphi(x) = 0$$

$$\text{Région II : } \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - q^2 \varphi(x) = 0$$

avec :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ et } q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

Les solution mathématiques sont donc de la forme :

$$\text{Région I : } \varphi(x) = A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx)$$

$$\text{Région II : } \varphi(x) = A_2 \text{ch}(qx) + B_2 \text{sh}(qx)$$

$$\text{Région III : } \varphi(x) = A_3 \exp(ikx) + B_3 \exp(-ikx)$$

Néanmoins,  $B_3 = 0$  car il n'y a pas d'ondes qui arrivent de  $+\infty$  donc :

$$\text{Région I : } \varphi(x) = A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx)$$

$$\text{Région II : } \varphi(x) = A_2 \text{ch}(qx) + B_2 \text{sh}(qx)$$

$$\text{Région III : } \varphi(x) = A_3 \exp(ikx)$$

## 1.2 Conditions aux limite : résolution

On rappelle que la fonction d'onde est toujours continue et que sa dérivée est continue tant que la marche de potentiel n'est pas infinie. On obtient donc les conditions aux limites suivantes :

- en  $-a/2$  :

$$A_1 \exp\left(-i\frac{ka}{2}\right) + B_1 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = A_2 \operatorname{ch}\left(\frac{qa}{2}\right) - B_2 \operatorname{sh}\left(\frac{qa}{2}\right)$$

et

$$ikA_1 \exp\left(-i\frac{ka}{2}\right) - ikB_1 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = -qA_2 \operatorname{sh}\left(\frac{qa}{2}\right) + qB_2 \operatorname{ch}\left(\frac{qa}{2}\right)$$

- en  $a/2$  :

$$A_3 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = A_2 \operatorname{ch}\left(\frac{qa}{2}\right) + B_2 \operatorname{sh}\left(\frac{qa}{2}\right)$$

et

$$ikA_3 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = qA_2 \operatorname{sh}\left(\frac{qa}{2}\right) + qB_2 \operatorname{ch}\left(\frac{qa}{2}\right)$$

## 1.3 Transmission

On s'intéresse nous à la possibilité pour une particule de traverser la barrière de potentiel. On introduit donc la coefficient de transmission en amplitude complexe :  $\tau = \frac{A_3}{A_1}$ . On peut montrer (calcul fait dans le  $\clubsuit$  Perez, p.171), à l'aide des conditions aux limites, que le coefficient de transmission en amplitude complexe vaut :

$$\tau = 4ik \frac{\exp(-ikL)}{-(q-ik)^2 e^{qa} + (q+ik)^2 e^{-qa}}$$

Afin de remonter à des quantités physiquement facilement interprétable, on cherche le coefficient de transmission en intensité  $T$  :

$$T = \frac{J_i}{J_t} = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2$$

car  $J = \operatorname{Re}\left(-\frac{i\hbar}{m} \left(\frac{d\psi}{dx} \psi^*\right)\right)$ .

$T$  peut se réécrire de manière simple sous la forme :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \operatorname{sh}^2 X}$$

avec  $X=qL$  et  $M = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{q} + \frac{q}{k}\right)$ . Exprimé en fonction des énergies :

$$W = \frac{2m(V_0 - E)^{1/2}L}{\hbar} \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{4} \frac{V_0}{E} \frac{V_0}{V_0 - E}$$

Dans la plupart des cas, on se trouve dans l'approximation de la barrière épaisse, c'est à dire  $X \gg 1$ . On a donc :

$$T \approx T_0 e^{-2X} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2}$$

Le préfacteur  $T_0$  ne varie pas de manière significative par rapport à l'exponentielle. En effet la fonction  $16x(1-x)$  varie entre 0 et 4 pour  $E$  variant de 0 à  $V_0$  tandis que l'exponentielle peut varier sur plusieurs ordres de grandeurs !

Particule	$m$ (kg)	$V_0$ (eV)	$a$ (nm)	$\delta$ (nm)	$T$
Électron	$10^{-30}$	4	0,3	0,1	$10^{-2}$
Électron	$10^{-30}$	40	0,3	$4.10^{-2}$	$10^{-6}$
Électron	$10^{-30}$	4	3	0,1	$10^{-20}$
Proton	$10^{-27}$	4	0,3	$4.10^{-3}$	$10^{-63}$
Proton	$10^{-27}$	4	3	$2.10^{-3}$	$10^{-628}$

**Remarque :** on peut parler du fait que plus on s'éloigne du caractère quantique (grosse masse, grande taille),  $T$  tend vers 0 !

**Remarque :** il serait erroné de penser que l'effet tunnel est un phénomène purement quantique. On peut aussi l'observer dans le domaine de l'électromagnétique. Faire la manip ?

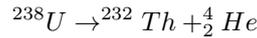
↓ L'effet tunnel permet de comprendre certains phénomènes naturels

## 2 La désintégration alpha

### 2.1 Rappels

La radioactivité  $\alpha$  est l'émission par un noyau instable, d'une particule  $\alpha$  (de l'hélium  ${}^4_2\text{He}$ ).

Elle concerne les noyaux lourds contenant un nombre important de protons, ce qui les rend plus instables. L'exemple connu est :

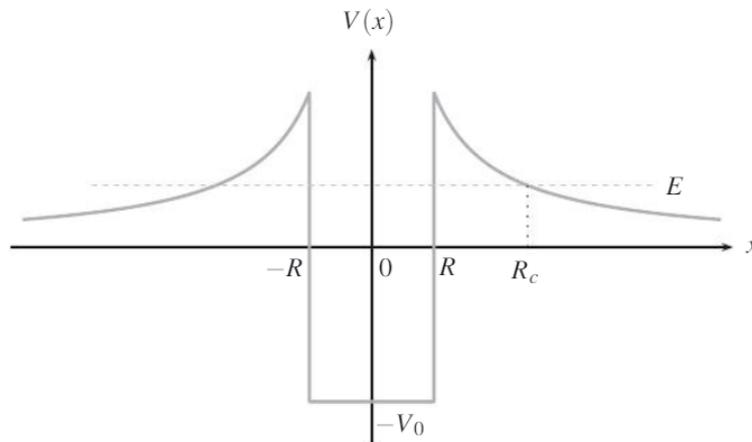


Expérimentalement on sait que le nombre de noyaux évolue selon une loi exponentielle  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ . De plus, la barrière d'énergie potentielle à franchir pour une particule  $\alpha$  pour sortir du noyau est de 25 MeV alors que l'énergie observée des particules  $\alpha$  est de l'ordre de 4 à 9 MeV, ce qui laisse donc supposer que la barrière est franchie par effet tunnel.

### 2.2 Modèle de Gamow

Afin d'expliquer les observations expérimentales, on modélise notre ensemble comme une particule  $\alpha$  existant à l'intérieur du noyau. On modélise ensuite le potentiel dans lequel est plongée la particule  $\alpha$  :

- Pour  $|x| \leq R = r_0 A^{1/3}$ ,  $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{m}$  : la particule est soumise à l'interaction forte qui assure la cohésion du noyau. On suppose donc que la particule est dans un puits de potentiel d'énergie  $-V_0$
- Pour  $|x| \geq R$ , l'interaction forte est négligeable car elle est à très courte portée. Il reste alors la répulsion électrostatique par le  $Z-2$  protons restant dans le noyau donc  $V(x) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 x}$



La probabilité pour que la particule alpha traverse la barrière d'énergie est modélisé par l'effet tunnel :

$$\ln T \approx -\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_c} \sqrt{2m \left( \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 x} - E \right)}$$

Le calcul complet (cf le  $\clubsuit$  BUP) montre que le résultat est alors :

$$\ln T = -\frac{\pi R V_m}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} + 2R \frac{\sqrt{V_m m}}{\hbar}$$

où  $V_m = \frac{2(E-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ . La probabilité se met donc sous la forme :

$$\ln T = \frac{a}{\sqrt{E}} + b$$

ce qui est assez bien vérifié expérimentalement.

## 2.3 Loi de désintégration exponentielle

On suppose que la particule fait des aller-retour dans le noyau et à chaque fois que la particule frappe la paroi, elle a une probabilité  $T$  de traverser la barrière de potentiel. D coup la probabilité qu'un noyau traverse la barrière s'exprime :

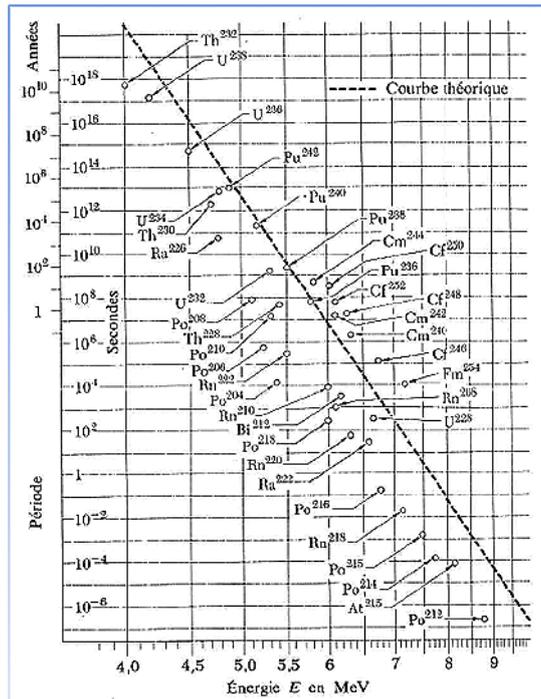
$$dP = \frac{v}{2R_0} T dt$$

Donc pour  $N$  noyaux :

$$dN = \frac{v}{2R_0} T N dt$$

Du coup on retrouve la loi en exponentielle avec  $\lambda = \frac{vT}{2R_0}$ . Donc :

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{2R_0 \ln 2}{vT}$$



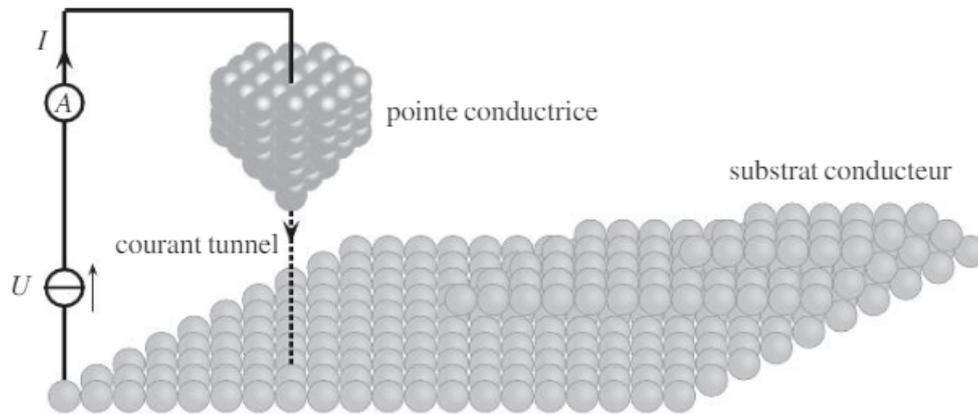
## 2.4 Limite du modèle

- La forme du potentiel est une approximation
- Les oscillations de la particule  $\alpha$  dans le noyau est aussi une approximation. On trouverait des oscillations à  $10^{22}$  Hz
- Marche surtout pour des noyaux de  $Z$  et  $A$  pairs

↓ On va voir aussi que l'effet tunnel peut être utilisé à des fins expérimentales

## 3 Microscopes à effet tunnel

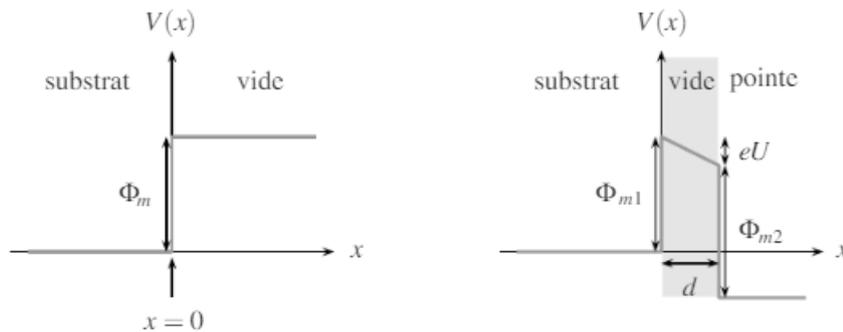
### 3.1 Principe du microscope



Lorsque l'on approche une pointe conductrice d'un substrat conducteur, des électrons peuvent passer du substrat à la pointe à l'aide d'une différence de potentiel qui aide les électrons à passer de l'un à l'autre. L'électron passe par effet tunnel dans le vide et donc on trouve que le courant est exponentiellement de la distance pointe/substrat. Les courants sont de l'ordre du nano-ampère, ce qui oblige à utiliser des ampèremètres très précis. Pour pouvoir capter du courant et être le plus précis possible il faut :

- Avoir une pointe très fine, qui est en fait généralement constituée d'un seul atome
- Approcher la pointe à moins d'un nanomètre du substrat
- Être capable de contrôler les déplacements de la pointe et de les mesurer le plus précisément possible. Pour cela, des piézoélectriques sont utilisés
- Il faut éliminer au plus possible les vibrations parasites

### 3.2 Étude théorique

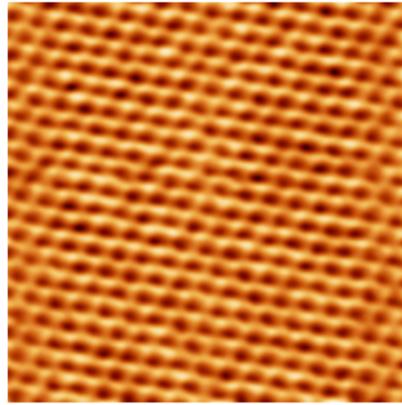


De la même manière que pour le modèle de Gamow, la probabilité de transmission est approchée par :

$$\ln T \approx -2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^{x_f} \sqrt{V(x) - E} dx = -\frac{2d}{\delta}$$

avec  $\delta$  qui vaut typiquement  $6.10^{-10}m$ .

On peut montrer que la variation relative d'intensité de 3% correspond à un déplacement de 10 pm. On peut donc être extrêmement précis avec cette méthode !



### 3.3 Utilisation expérimentale

- En imposant une intensité  $I$  constante, on reste donc à une distance fixe avec une très bonne précision normale à la surface. Latéralement, la précision dépend de la finesse de la pointe, d'où l'intérêt de n'utiliser qu'un seul atome. Ce type de microscope bat de loin les microscope optique en terme de précision car il n'y a plus la limite lié à la diffraction et donc au fait qu'on sonde la surface à une certaine longueur d'onde. Néanmoins, on ne peut pas voir de "grands détails" avec un microscope à effet tunnel.
- Selon la signe de la différence de potentiel, on peut faire en sorte que l'attraction soit répulsive ou attractive. On peut donc utiliser ce microscope pour manipuler des atomes un à un ! (voir image dans le  $\clubsuit$  tout en un)

## 4 Annexe

### 4.1 Courants de probabilité

$$\vec{j} = \frac{\hbar \vec{k}}{m} |\psi|^2$$

pour une onde plane bien entendu. Dans un cas plus général :

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)$$

## Questions

**Développement effet tunnel : Justification physique pour les conditions limites ?** Fonction d'onde : probabilité de présence qui ne peut pas être discontinue  
 Dérivée : continuité du courant de probabilité sinon source de particules quelque part

**Connaissez-vous des manifestations macroscopiques de phénomènes quantiques ?** Supraconductivité (paire de Cooper dont le spin est nul, marche à très basse température)

**Sur le calcul de la probabilité de transmission : comment convaincre un élève que la probabilité de transmission est le rapport des coefficients des deux ondes planes ?** Analogie avec la physique des ondes, il faudrait raisonner en terme de courant de probabilité

**Pourquoi chercher des solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire ?** Un type de solution plus facile à trouver ?

**Comment peut-on interpréter l'effet tunnel avec les relations d'incertitude de Heisenberg temps-énergie ?** Idée : l'incertitude sur l'énergie peut être très grande et l'énergie peut donc être très grande. Mais pourquoi l'incertitude temporelle (= temps passé dans le puits?) serait grande... ?

**Sur le microscope à effet tunnel : comment se fait le déplacement de la pointe du microscope à effet tunnel ?** À courant constant ou à hauteur constante

**Comment faire si on n'a pas une surface conductrice ?**

**Sur la molécule d'ammoniac : comment répondre physiquement à la question d'un élève qui ne comprendrait pas pourquoi on a une fonction d'onde antisymétrique bien que le potentiel soit lui symétrique ?** La grandeur physique c'est la norme de  $\psi$  au carré!

**Discussion caractère ondulatoire ou quantique : tu as pris un exemple d'électromagnétisme mais les photons sont des objets quantiques, est-ce que tu as un exemple plus convaincant pour montrer que les ondes évanescentes sont issues de la théorie ondulatoire ?** Les ondes sonores peuvent traverser des murs, il n'est pas possible d'insonoriser parfaitement une pièce.

**Radioactivité alpha : justification de l'expression du coefficient de transmission ?** Barrière quelconque = somme de barrières rectangulaires infinitésimales et on intègre. Remarque, on a alors plus dans l'approximation de la barrière épaisse ! Il y a des justifications, peut-être d'autres calculs, peut-être des simulations... (réflexion ouverte)

**Définition du coefficient de transmission** Rapport des courants de proba de l'onde transmise et incidente

**Microscopie à effet tunnel, que ce passe-t-il pour les bandes d'énergie à température non-nulle ? Dans un vrai STM, le courant est-il purement unidirectionnel ?** Quand température non nulle, statistique de Fermi-Dirac

**Autre technique que le microscope à effet tunnel pour sonder les surfaces et qui n'utilise pas les propriétés électriques des métaux ?** Ondes évanescentes (cf la deuxième partie de la leçon 32)

**Quelles conséquences si on considère un puits de potentiel au lieu d'une barrière de potentiel ? Est-ce incohérent avec la mécanique classique ?**

**Interprétation de  $A_I$  ?** En termes de flux de particules, expression de  $A_I$  avec le flux incident

**Sources pour les ODG (lecture, écriture des disques durs) ?** Recherche actuelle, thèses. Dépend aussi des marques, de la mise en réseau des transistors (temps donnés ici pour un seul transistor).

**Encore d'autres idées d'applications/apparitions de l'effet tunnel ?**

**Effet tunnel et paquet d'onde ?** On peut parler de la prototropie, des réactions chimiques, Changement de conformation de l'ammoniac. (Voir Diane Carrera)

**Est-ce que le changement de conformation est seulement du à l'effet tunnel ?** Si on chauffe beaucoup,  $kT$  peut devenir supérieur à la barrière de potentiel.

**Même question pour la particule alpha, peut-elle s'échapper autrement que par effet tunnel ?** On peut réexpliquer l'effet tunnel par de la physique statistique, une grosse variation qui donne assez d'énergie pour passer la barrière. Cependant, il y a alors des effets cinétiques, de relaxation qui justifient que ce n'est pas suffisant.

**Lien entre jonction Josephson et effet tunnel.** L'effet Josephson se manifeste par l'apparition d'un courant entre deux matériaux supraconducteurs séparés par une couche faite d'un matériau isolant ou métallique non supraconducteur. Bien que les paires de Cooper ne puissent pas exister dans un isolant ou un métal non supraconducteur, si la couche qui sépare les deux supraconducteurs est suffisamment mince, elles peuvent la traverser par effet tunnel et garder leur cohérence de phase. C'est la persistance de cette cohérence de phase qui donne lieu à l'effet Josephson. On obtient alors un courant de la forme  $I = I_0 \sin(\phi_1 - \phi_2) = I_0 \sin\left(\frac{2e}{\hbar}(V_1 - V_2)t + \phi_0\right)$  avec  $\phi_1 - \phi_2$  la différence de phase aux bornes de la jonction

**Gamow il a essayé quoi en premier ?** Juste un rectangle de potentiel entre  $R$  et  $R_c$  mais ça marche pas.

## Remarques

-