MP28 Instabilités et phénomènes non-linéaires

29 mars 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L3

Commentaires du jury

Bibliographie

✍ *Nom du bouquin*, **auteur** [1] ⟶ A quoi ser ce livre ?

Prérequis

➢

Expériences

☕

Table des matières

Introduction

1 Le pendule pesant

1.1 Calibration du dispositif

L'équation du pendule est :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

qui est non linéaire. Néanmoins, on connait des positions d'aquilibre d'un tel système :

- $\theta = 0$: équilibre stable
- $\theta = \pi$: équilibre instable.

Afin de pouvoir étudier l'angle du pendule pesant, il nous faut un système qui permette de remonter à cet angle. Nous avons pour ça un capteur potentiométrique dont la tension en sortie est reliée à l'angle du pendule. Afin de remonter à l'angle du capteur, il faut la caractéristique $U = f(\theta)$

☕

Linéarité du capteur

✍ ⏲

On mesure la tension en sortie à l'aide d'un multimètre pour différents angles afin de vérifier la linéarité et on trace U=f(θ). On vérifie qu'un modèle linéaire est pertinent.

1.2 Formule de Borda

Afin d'observer des non-linéarité dans notre étude, il va falloir étudier le pendule aux grands angles. En développant le sinus, on peut montrer que la période se met sous la forme

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16}\right)$$

qui correspond à l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0$$

On remarque par ailleurs qu'avec le terme en θ^3, on s'attend à voir apparaitre une pulsation à 3ω dans le signal. En poussant encore plus loin le développement, on peut montrer que la période s'écrit :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16} + \frac{11}{3072}\theta^4\right)$$

On remarque alors une perte d'isochronisme qui est un phénomène typique de la non-linéarité : la période dépend de l'amplitude.

☕

Formule de Borda

✍ Jolidon ⏲

Matériel : pendule pesant P79.14 et oscilloscope.

Il y a ensuite deux méthodes défférentes pour remontrer à la formule de Borda.

- On exploite la perte d'énergie du pendule pour remonter à $T = f(\theta)$ en une seule acquisition longue avec le code suivant :

  lisser la courbe et la centrer autour de zéro : thetaL = Lissage(theta) - Moy(theta)

  Détection de l'enveloppe des amplitudes d'oscillations, c'est-à-dire les maxima locaux supérieurs à 0,1 radian par exemple : Env = CreteMaxi(thetaL ;0.1)

  Repérage des temps de passage par zéro : Tpas = Seuil(thetaL ;0 ;1)

Création d'un vecteur rampe pour dériver les variables : n = Rampe(1 ;10000 ;10000)

Calcul la période entre deux passages par zéro en dérivant : Tper = Deriv(Tpas ;n)

- Ou alors plus précis : on fait des acquisitions pour différents angles (demander aux techniciens). Bien penser aux incertitudes.

Ne pas oublier que les frottements peuvent fortement impacter les mesures, en particulier aux grands angles.

1.3 Enrichissement du spectre

On peu tracer le portrait de phase. Pour les petits angles, on voit que la trajectoire est une belle ellipse et si on regarde la FFT : on a une seule pulsation. Néanmoins , aux angles plus grand, l'ellipse s'applatit et on voit une pulsation à 3ω apparaitre.

Après avoir vu quelques caractéristiques de la non linéarité, nous allons maintenant voir comment en générer dans le domaine électrique.

2 Oscillateur de Van der Pol

2.1 Présentation du Van der Pol et principe

✍ Krob, p167

Un oscillateur de Van der Pol est un oscillateur non linéaire suivant l'équation différentielle

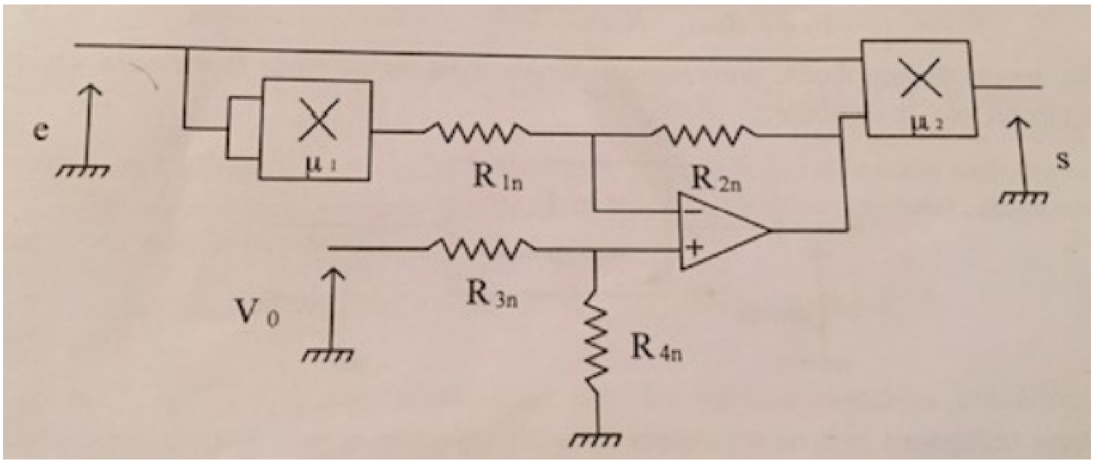
$$\ddot{s} - \epsilon\omega_0 \left(1 - \frac{s^2}{s_0^2}\right) \dot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

Cette équation non linéaire à un comportement déterminé par le préfacteur $\epsilon\omega_0 \left(1 - \frac{s^2}{s_0^2}\right)$. Si $s < s_0$, alors on a croissance des oscillations et si $s > s_0$, on a décroissance.

Si ϵ est négatif, alors le point $s = \frac{ds}{dt} = 0$ est toujours stable et l'oscillateur ne se lancera pas.

2.2 L'élément non-linéaire

Afin de fonctionner, l'oscillateur de Van der Pol a besoin d'un élément non-linéaire. Il correspond à l'assemblage suivant :



On a alors :

$$s = \alpha e + \beta e^3$$

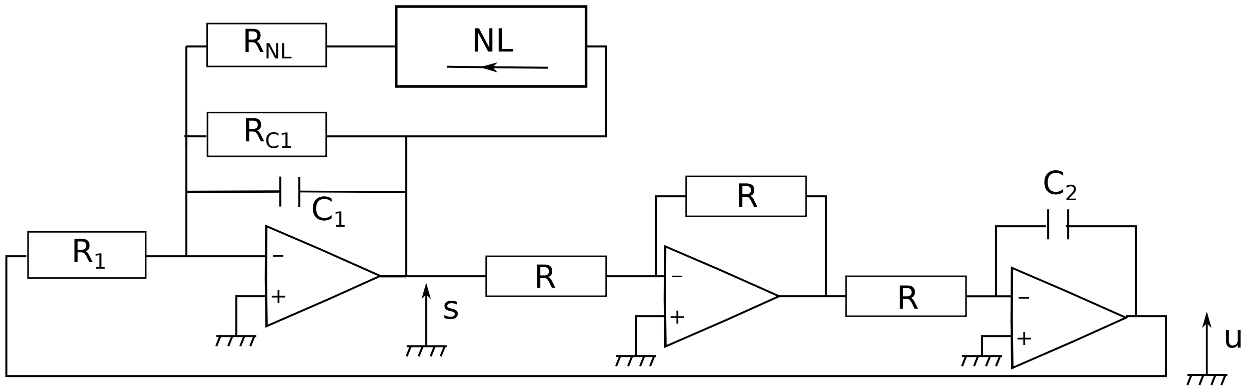
Caractéristique de l'élément non-linéaire

Krob, p169

Après avoir alimenter l'élément non liéaire (P42.46), in met en entrée un signal d'amplitude 3V et de fréquence 100Hz puis on relève entrée et sortie sur Latis-Pro. Un ajustement permet ensuite de remontrer à α et β.

2.3 Démarrage des oscillations : bifurcation

Le Van der Pol se construit de la manière suivante :



On peut alors montrer que l'équation différentielle suivie par s est la suivante :

$$\ddot{s} + \frac{1}{C_1}\left(\frac{\alpha}{R_{NL}} + \frac{1}{R_{C1}}\right)\omega_0\left(\frac{s^2}{s_0^2}\right)\dot{s} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}s = 0$$

avec

$$s_0 = 2\sqrt{-\frac{\alpha}{3\beta} - \frac{R_{NL}}{3\beta R_{C1}}}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$
$$\epsilon = -\sqrt{\frac{R_1R_2C_2}{C_1}\frac{\alpha R_{C1} - R_{NL}}{R_{C1}R_{NL}}}$$

Comme dit précédement, les oscillations ne peuvent apparaitre que si l'on a $\epsilon > 0$ et donc $R_{NL} < \alpha R_{C1}$.

Bifurcation et valeur limite

Kbrob

Attention au sens de l'élément NL.

On utilise les valeurs p172 du Krob. On cherche la valeur limite de R_{NL} (vers 20/25 kΩ). On peut tracer le portrait de phase et montrer l'enrichissement spectral. On peut voir en débranchant, rebranchant la convergence vers un cycle limtite.

2.4 Vérification de l'amplitude

Amplitude

✍ Krob ⏲

On mesure $s_0^2 = f(R_{NL})$. Penser aux incertitudes !

3 Multiplication des points d'équilibre

☕

Double puit

✍ ⏲

Dédoublement des points fixes à l'aide des aimants. **A essayer**

Questions

-

Remarques

-