M1 Info - Optimisation et Recherche Opérationnelle

Cours 3 - Branching

Stable Maximum

Semestre Automne 2021-2022 - Université Claude Bernard Lyon 1

Christophe Crespelle
christophe.crespelle@univ-lyon1.fr

département
Informatique

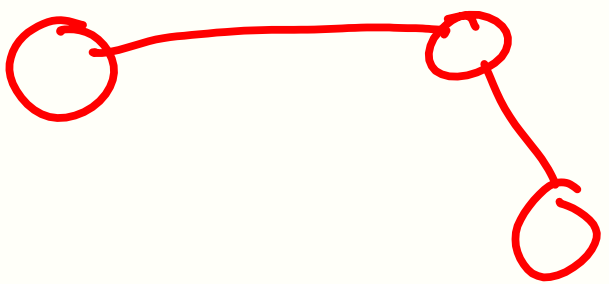
Faculté des Sciences et Technologies
Université Claude Bernard Lyon 1

Problème du stable maximum

Cadre : graphes simples, non orientes et sans boucles

Définition

Un stable dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $S \subseteq V$ de sommets deux a deux non adjacents (aucune arete entre les sommets de S).
Un stable maximum est un stable S dont le nombre de sommets $|S|$ est maximum (parmi tous les stables de G).

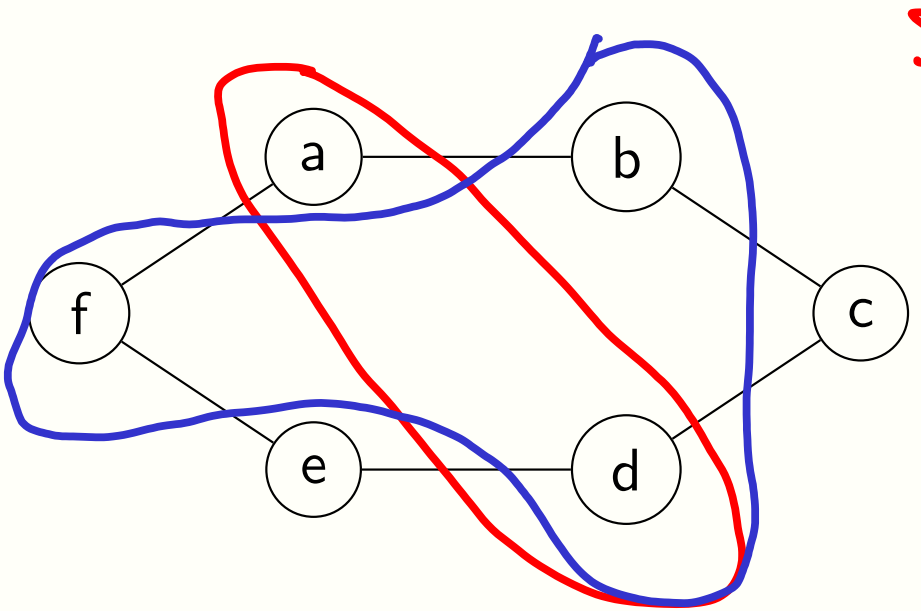


Problème du stable maximum

Cadre : graphes simples, non orientes et sans boucles

Définition

Un stable dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $S \subseteq V$ de sommets deux a deux non adjacents (aucune arete entre les sommets de S).
Un stable maximum est un stable S dont le nombre de sommets $|S|$ est maximum (parmi tous les stables de G).



$S_1 = \{a, d\}$

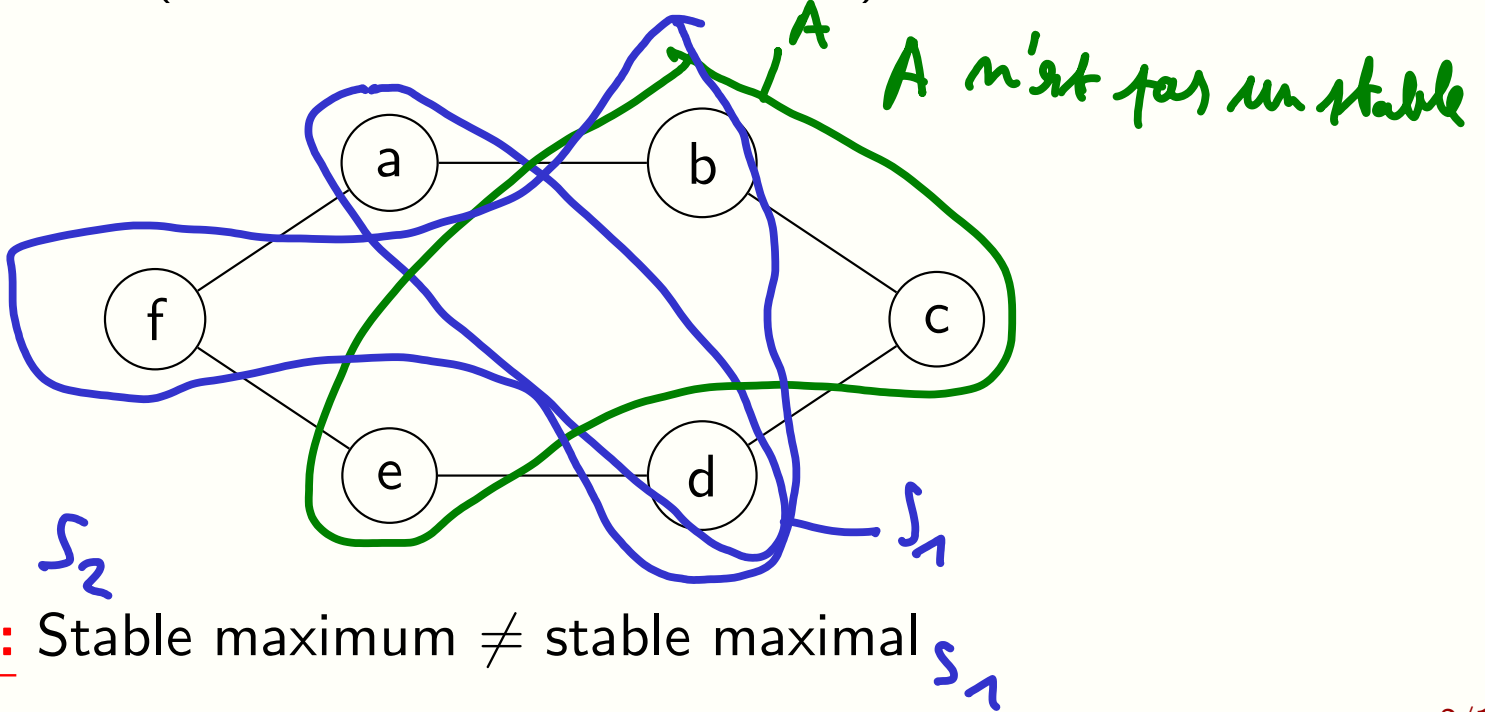
$S_2 = \{b, d, f\}$

Problème du stable maximum

Cadre : graphes simples, non orientes et sans boucles

Définition

Un stable dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $S \subseteq V$ de sommets deux a deux non adjacents (aucune arete entre les sommets de S).
Un stable maximum est un stable S dont le nombre de sommets $|S|$ est maximum (parmi tous les stables de G).



Remarque : Stable maximum $\neq$ stable maximal

Problème du stable maximum

- **Entrée :** un graphe G
- **Sortie :** un stable maximum de G

Probleme classique : les aretes representent des incompatibilites et on veut trouver un ensemble maximum d'entites compatibles.

Problème du stable maximum

- **Entrée :** un graphe G
- **Sortie :** un stable maximum de G

Probleme classique : les aretes representent des incompatibilites et on veut trouver un ensemble maximum d'entites compatibles.

Exemple : Quel est le nombre maximum de seances de CM/TD/TP qu'un etudiant du M1 peut suivre cette semaine ?

Problème du stable maximum

- **Entrée :** un graphe G
- **Sortie :** un stable maximum de G

Probleme classique : les aretes representent des incompatibilites et on veut trouver un ensemble maximum d'entites compatibles.

Exemple : Quel est le nombre maximum de seances de CM/TD/TP qu'un etudiant du M1 peut suivre cette semaine ?

Les sommets sont les seances de CM/TD/TP de cette semaine et on met une arete entre deux seances si leurs deux plages horaires ont une intersection non vide.

Problème du stable maximum

- **Entrée :** un graphe G
- **Sortie :** un stable maximum de G

Probleme classique : les aretes representent des incompatibilites et on veut trouver un ensemble maximum d'entites compatibles.

Difficulte de calcul : **NP-complet** ($\Rightarrow$ presomption de non existence d'algo polynomial pour le resoudre)

$P \overset{?}{\neq} NP$

Problème du stable maximum

- **Entrée :** un graphe G
- **Sortie :** un stable maximum de G

Probleme classique : les aretes representent des incompatibilites et on veut trouver un ensemble maximum d'entites compatibles.

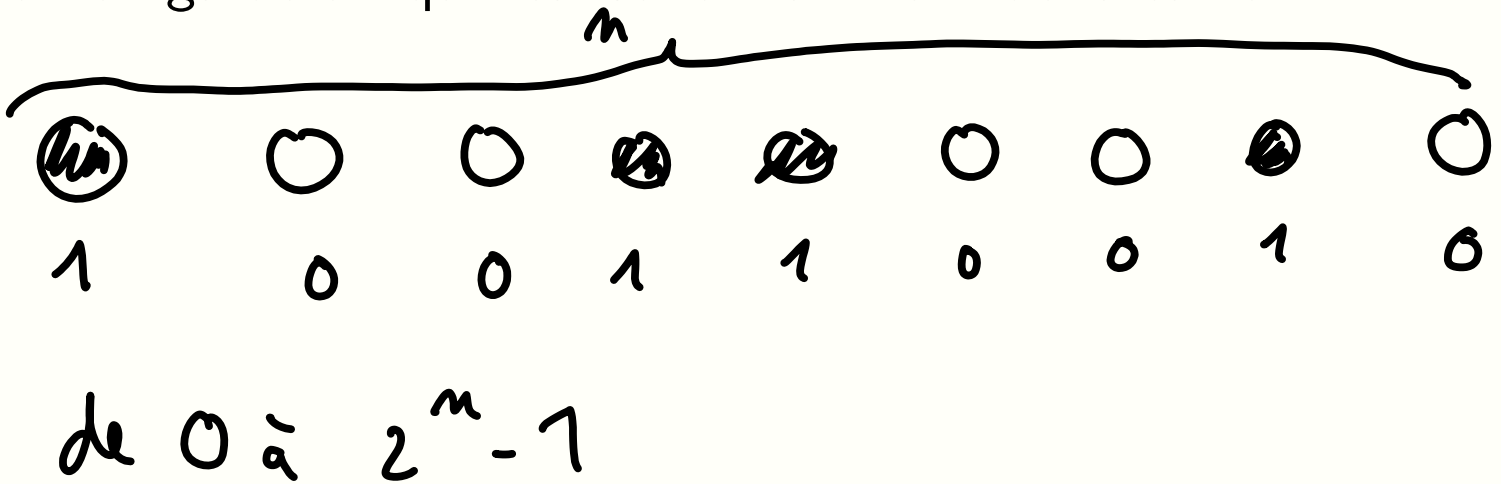
Difficulte de calcul : **NP-complet** ($\Rightarrow$ presomption de non existence d'algo polynomial pour le resoudre)

Remarque : pas facile de predire la difficulte d'un probleme
comparez Flot Maximum et Stable Maximum, lequel a l'air le plus dur ?

Approche brute force

Algo brute force :

- on considere un par un tous les sous-ensembles de sommets
- pour chacun, on teste si c'est un stable
- on en garde un qui realise le maximum de la taille



Approche brute force

Algo brute force :

- on considere un par un tous les sous-ensembles de sommets
- pour chacun, on teste si c'est un stable
- on en garde un qui realise le maximum de la taille

$P(n) \times 2^n = o\left(2.000000001^n\right)$

$\downarrow$

1.45^n

Complexite :

- il y a 2^n sous-ensembles S de V
- tester si S est un stable peut se faire en $O(n+m)$

Total : $O((n+m) \cdot 2^n)$, on ecrit aussi $O^*(2^n)$ $\times$ $P(n)$

Approche brute force

Algo brute force :

- on considere un par un tous les sous-ensembles de sommets
- pour chacun, on teste si c'est un stable
- on en garde un qui realise le maximum de la taille

Complexite :

- il y a 2^n sous-ensembles S de V
- tester si S est un stable peut se faire en $O(n+m)$

Total : $O((n+m)\cdot 2^n)$, on ecrit aussi $O^*(2^n)$

On va faire un algo exponentiel plus rapide ($O(1.45^n)$) en s'appuyant sur 2 proprietes simples, par la technique du branching.

Gain de complexite

On va faire un algo exponentiel plus rapide ($O(1.45^n)$) en s'appuyant sur 2 proprietes simples, par la technique du branching.

Gain de complexite

On va faire un algo exponentiel plus rapide ($O(1.45^n)$) en s'appuyant sur 2 proprietes simples, par la technique du branching.

$\frac{2^n}{1.45^n} = 1.38^n$

pour $n = 100$,

$n=34$ avec l'algo a 2^n

$(1.45)^n \sim 10^{12}$

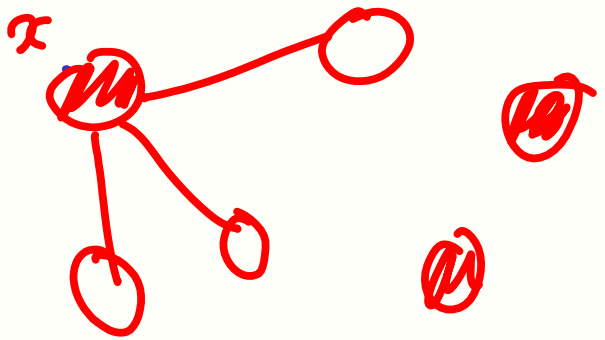
$n \log 1.45 = \log 10^{12}$ $\quad n = \frac{\log 10^{12}}{\log 1.45}$

$n=75$ - algo a 1.45^n

Premieres proprietes

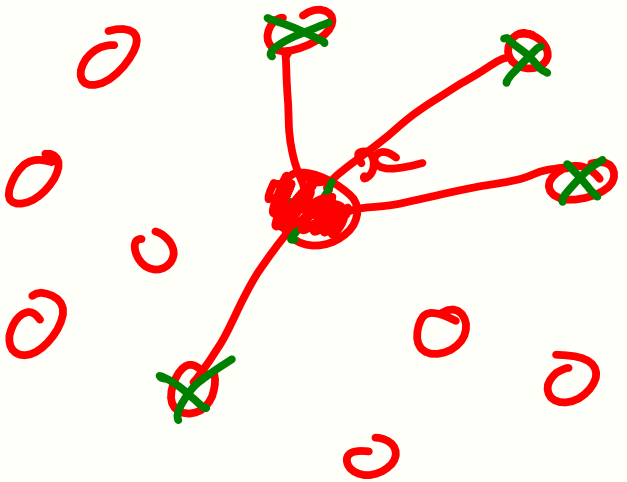
Propriete

Si S est un stable et $x \in S$ alors $S \cap N(x) = \varnothing$.



Propriete

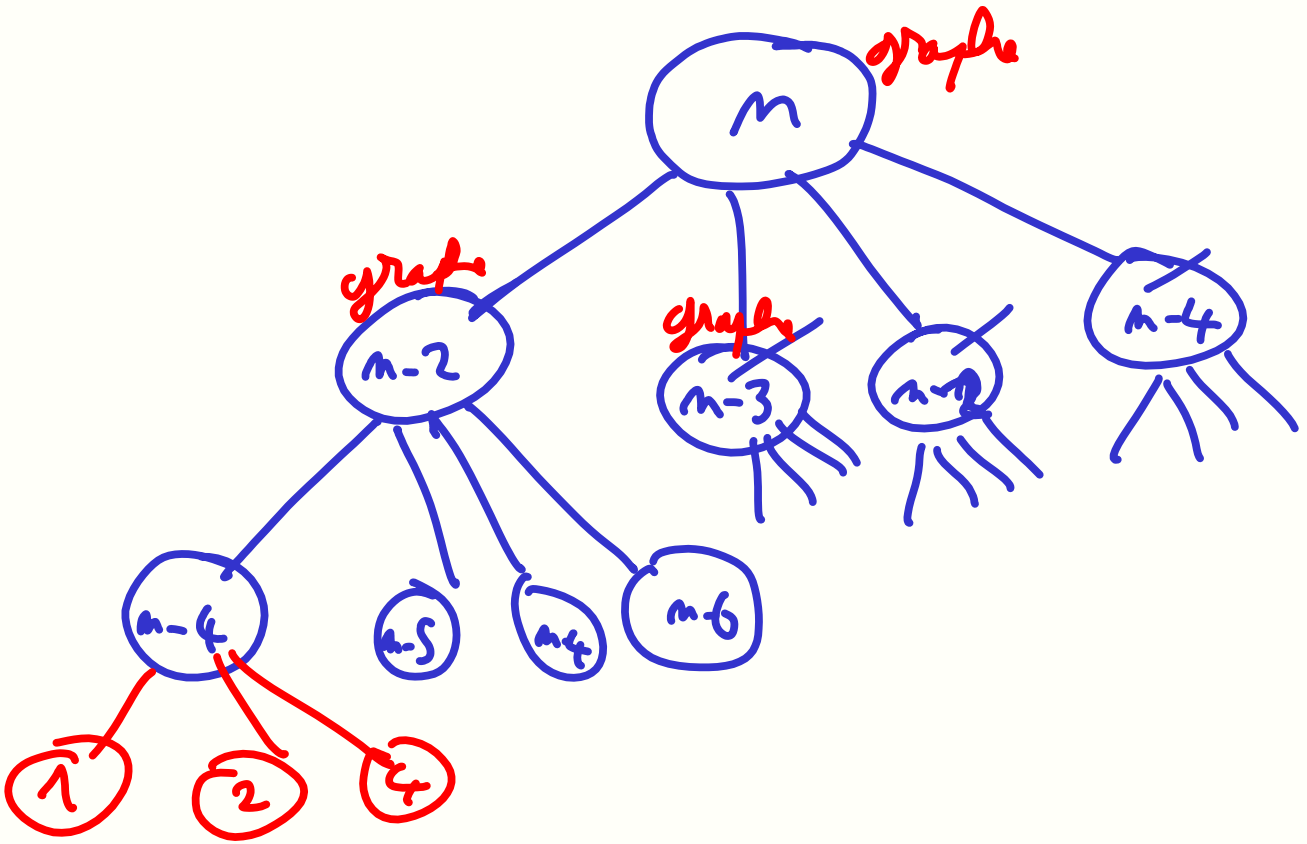
Si S est un stable maximum (donc maximal) et $x \in V$ alors $S \cap (\{x\} \cup N(x)) \neq \varnothing$.



Branching

Idee generale :

- faire une "disjonction" de cas qui tombe sur des problemes de taille reduite
- resoudre **recursivement** chaque probleme reduit
- garder le meilleur resultat



Branching

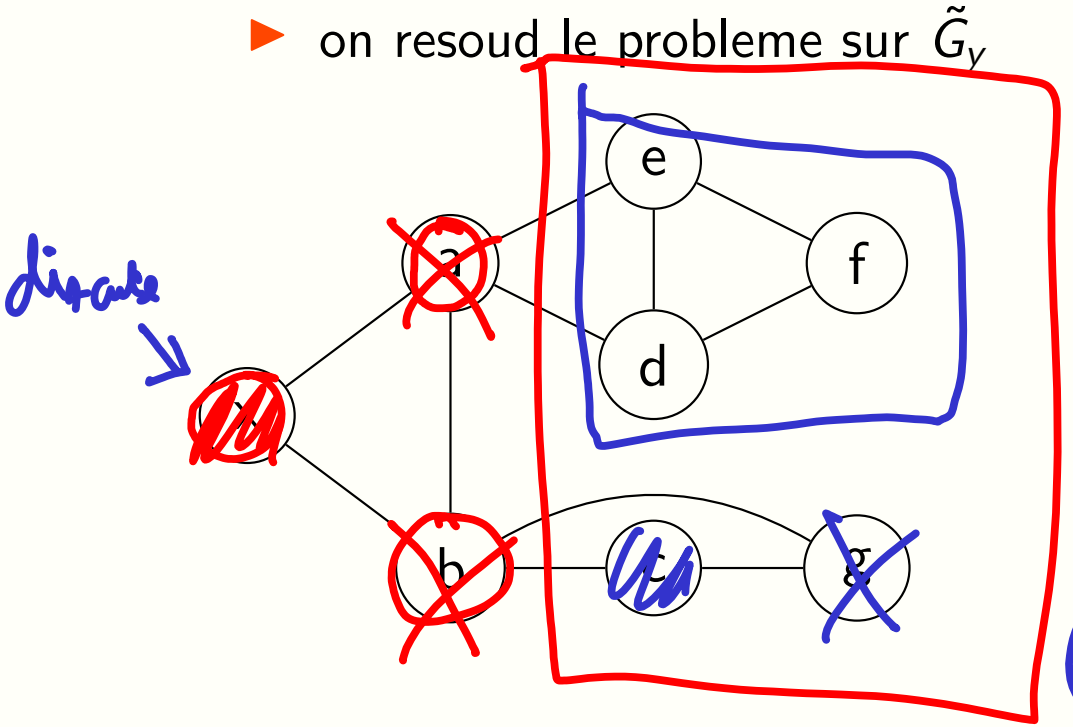
Pour Stable Maximum, ca donne :

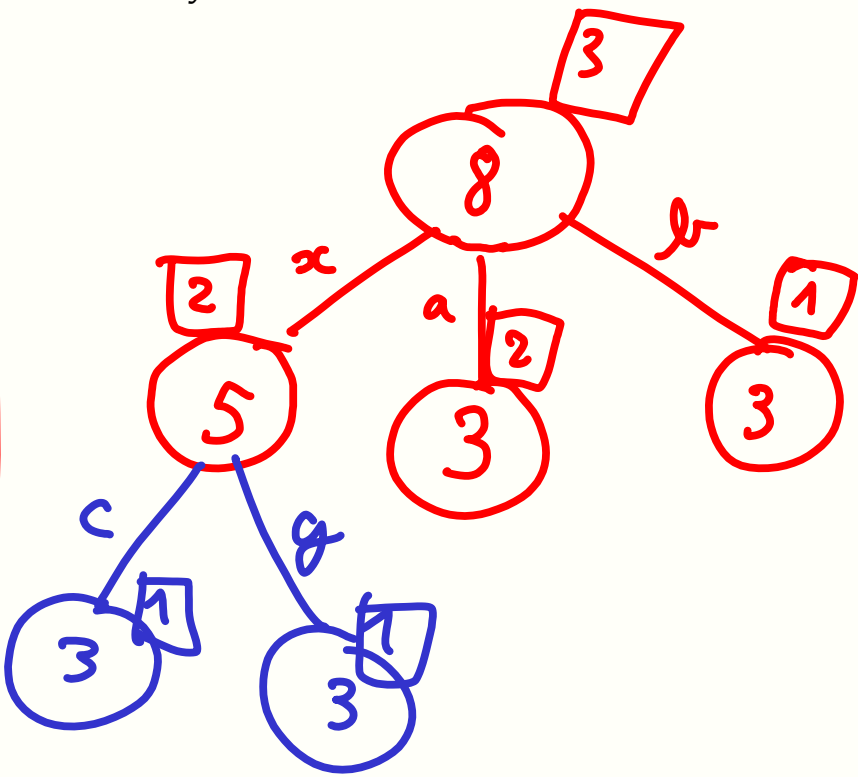
- pour un sommet x on fait un cas pour chaque sommet y dans $\{x\} \cup N(x)$:
  - on met y dans le stable solution S
  - on retire y et $N(y)$ de G pour obtenir $\tilde{G}_y$
  - on resoud le probleme sur $\tilde{G}_y$

Branching

Pour Stable Maximum, ca donne :

- pour un sommet x on fait un cas pour chaque sommet y dans $\{x\} \cup N(x)$:
  - on met y dans le stable solution S
  - on retire y et $N(y)$ de G pour obtenir $\tilde{G}_y$
  - on resoud le probleme sur $\tilde{G}_y$

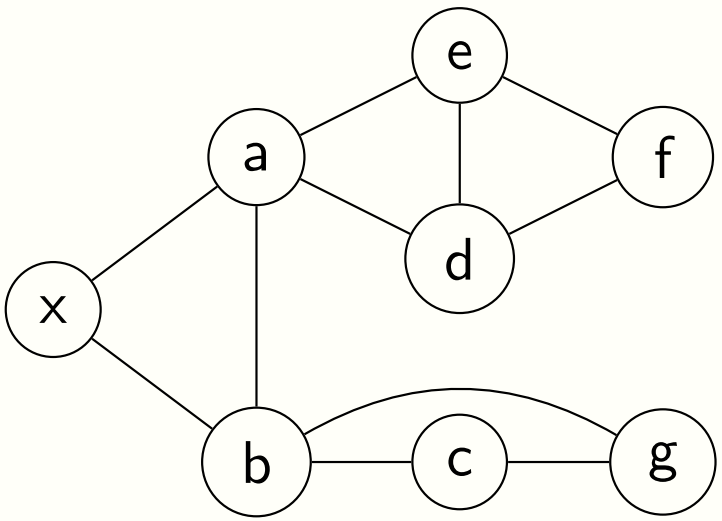




Branching

Pour Stable Maximum, ca donne :

- pour un sommet x on fait un cas pour chaque sommet y dans $\{x\} \cup N(x)$:
  - on met y dans le stable solution S
  - on retire y et $N(y)$ de G pour obtenir $\tilde{G}_y$
  - on resoud le probleme sur $\tilde{G}_y$



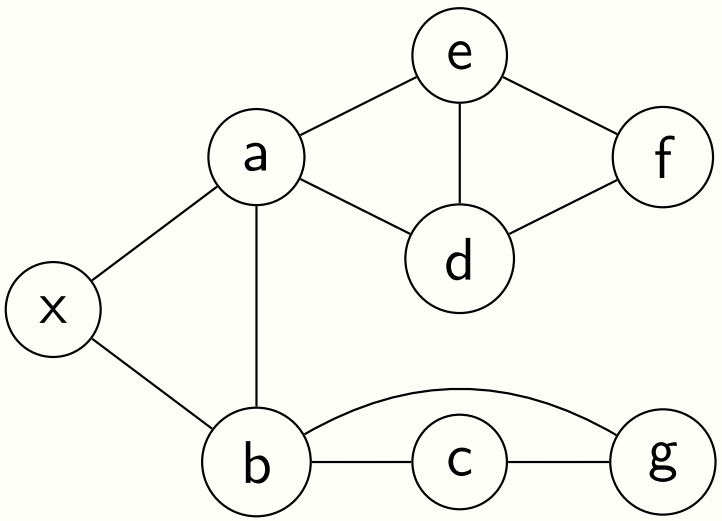
- pour la solution sur G on prend la meilleure obtenue sur les $\tilde{G}_y$

Branching

Pour Stable Maximum, ca donne :

- pour un sommet x on fait un cas pour chaque sommet y dans $\{x\} \cup N(x)$:
  - on met y dans le stable solution S
  - on retire y et $N(y)$ de G pour obtenir $\tilde{G}_y$
  - on resoud le probleme sur $\tilde{G}_y$

validité !

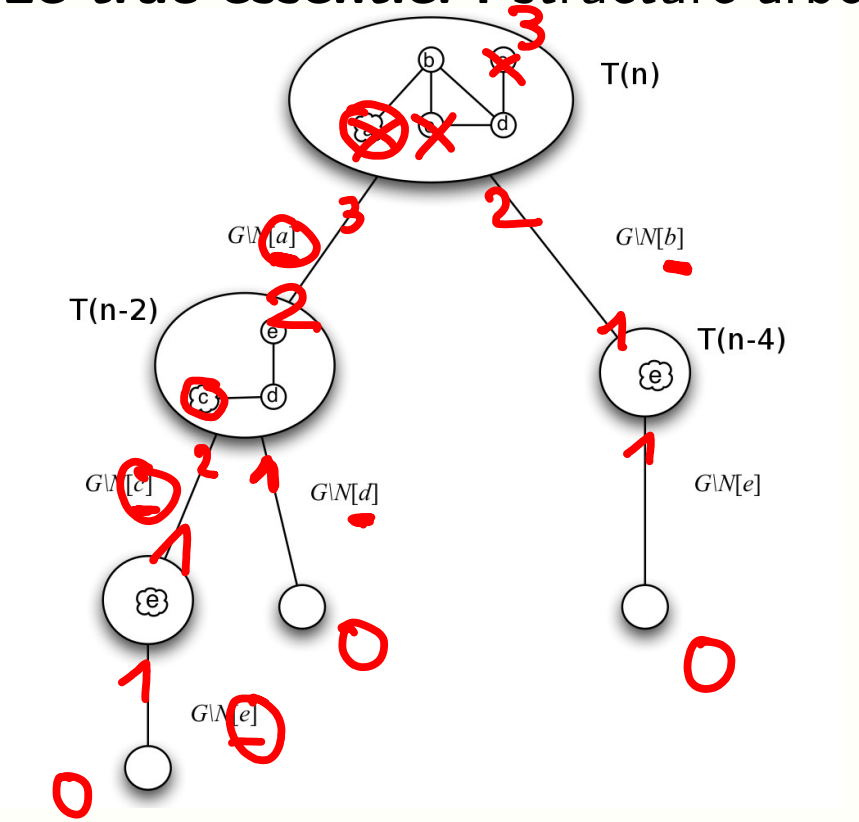


- pour la solution sur G on prend la meilleure obtenue sur les $\tilde{G}_y$
- on choisit bien le sommet x avec lequel on fait ca : un sommet de degre minimum

) complexité en 1.45^n

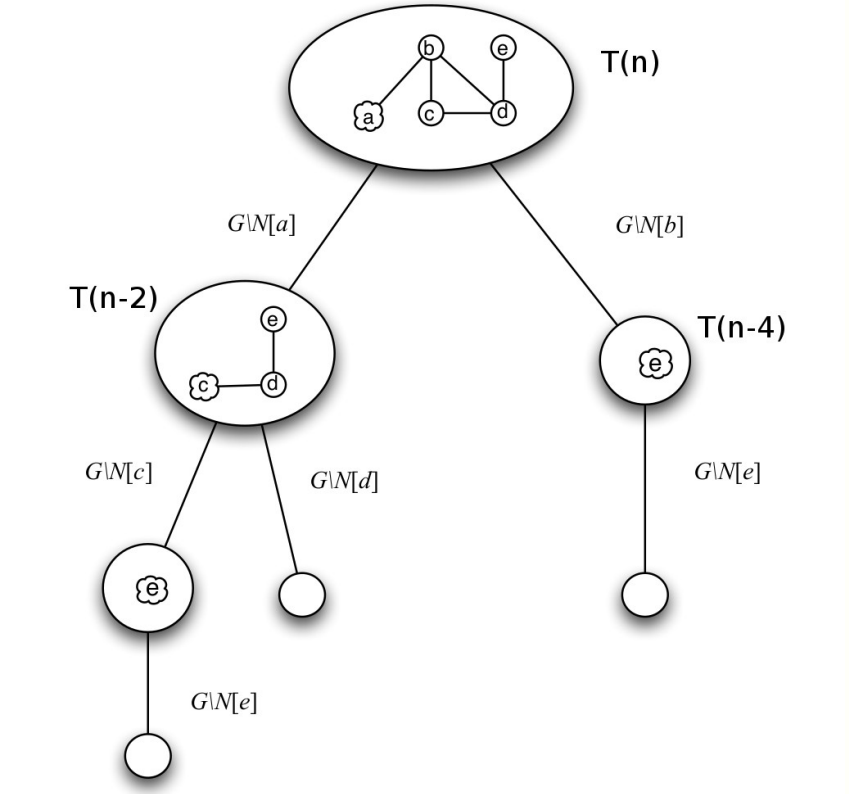
Analyse de l'algorithme

- **Le truc essentiel :** structure arborescente



Analyse de l'algorithme

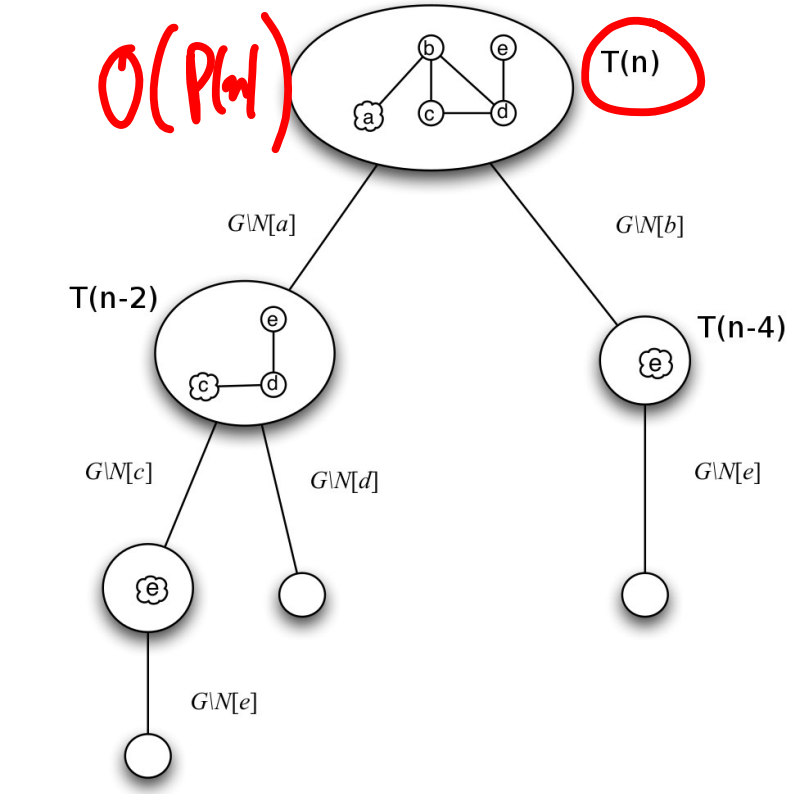
- **Le truc essentiel :** structure arborescente



- **Correction :** OK car on couvre tous les cas

Analyse de l'algorithme

- **Le truc essentiel :** structure arborescente



- **Correction :** OK car on couvre tous les cas
- **Complexite :**
  - le traitement sur chaque noeud de l'arbre prend $O(n+m)$
  - complexite totale $O((n+m)\cdot T(n))$
    ou $T(n)$ **est le nombre de noeuds de l'arbre de recursion**, dans le pire des cas, pour un graphe d'au plus n sommets

Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

- lorsqu'on branche sur un sommet x de degre d avec $N(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_d\}$ on obtient des graphes a $n - d - 1, n - d(y_1) - 1, n - d(y_2) - 1, \ldots, n - d(y_d) - 1$ sommets

Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

- lorsqu'on branche sur un sommet x de degre d avec $N(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_d\}$ on obtient des graphes a $n - d - 1, n - d(y_1) - 1, n - d(y_2) - 1, \ldots, n - d(y_d) - 1$ sommets

$d(y_1) \geq d$ $d(y_2) \geq d$

- de plus comme x est de degre minimum on a $\forall i \in [\![1, d]\!], d(y_i) \geq d$

Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

- lorsqu'on branche sur un sommet x de degre d avec $N(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_d\}$ on obtient des graphes a $n - d - 1, n - d(y_1) - 1, n - d(y_2) - 1, \ldots, n - d(y_d) - 1$ sommets
- de plus comme x est de degre minimum on a $\forall i \in [\![1, d]\!], d(y_i) \geq d$
- par monotonicite de $T(.)$, on a donc $T(n) \leq 1 + T(n - d - 1) + \sum_{1 \leq i \leq d} T(n - d - 1) =$ $1 + (d + 1)T(n - (d + 1))$
  C'est a dire $T(n) \leq 1 + (s)T(n - s)$, en posant $d + 1 = s$.

$T(n) \leq T(n-d(y_1)-1) \leq T(n-d-1)$

$T(n) \leq T(n')$ si $n < n'$

racine

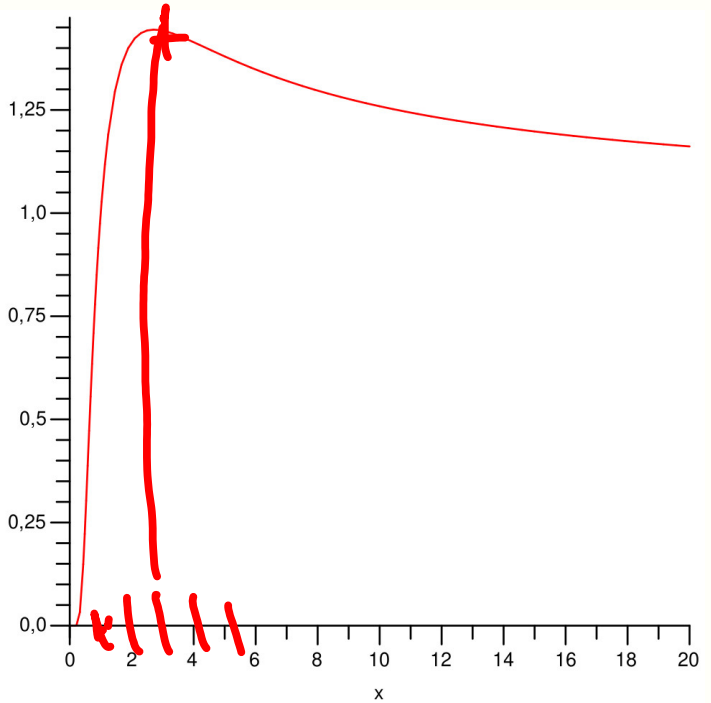
$T(n)$ = le pire (= le plus grand) nombre de noeuds dans l'arbre de récursion sur les instances de taille $\leq n$

Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

- lorsqu'on branche sur un sommet x de degre d avec $N(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_d\}$ on obtient des graphes a $n - d - 1, n - d(y_1) - 1, n - d(y_2) - 1, \ldots, n - d(y_d) - 1$ sommets
- de plus comme x est de degre minimum on a $\forall i \in [\![1, d]\!], d(y_i) \geq d$
- par monotonicite de $T(.)$, on a donc $T(n) \leq 1 + T(n - d - 1) + \sum_{1 \leq i \leq d} T(n - d - 1) =$ $1 + (d + 1)T(n - (d + 1))$
  C'est a dire $T(n) \leq 1 + (s)T(n - s)$, en posant $d + 1 = s$.
- d'ou, si tous les sommets sur lequel on branche dans l'algo sont de degres d : $T(n) \leq 1 + s + s^2 + \cdots + s^{n/s} = \frac{1 - s^{1+n/s}}{1-s} = O(s^{n/s})$

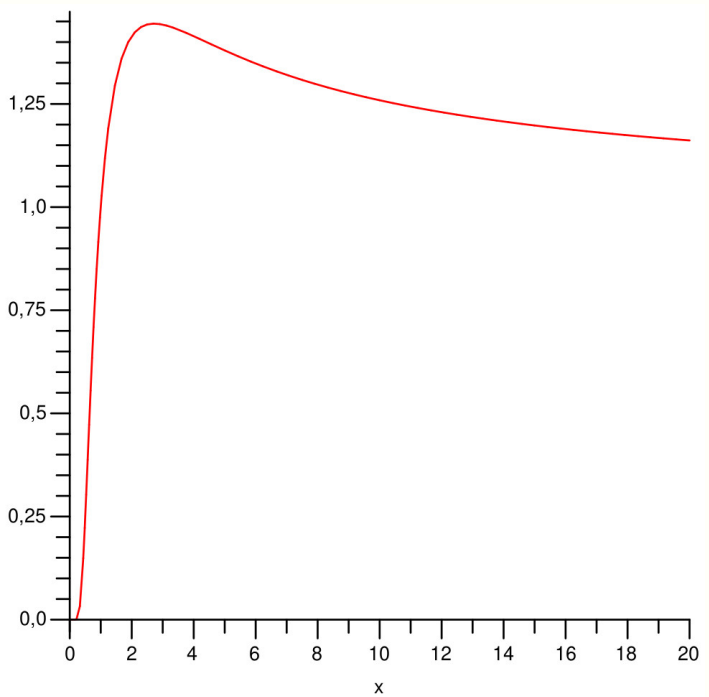
Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

- en etudiant la fonction $s^{1/s}$, on s'apercoit qu'elle admet un maximum sur les s entiers pour $s = 3$, on obtient alors $T(n) = O(3^{n/3})$ soit $T(n) = O(1.45^n)$...



Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

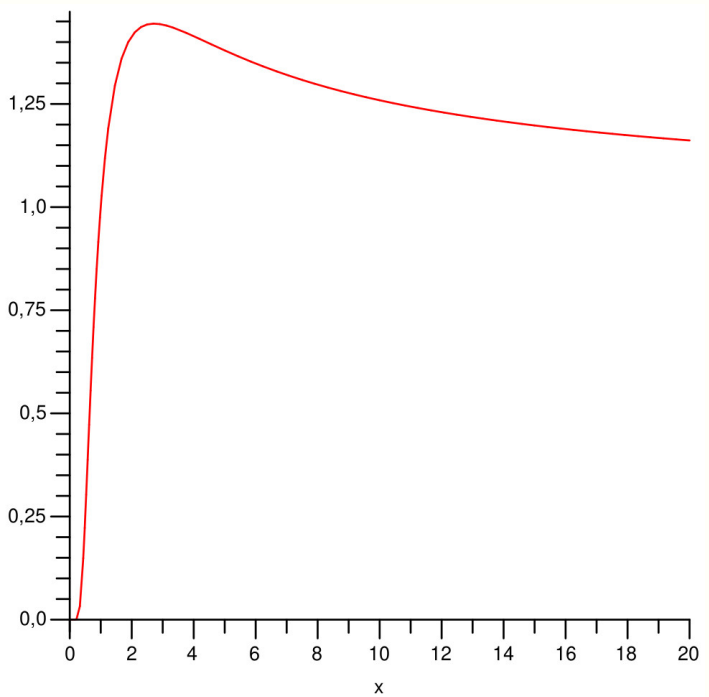
- en etudiant la fonction $s^{1/s}$, on s'apercoit qu'elle admet un maximum sur les s entiers pour $s = 3$, on obtient alors $T(n) = O(3^{n/3})$ soit $T(n) = O(1.45^n)$...



- ... si on ne branche que sur des sommets de meme degre ! ! ! !

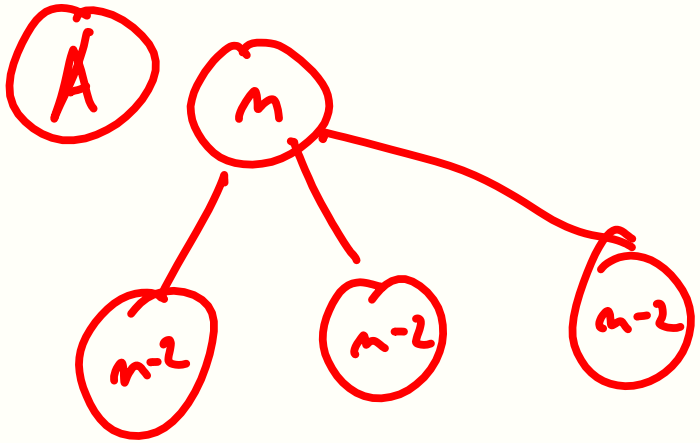
Complexite de l'algorithme : majoration de T(n)

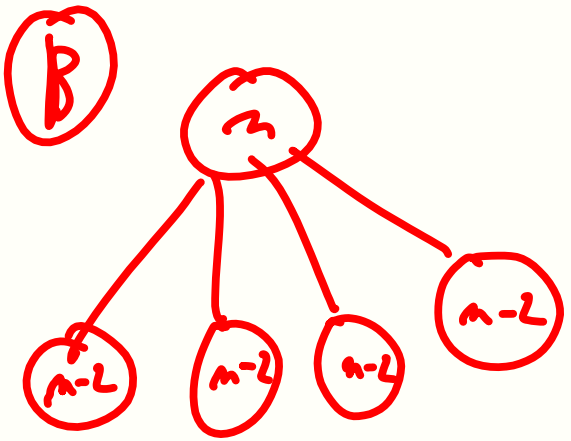
- en etudiant la fonction $s^{1/s}$, on s'apercoit qu'elle admet un maximum sur les s entiers pour $s = 3$, on obtient alors $T(n) = O(3^{n/3})$ soit $T(n) = O(1.45^n)$...

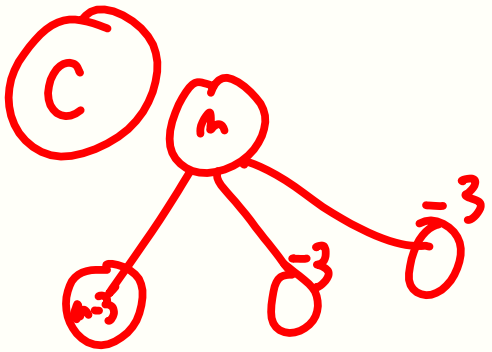


- ... si on ne branche que sur des sommets de meme degre!!!!
- ca reste vrai dans le cas general car on a choisi le "pire" s=3

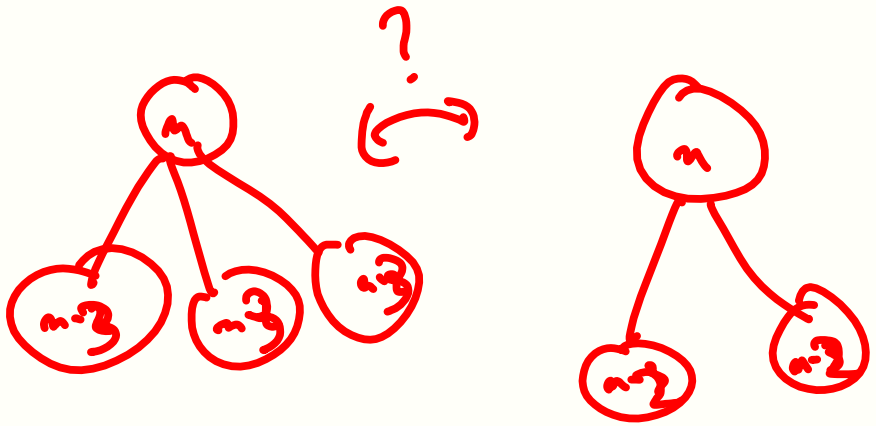
Comparaison directe de l'efficacite des branchements







(A) est moins que (B)
(moins de nombres premiers)



(C) est moins que (A)
(M premiers plus petit)

Un cadre general pour l'analyse des algos de branching

- **Branching vector.** Si le branchement sur un graphe a n sommets produit un graphe a $n - t_1$ sommets, un a $n - t_2$, ..., un a $n - t_r$, le branching vector de la regle est $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$

Un cadre general pour l'analyse des algos de branching

- **Branching vector.** Si le branchement sur un graphe a n sommets produit un graphe a $n - t_1$ sommets, un a $n - t_2$, ..., un a $n - t_r$, le branching vector de la regle est $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$
- **Branching factor.** Si tous les branchements sont les memes on se retrouve a resoudre :

$$T(n) \leq T(n - t_1) + T(n - t_2) + \cdots + T(n - t_r)$$

Un cadre general pour l'analyse des algos de branching

- **Branching vector.** Si le branchement sur un graphe a n sommets produit un graphe a $n - t_1$ sommets, un a $n - t_2$, ... un a $n - t_r$, le branching vector de la regle est $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$
- **Branching factor.** Si tous les branchements sont les memes on se retrouve a resoudre :

$$T(n) \leq T(n - t_1) + T(n - t_2) + \cdots + T(n - t_r)$$

Maths $\Rightarrow T(n) \leq \alpha^n$ ou α est l'unique racine reelle du polynome $x^n - x^{n-t_1} - x^{n-t_2} - \ldots - x^{n-t_r}$.
α est appele le branching factor de $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$, note $\tau(t_1, t_2, \ldots, t_r)$

Un cadre general pour l'analyse des algos de branching

- **Branching vector.** Si le branchement sur un graphe a n sommets produit un graphe a $n - t_1$ sommets, un a $n - t_2$, ..., un a $n - t_r$, le branching vector de la regle est $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$
- **Branching factor.** Si tous les branchements sont les memes on se retrouve a resoudre :

$$T(n) \leq T(n - t_1) + T(n - t_2) + \cdots + T(n - t_r)$$

Maths $\Rightarrow$ $T(n) \leq \alpha^n$ ou α est l'unique racine reelle du polynome $x^n - x^{n-t_1} - x^{n-t_2} - \cdots - x^{n-t_r}$.
α est appele le branching factor de $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$, note $\tau(t_1, t_2, \ldots, t_r)$

- **Maths** $\Rightarrow$ si dans T on a des branchements avec des branching vector differents, on a quand meme $T(n) \leq \alpha^n$ avec α le plus grand (donc le pire) des branching factor dans T

Remarques finales sur l'algo

Question :

Pourquoi gagne-t-on du temps par rapport a l'algo brute force ?

Remarques finales sur l'algo

Question :

Pourquoi gagne-t-on du temps par rapport a l'algo brute force ?

Remarque

Avec cet algo de branching pour stable max, on a en fait tous les stables maximum.

Remarques finales sur l'algo

Question :

Pourquoi gagne-t-on du temps par rapport a l'algo brute force ?

Remarque

Avec cet algo de branching pour stable max, on a en fait tous les stables maximum.

... par contre on les a plusieurs fois chacun.