

# LP49 OSCILLATEURS, PORTRAIT DE PHASE ET NON LINEARITES

12 juin 2020

MONNET Benjamin &

## Niveau : L3

## Commentaires du jury

## Bibliographie

- *Mécanique 1*, **BFR** →
- *Non linear dynamics and chaos*, **Strogatz** →
- *Electronique expérimentale*, **Krob** →
- **Jolidon** → Pendule pesant

## Prérequis

- Mécanique du point
- Électronique

## Expériences



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Pendule simple et non-linéarité</b>	<b>2</b>
1.1	Non-linéarité . . . . .	2
1.2	Le pendule simple . . . . .	2
1.3	Période et isochronisme . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Oscillations auto-entretenus</b>	<b>4</b>
2.1	Présentation du Van der Pol . . . . .	4
2.2	Comportement du Van der Pol . . . . .	4
2.3	Comportement énergétique . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Introduction aux bifurcations (sil il y a le temps)</b>	<b>5</b>

## Introduction

Jusqu'ici, notre étude s'est limitée en mécanique à des problèmes que nous étions capables de résoudre analytiquement. Nous avons pour cela souvent fait des hypothèses simplificatrices. Nous allons essayer de voir ce qu'il se passe sans ces hypothèses.

## 1 Pendule simple et non-linéarité

### 1.1 Non-linéarité



#### Lancer le pendule !



Tout est dans le titre

Il semble important dans un premier temps de définir ce qu'est la non-linéarité. Pour ce faire, nous allons plutôt définir le concept de linéarité.

Un système est dit linéaire si les équations différentielles qui le caractérisent sont linéaires en ses variables

Cela implique entre autre que le théorème de superposition est applicable :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \rightarrow \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$$

que nous avons par exemple pu utiliser pour appliquer l'analyse de Fourier. Pour un système linéaire, ceci n'est plus valable et il va falloir adopter une nouvelle approche.

↓ Nous allons en discuter sur un objet physique simple et grandement étudié dans le supérieur : le pendule simple.

### 1.2 Le pendule simple

Comme il a déjà été établi, le pendule simple est régi par l'équation suivante :

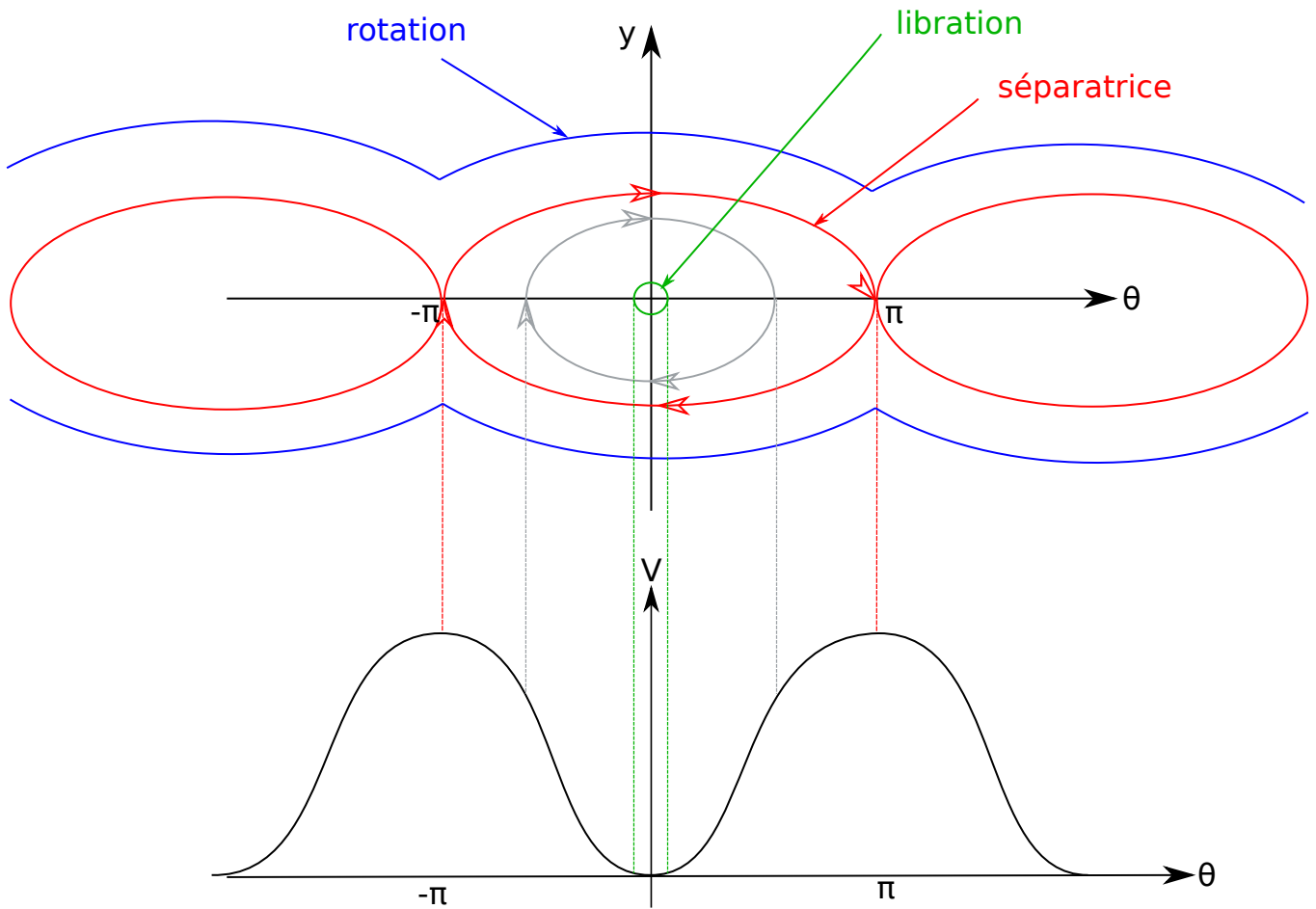
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Le but, bien évidemment, est de cette fois étudier cette équation sans la linéariser. Pour cela, nous allons tracer le portrait de phase correspondant à cette équation. Pour s'aider, on peut passer par une approche énergétique en multipliant l'équation précédente par  $\dot{\theta}$  et en intégrant :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{l}(1 - \cos(\theta)) = cste = E$$

où E est l'énergie à un facteur multiplicatif  $ml^2$  près et est directement relié aux conditions initiales (vitesse et position). On peut donc tracer le résultat pour différentes conditions initiales :

- $E \ll 2\omega_0^2$  : on retrouve l'oscillateur harmonique
- $E < 2\omega_0^2$  : on reste dans le puit de potentiel
- $E > 2\omega_0^2$  : on tourne sans interruption



Nous avons supposé jusque là que les frottements étaient négligeables, ce qui est bien entendu faux en réalité. Qualitativement, avec des frottements, les trajectoires spirales vers la seule position d'équilibre  $(0,0)$ .

### 1.3 Période et isochronisme

On aimerait Connaître la période d'oscillation du pendule pour les grand angles. On sait déjà que pour les petits angles, on a :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

mais qu'en est-il pour les grands angles ? Afin de résoudre ce problème, on développe le sinus à l'ordre 3 en  $\theta$  ce qui donne :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0$$

Le fait que  $\sin^3(x) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x)$  pousse à chercher une solution sous la forme :  $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) + \epsilon \theta_0 \sin(3\omega t)$  avec  $\epsilon \ll 1$ . L'équation du pendule devient alors :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 9\omega^2 \epsilon \sin(3\omega t) + \omega_0^2 \epsilon \theta_0 \sin(3\omega t) - \frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 \sin^3(\omega t) - \frac{\omega_0^2}{2} \epsilon \theta_0^3 \sin(3\omega t) \sin^2(\omega t) = 0$$

ce qui conduit en identifiant les termes à l'ordre 0 à :

$$\omega \approx \omega_0^2 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{8} \right) \leftrightarrow T \approx T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

appelée formule de Borda. Elle met en avant ce qu'on appelle la **perte d'isochronisme**. Cela signifie que la période d'oscillation dépend des conditions initiales (de l'angle initiale), contrairement au cas linéaire.



### Formule de Borda, enrichissement spectrale

⚡ Jolidon

⊖

On utilise l'acquisition lancée en début de leçon pour montrer les portraits de phase, l'isochronisme et l'enrichissement spectral.

↓ Nous avons pour l'instant parlé d'un système dynamique qui oscille selon des conditions initiales. On peut, en électronique, engendrer des oscillations à partir de non-linéarités.

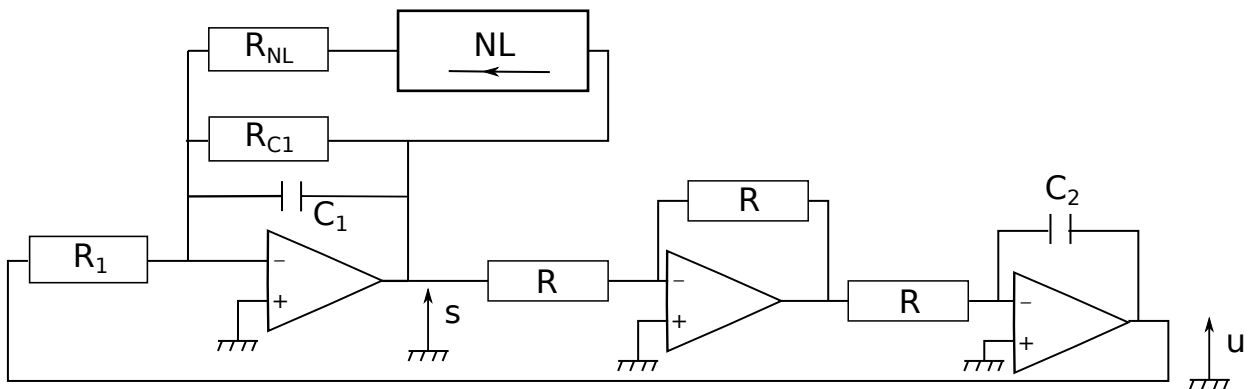
## 2 Oscillations auto-entretenus

### 2.1 Présentation du Van der Pol

Nous allons, parler des oscillations auto-entretenus de l'oscillateur de Van der Pol. Il est composé d'un élément non linéaire dont la caractéristique est

$$s(t) = -\alpha e(t) + \beta e^3(t)$$

Le Van der Pol se présente ainsi :



et est caractérisé par l'équation suivante :

$$\ddot{s} - \epsilon \omega_0 \left( 1 - \frac{s^2}{s_0^2} \right) \dot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

avec :

$$s_0 = 2 \sqrt{-\frac{\alpha}{3\beta} - \frac{R_{NL}}{3\beta R_{C1}}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$\epsilon = -\sqrt{\frac{R_1 R_2 C_2}{C_1} \frac{\alpha R_{C1} - R_{NL}}{R_{C1} R_{NL}}}$$

En posant  $\tau = \omega_0 t, x = \frac{s}{s_0}$ , on peut réécrire l'équation différentielle :

$$x'' + \epsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$$

### 2.2 Comportement du Van der Pol

On voit que la non linéarité apparait dans le second terme de l'équation. Le comportement de l'oscillateur est piloté par cette grandeur :

- $\epsilon > 0$  : si  $x > 1$ , x est amplifié et croit vers 1 mais si  $x < 1$ , x est atténué et décroît jusqu'à 1. On observe donc des oscillations auto-entretenues

- $\epsilon < 0$ .  $x < 1$  :  $x$  décroît vers 0.  $x > 1$  : croissance jusqu'à saturation des AO.

Il est important de remarquer que  $s_0$  n'est défini que si  $R_{NL} < \alpha R_{CL}$ . Si cette condition n'est pas respectée,  $1 - x^2$  devient  $1 + x^2$  et les oscillations ne peuvent pas apparaître.



### Van der Pol

☞ Kbro p 170



Montrer l'apparition des oscillations et leur croissance.

## 2.3 Comportement énergétique

Il est intéressant de voir ce qu'il se passe d'un point de vue énergétique. Pour cela, on multiplie par  $x'$  l'équation obtenue précédemment :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{x'^2}{2} + \frac{x^2}{2} \right) = \epsilon(x'^2 - x^2 x'^2)$$

En moyenne sur une période, on ne perd pas d'énergie. On peut donc en conclure que l'énergie dissipée est entièrement compensée par l'énergie apportée par l'élément non-linéaire. Ceci explique comment de telles oscillations peuvent exister.

## 3 Introduction aux bifurcations (sil il y a le temps)

On considère cette fois un pendule simple tournant. L'équation est donc :

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{l} - \omega^2 \cos(\theta) \right) \sin(\theta) = 0$$

L'énergie potentielle de ce pendule vaut :

$$E_p = -mgl \cos(\theta) + \frac{ml^2 \omega^2}{4} \cos(2\theta)$$

Les positions d'équilibre :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = ml^2(\omega_0^2 - \omega^2 \cos(\theta)) \sin(\theta)$$

On peut calculer la dérivée seconde et regarder la stabilité. On trouve :

- $\theta = 0$  stable seulement pour  $\omega < \omega_0$
- $\theta = \pi$  toujours instable
- $\theta = \arccos\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$  existent et sont stables pour  $\omega > \omega_0$

Animation geogebra.

## Questions

- 

## Remarques

-