Test bootstrap pour l'unimodalité d'exposants de Hurst estimés. Évaluation des performances dans une configuration d'analyse de grande dimension.

Charles-Gérard Lucas[1], Patrice Abry[1], Herwig Wendt[2], Gustavo Didier[3], Oliver Orejola[3]

[1] ENSL, CNRS, Laboratoire de physique, F-69342 Lyon, France, `prénom.nom@ens-lyon.fr`
[2] IRIT, Univ. Toulouse, CNRS, Toulouse, France, `herwig.wendt@irit.fr`
[3] Math. Dept., Tulane University, New Orleans, USA, `{gdidier,oorejola}@tulane.edu`

Objectifs

- Tester l'égalité entre exposants d'autosimilarité $H_1 = \ldots = H_M$
- Performances en grande dimension : $M \to +\infty$

Méthodes

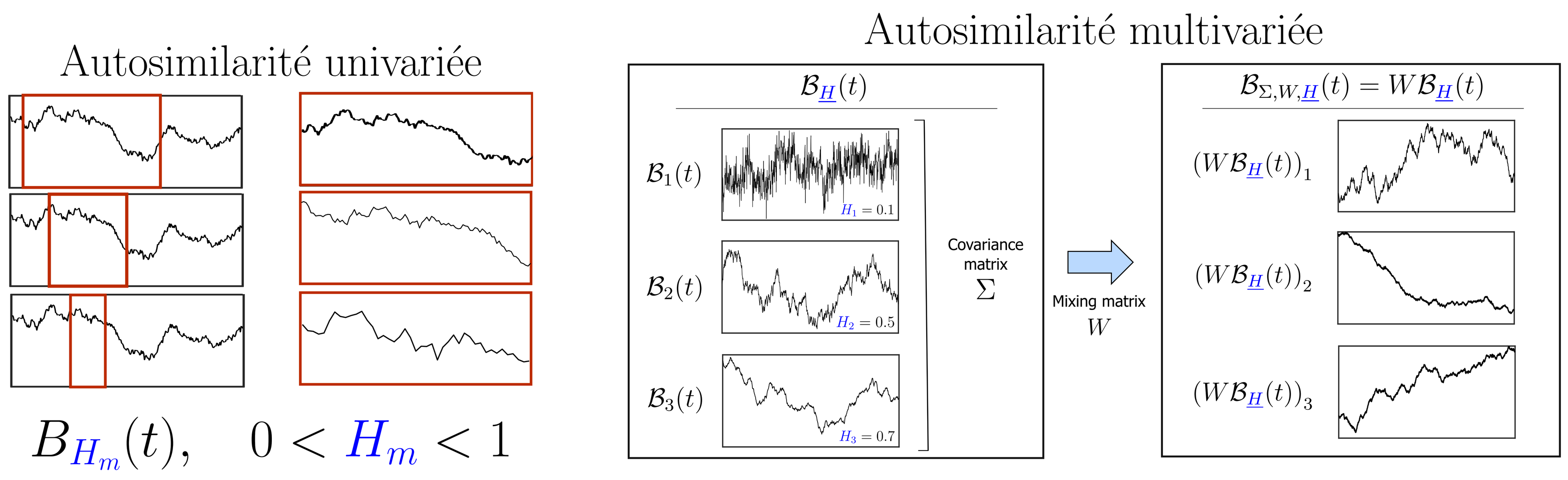
- Valeurs propres des spectres d'ondelettes
- Bootstrap par blocs temps-échelles multivariés
- Test d'unimodalité de Hartigan

Perspectives

Nombre de valeurs distinctes dans $\underline{H} = (H_1, \ldots, H_M)$?

1. Autosimilarité multivariée

Modèle [Didier et al., 2011]

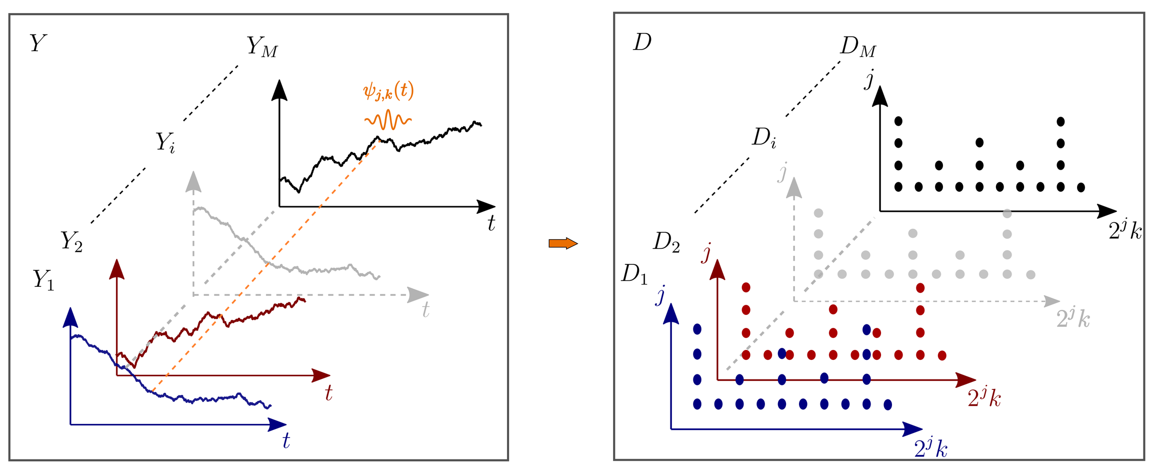


$B_{H_m}(t), \quad 0 < H_m < 1$

Exposants d'autosimilarité multivariée : $\underline{H} = (H_1, \ldots, H_M)$

Estimation [Wendt et al., 2018 ; Lucas et al., 2021]

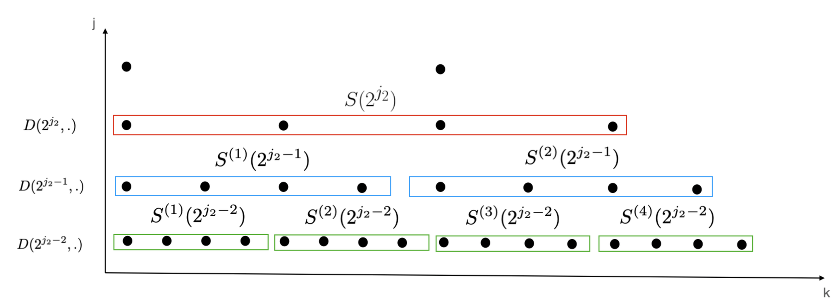
1. Transformée en ondelettes multivariée



avec $Y = \underline{B}_{\Sigma,W,\underline{H}}$, $\quad D_m(2^j,k) = \langle 2^{-j/2}\psi_0(2^{-j}t-k) | Y_m(t)\rangle$

2. Spectres d'ondelettes sur n_{j_2} coefficients d'ondelettes

$$S^{(w)}(2^j) \triangleq \langle D(2^j,k)D(2^j,k)^T\rangle_{F_w}$$
$$F_w = \{1+(w-1)n_{j_2}, \ldots, wn_{j_2}\}$$
$$w = 1, \ldots, 2^{j-j_2}$$



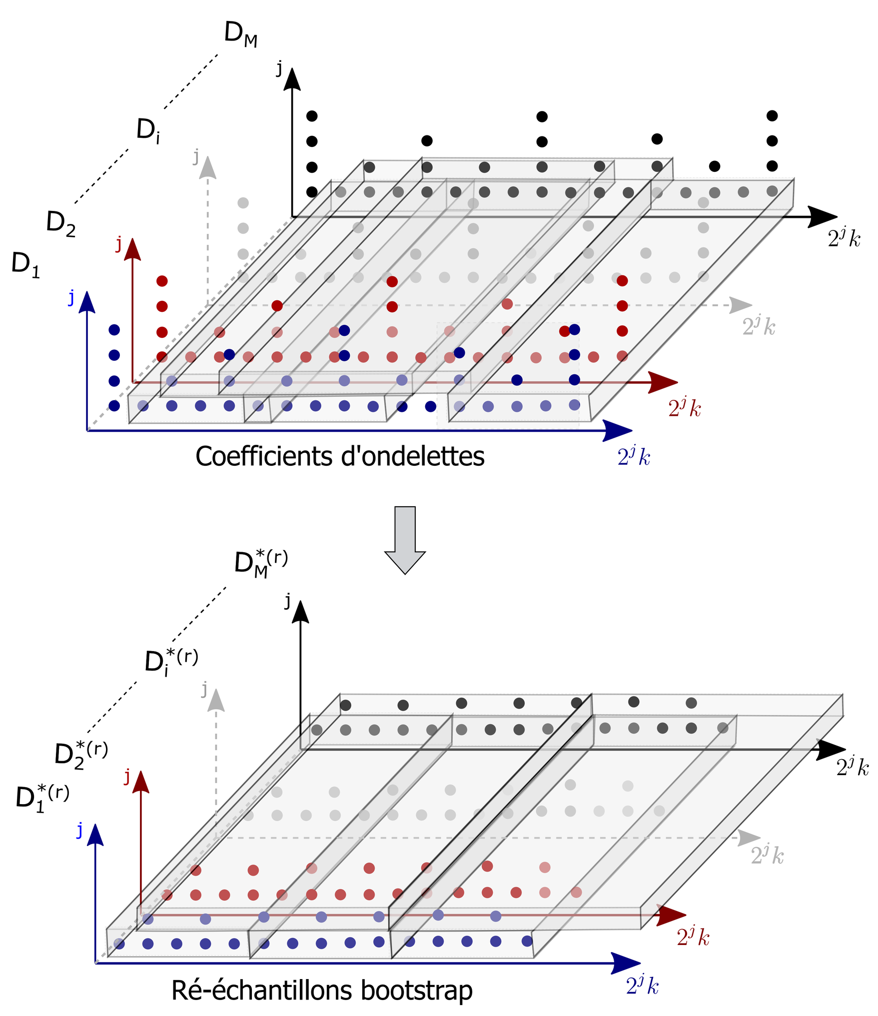
3. Valeurs propres $S^{(w)}(2^j)$: $\{\lambda_1^{(w)}(2^j), \ldots, \lambda_M^{(w)}(2^j)\}$

$\to$ loi de puissance asymptotique : $\lambda_m^{(w)}(2^j) = \xi_m\, 2^{j(2H_m+1)}$

4. Régression linéaire : $\hat{H}_m = \frac{1}{2}\sum_{j=j_1}^{j_2} \omega_j \,\langle \log_2 \lambda_m^{(w)}(2^j)\rangle_w + \frac{1}{2}$

4. Test : bootstrap

Ré-échantillonnage bootstrap



R ré-échantillons
$$D^{*(r)} = (D_1^{*(r)}, \ldots, D_M^{*(r)})$$
$$\Downarrow$$
R estimées bootstrap
$$\underline{\hat{H}}^{*(r)} = (\hat{H}_1^{*(r)}, \ldots, \hat{H}_M^{*(r)})$$
$$\Downarrow$$
R estimées bootstrap centrées
$$\bar{H}_m^{*(r)} = \hat{H}_m^{*(r)} - \langle \hat{H}_m^{*(r)}\rangle_r$$
$$\Downarrow$$
R fonctions de répartition empiriques
$$\hat{F}^{*(r)}(x) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \mathbb{1}_{\{\bar{H}_m^{*(r)} \le x\}}$$
$$\Downarrow$$
R statistiques de test bootstraps
$$\hat{d}^{*(r)}$$

Définition

p-valeur $\hat{p}^* \triangleq \sum_{r=1}^{R} \mathbb{1}_{\{\hat{d} < \hat{d}^{*(r)}\}} \Rightarrow$ rejeter $\mathcal{H}_0$ quand $\hat{p}^* < \alpha$

2. Asymptotique de grande dimension

Régime asymptotique

$$\frac{M}{N/2^{j_2}} \to c \in [0,+\infty) \quad \text{lorsque } M, N, j_2 \to +\infty$$

Comportement asymptotique des $\hat{H}_m$

$H_1 = \ldots = H_M \Leftrightarrow$ distribution des $\hat{H}_m$ unimodale

3. Test : méthodologie

1. Hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$: $H_1 = \ldots = H_M$
2. Fonction de répartition empirique : $\hat{F}(x) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \mathbb{1}_{\{\hat{H}_m \le x\}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. Statistique de test de Hartigan : $\hat{d} = \inf_{G \in \mathcal{U}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}(x) - G(x)|$

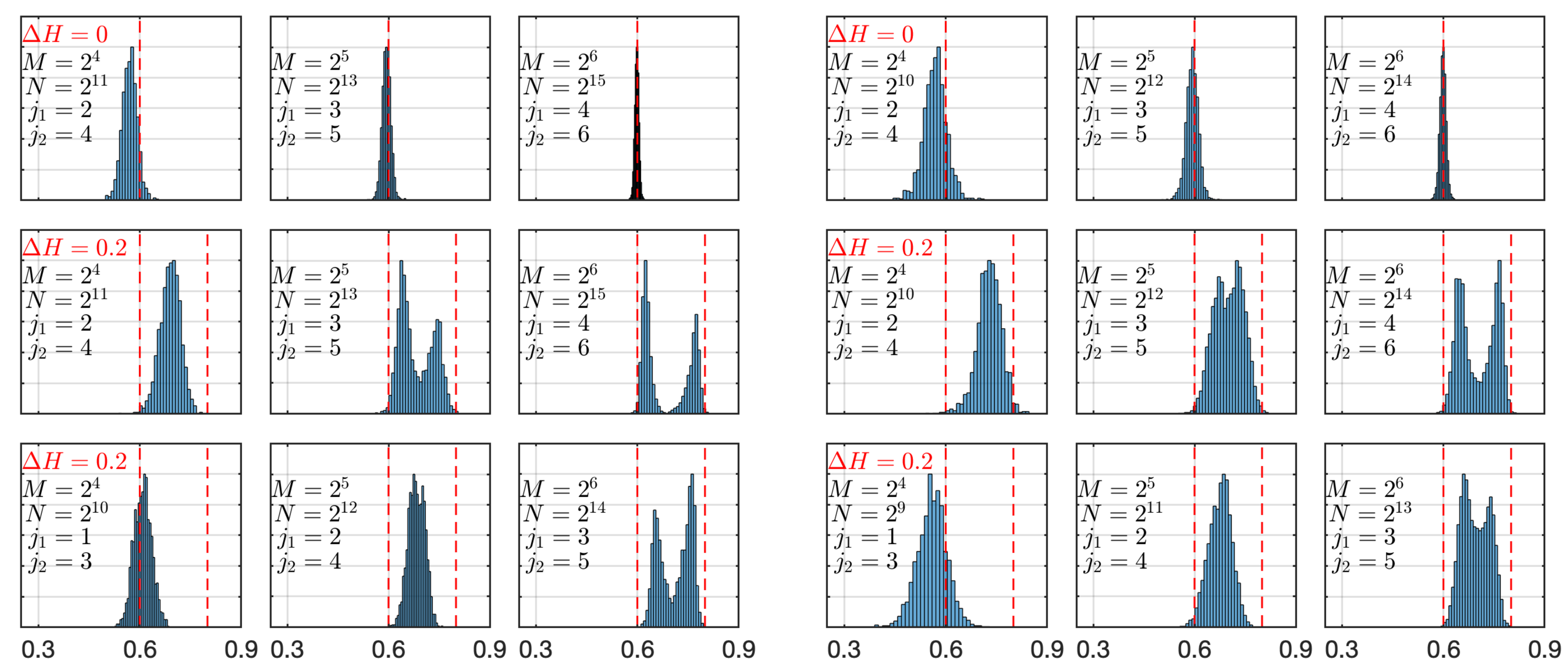
   $\mathcal{U}$: ensemble des fonctions de répartition unimodales
4. Rejeter $\mathcal{H}_0$ quand $\hat{d} > d_\alpha$, α : probabilité de fausse alarme

5. Évaluation des performances

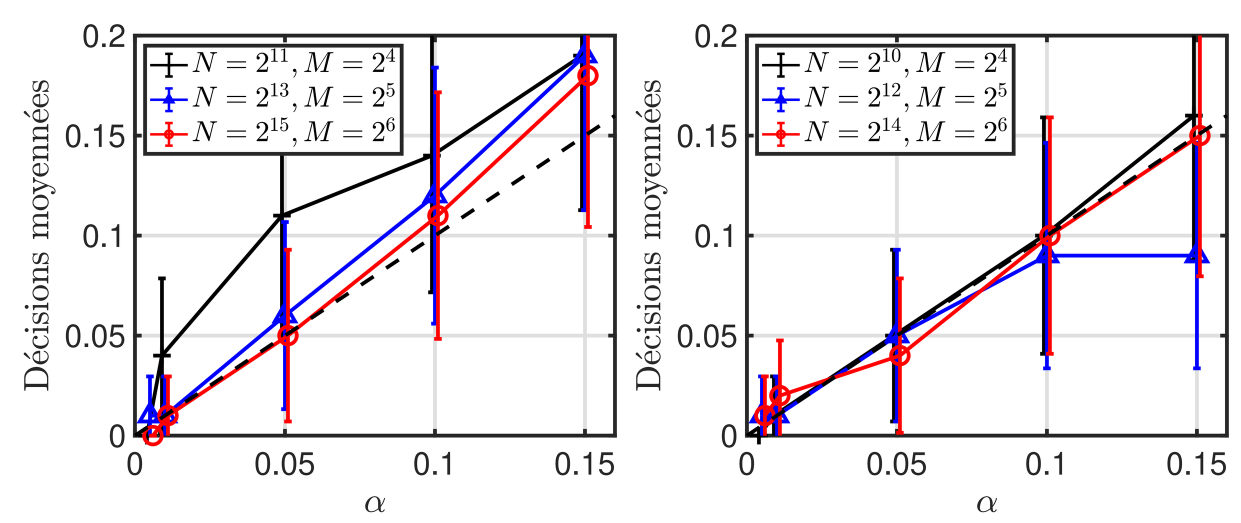
Simulations de Monte Carlo

$$N_{MC} = 100 \text{ réalisations}, \quad c \triangleq M\,2^{j_2}/N \in \{1/8, 1/4\}$$
$$\underline{H} = (H_1, \ldots, H_1, H_2, \ldots, H_2), \quad \Delta H = H_2 - H_1, \quad H_1 = 0.6$$

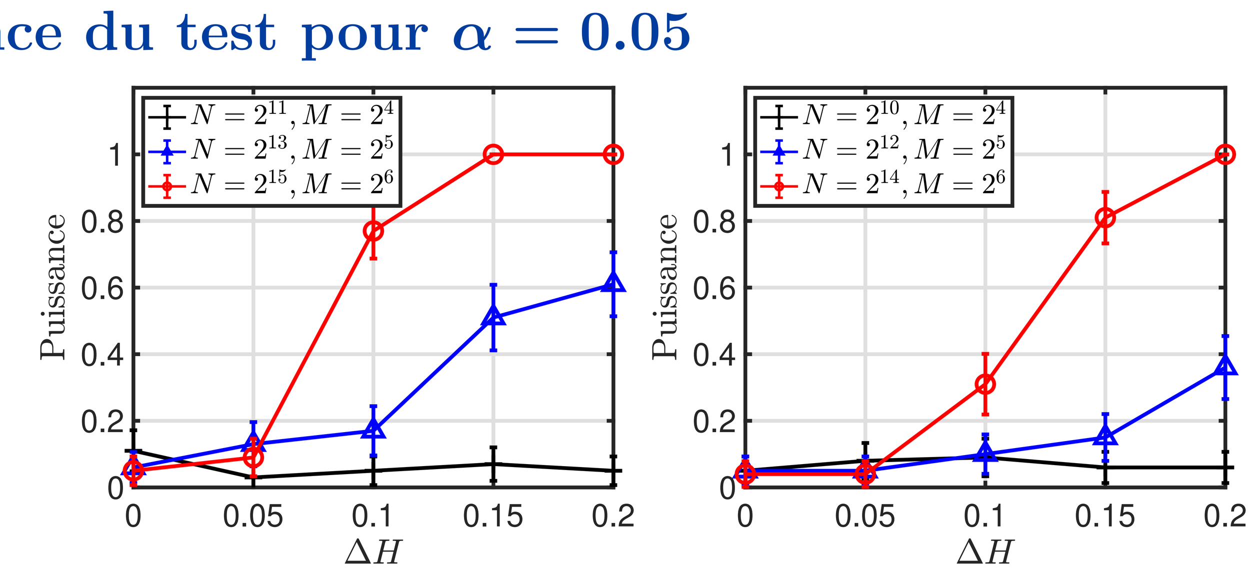
Comportement asymptotique des $\hat{H}_m$



Reproduction de l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$



Puissance du test pour $\alpha = 0.05$



[Didier et al., 2011] G. Didier and V. Pipiras, "Integral representations and proper- ties of operator fractional Brownian motions," Bernoulli, vol. 17, no. 1, pp. 1–33, 2011.

[Wendt et al., 2018] H. Wendt, P. Abry, and G. Didier. "Wavelet domain bootstrap for testing the equality of bivariate self-similarity exponents." 2018 IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP). IEEE, 2018.

[Lucas et al., 2021] C.-G. Lucas, P. Abry, H. Wendt, and G. Didier, "Bootstrap for testing the equality of selfsimilarity exponents across multivariate time series," in Proc. European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Dublin, Ireland, August 2021.