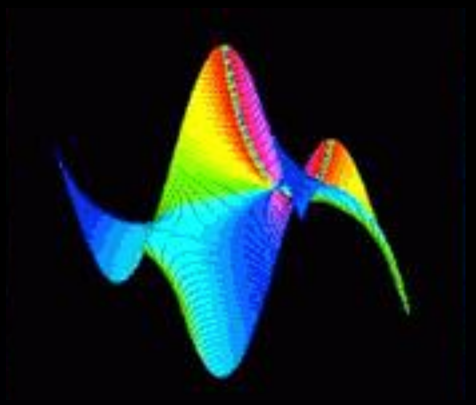


Un peu de calcul formel pour l'analyse

Bruno Salvy

@ AriC

Calcul formel ...

Calcul formel ...

- Des systèmes avec des millions d'utilisateurs

Calcul formel ...

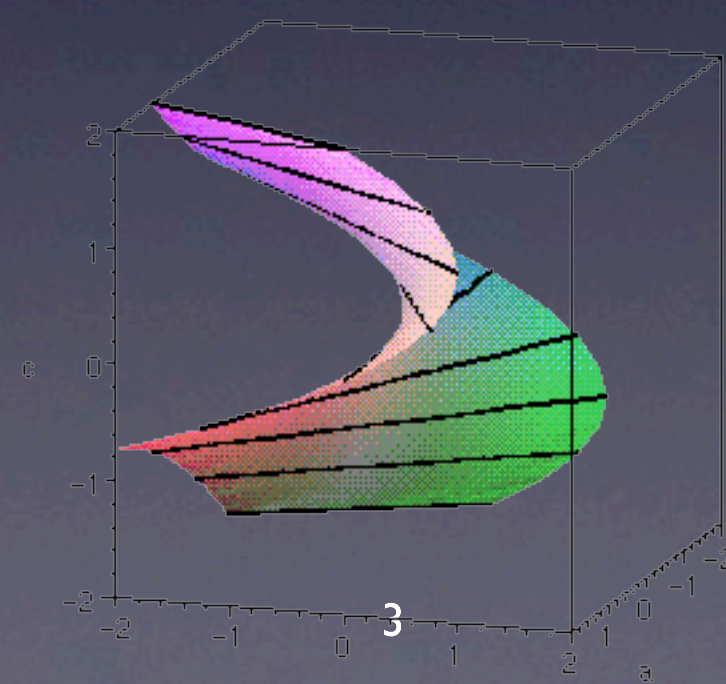
- Des systèmes avec des millions d’utilisateurs
- Une discipline scientifique : les mathématiques effectives et leur complexité

Calcul formel ...

- Des systèmes avec des millions d'utilisateurs
- Une discipline scientifique : les mathématiques effectives et leur complexité
- 30 ans de progrès en algorithmique mathématique

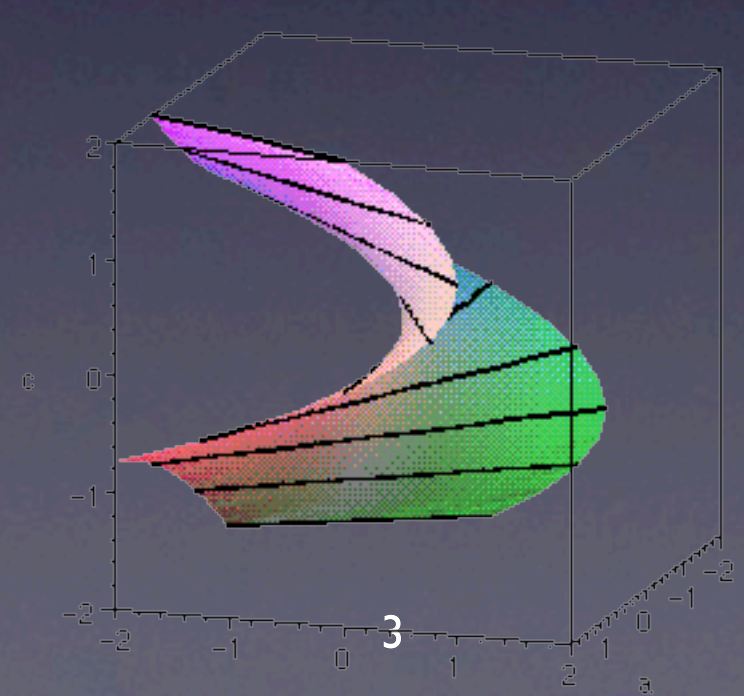
... pour l’analyse

... pour l’analyse



... pour l'analyse

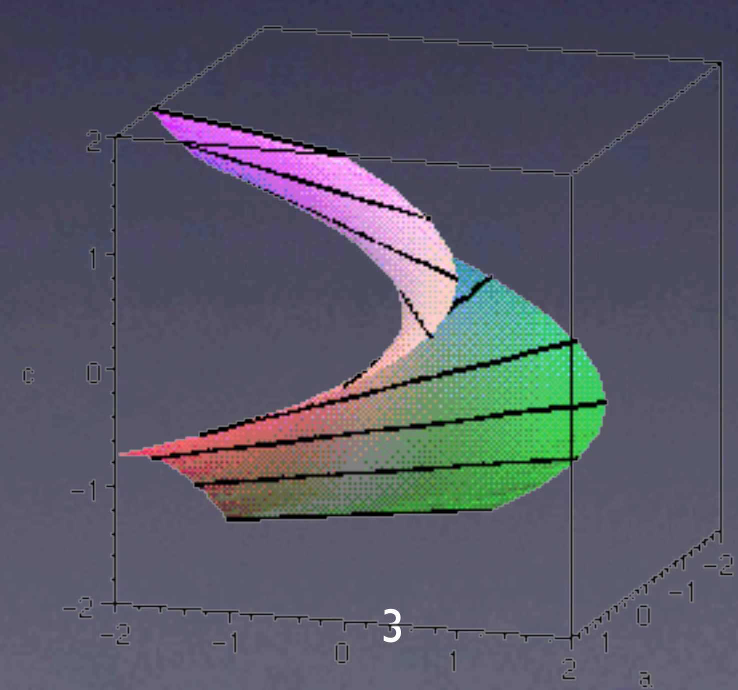
Objectifs



… pour l’analyse

Objectifs

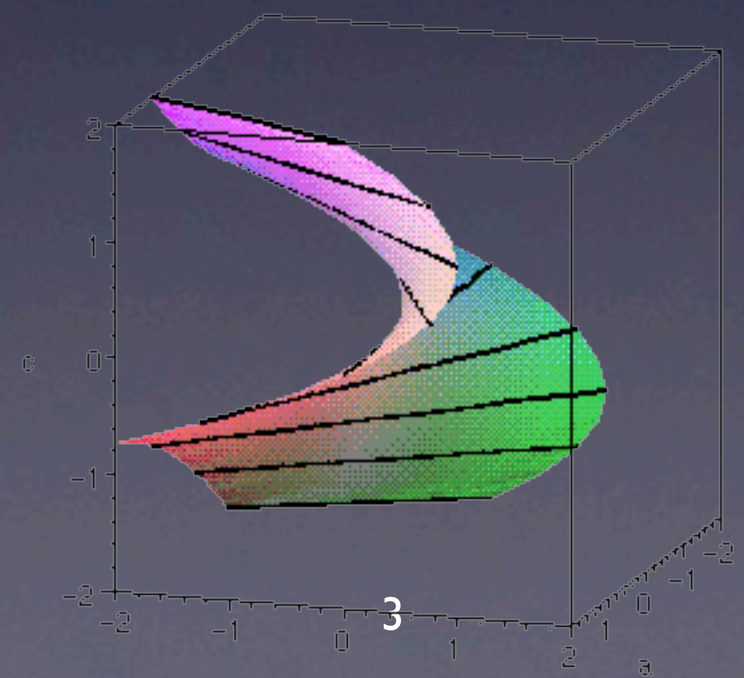
- sortir de l’enseignement



... pour l'analyse

Objectifs

- sortir de l'enseignement
- développer la complémentarité avec le numérique



... pour l'analyse

Objectifs

- sortir de l'enseignement
- développer la complémentarité avec le numérique
- améliorer l'efficacité, algorithmes quasi-optimaux

... pour l'analyse

Objectifs

- sortir de l'enseignement
- développer la complémentarité avec le numérique
- améliorer l'efficacité, algorithmes quasi-optimaux
- étendre l'algorithmique vers l'analyse

... pour l'analyse

Objectifs

Idées de base

- sortir de l'enseignement
- développer la complémentarité avec le numérique
- améliorer l'efficacité, algorithmes quasi-optimaux
- étendre l'algorithmique vers l'analyse

... pour l'analyse

Objectifs

- sortir de l'enseignement
- développer la complémentarité avec le numérique
- améliorer l'efficacité, algorithmes quasi-optimaux
- étendre l'algorithmique vers l'analyse

Idées de base

- équations comme structures de données

... pour l'analyse

Objectifs

- sortir de l'enseignement
- développer la complémentarité avec le numérique
- améliorer l'efficacité, algorithmes quasi-optimaux
- étendre l'algorithmique vers l'analyse

Idées de base

- équations comme structures de données
- des objets mathématiques représentés par des programmes

… pour l’analyse

Objectifs

- sortir de l’enseignement
- développer la complémentarité avec le numérique
- améliorer l’efficacité, algorithmes quasi-optimaux
- étendre l’algorithmique vers l’analyse

Idées de base

- équations comme structures de données
- des objets mathématiques représentés par des programmes
- la complexité a une géométrie

Calcul analytique rapide

Développements en série

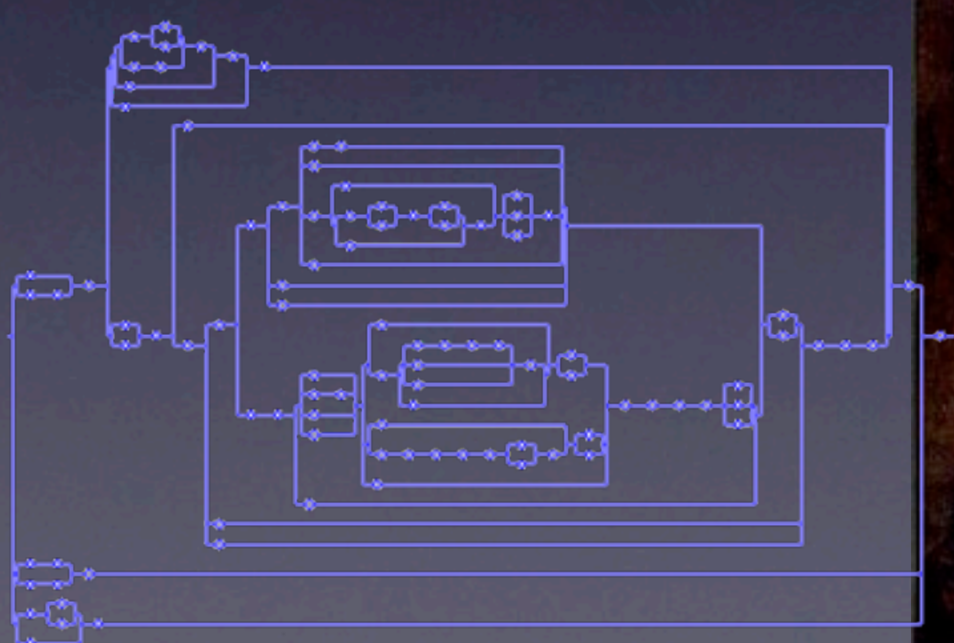
Newton formel & génération aléatoire sous modèle de Boltzmann

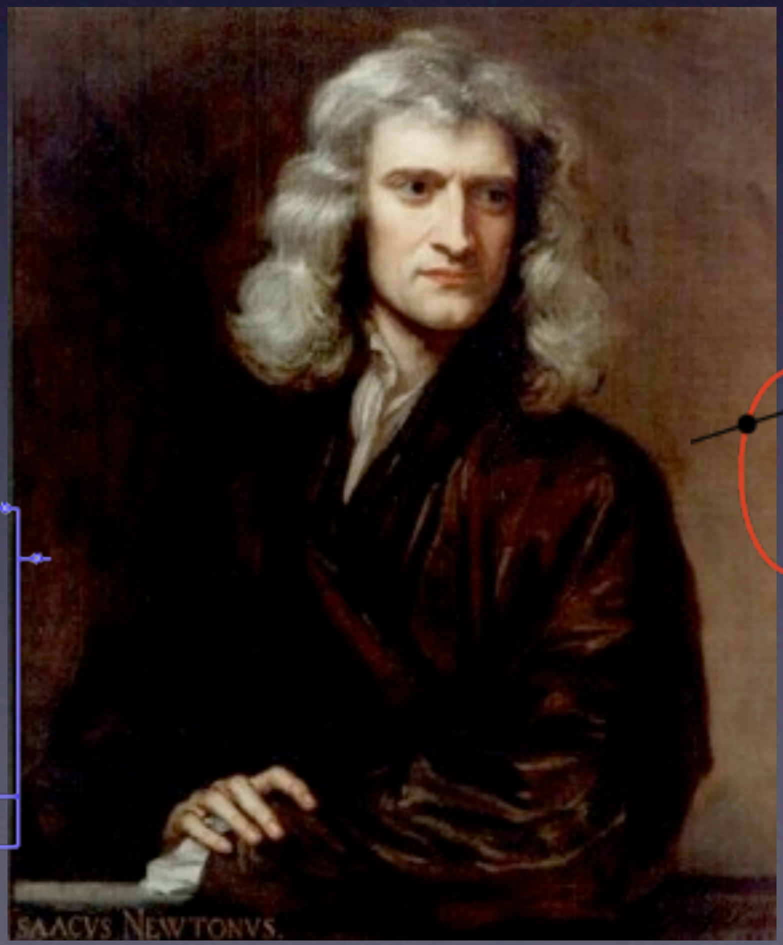
Bases orthogonales

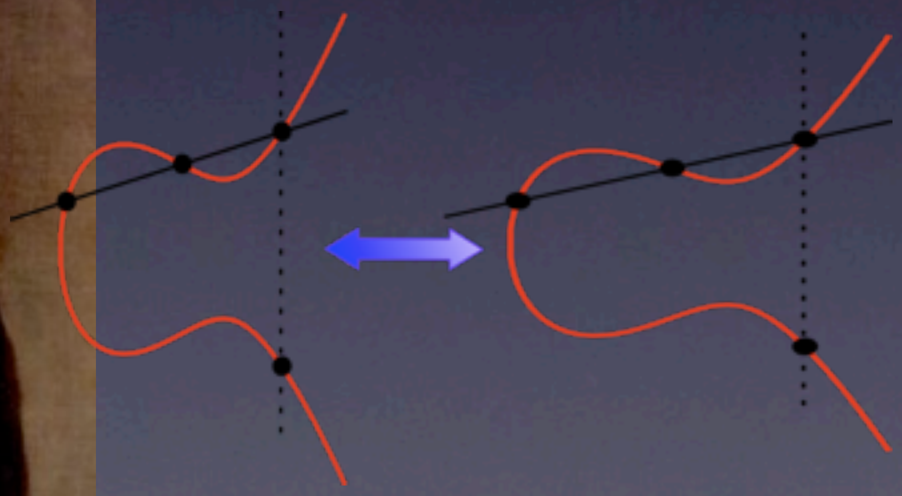
E.g., séries de Chebyshev, changements de base.

Évaluation certifiée de fonctions spéciales

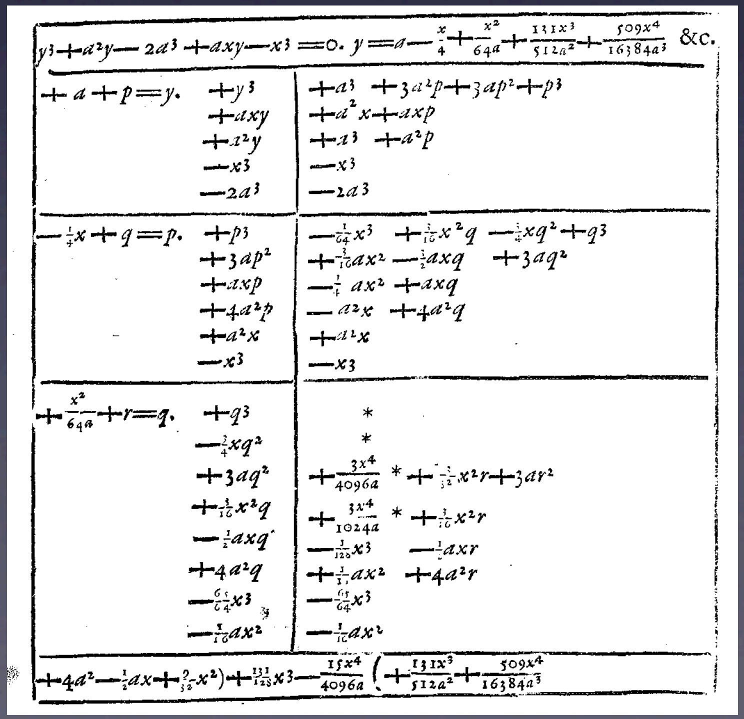
multiprécision d'abord ...







I.
Efficacité par itération de Newton

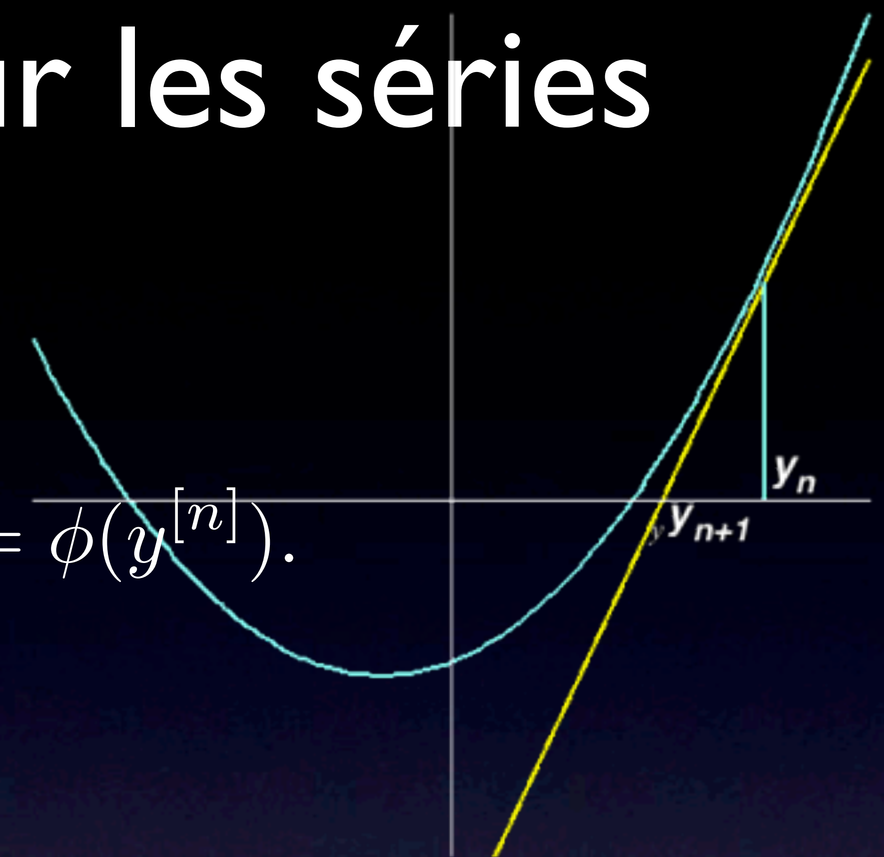


$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0. \quad y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ &c.

$+a+p=y.$	$+y^3$ $+axy$ $+a^2y$ $-x^3$ $-2a^3$	$+a^3 \quad +3a^2p+3ap^2+p^3$ $+a^2x+axp$ $+a^3 \quad +a^2p$ $-x^3$ $-2a^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p.$	$+p^3$ $+3ap^2$ $+axp$ $+4a^2p$ $+a^2x$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3 \quad +\frac{3}{16}x^2q \quad -\frac{3}{4}xq^2+q^3$ $+\frac{3}{16}ax^2 \quad -\frac{3}{2}axq \quad +3aq^2$ $-\frac{1}{4}ax^2 \quad +axq$ $-a^2x \quad +4a^2q$ $+a^2x$ $-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q.$	$+q^3$ $-\frac{3}{4}xq^2$ $+3aq^2$ $+\frac{3}{16}x^2q$ $-\frac{1}{2}axq$ $+4a^2q$ $-\frac{65}{64}x^3$ $-\frac{1}{16}ax^2$	$*$ $*$ $+\frac{3x^4}{4096a} \; * \; +\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$ $+\frac{3x^4}{1024a} \; * \; +\frac{3}{16}x^2r$ $-\frac{1}{128}x^3 \quad -\frac{1}{2}axr$ $+\frac{1}{32}ax^2 \quad +4a^2r$ $-\frac{65}{64}x^3$ $-\frac{1}{16}ax^2$

$+4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}\left(+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}\right.$

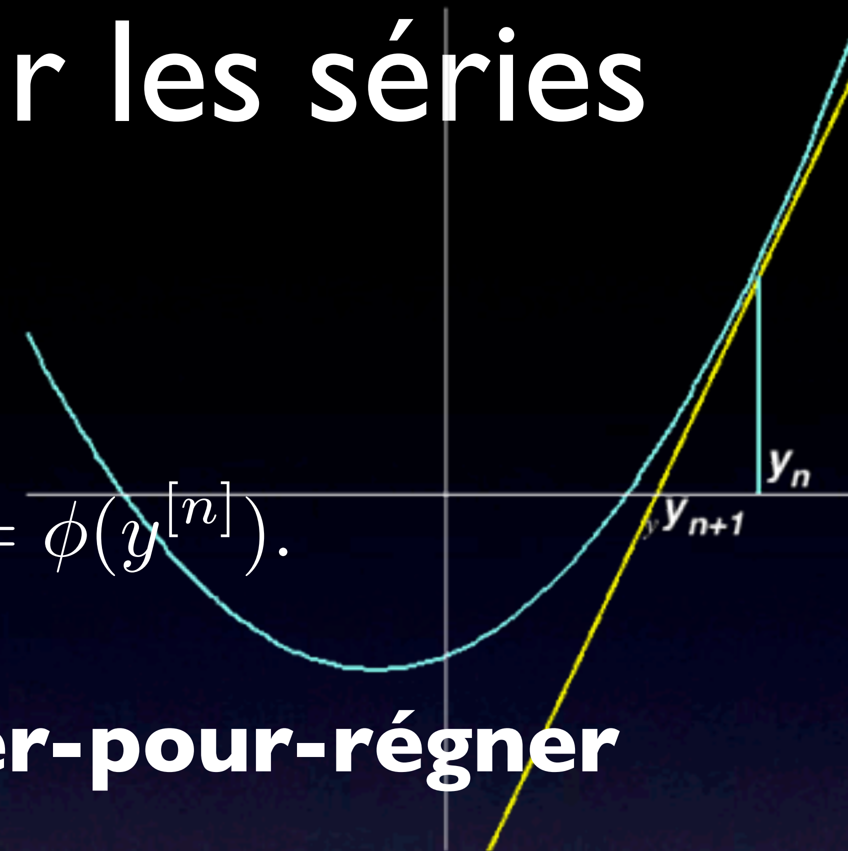
Itération de Newton pour les séries



Pour résoudre $\phi(y) = 0$, itérer

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} - u^{[n+1]}, \quad \phi'(y^{[n]})u^{[n+1]} = \phi(y^{[n]}).$$

Itération de Newton pour les séries



Pour résoudre $\phi(y) = 0$, itérer

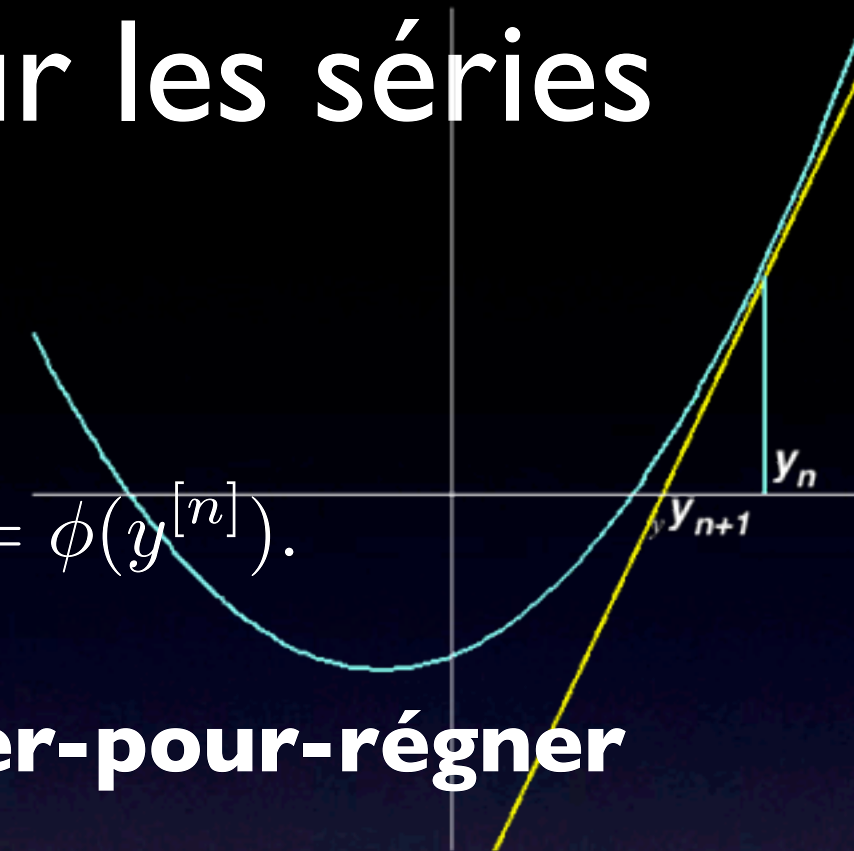
$$y^{[n+1]} = y^{[n]} - u^{[n+1]}, \quad \phi'(y^{[n]})u^{[n+1]} = \phi(y^{[n]}).$$

Convergence quadratique $\longleftrightarrow$ diviser-pour-régner

Pour résoudre à précision N
1. résoudre à précision N/2
2. y calculer $\varphi(y^{[n]})$ et $\varphi'(y^{[n]})$
3. résoudre pour obtenir $u^{[n+1]}$

Coût($y^{[n]}$)=ct x Coût(dernière étape)

Itération de Newton pour les séries



Pour résoudre $\phi(y) = 0$, itérer

$$y^{[n+1]} = y^{[n]} - u^{[n+1]}, \quad \phi'(y^{[n]})u^{[n+1]} = \phi(y^{[n]}).$$

Convergence quadratique ⟷ diviser-pour-régner

Pour résoudre à précision N
1. résoudre à précision N/2
2. y calculer $\varphi(y^{[n]})$ et $\varphi'(y^{[n]})$
3. résoudre pour obtenir $u^{[n+1]}$

Coût($y^{[n]}$)=ct x Coût(dernière étape)

Utile avec la multiplication rapide (quasi-linéaire) :
- séries formelles à l'ordre N: O(N log N) ops arithmétiques;
- entiers de N bits : O(N log N log log N) ops binaires.

L'inversion

$$\phi(y) = a - 1/y \Rightarrow \boxed{y^{[n+1]} = y^{[n]} - y^{[n]}(ay^{[n]} - 1).}$$

Coût : un petit nombre de multiplications

[Schulz 1933; Cook 1966; Sieveking 1972; Kung 1974]

L'inversion

$$\phi(y) = a - 1/y \Rightarrow \boxed{y^{[n+1]} = y^{[n]} - y^{[n]}(ay^{[n]} - 1).}$$

Coût : un petit nombre de multiplications

S'applique à :

[Schulz 1933; Cook 1966; Sieveking 1972; Kung 1974]

L'inversion

$$\phi(y) = a - 1/y \Rightarrow \boxed{y^{[n+1]} = y^{[n]} - y^{[n]}(ay^{[n]} - 1).}$$

Coût : un petit nombre de multiplications

S'applique à :

- l'inversion numérique;

[Schulz 1933; Cook 1966; Sieveking 1972; Kung 1974]

L'inversion

$$\phi(y) = a - 1/y \Rightarrow \boxed{y^{[n+1]} = y^{[n]} - y^{[n]}(ay^{[n]} - 1).}$$

Coût : un petit nombre de multiplications

S'applique à :

- l'inversion numérique;
- l'inversion de séries;

[Schulz 1933; Cook 1966; Sieveking 1972; Kung 1974]

L’inversion

$$\phi(y) = a - 1/y \Rightarrow \boxed{y^{[n+1]} = y^{[n]} - y^{[n]}(ay^{[n]} - 1).}$$

Coût : un petit nombre de multiplications

S’applique à :

- l’inversion numérique;
- l’inversion de séries;
- l’inversion de matrices.

[Schulz 1933; Cook 1966; Sieveking 1972; Kung 1974]

Equations différentielles linéaires

Étant donnée une equa. diff. à coefficients séries, avec $a_r(0) \neq 0$,

$$a_r(t)y^{(r)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0,$$

calculer les N premiers termes d'une base des séries solutions.

Equations différentielles linéaires

Étant donnée une equa. diff. à coefficients séries, avec $a_r(0) \neq 0$,

$$a_r(t)y^{(r)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0,$$

calculer les N premiers termes d'une base des séries solutions.

Algorithme (SODA2007)

1. Convertir en système $\Phi : Y \mapsto Y' - A(t)Y$
2. L'équation à résoudre est $U' - A(t)U = Y' - A(t)Y$
3. Variation de la constante : $U = Y \int Y^{-1}(Y' - AY)$
4. Y^{-1} par itération de Newton aussi

Equations différentielles linéaires

Étant donnée une equa. diff. à coefficients séries, avec $a_r(0) \neq 0$,

$$a_r(t)y^{(r)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0,$$

calculer les N premiers termes d'une base des séries solutions.

Algorithme (SODA2007)

1. Convertir en système $\Phi : Y \mapsto Y' - A(t)Y$
2. L'équation à résoudre est $U' - A(t)U = Y' - A(t)Y$
3. Variation de la constante : $U = Y \int Y^{-1}(Y' - AY)$
4. Y^{-1}par itération de Newton aussi

Cas particulier : l'exponentielle de Hanrot-Zimmermann

Cas singulier ($a_r(0) = 0$): ISSAC2012.

Equations différentielles linéaires

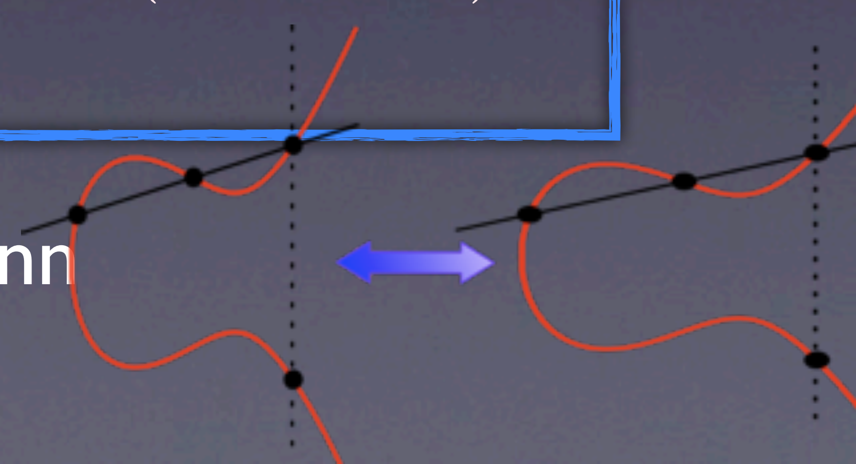
Étant donnée une equa. diff. à coefficients séries, avec $a_r(0) \neq 0$,

$$a_r(t)y^{(r)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0,$$

calculer les N premiers termes d'une base des séries solutions.

Algorithme (SODA2007)

1. Convertir en système $\Phi : Y \mapsto Y' - A(t)Y$
2. L'équation à résoudre est $U' - A(t)U = Y' - A(t)Y$
3. Variation de la constante : $U = Y \int Y^{-1}(Y' - AY)$
4. Y^{-1} par itération de Newton aussi

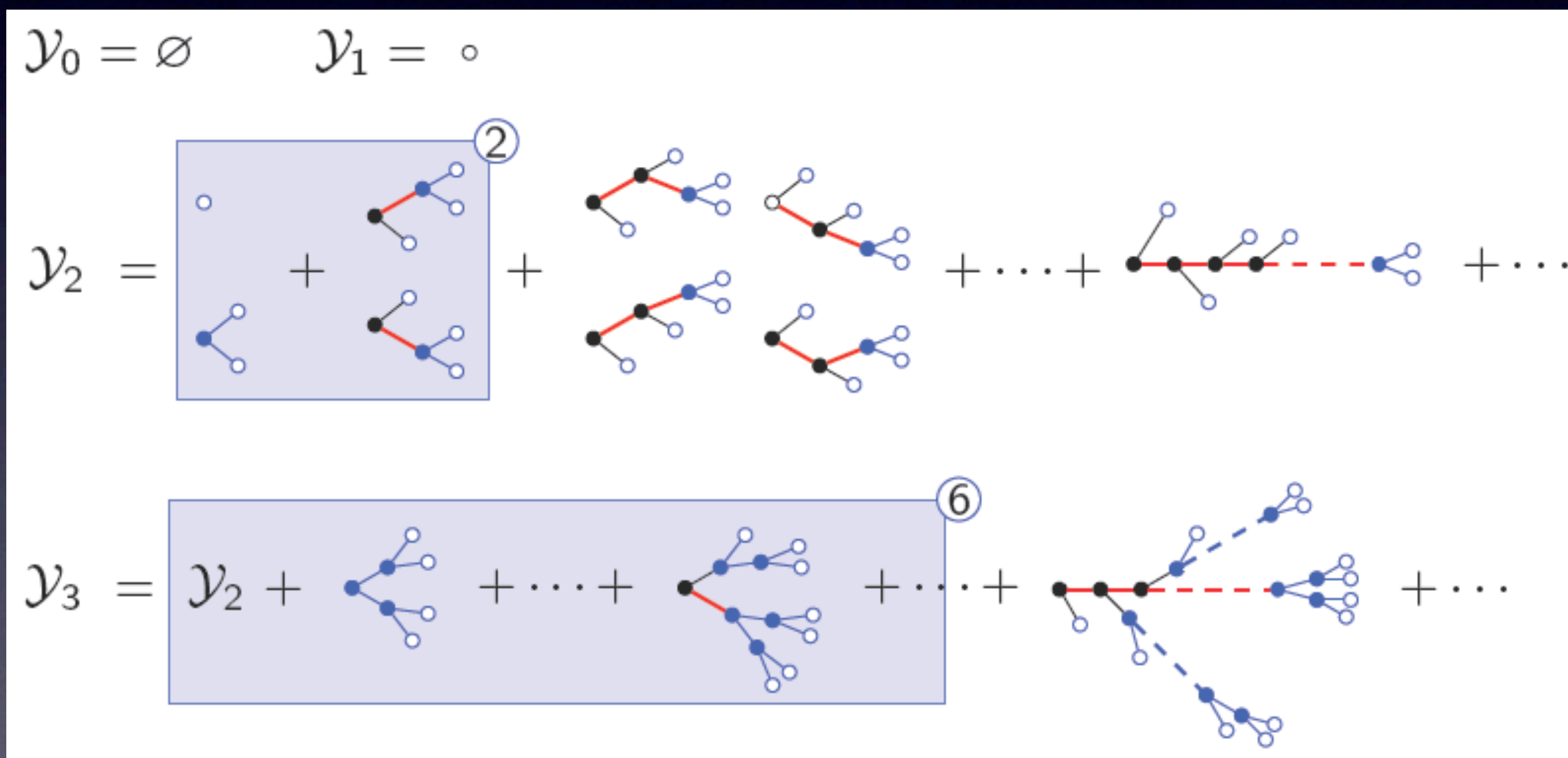


Cas particulier : l'exponentielle de Hanrot-Zimmermann

Cas singulier ($a_r(0) = 0$): ISSAC2012.

Espèces combinatoires

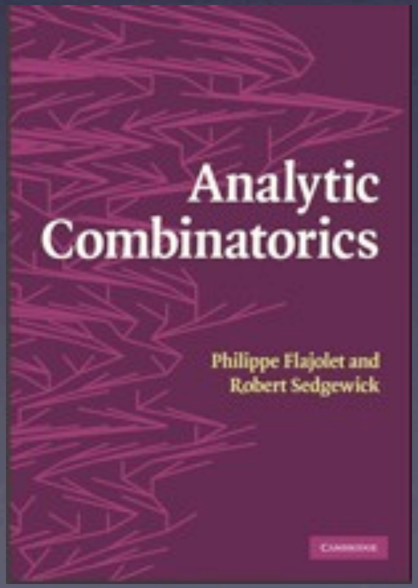
$$\mathcal{Y} = \mathcal{E} \cup \mathcal{Z} \times \mathcal{Y}^2$$



[Décoste, Labelle, Leroux 1982]

Espèces constructibles

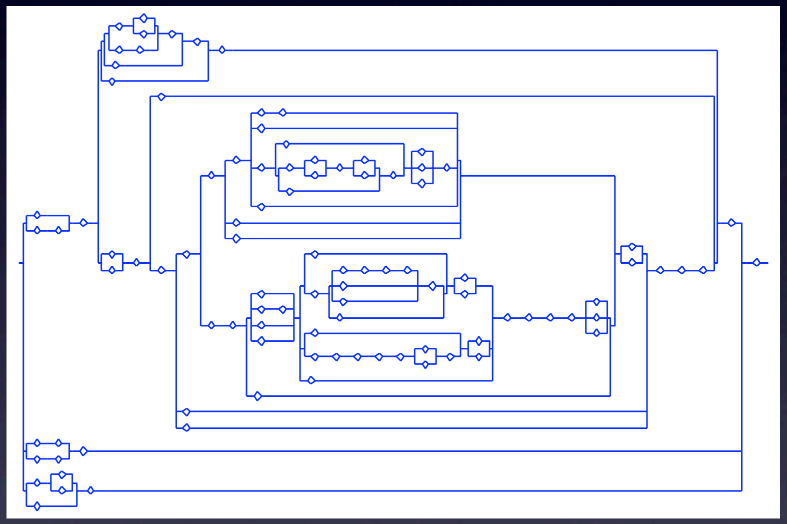
Def. 1, Z, x, +, Seq, Set, Cycle, utilisés récursivement.

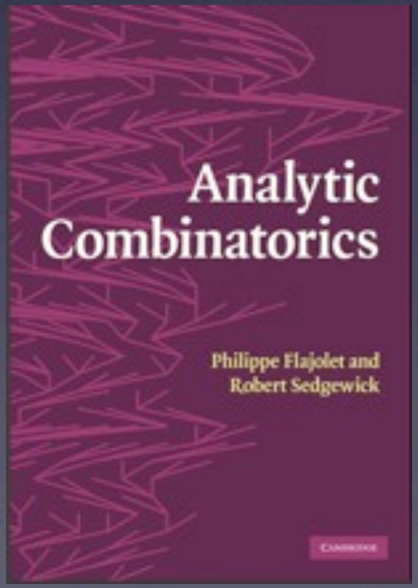


Espèces constructibles

Def. 1, Z, x, +, Seq, Set, Cycle, utilisés récursivement.

Exemples :
- langages réguliers;
- langages algébriques non-ambigus;
- arbres;
- graphes fonctionnels, ...

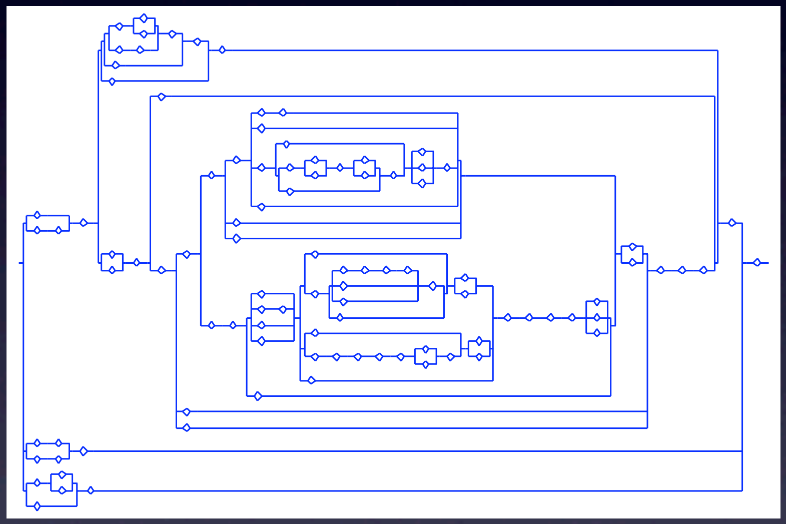


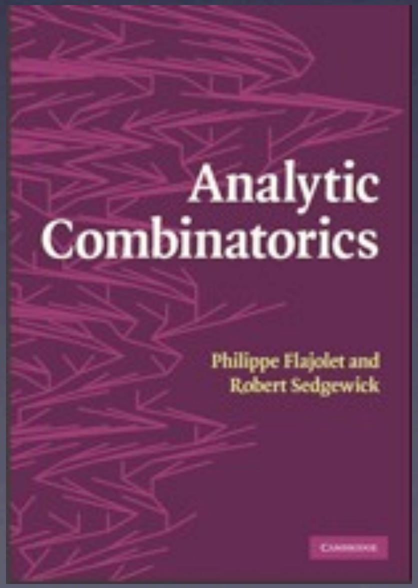


Espèces constructibles

Def. 1, Z, x, +, Seq, Set, Cycle, utilisés récursivement.

Exemples :
- langages réguliers;
- langages algébriques non-ambigus;
- arbres;
- graphes fonctionnels, ...





Deux problèmes liés :
1. Enumeration : nb d'objets de taille n=0,1,2,...
2. Génération aléatoire : tous ceux de taille n avec la même probabilité.

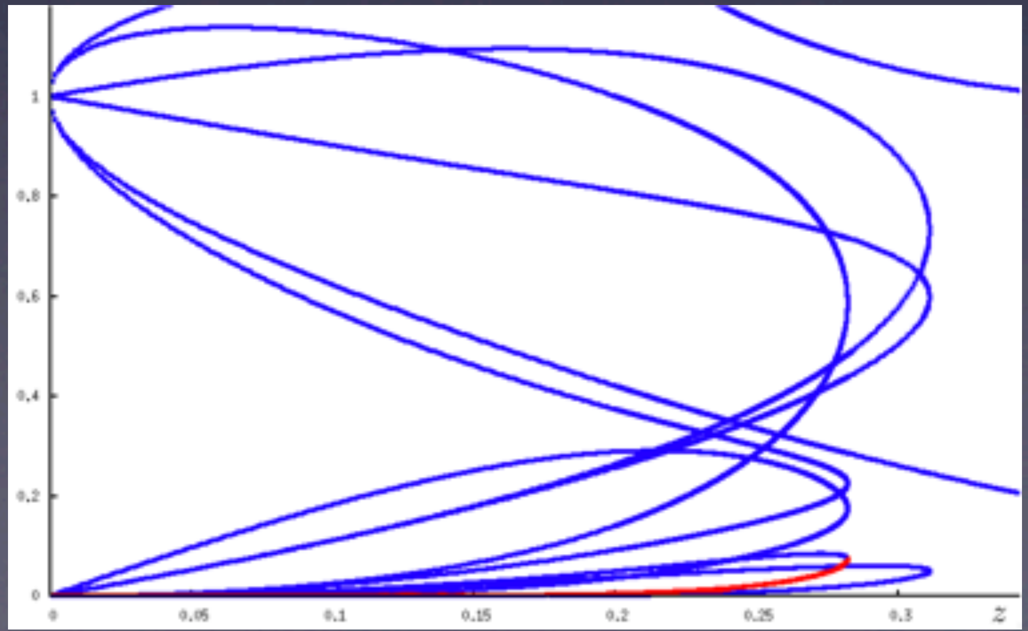
Newton combinatoire résout tout

$$\mathcal{Y} = \mathcal{H}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}) + \int \mathcal{G}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$$

$\rightsquigarrow$ itération de Newton (non triviale)

Thm. (J. Combinatorial Theory A 2012)
Énumération en complexité arithmétique & binaire quasi-optimale.

+ oracle numérique pour la génération aléatoire ($\mathcal{G} = 0$).



Exemples de grammaires XML

Grammar	nb eqs	max deg	nb sols	oracle (s.)	FGb (s.)
rss	10	5	2	0.02	0.03
PNML	22	4	4	0.05	0.1
xslt	40	3	10	0.4	1.5
relaxng	34	4	32	0.4	3.3
xhtml-basic	53	3	13	1.2	18
mathml2	182	2	18	3.7	882
xhtml	93	6	56	3.4	1124
xhtml-strict	80	6	32	3.0	1590
xmlschema	59	10	24	0.5	6592
SVG	117	10		5.8	>1.5Go
docbook	407	11		67.7	>1.5Go
OpenDoc	500			3.9	

[Darrasse 2008]

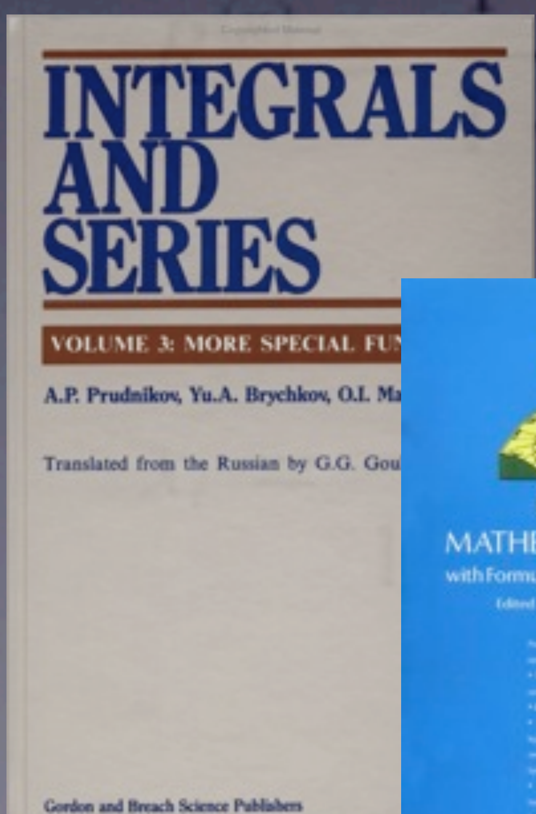
II. Équations différentielles & preuve d'identités

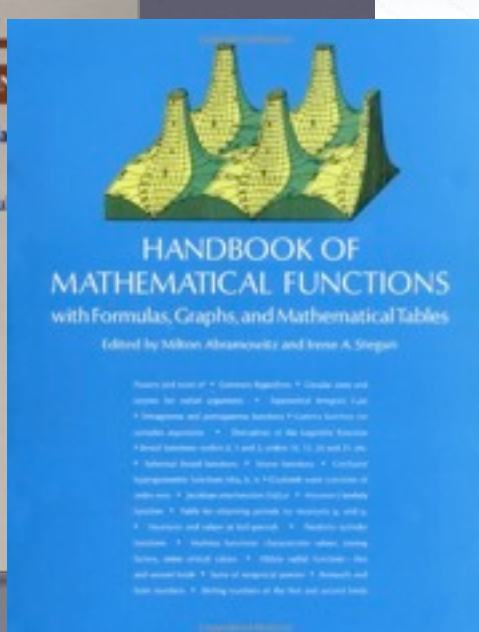
Équa. diffs/rec comme structure de données

Un besoin

Des progrès algorithmiques récents

Bibliothèques & Maths sur le Web





http://ddmf.msr-inria.inria.fr/

Une preuve algorithmique

$$c_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^k K_0(t)^n \, dt$$

- K_0 satisfait une edo lin. d'ordre 2
- $(K_0)^n$ en satisfait une d'ordre $n+1$
- mult. par t^k et traduire en rec.

Initialement une conjecture de Bailey, Borwein², Crandall

Une preuve algorithmique

$$c_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^k K_0(t)^n \, dt$$

- K_0 satisfait une edo lin. d'ordre 2
- $(K_0)^n$ en satisfait une d'ordre n+1
- mult. par t^k et traduire en rec.

Thm. (Experimental Mathematics 2008)

$$(k+1)^{n+1} c_{n,k} + \sum_{\substack{2 \le j < n \\ j \text{ even}}} P_{n,j}(k) c_{n,k+j} = 0 \quad \text{avec} \quad \deg P_{n,j} \le n + 1 - j.$$

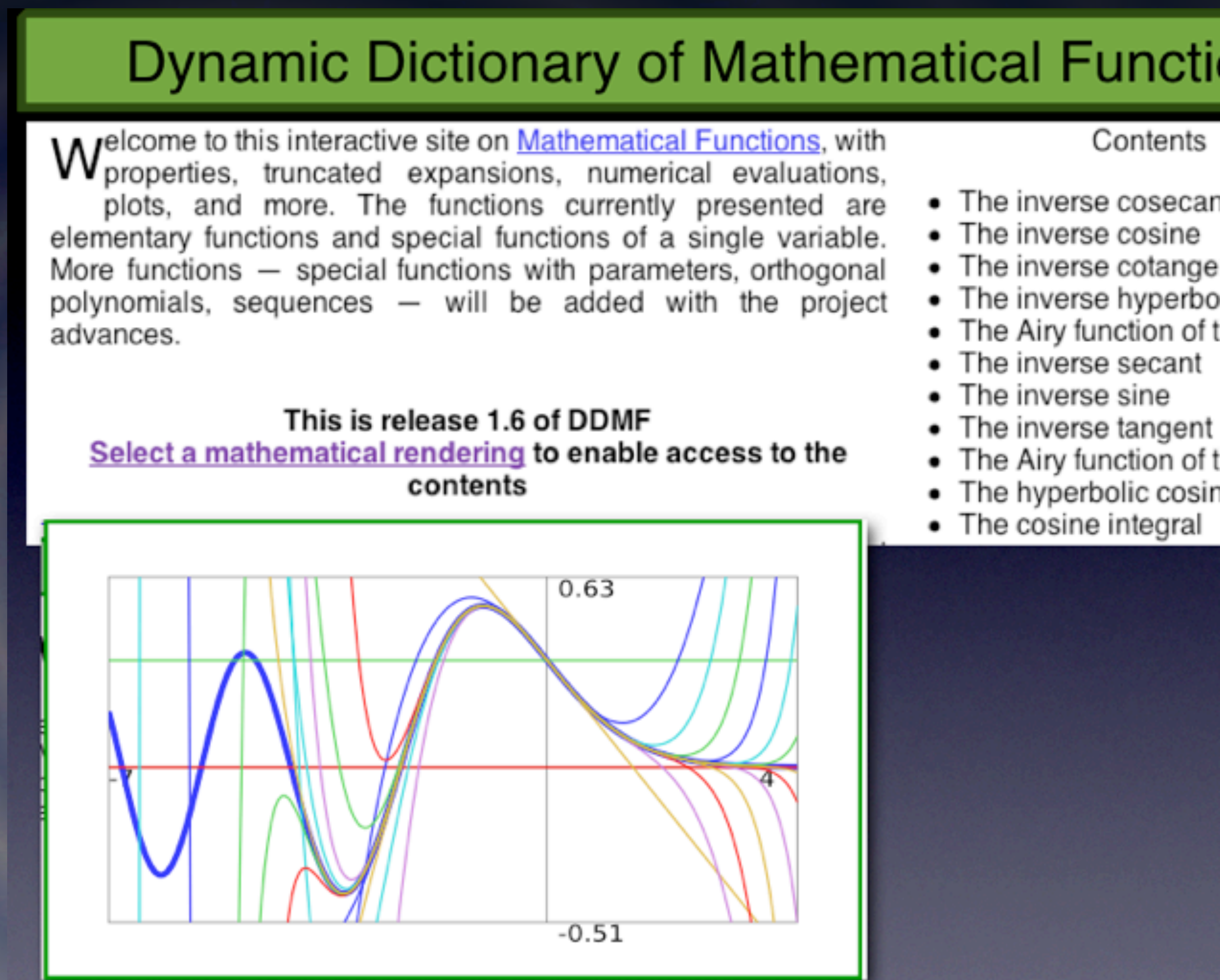
Aussi un algo rapide.
Initialement une conjecture de Bailey, Borwein^2, Crandall

DDMF

Dynamic Dictionary of Mathematical Functions

Projet joint INRIA & Microsoft Research (2008–2014)

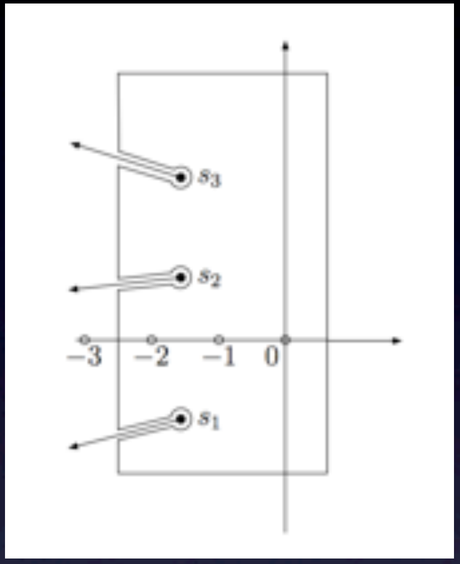
Calcule dynamiquement
– développements (séries, orthogonales,...)
– asymptotique
– évaluation numérique certifiée...



+ F. Chyzak

Pas toujours une équa. diff./ récurrence linéaire

- $\log(n)$, n^a ($a \notin \mathbf{Z}$), p_n, $e^{\sqrt{n}}$, $\Gamma(n\sqrt{2})$,...
  par leur comportement asymptotique
  ou celui de leur série génératrice
  (El. J. Combinatorics 2005, 2010)

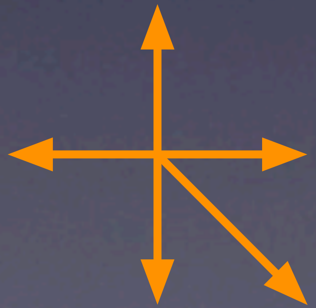


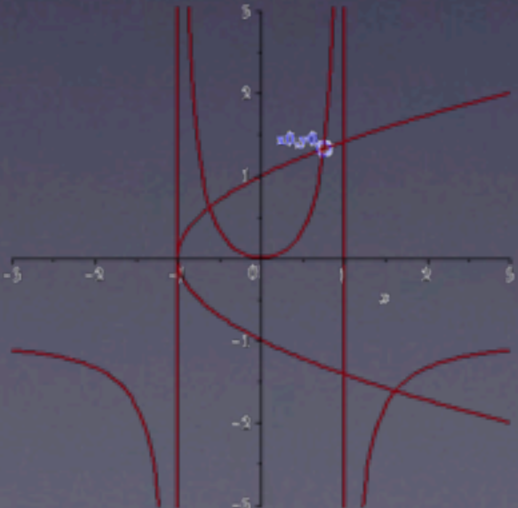
- des marches dans le quart de plan
  (arXiv 2012):

$$\chi := \sum_{(i,j)\in\mathfrak{S}} x^i y^j$$

$$c := \frac{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}}}(x_0, y_0)$$

$$\arccos(c/\pi) \notin \mathbb{Q}$$





Création télescopique

$$I(\boldsymbol{x}) = \int f(\boldsymbol{x}, t)\, dt = ? \quad \text{ou} \quad S(\boldsymbol{n}) = \sum_k u(\boldsymbol{n}, k) = ?$$

Entrée : équations (différentielles pour *f* ou de récurrence pour *u*).

Sortie : équations pour la somme ou l'intégrale.

Création télescopique

$$I(\boldsymbol{x}) = \int f(\boldsymbol{x},t)\,dt =? \quad \text{ou} \quad S(\boldsymbol{n}) = \sum_k u(\boldsymbol{n},k) =?$$

Entrée : équations (différentielles pour *f* ou de récurrence pour *u*).

Sortie : équations pour la somme ou l'intégrale.

Méthode : intégration (sommation) par parties et dérivation (différence) sous le signe intégrale (somme)

Création télescopique

$$I(\boldsymbol{x}) = \int f(\boldsymbol{x}, t)\, dt = ? \quad \text{ou} \quad S(\boldsymbol{n}) = \sum_k u(\boldsymbol{n}, k) = ?$$

Entrée : équations (différentielles pour *f* ou de récurrence pour *u*).

Sortie : équations pour la somme ou l'intégrale.

Méthode : intégration (sommation) par parties et dérivation (différence) sous le signe intégrale (somme)

Exemple (avec le triangle de Pascal) :

$$u(n,k) = \binom{n}{k} \text{ def. par } \left\{ \binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} \right\}$$

$$S(n+1) = \sum_k \binom{n+1}{k} = \sum_k \underbrace{\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1}}_{\text{telesc.}} + \underbrace{\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}}_{\text{telesc.}} + 2\binom{n}{k} = 2S(n).$$

Création télescopique

$$I(\boldsymbol{x}) = \int f(\boldsymbol{x}, t)\, dt = ? \quad \text{ou} \quad S(\boldsymbol{n}) = \sum_k u(\boldsymbol{n}, k) = ?$$

Entrée : équations (différentielles pour *f* ou de récurrence pour *u*).

Sortie : équations pour la somme ou l'intégrale.

Méthode : intégration (sommation) par parties et dérivation (différence) sous le signe intégrale (somme)

Exemple (avec le triangle de Pascal) :

$$u(n,k) = \binom{n}{k} \text{ def. par } \left\{ \binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} \right\}$$

$$S(n+1) = \sum_k \binom{n+1}{k} = \sum_k \underbrace{\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1}}_{\text{telesc.}} + \underbrace{\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}}_{\text{telesc.}} + 2\binom{n}{k} = 2S(n).$$

Algorithmes : circonscrire l'espace de recherche.

L'idéal de télescopage

$$T_t(f) := \Big(\operatorname{Ann} f + \underbrace{\partial_t \mathbb{Q}(\boldsymbol{x},t)\langle \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}, \partial_t\rangle}_{\text{int. p. parties}}\Big) \cap \underbrace{\mathbb{Q}(\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}\rangle}_{\text{deriv. sous } \int}.$$

L'idéal de télescopage

$$T_t(f) := \Big(\mathrm{Ann}\, f + \underbrace{\partial_t \mathbb{Q}(\boldsymbol{x},t)\langle \boldsymbol{\partial_x}, \partial_t\rangle}_{\text{int. p. parties}}\Big) \cap \underbrace{\mathbb{Q}(\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{\partial_x}\rangle}_{\text{deriv. sous } \int} .$$

- sommation hypergéométrique : dim=1 + param. Gosper. [Zeilberger 1991]

L'idéal de télescopage

$$T_t(f) := \Big(\operatorname{Ann} f + \underbrace{\partial_t \mathbb{Q}(\boldsymbol{x},t)\langle \boldsymbol{\partial_x}, \partial_t\rangle}_{\text{int. p. parties}}\Big) \cap \underbrace{\mathbb{Q}(\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{\partial_x}\rangle}_{\text{deriv. sous } \int} .$$

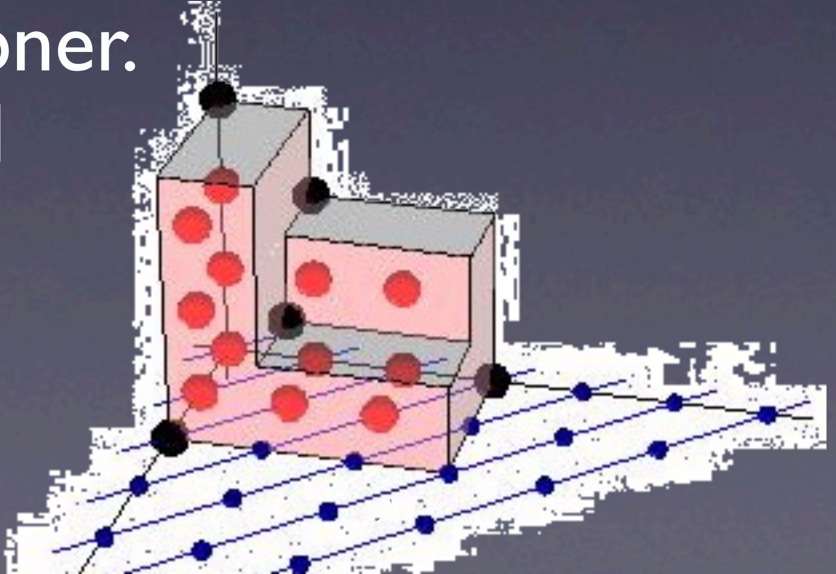
- sommation hypergéométrique : dim=1 + param. Gosper. [Zeilberger 1991]

- holonomie : restreindre l'int. par parties à $\mathbb{Q}(\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{\partial_x}, \partial_t\rangle$ et bases de Gröbner. [Wilf-Zeilberger 1992]

L'idéal de télescopage

$$T_t(f) := \Big(\mathrm{Ann}\, f + \underbrace{\partial_t \mathbb{Q}(\boldsymbol{x},t)\langle \boldsymbol{\partial_x}, \partial_t\rangle}_{\text{int. p. parties}}\Big) \cap \underbrace{\mathbb{Q}(\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{\partial_x}\rangle}_{\text{deriv. sous } \int} .$$

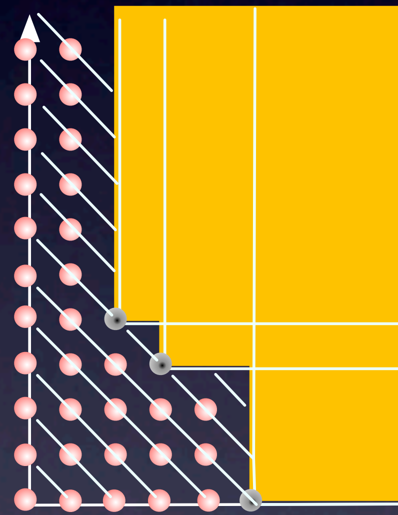
- sommation hypergéométrique : dim=1 + param. Gosper. [Zeilberger 1991]
- holonomie : restreindre l'int. par parties à $\mathbb{Q}(x)\langle \boldsymbol{\partial_x}, \partial_t\rangle$ et bases de Gröbner. [Wilf-Zeilberger 1992]
- dim finie, algèbres de Ore & GB (JSC 1998)

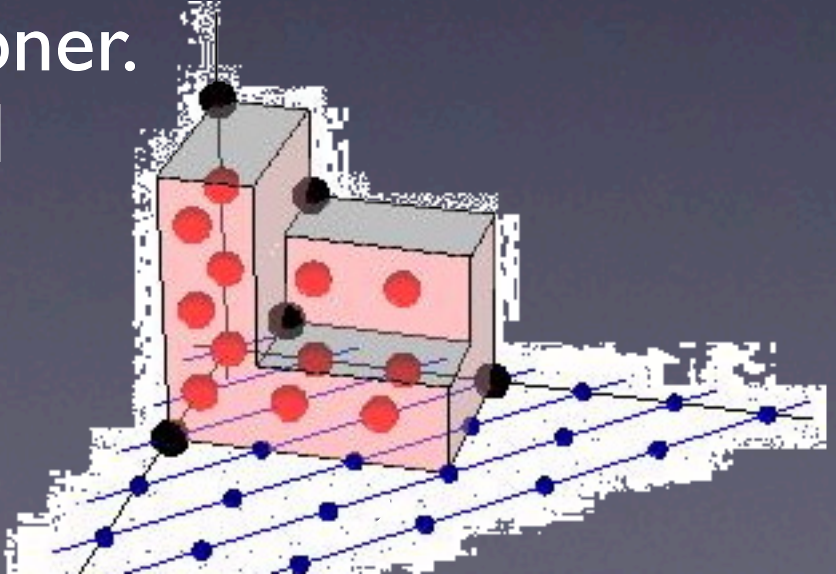


L'idéal de télescopage

$$T_t(f) := \left(\operatorname{Ann} f + \underbrace{\partial_t \mathbb{Q}(\boldsymbol{x},t)\langle \boldsymbol{\partial_x}, \partial_t\rangle}_{\text{int. p. parties}}\right) \cap \underbrace{\mathbb{Q}(\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{\partial_x}\rangle}_{\text{deriv. sous } \int}.$$

- sommation hypergéométrique : dim=1 + param. Gosper. [Zeilberger 1991]
- holonomie : restreindre l'int. par parties à $\mathbb{Q}(x)\langle \boldsymbol{\partial_x}, \partial_t\rangle$ et bases de Gröbner. [Wilf-Zeilberger 1992]
- dim finie, algèbres de Ore & GB (JSC 1998)
- dim infinie & GB (ISSAC 2009)

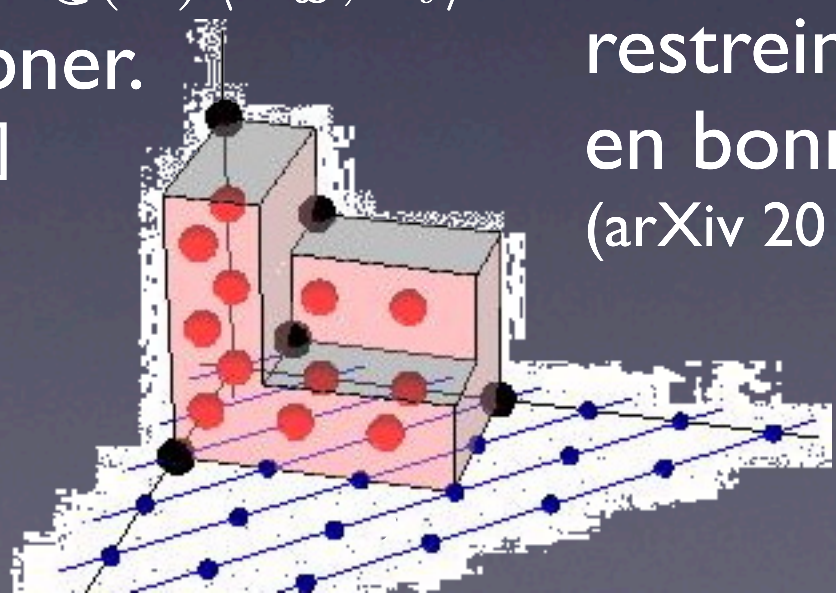




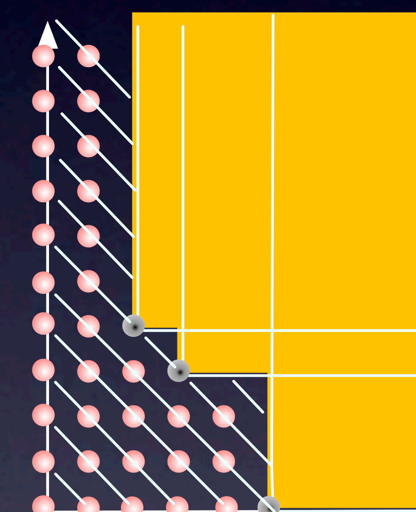
L'idéal de télescopage

$$T_t(f) := \Big(\operatorname{Ann} f + \underbrace{\partial_t \mathbb{Q}(\boldsymbol{x},t)\langle \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}, \partial_t\rangle}_{\text{int. p. parties}}\Big) \cap \underbrace{\mathbb{Q}(\boldsymbol{x})\langle\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}\rangle}_{\text{deriv. sous } \int} .$$

- sommation hypergéométrique : dim=1 + param. Gosper. [Zeilberger 1991]
- holonomie : restreindre l'int. par parties à $\mathbb{Q}(\boldsymbol{x})\langle\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}, \partial_t\rangle$ et bases de Gröbner. [Wilf-Zeilberger 1992]



- dim finie, algèbres de Ore & GB (JSC 1998)



- dim infinie & GB (ISSAC 2009)
- *f* rationnelle et restreindre à $\mathbb{Q}(\boldsymbol{x})[1/\operatorname{den} f]\langle\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}}, \partial_t\rangle$ en bonne complexité (arXiv 2013)

Résumé

- Beaucoup d'analyse s'algorithmise
- On peut calculer vite avec l'itération de Newton
- On peut calculer vite avec les équations différentielles/de récurrence linéaires
- On peut/veut calculer ces équations
- Il reste beaucoup de travail à faire !

Résumé

- Beaucoup d’analyse s’algorithmise
- On peut calculer vite avec l’itération de Newton
- On peut calculer vite avec les équations différentielles/de récurrence linéaires
- On peut/veut calculer ces équations
- Il reste beaucoup de travail à faire !

The End