Bootstrap temps-échelle multivarié pour tester l'égalité d'exposants d'autosimilarité

Charles-Gérard Lucas[1], Patrice Abry[1], Herwig Wendt[2], Gustavo Didier[3]

[1] ENSL, CNRS, Laboratoire de physique, F-69342 Lyon, France, prénom.nom@ens-lyon.fr
[2] IRIT, Univ. Toulouse, CNRS, Toulouse, France, herwig.wendt@irit.fr
[3] Math. Dept., Tulane University, New Orleans, USA, gdidier@tulane.edu

Objectifs

- Tests par paires d'exposants d'autosimilarité multivariée $H_m = H_{m+1}$
- Estimation de la puissance des tests

Méthodes

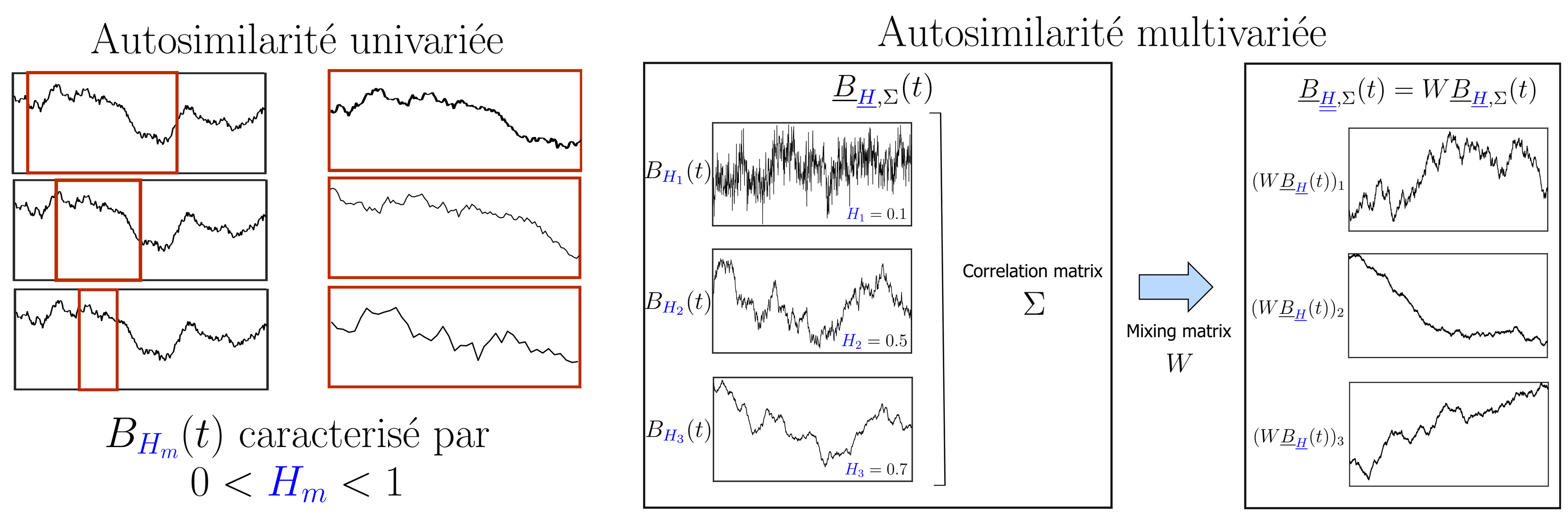
- Valeurs propres des spectres d'ondelettes
- Loi normale repliée
- Bootstrap par blocs temps-échelle multivarié

Perspectives

- Tests par paires non triées $H_m = H_{m'}$?
- Grande dimension ?

1. Autosimilarité multivariée

Modèle [Didier et al., 2011]

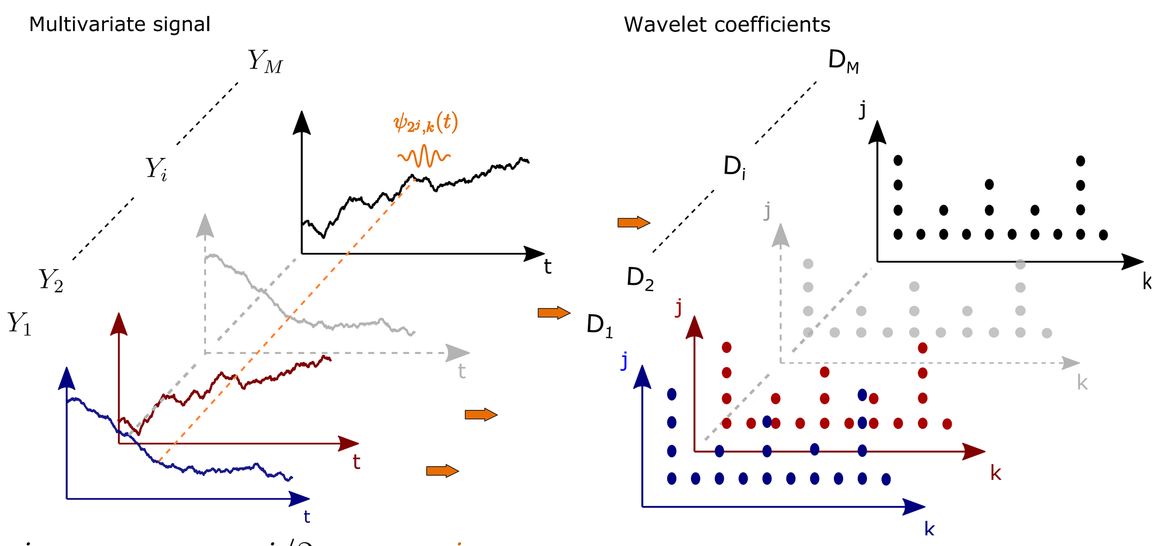


$B_{H_m}(t)$ caracterisé par $0 < H_m < 1$

Exposants d'autosimilarité multivariée : $\underline{H} = (H_1, \ldots, H_M)$,
$0 < H_1 \leq \ldots \leq H_M < 1$

Estimation [Lucas et al., 2021]

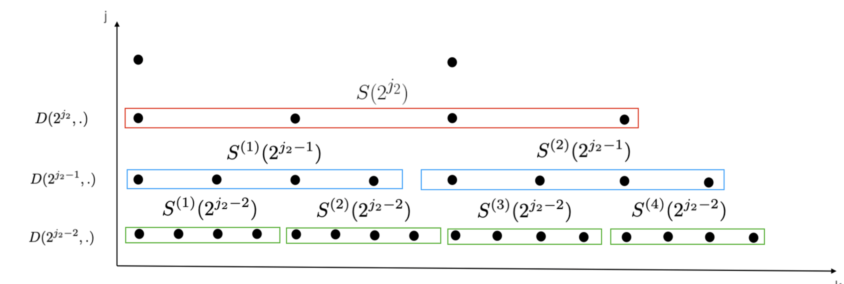
1. Transformée en ondelettes multivariée :



avec $D_m(2^j, k) = \langle 2^{-j/2}\psi_0(2^{-j}t - k)|Y_m(t)\rangle$, $\quad Y = WB_{\underline{H},\Sigma}$

2. Spectres d'ondelettes sur n_{j_2} coefficients, pour $w = 1, \ldots, 2^{j-j_2}$:

$$S^{(w)}(2^j) \triangleq \langle D(2^j,k)D(2^j,k)^T\rangle_{F_w},$$
$$F_w = \{1 + (w-1)n_{j_2}, \ldots, wn_{j_2}\}$$



3. Valeurs propres $S^{(w)}(2^j)$: $\{\lambda_1^{(w)}(2^j), \ldots, \lambda_M^{(w)}(2^j)\}$
$\to$ loi de puissance asymptotique : $\lambda_m^{(w)}(2^j) = \xi_m 2^{j(2H_m+1)}$

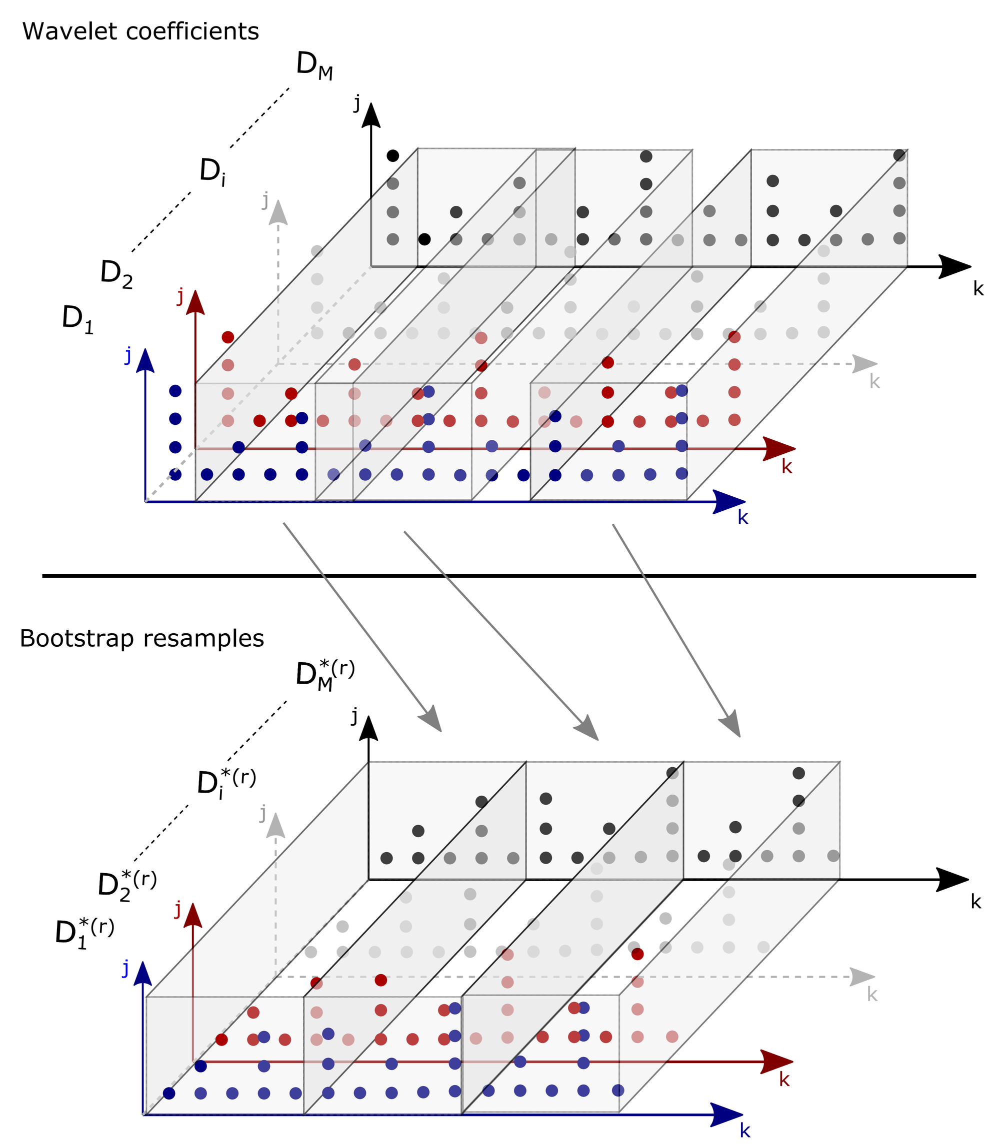
4. Régression linéaire : $\hat{H}_m = \frac{1}{2}\sum_{j=j_1}^{j_2} \omega_j \langle \log_2 \lambda_m^{(w)}(2^j)\rangle_w + \frac{1}{2}$

2. Tests : méthodologie

1. $M-1$ hypothèses nulles : $H_m = H_{m+1}$, $m = 1, \ldots, M-1$
2. Tri des estimées : $\underline{\hat{H}}_{\tau(\cdot)} = \mathrm{sort}(\underline{\hat{H}})$
3. Statistiques de test : $\tilde{\delta}_m = \hat{H}_{\tau(m+1)} - \hat{H}_{\tau(m)} \simeq$ loi normale repliée $(\tilde{\mu}_m, \tilde{\sigma}_m)$
4. Sous hypothèse nulle $H_m = H_{m+1}$: $\tilde{\mu}_m = 0$

3. Tests : bootstrap

Ré-échantillonnage bootstrap



$\Rightarrow R$ ré-échantillons :
$D^{*(r)} = (D_1^{*(r)}, \ldots, D_M^{*(r)})$
$\Downarrow$
R estimées bootstrap :
$\underline{\hat{H}}^{*(r)} = (\hat{H}_1^{*(r)}, \ldots, \hat{H}_M^{*(r)})$
$\Downarrow$
Estimées bootstrap triées :
$\hat{H}^{*(r)}_{\tau^*(r,1)} < \ldots < \hat{H}^{*(r)}_{\tau^*(r,M)}$
$\Downarrow$
Statistiques de test bootstrap :
$\tilde{\delta}_m^{*(r)} = \hat{H}^{*(r)}_{\tau^*(r,m+1)} - \hat{H}^{*(r)}_{\tau^*(r,m)}$
$\Downarrow$
Méthode des moments :
$\tilde{\mu}_m^*, \tilde{\sigma}_m^*$

Définitions

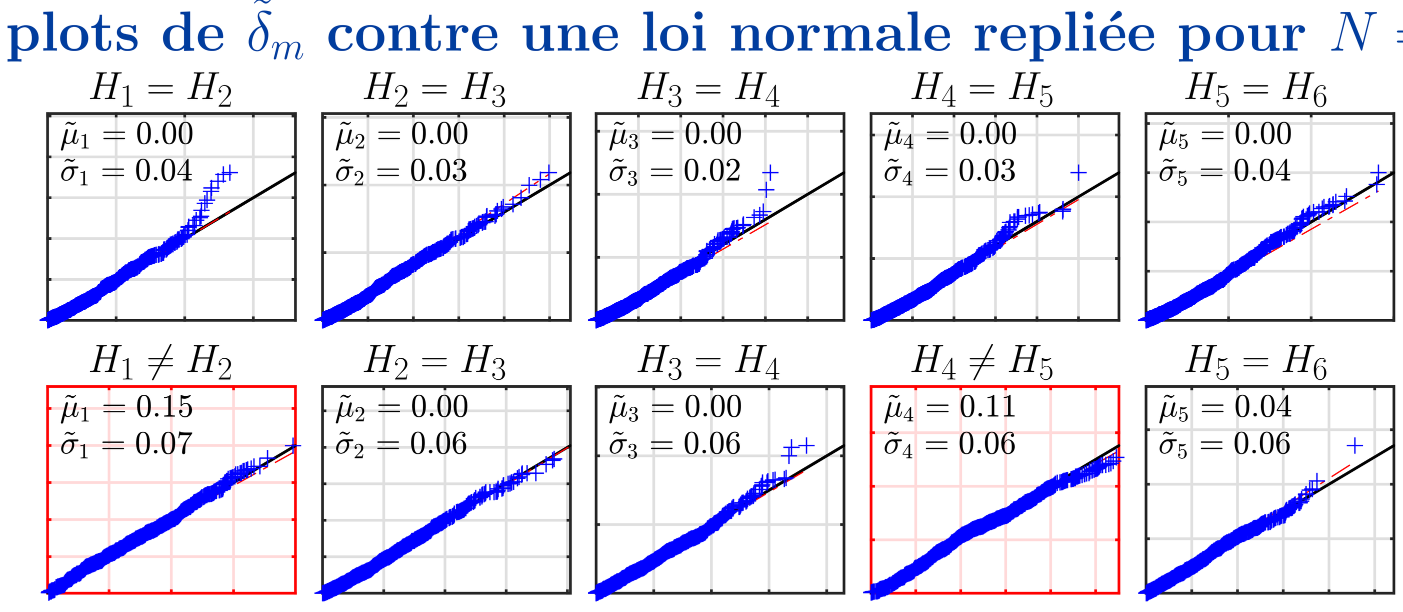
1. p-valeurs $\tilde{p}_m^* \triangleq 1 - F_{\mathcal{FN}(0,1)}\left(\frac{\tilde{\delta}_m}{\tilde{\sigma}_m^*}\right)$
$F_{\mathcal{FN}}$: fonction de répartition de la loi normale repliée
2. Décisions : $d_\alpha^{(m)} = 1$: $\quad \tilde{p}_m^* < \alpha, \quad \alpha$: probabilité de fausse alarme
3. Puissance : $\pi(\tilde{\mu}_m^*, \tilde{\sigma}_m^*) = 1 - \mathrm{F}_{\mathcal{FN}(\tilde{\mu}_m^*, \tilde{\sigma}_m^*)}(F^{-1}_{\mathcal{FN}(\mu_m=0,\tilde{\sigma}_m^*)}(1-\alpha))$

4. Évaluation des performances

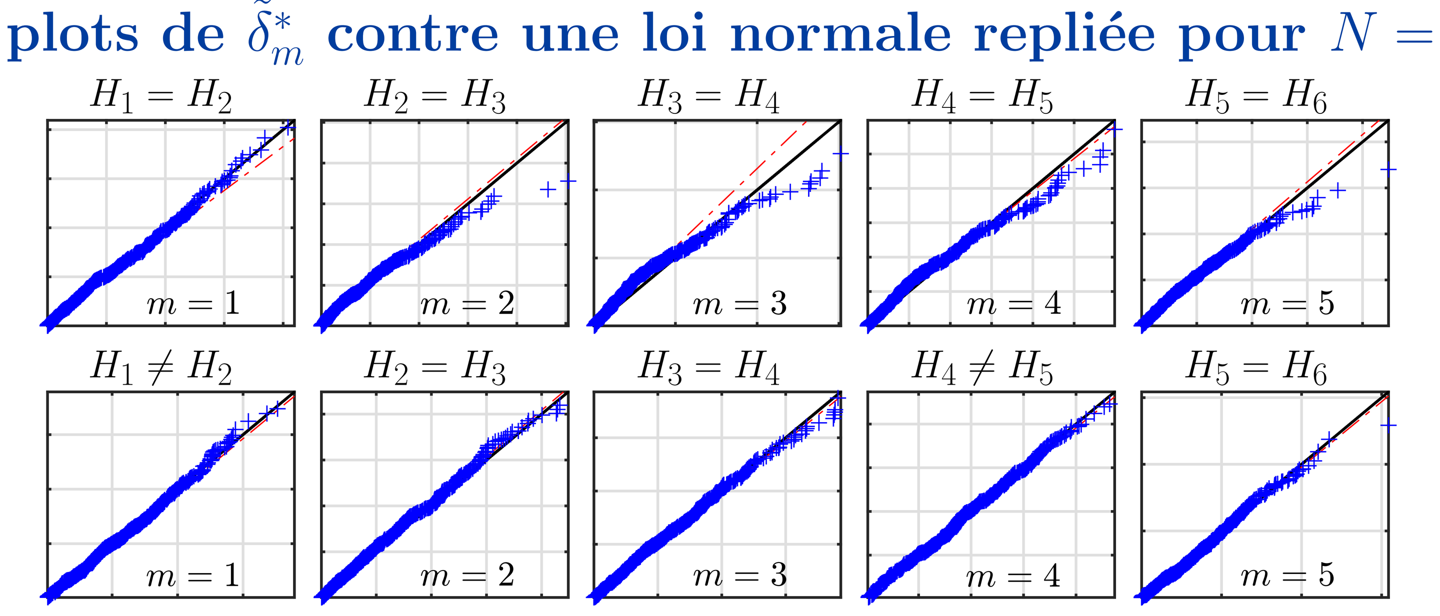
Simulations Monte Carlo

$N_{MC} = 1000$ réalisations, $M = 6$, tailles d'échantillon $N \in \{2^{16}, 2^{17}, 2^{18}\}$
Scénario 1 (1 groupe): $\underline{H} = (0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8)$
Scénario 2 (3 groupes): $\underline{H} = (0.4, 0.6, 0.6, 0.6, 0.8, 0.8)$

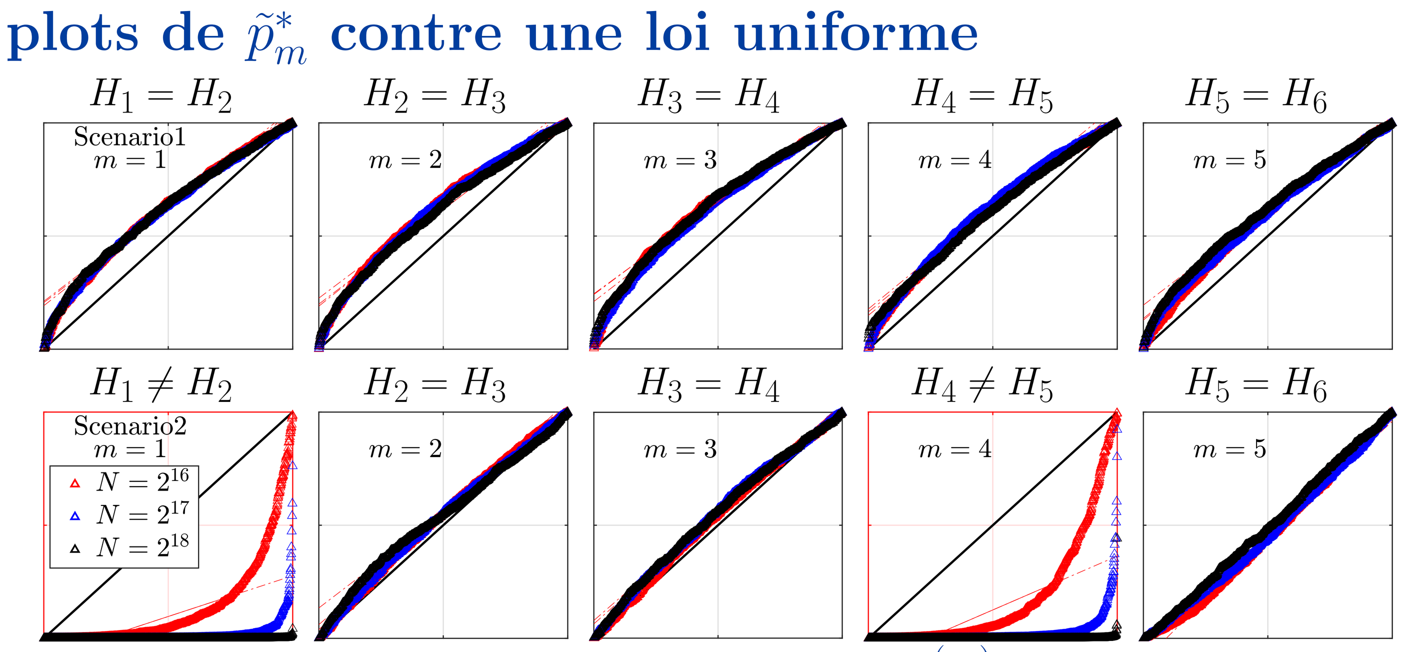
Q-Q plots de $\tilde{\delta}_m$ contre une loi normale repliée pour $N = 2^{16}$



Q-Q plots de $\tilde{\delta}_m^*$ contre une loi normale repliée pour $N = 2^{16}$



Q-Q plots de $\tilde{p}_m^*$ contre une loi uniforme



Estimation $\pi(\tilde{\mu}_m^*, \tilde{\sigma}_m^*)$ de la puissance $\langle d_\alpha^{(m)}\rangle$ des tests

	N	moyenne	$H_1 = H_2$	$H_2 = H_3$	$H_3 = H_4$	$H_4 = H_5$	$H_5 = H_6$
Scénario 1	2^{16}	$d_\alpha^{(m)}$	0.02	0.01	0.02	0.01	0.02
		$\pi(\tilde{\mu}_m^*, \tilde{\sigma}_m^*)$	0.07	0.05	0.05	0.05	0.06
	2^{17}	$d_\alpha^{(m)}$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
		$\pi(\tilde{\mu}_m^*, \tilde{\sigma}_m^*)$	0.06	0.05	0.05	0.05	0.06
	2^{18}	$d_\alpha^{(m)}$	0.01	0.01	0.00	0.00	0.01
		$\pi(\tilde{\mu}_m^*, \tilde{\sigma}_m^*)$	0.06	0.05	0.05	0.05	0.06
Scénario 2	2^{16}	$d_\alpha^{(m)}$	0.51	0.05	0.05	0.49	0.09
		$\pi(\tilde{\mu}_m^*, \tilde{\sigma}_m^*)$	0.51	0.11	0.11	0.46	0.19
	2^{17}	$d_\alpha^{(m)}$	0.92	0.04	0.04	0.89	0.07
		$\pi(\tilde{\mu}_m^*, \tilde{\sigma}_m^*)$	0.83	0.12	0.11	0.76	0.18
	2^{18}	$d_\alpha^{(m)}$	1.00	0.03	0.04	1.00	0.06
		$\pi(\tilde{\mu}_m^*, \tilde{\sigma}_m^*)$	0.99	0.11	0.11	0.97	0.18

[Didier et al., 2011] G. Didier and V. Pipiras, "Integral representations and proper- ties of operator fractional Brownian motions," Bernoulli, vol. 17, no. 1, pp. 1–33, 2011.

[Lucas et al., 2021] C.-G. Lucas, P. Abry, H. Wendt, and G. Didier, "Bootstrap for testing the equality of selfsimilarity exponents across multivariate time series," in Proc. European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Dublin, Ireland, August 2021.