

MP 32 : Couplage des oscillateurs

"Chaque crime est un noyau atomique et les éléments récurrents ses électrons, oscillant autour de lui et dessinant une vérité subliminale."

Jean-Christophe Grangé (ça ne veut absolument rien dire, mais l'effet reste le même)

Benjamin Blancon, Vincent Martos

16 janvier 2020

Bibliographie

- **Poly d'élec**, pour la manip' des circuits RLC couplés et les schémas associés, et pour le principe de l'oscillateur à relaxation.
- **Quaranta, tome IV : électricité et applications**, pour les calculs théoriques des circuits RLC couplés (p.146-151).
- **Jolidon**, pour le couplage entre les quatre masses (p.490-502) et le schéma associé.
- La démonstration de l'expression des modes propres des quatre masses couplées est donnée **en annexe (ENS Cachan)**.
- **BUP n°815, Hervé Magoni et Damien Flieller : Synchronisation de deux oscillateurs couplés**, pour le couplage non linéaire entre les deux oscillateurs à relaxation et les courbes associées (p.65-92).

Table des matières

Introduction	2
1 Un premier exemple de deux oscillateurs couplés : couplage de deux circuits RLC	2
2 Un couplage entre N oscillateurs : couplage entre quatre masses	4
2.1 Etude des modes propres	4
2.2 Influence du nombre de masses	5
2.3 Mise en évidence des modes propres par oscillations forcées	5
3 Couplage non linéaire entre deux oscillateurs à relaxation	6
Conclusion	7

Introduction

Le phénomène d'oscillation est une variation périodique d'un système physique autour d'un point d'équilibre. Il correspond à de nombreux exemples simples (masse accrochée au bout d'un ressort, pendule simple, oscillateur harmonique quantique pour la vibration d'une liaison covalente...), facilement caractérisables par leur fréquence propre f_0 . Pour autant, un oscillateur est rarement isolé : si on reprend l'exemple de la liaison covalente, on se doute que les vibrations de toutes les liaisons covalentes présentes dans une molécule ne sont pas indépendantes et interagissent les unes avec les autres. On parle alors d'oscillateurs couplés. Un autre exemple est présenté Figure 1 avec deux pendules simples. Lorsque les deux pendules ne sont pas couplés, ils évoluent librement et possèdent chacun une même fréquence propre f_0 s'ils sont supposés identiques. En revanche, si on les lie maintenant par une tige, les deux pendules se couplent et la fréquence globale du système est modifiée et n'a aucune raison de valoir f_0 . Le but de ce montage est d'étudier quels sont les différents couplages possibles entre N oscillateurs, et de voir comment le couplage influe sur les propriétés du nouveau système. Commençons simplement en regardant le couplage de deux circuits RLC en électricité.

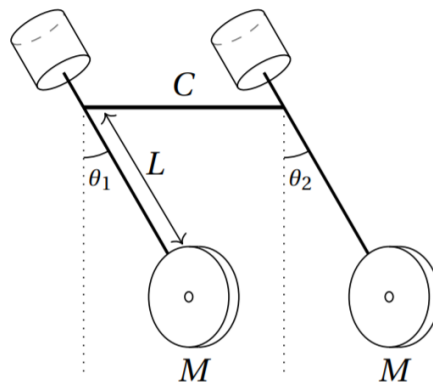


FIGURE 1 – Les deux pendules simples sont couplés via une tige de constante de couplage C (voir TP Divers pour plus de manips avec ce dispositif).

1 Un premier exemple de deux oscillateurs couplés : couplage de deux circuits RLC

On commence par étudier deux circuits RLC séparément l'un de l'autre (voir Figure 2(a)). L'équation différentielle que vérifie la tension s aux bornes de la résistance est :

$$\ddot{s}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = e(t), \quad (1)$$

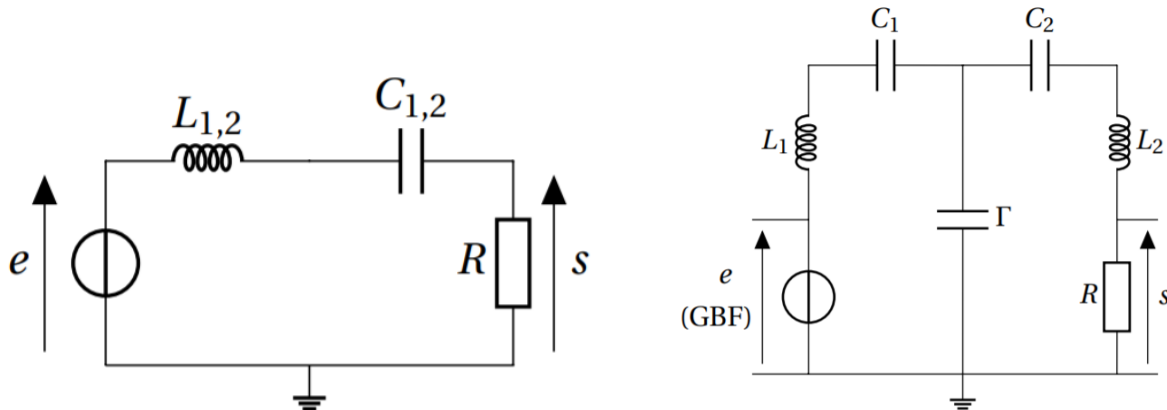
où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pseudo-pulsation propre de l'oscillateur et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ son facteur de qualité. Si la tension d'entrée est envoyée à la pulsation ω_0 , le système est en résonance et le transfert d'énergie est alors maximal.

On se place maintenant dans le cas où les deux oscillateurs sont couplés comme présenté Figure 2(b). En supposant les caractéristiques des deux circuits RLC identiques, le système possède deux nouvelles pulsations propres :

$$\omega_{antisym}^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad \omega_{sym}^2 = \frac{1}{LC} \left(1 + 2\frac{C}{\Gamma}\right), \quad (2)$$

où Γ est la capacité variable couplant les deux circuits RLC. La pulsation $\omega_{antisym}$ correspond à une excitation des deux oscillateurs en opposition de phase (tensions opposées dans les deux circuits en parallèles) et ω_{sym} à une excitation des deux oscillateurs en phase (tensions égales dans les deux

circuits en parallèle). Le couplage des deux oscillateurs a donc bien entraîné une modification des fréquences propres du système (voir le TP d'élec correspondant pour plus de manips avec ce montage, notamment le transfert d'énergie entre les deux modes).



(a) Schéma d'un circuit RLC. On regarde en sortie la tension aux bornes de la résistance.

(b) Schéma des deux circuits RLC couplés par une capacité variable Γ . La première résistance est remplacée par celle du GBF ($\simeq 50\Omega$).

Couplage capacitif de deux circuits RLC

Brancher le premier circuit RLC avec une résistance faible pour augmenter le facteur de qualité et faciliter l'observation de la résonance, et un couple LC faible pour augmenter la fréquence de résonance (typiquement $R \simeq 100\Omega, L \simeq 40mH, C \simeq 10nF$). **PENSER A TOUJOURS VERIFIER AU RLC-METRE LES VALEURS DE TOUS LES COMPOSANTS.** On obtient une fréquence propre $f_0 \simeq 8kHz$, que l'on peut retrouver en regardant par exemple la phase relative entre le signal d'entrée et de sortie (nulle pour $f = f_0$) ou alors en se plaçant sur le mode XY de l'oscilloscope (on observe une droite pour $f = f_0$, méthode de Lissajou).

Après avoir réglé le premier circuit RLC, on branche le deuxième circuit RLC en prenant comme capacité C_2 une boîte à capacité. **Sans modifier la fréquence d'entrée**, modifier la valeur de C_2 jusqu'à ce qu'on retrouve une résonance pour f_0 . On a accordé le deuxième oscillateur sur le premier : les deux oscillateurs sont maintenant prêts à être couplés.

Coupler les deux circuits RLC comme montré ci-dessus via une boîte à capacités Γ . Utiliser la méthode de la réponse indicelle pour mesurer $s(t)$: envoyer un créneau de fréquence $10Hz$ en entrée avec une rampe de $4V$ et acquérir le signal sur Latispro avec un trigger à $100mV$. Lisser, dériver et faire la TF du signal obtenu pour obtenir le spectre en fréquence et identifier les deux fréquences propres du système $f_{antisym}$ et f_{sym} . Répéter la mesure pour des valeurs de Γ entre 5 et $50nF$ et tracer $\omega_{antisym}^2$ et ω_{sym}^2 en fonction de Γ . On s'attend à trouver deux courbes respectivement de pente nulle et de pente $\frac{2}{L}$.

ATTENTION La mesure présente de nombreuses incertitudes. En effet, les deux circuits RLC sont supposés identiques, ce qui n'est jamais le cas en réalité : la valeur de L trouvée n'est donc qu'une moyenne entre L_1 et L_2 . Les deux pics possèdent également leur propre largeur entre autre à cause du facteur de qualité de chacun des circuits. Enfin, la résolution fréquentielle sur Latispro est **DEGUEULASSE** (Satan ce logiciel) : la distance entre deux pics est au mieux de $500Hz$, c'est pourquoi les valeurs de $f_{antisym}$ et f_{sym} peuvent fortement varier d'une mesure à l'autre. Essayez de régler au mieux les temps d'acquisition (on a pris personnellement 2000 points pour un temps de mesure de $1\mu s$ et un temps total d'acquisition de $2s$), mais ne vous attendez pas à un miracle non plus.

Cette première expérience nous a permis de quantifier une première modification des propriétés des oscillateurs lorsqu'ils étaient couplés. Cependant, l'une des deux fréquences propres présentée ici était la même que pour le système isolé, ce qui n'est pas toujours le cas. De plus, on a étudié le couplage le plus simple possible puisqu'il ne concernait que deux oscillateurs mis en commun. Nous allons maintenant voir que les propriétés des oscillateurs couplés peuvent se généraliser à N oscillateurs couplés, en prenant l'exemple de quatre masses reliées deux à deux par des ressorts.

2 Un couplage entre N oscillateurs : couplage entre quatre masses

2.1 Etude des modes propres

On considère le système représenté Figure 2, constitué de quatre pendules simples de longueur L , de masse M et de longueur à vide l_0 (on suppose les quatre pendules identiques). Ils sont reliés entre eux par des ressorts de constante de raideur k supposés sans masse et identiques. On s'intéresse alors dans un plan 2D à la variation de la position des masses lorsqu'elles oscillent par rapport à leur position d'équilibre. Leurs positions par rapport à leur longueur à vide sont dénotées s_i , et on suppose que les masses 1 et 4 sont reliées à deux points fixes tel que $s_0 = s_5 = 0$ durant toute l'expérience.

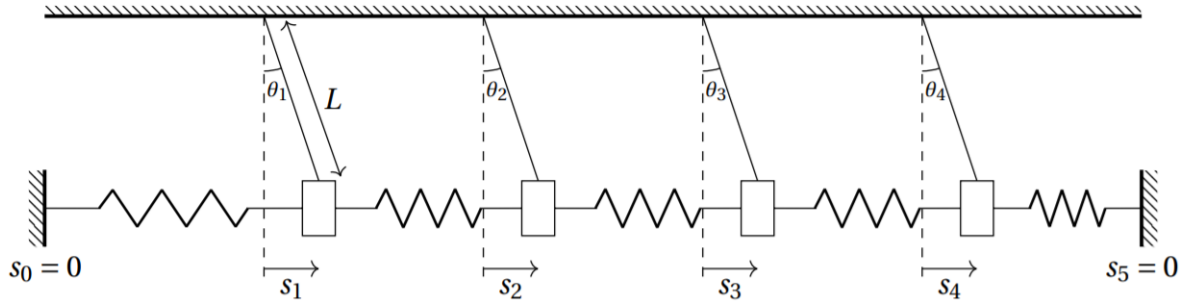


FIGURE 2 – Schéma des quatre masses reliées entre elles par des ressorts.

En appliquant le PFD à chaque masse et en se plaçant dans l'approximation des petits angles ($\sin(\theta_i) \simeq \tan(\theta_i) = \frac{s_i}{L}$), on obtient :

$$\ddot{s}_i = \Omega_0^2 s_i + \Omega_1^2 (s_{i+1} + s_{i-1} - 2s_i), \text{ avec } \Omega_0^2 = \frac{g}{L}, \Omega_1^2 = \frac{k}{M}. \quad (3)$$

La résolution de cette équation à dimension quelconque est faite en annexe et donne la forme générale des pulsations propres du système $\omega_{p,N}$ tel que :

$$\omega_{p,N}^2 = \Omega_0^2 + 4\Omega_1^2 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2(N+1)}\right), \quad (4)$$

où p représente la p -ième masse regardée pour un système totale de N masses. On retrouve donc une propriété fondamentale des oscillateurs couplés que l'on avait déjà observé dans la première partie : **il y a autant de fréquences propres qu'il y a d'oscillateurs couplés dans le système**. Dans notre cas des quatre masses couplées, les pulsations propres du systèmes sont :

$$\begin{aligned} \omega_{1,4}^2 &= \Omega_0^2 + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\Omega_1^2. \\ \omega_{2,4}^2 &= \Omega_0^2 + \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})\Omega_1^2. \\ \omega_{3,4}^2 &= \Omega_0^2 + \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\Omega_1^2. \\ \omega_{4,4}^2 &= \Omega_0^2 + \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})\Omega_1^2. \end{aligned} \quad (5)$$

On peut également faire une analogie capacitif-élastique avec la première manip', comme présenté dans le tableau ci-dessous.

Tension	Déplacement
Inductance	Masse
$1/C_1$	Raideur des tiges liant la masse au support
$1/\Gamma$	Raideur du ressort de couplage

Fréquences propres de quatre masses couplées

Commencer par peser les quatre masses du système, mesurer les longueurs et les constantes de raideur des ressorts en mesurant leurs allongements relatifs après avoir suspendu des masselottes. On prendra ici $M = 323g$, $L = 33cm$ et $k = 115N.m^{-1}$ en moyennant sur les quatre masses.

Pour filmer le dispositif, utiliser la caméra prévue à cet effet et le logiciel VidéoCom Mouvements. Il faut s'assurer que la caméra capte bien la position des quatre masses grâce à une bande réfléchissant la lumière sur chacune d'elles. Après avoir réglé la position de la caméra, déplacer l'une des masses de sa position d'équilibre et enregistrer le mouvement des quatre masses durant 30s maximum. Clic droit FFT nous permet d'avoir directement le spectre en fréquence du système. On peut alors mesurer les quatre fréquences propres du système et les comparer à celles attendues théoriquement ($2,05Hz$, $3,64Hz$, $4,94Hz$ et $5,78Hz$ avec nos valeurs de M et k). On peut alors remonter aux valeurs théoriques de Ω_0 et Ω_1 en traçant $\omega_{p,4}^2$ en fonction de $\sin^2\left(\frac{p\pi}{10}\right)$.

Au-delà de ces vérifications avec la loi théorique, deux remarques sont importantes. La première est que l'intensité relative de chacune des fréquences dépend de l'énergie présente dans chacun des modes et donc de la condition initiale. On a donc **une sélection par le système de la répartition de l'énergie dans chacun des modes**. De plus, les positions après une trentaine de secondes rendent compte des effets non linéaires du système. A ce moment-là, on remarque qu'il y a un **transfert d'énergie entre les différents modes dû aux effets non linéaires du système**, d'où le fait de ne pas faire l'acquisition sur un temps trop long.

2.2 Influence du nombre de masses

Une autre expérience possible avec ce montage est de considérer un nombre de masses différentes dans le système. Les valeurs des fréquences propres sont alors modifiées d'après l'équation 4, et le nombre de fréquences propres diminue en fonction du nombre de masses considérées.

Influence du nombre de masses sur les modes propres

On reprend notre système précédent en bloquant une, deux ou trois masses et on réitère l'expérience précédente pour vérifier qu'on obtient bien les bonnes fréquences propres du système et qu'il y en a autant qu'il y a de masses dans le système. On peut aussi remonter aux valeurs de Ω_0 et Ω_1 , même si les incertitudes sont très grandes dans ce cas car les masses sont difficiles à bloquer et les effets non linéaires plus importants.

2.3 Mise en évidence des modes propres par oscillations forcées

Une dernière expérience intéressante à faire est de forcer les oscillations du système. En effet, les systèmes contrôlés par l'expérimentateur pour forcer un système à rentrer en résonance sont des manips omniprésentes en physique expérimentale car le transfert d'énergie est alors maximal dans le système (cf résonance des circuits RLC dans la première partie). C'est une manip' assez simple à faire en plus ici, c'est très visuel, et on met en évidence de manière plus efficace les modes propres correspondant aux fréquences propres du système (voir Figure 3).

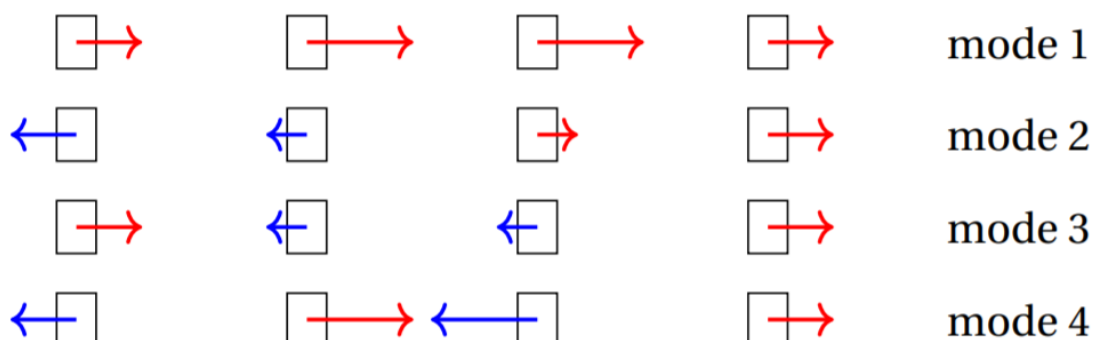


FIGURE 3 – Représentation des différents modes propres du système de quatre masses couplées.

Excitation des modes propres par oscillations forcées

Remplacer s_0 par un vibreur contrôlé via un GBF réglé sur les fréquences propres du système : on voit alors le système entrer en résonance et les masses bouger suivant les patterns présentés Figure 3. On retrouve ici une propriété générale des ondes, à savoir **l'apparition d'une résonance lorsque le système est excité via l'extérieur à l'une de ses fréquences propres.**

Nous avons dans cette deuxième partie généralisé les propriétés des oscillateurs couplés pour N oscillateurs, en mettant également en évidence l'influence du nombre N sur le nombre de fréquences propres et leurs valeurs. Nous avons aussi montré les effets non linéaires qui sont en réalité très importants car ils permettent d'expliquer le transfert d'énergie entre les différents modes d'un système couplé. Nous allons étudier cela plus en profondeur dans cette dernière partie à travers le couplage de deux oscillateurs à relaxation non linéaires.

3 Couplage non linéaire entre deux oscillateurs à relaxation

On s'intéresse au montage Figure 4. Il est constitué de deux oscillateurs à relaxation non linéaires couplés par deux résistances variables R_{12} et R_{21} . Chaque oscillateur à relaxation est constitué d'un intégrateur de caractéristiques R_1 ou R_2 , C_1 ou C_2 et d'un comparateur à hystérésis de caractéristiques R_a et R_b . La tension en sortie du comparateur à hystérésis oscille alors entre $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$ à une fréquence $f_{0,1} = \frac{R_b}{4R_a R_1 C_1}$ pour le premier oscillateur et $f_{0,2} = \frac{R_b}{4R_a R_2 C_2}$ pour le deuxième oscillateur. Les composants choisis entre les deux oscillateurs sont les mêmes, excepté R_1 et R_2 qui sont légèrement différents. Voyons ce que cela implique sur la dynamique globale du système.

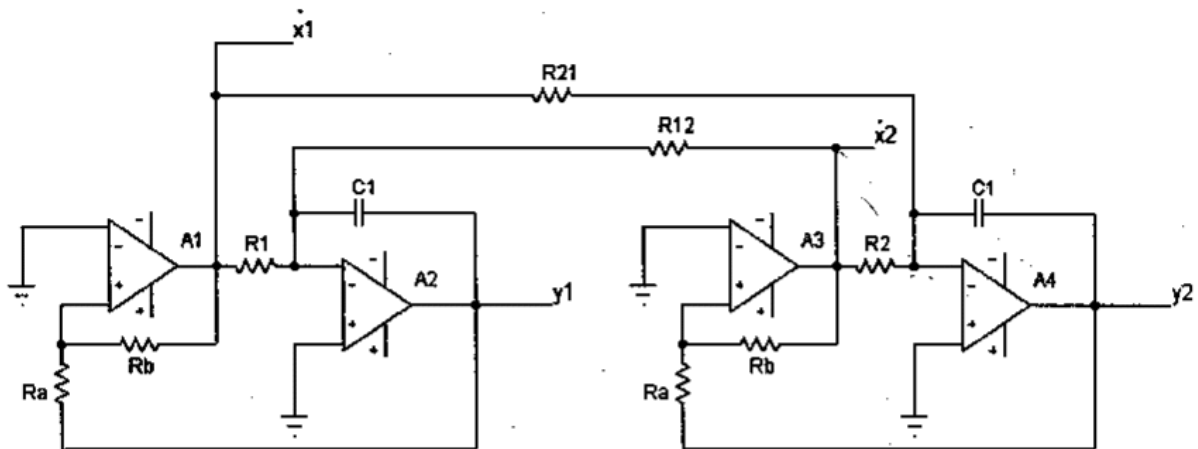


FIGURE 4 – Schéma du couplage de deux oscillateurs à relaxation couplés par deux résistances R_{12} et R_{21} .

L'article du BUP dont est extrait cette manip' explique la stabilité du système en fonction des valeurs des résistances de couplage R_{12} et R_{21} (voir Figure 5). On remarque qu'il existe deux modes pour lesquels le système est stable. Dans le mode 1, le premier oscillateur est en avance sur le deuxième. Dans le mode 2, c'est le contraire. En revanche, la période d'oscillation des deux oscillateurs est la même dans les deux cas. **Dans les zones de stabilité, les deux oscillateurs même non linéaires se synchronisent.** Cela est uniquement possible pour des valeurs de R_1 et R_2 proches et pour des plages de valeurs de R_{12} et R_{21} données. Sinon, le système est instable et n'arrive pas à se synchroniser. La stabilité pouvant s'établir pour le couplage de deux oscillateurs non linéaires peut s'avérer très utile en réalité. Par exemple, les tuyaux d'orgue qui n'ont pas tout à fait la même fréquence de résonance du fait des défauts de fabrication peuvent tout de même s'accorder si cette différence est faible. On peut citer également la pulsation commune entre deux lasers couplés, les cellules d'un cœur artificiel fonctionnant de manière synchronisé... A noter pour finir que les oscillateurs non linéaires sont largement utilisés dans la fabrication d'horloges.

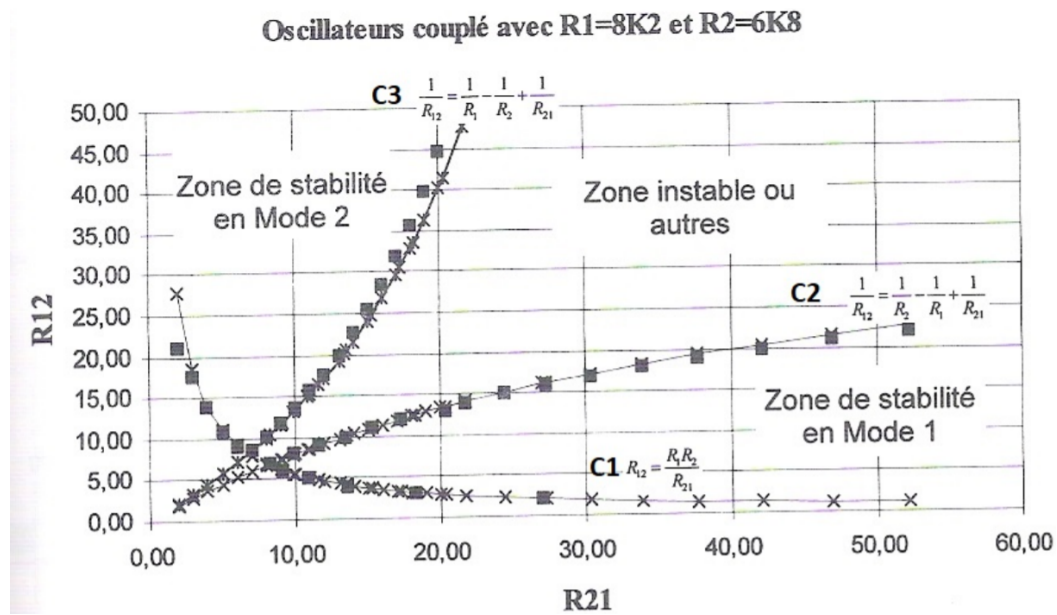


FIGURE 5 – Différentes zones d’instabilités pour le couplage des deux oscillateurs à relaxation en fonction des valeurs de R_{12} et R_{21} .

Couplage entre deux oscillateurs à relaxation non linéaires

Réaliser le montage Figure 4 en prenant $C_1 = C_2 = 1\mu F$, $R_a = 1k\Omega$, $R_b = 10k\Omega$, $R_1 = 8,2k\Omega$ et $R_2 = 6,3k\Omega$ (d’autres valeurs de R_1 et R_2 sont possibles pour peu qu’elles soient du même ordre de grandeur, mais simplifiez-vous la vie pour retrouver les courbes de la Figure 5 et prenez les mêmes que dans l’article). On pourra s’assurer que les deux oscillateurs à relaxation non couplés vérifient la fréquence donnée précédemment avant de rajouter les résistances variables R_{12} et R_{21} . En regardant à l’oscilloscope les sorties x_1 , x_2 , y_1 et y_2 , vérifier les trois zones présentées sur la Figure 5 en fonction des valeurs de R_{12} et R_{21} . On rappelle que pour le mode 1, le signal x_1 sera en avance sur le signal x_2 et inversement pour le mode 2. Pour le mode instable, ne pas hésiter à stopper les signaux sur l’oscilloscope et à mettre en évidence que les deux systèmes ne s’accordent pas (les deux signaux créneaux sont alors aperiodiques et évoluent chaotiquement). On peut regarder la valeur de la période pour les oscillateurs couplés, ou encore essayer de retrouver l’une des trois courbes de stabilité en modifiant les valeurs de R_{12} et R_{21} .

Note : c’est déjà une manip’ assez compliquée et longue à expliquer, si vous arrivez à aller jusqu’à retracer l’une des courbes de stabilité c’est bien !

Les effets non linéaires dans les oscillateurs couplés peuvent être considérés comme négligeables, pour peu qu’ils soient suffisamment faibles devant le signal émis (d’où une contribution non négligeable des effets non linéaires avec les masses couplées lorsque l’amplitude décroissante des oscillations devenait du même ordre de grandeur que les effets non linéaires). La non linéarité est donc l’une des limites du modèle des oscillateurs couplés idéaux à prendre en compte pour caractériser au mieux le système étudié.

Conclusion

Dans ce montage, nous avons présenté les différentes propriétés que possédaient les oscillateurs couplés. Les fréquences caractéristiques du système sont modifiées par rapport aux fréquences des oscillateurs isolés et sont aussi nombreuses qu’il y a d’oscillateurs. De plus, l’existence de différents modes propres entraîne une répartition de l’énergie entre ces différents modes qui peut être redistribuée dans le temps par des effets non linéaires. On voit alors tout l’intérêt des oscillations forcées où l’expérimentateur choisit lui-même le mode propre à exciter en s’affranchissant des effets non linéaires.

Annexe : démonstration des pulsations propres pour N oscillateurs couplés

Dans ce papier, on veut démontrer que les valeurs propres de la matrice $A_{\alpha,\beta} = \left(a_{ij}^{(\alpha,\beta)} \right)_{1 \leq i,j \leq d}$ définie par :

$$\begin{cases} a_{ii}^{(\alpha,\beta)} = \alpha & i = 1, \dots, d \\ a_{i,i+1}^{(\alpha,\beta)} = \beta & i = 1, \dots, d-1 \\ a_{i-1,i}^{(\alpha,\beta)} = \beta & i = 1, \dots, d-1 \end{cases}$$

sont $\lambda_k = \alpha + 2\beta \cos \frac{k\pi}{d+1}$, pour $k = 1, \dots, d$.

Pour cela, on cherche les réels λ tels qu'il existe un vecteur $X = (x_i)$ non nul de \mathbb{R}^d tel que

$$A_{\alpha,\beta}X = \lambda X,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \beta x_2 &= (\lambda - \alpha)x_1 \\ \forall k = 2 \dots d-1, \quad \beta x_{k+1} + (\alpha - \lambda)x_k + \beta x_{k-1} &= 0 \\ \beta x_{d-1} &= (\lambda - \alpha)x_d. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $x_0 = x_{d+1} = 0$, on obtient pour la suite finie $(x_i)_i$ la relation de récurrence d'ordre deux suivante :

$$\forall k = 1 \dots d-1, \quad \beta x_{k+2} + (\alpha - \lambda)x_{k+1} + \beta x_k = 0.$$

Son équation caractéristique est bien sûr donnée par :

$$\beta r^2 + (\alpha - \lambda)r + \beta = 0 \tag{1}$$

de discriminant $\Delta = (\alpha - \lambda)^2 - 4\beta^2$.

Supposons pour simplifier que $\beta \leq 0$. Il est à noter tout de même que cette hypothèse n'intervient que pour simplifier les disjonctions de cas qui vont suivre pour étudier le signe de Δ et donc les solutions à notre problème...

1er cas : $\lambda \in]-\infty; \alpha + 2\beta[\cup]\alpha - 2\beta; +\infty[$, alors $\Delta > 0$ et donc l'équation caractéristique admet deux solutions réelles opposées que l'on note r^+ et r^- données par :

$$r_{\pm} = \frac{\lambda - \alpha}{2\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda - \alpha}{2\beta}\right)^2 - 1}.$$

Dès lors, $(x_k)_k$ est donnée par :

$$x_k = \gamma_+ r_+^k + \gamma_- r_-^k$$

où les coefficients γ_+ et γ_- sont fournis par les conditions $x_{d+1} = x_0 = 0$. On obtient ainsi :

$$\gamma_+ + \gamma_- = 0$$

et

$$\gamma_+ \left(r_+^{d+1} - r_-^{d+1} \right) = 0.$$

Ainsi, on a $\gamma_+ = \gamma_- = 0$ i.e $X=(0)$, ce qui est exclu, ou $r_+^{d+1} = r_-^{d+1}$. Or, $r_+^{d+1} = r_-^{d+1}$ en dimension d paire donne $\lambda = \alpha \pm 2\beta$, et en dimension impaire donne $\lambda = \alpha \pm 2\beta$ ou $\lambda = \alpha$, valeurs qui sont proscrites dans le cas présent.

Ce cas est donc vide.

2ème cas : $\lambda = \alpha \pm 2\beta$. Alors l'équation caractéristique admet une solution réelle double que l'on note r_0 , et alors $x_k = (\gamma_0 + k\gamma_1)r_0^k$. Les conditions $x_{d+1} = x_0 = 0$ donnent alors $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ et donc au final $X = (0)$, ce qui est exclu.

Ce deuxième cas est donc vide.

On a ainsi démontré qu'en fait $\lambda \in]\alpha + 2\beta; \alpha - 2\beta[$. On peut dès lors écrire λ sous la forme

$$\lambda = \alpha + 2\beta \cos \theta \text{ avec } \theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[.$$

Ainsi, l'équation caractéristique (1) devient alors, dans le cas où $\beta \neq 0$:

$$r^2 - 2 \cos \theta r + 1 = 0,$$

qui admet deux solutions complexes conjuguées r_+ et r_- données par :

$$r_+ = e^{i\theta} \text{ et } r_- = e^{-i\theta} \text{ ce qui donne } x_k = \alpha_+ e^{ik\theta} + \alpha_- e^{-ik\theta}.$$

C'est le moment d'utiliser les conditions $x_0 = x_{d+1} = 0$. Avec $x_0 = 0$, on obtient $\alpha_+ = -\alpha_-$ et du coup $x_k = 2i\alpha_+ \sin k\theta$. La condition $x_{d+1} = 0$ donne alors $\alpha_+ = 0$, soit $X = (0)$ (c'est donc exclu) ou $\sin(d+1)\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = \frac{p\pi}{d+1}$. Dès lors, les valeurs propres sont nécessairement de la forme $\lambda_p = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{p\pi}{d+1}\right)$ pour $p = 1 \cdots d$.

Conclusion : Les valeurs propres de $A_{\alpha,\beta}$ sont les $\lambda_p = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{p\pi}{d+1}\right)$ pour $p = 1 \cdots d$.

Questions à l'oral :

- Mettre en évidence la notion de mode avec les pendules couplés. *On fait partir les deux pendules en phase ou en opposition de phase.*
- Qu'est-ce qu'un pendule pesant, quelles sont les hypothèses? Comment équilibrer un pendule? *Solide mobile autour d'un axe. On suppose la masse de la tige négligeable devant celle de la masse du solide, considéré comme ponctuel. Pour équilibrer un pendule, on place une masse en haut du pendule pour que le centre de gravité du système soit confondu avec le point autour duquel tourne le pendule.*
- Mettre en évidence les battements avec les pendules. *On fait partir les pendules avec un angle de déphasage très faible.*
- Première manip' : dans la partie 1, quels sont les composants qui peuvent avoir un comportement de résistances? *Tous, notamment les capacités qui foutent le bordel.*
- Comment a-t-on mesuré les résistances parasites? *Au RLC-mètre. Attention, son fonctionnement est à connaître (le RLC-mètre envoie un créneau ou des pulses et regarde la pente au niveau de la réponse du système, ne pas hésiter à regarder par vous-même à l'oscilloscope).*
- Comment mesurer la conductivité des métaux? *Avec l'ohmmètre à quatre fils, qui s'affranchit des résistances parasites.*
- Est-ce qu'on observe une résonance en tension ou en courant?
- Qu'est-ce que la réponse indicielle? *On envoie un signal créneau pour avoir accès à la tension de sortie qui est un produit de convolution entre la fonction de transfert temporelle $h(t)$. On dérive ensuite le signal pour n'avoir que $h(t)$ puis on prend la TF pour avoir la fonction de transfert classique $H(f)$.*
- Comment faire pour avoir une réponse impulsionnelle? *(= On envoie directement un pulse pour sauter la première étape de traitement de la réponse indicielle.*
- Est-ce vraiment nécessaire d'avoir la même fréquence de résonance? *Oui.*
- Analogie entre les pendules et le circuit électrique dans les modes symétrique et antisymétrique? *Appliquer la loi des mailles dans chaque partie du système pour montrer que $V_1 = V_2$ pour le mode symétrique et $V_1 = -V_2$ pour le mode antisymétrique.*
- Quelle différence entre modélisation et régression? *La modélisation est la démarche de calcul alors que la régression est la modélisation graphique.*
- Rôle du fenêtrage de la FFT? *La FFT cherche à reproduire la DSF mais est limitée par les conditions aux limites puisqu'on n'intègre pas sur l'infini. On convolue donc notre signal avec une fonction dite de pondération périodique pour étendre artificiellement notre intégrale vers l'infini.*
- Quelle est la résolution de la FFT? *Elle est en $\frac{1}{\Delta t}$.*
- Deuxième manip' : interprétez les pics parasites. *Pics correspondant aux harmoniques des fréquences propres du signal, probablement due à la FFT du logiciel qui rajoutent des coefficients dans les séries de Fourier.*
- Parle-t-on de mode ou de résonance? *Un mode correspond aux états propres du système. Pour la résonance, le système est excité à une fréquence imposée par l'expérimentateur.*
- Troisième manip' : quels sont les éléments non linéaires dans le circuit? *Les AO.*
- Manip' surprise : montrer la propagation à vitesse finie dans un câble coaxial. *Benjamin a choisi d'envoyer un pulse en entrée du câble et de mesurer directement le temps de retard induit par la propagation de l'onde dans le câble coaxial.*

Remarques du jury :

- Je (Vincent) conseille de bien être au clair avec les pendules. Si on en parle, il faut s'attendre à avoir pléthore de questions dessus. Aussi, je conseille de gentiment les éviter, même en introduction, sauf si on est OK dessus évidemment.
- Je (Vincent) trouve qu'il y a beaucoup à faire dans ce montage, mais si vous arrivez jusqu'à la partie 3 c'est vraiment cool! Le graphe est assez facile à reproduire et le circuit n'est en fait pas si compliqué...
- Les manip sont pertinentes même si le jury adooooooooore les pendules. On en revient à ce que dit Vincent : autant de ne pas du tout en parler si on décide de ne pas les étudier à fond.
- La partie non linéaire a été appréciée mais il faut bien être calé dessus.
- Le jury a globalement apprécié que je passe toute la leçon à manipuler (sans dec'!) : les expériences ont été bien traitées, les résultats expérimentaux et physique expliqués et les incertitudes faites pour chaque mesure.