

# TD2 - Programmation dynamique

OPTIMISATION ET RECHERCHE OPERATIONNELLE

M1 Info - semestre d'automne 2021-2022

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

Christophe Crespelle

christophe.crespelle@univ-lyon1.fr

Florian Ingels

florian.ingels@ens-lyon.fr

## Exercice 1.

*Sur l'autoroute du profit*

Vous implentez une chaine de restaurants sur les aires de repos d'une section d'autoroute. Les aires sont numerotees de 1 a  $n$  dans l'ordre dans lequel on les rencontre sur l'autoroute. Pour chaque aire  $i$ , on connait :

- sa position  $x_i$ , exprimee en km depuis le debut de la section autoroutiere  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , et
- le revenu espere  $r_i > 0$  en placant un de vos restaurants dans cette aire, qui depend de la frequentation de l'aire.

Les  $x_i$  et les  $r_i$  sont donnees dans deux tableaux separes indexes par  $i$ . La societe qui gere l'autoroute, l'AFN (Autoroutes de France et de Navarre), impose une contrainte sur l'implmentation des restaurants : deux restaurants de la meme chaine (y compris la votre) doivent etre espaces d'au moins 50km. On veut faire un algorithme qui retourne un placement de vos restaurants qui ait un revenu escompte maximum, note  $OPT$ , compte tenu de la contrainte imposee par l'AFN.

a. On note  $p(i)$  le numero de l'aire la plus proche de  $i$  qui est situee avant  $i$  ( $x_{p(i)} < x_i$ ) et a au moins 50 km de l'aire  $i$ . Donnez un algorithme de complexite  $O(n)$  qui calcule  $p(i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On prendra pour convention  $p(i) = 0$  lorsqu'il n'existe pas d'aire a au moins 50km de  $i$  avant  $i$ .

**Solution.**

---

**Algorithme 1 :** Algorithme pour le calcul de  $p(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

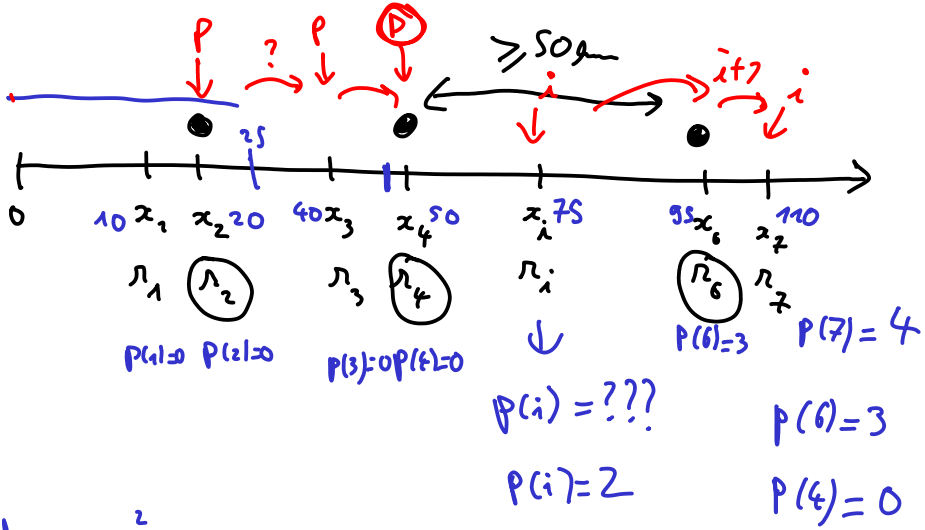
---

```
1  $p \leftarrow 0$ ;
2 pour  $i$  de 1 a  $n$  faire
3   tant que  $x[i] - x[p+1] \geq 50$  faire
4      $p \leftarrow p + 1$ ;
5    $p[i] \leftarrow p$ ;
```

*Annotations manuscrites :*  
-  $O(n)$  est écrit en rouge à droite de la ligne 2.  
-  $O(n)$  est écrit en rouge à droite de la ligne 5.  
- Une accolade à droite des lignes 3 et 4 est étiquetée "au total" et "2n fois" en rouge.

---

Au cours de l'algorithme la valeur pretendante a etre  $p[i]$  est stockee dans  $p$ . Cette valeur est initialisee a 0 (ligne 1) qui est la valeur par convention lorsqu'aucun site



algo  $O(n^2)$

pour  $i$  de 1 à  $n$

pour  $j$  de 1 à  $i$

$\text{si } x_j \leq x_i - 50 \dots$



ne se trouve a au moins 50km avant le site  $i$  courant. Ensuite, la boucle "pour" sur  $i$  (ligne 2) considere chacun des sites un par un. Pour chacun d'eux, la boucle "tant que" de la ligne 3 cherche le plus grand  $p$  (en l'incrementant a la ligne 4) tel que le site numero  $p$  se trouve au moins 50km avant le site  $i$  (condition d'arret de la boucle "tant que", ligne 3). Lorsque cette valeur de  $p$  est atteinte elle est affectee a  $p[i]$  a la ligne 5.

La complexite de l'algorithme est bien  $O(n)$  car la boucle "pour" de la ligne 2 s'exécute exactement  $n$  fois et le nombre total d'iterations de la boucle interne "tant que" (ligne 3) au cours de l'algorithme n'excède pas  $n$ , car  $p$  augmente de 1 a chaque iteration de la boucle. Pour etre rigoureux, remarquez aussi que le nombre de fois ou le test de la condition de la boucle "tant que" est negatif, qui ne compte pas dans les iterations de la boucle, est aussi exactement  $n$  : une fois pour chaque valeur de  $i$ . Toutes les autres instructions sont elementaires et prennent un temps constant. La complexite totale de l'algorithme est donc  $O(n)$ .

b. Si on decide de placer un restaurant sur l'aire  $i$ , sur quelles aires  $j$  avant  $i$ , c.a.d.  $j < i$ , peut-on eventuellement placer un autre restaurant ?

**Solution.** Precisement sur les aires numero  $j$  avec  $j \leq p(i)$  car ce sont les aires se trouvant avant  $i$  et a au moins 50km de  $i$ . C'est la raison pour laquelle  $p(i)$  a ete defini ainsi.

On s'interesse maintenant au sous-probleme  $Restau(j)$  dans lequel on ne place des restaurants que sur les aires  $i \in \llbracket 1, j \rrbracket$ , pour un  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  fixe, et on note  $OPT(j)$  le revenu maximum qu'on peut atteindre dans ce sous probleme (on etend cette notation en posant par convention  $OPT(0) = 0$ ).

c. Soit  $S_j^*$  une solution de revenu maximum au sous-probleme  $Restau(j)$  telle que  $j \notin S_j^*$ . Exprimez le revenu  $r(S_j^*)$  de cette solution en fonction des  $OPT(j')$  pour  $j' < j$ .

$$r(S_j^*) = OPT(j-1)$$

**Solution.** Puisque  $j$  n'est pas dans la solution optimale  $S_j^*$  au probleme  $Restau(j)$ , alors cette solution n'utilise que des sites  $j' \leq j-1$  (remarquez que lorsque  $j \notin S_j^*$  alors necessairement  $j > 1$ ). Ainsi,  $S_j^*$  est aussi une solution au probleme  $Restau(j-1)$ . Et comme  $S_j^*$  est la solution optimale de  $Restau(j)$  alors c'est aussi la solution optimale de  $Restau(j-1)$  :  $r(S_j^*) = OPT(j-1)$ .

d. Meme question lorsque  $j \in S_j^*$ .

$$r(S_j^*) = r_j + OPT(p(j))$$

**Solution.** Lorsque  $j \in S_j^*$ , les autres sites  $j'$  impliquees dans  $S_j^*$ , c'est a dire  $j' \in S_j^*$  et  $j' \neq j$ , verifient necessairement  $j' \leq p(j)$ , car  $S_j^*$  satisfait les contraintes de distanciation imposees par l'AFN. Ainsi, comme  $S_j^*$  est la solution optimale a  $Restau(j)$ , les sites  $j' \in S_j^*$  avec  $j' \neq j$  forment une solution optimale a  $Restau(p(j))$ . On a donc  $r(S_j^*) = r_j + OPT(p(j))$ .

e. Donnez une formule de recurrence qui exprime  $OPT(j)$  en fonction des  $OPT(j')$ ,  $j' < j$ .

**Solution.** Comme toute solution optimale a  $restau(j)$  contient ou ne contient pas  $j$ , d'apres les deux questions precedentes, on a  $OPT(j) = \max\{OPT(j-1), r_j + OPT(p(j))\}$ .

*OPT qui n'utilise pas j*

*OPT qui utilise j*

f. Donnez un algorithme de complexite  $O(n)$  pour calculer  $OPT$ , le revenu escompte maximum, et un placement de vos restaurants correspondant.

**Solution.**

Pour calculer  $OPT$ , l'algorithme 2 suit une approche de programmation dynamique dans laquelle on calcule  $OPT[j]$  pour tout  $0 \leq j \leq n$ , en posant comme convenu  $OPT[0] = 0$  et en utilisant le tableau  $p$  calcule a la question a. A la fin de l'algorithme, on obtient alors la valeur de  $OPT$  comme  $OPT = OPT[n]$ .

Le calcul des  $OPT[j]$ ,  $1 \leq j \leq n$ , se fait dans la boucle "pour" de la ligne 2 en utilisant la formule de recurrence de la question e (disjonction de cas des lignes 3 a 8). Afin d'obtenir non seulement la valeur de  $OPT$  mais egalement une solution qui realise cette valeur, on utilise un tableau  $prem$  qui pour chaque valeur de  $j \geq 1$  donne le site de plus grand indice utilise dans la solution de valeur optimale  $OPT[j]$  au probleme intermediaire  $restau(j)$ . Grace au tableau  $prem$ , a la fin de l'algorithme (ligne 10 a 14), on peut construire une solution optimale en remarquant que si le site  $x_i$  est utilise dans la solution optimale que l'on construit, alors le prochain site  $x_j$ , avec  $j < i$ , utilise dans cette solution est celui d'indice  $j = prem[p[i]]$ , car lorsque  $x_i$  participe a la solution optimale a  $restau(i)$  (ligne 8), cette derniere est construite en prenant le site  $x_i$  et une solution optimale a  $restau(p[i])$  (ligne 7). Dans l'algorithme, les listes sont notees entre parentheses et le  $.$  designe la concatenation de deux listes. Dans la liste  $S$  que l'on construit, les sites apparaissent dans l'ordre decroissant de leurs indices.

---

**Algorithme 2 :** Algorithme pour le calcul de  $OPT$  et d'une solution  $S$  realisant un revenu escompte de  $OPT$ .

---

```

1   $OPT[0] \leftarrow 0;$ 
2  pour  $j$  de 1 a  $n$  faire
3      si  $OPT[j - 1] \geq r[j] + OPT[p[j]]$  alors
4           $OPT[j] \leftarrow OPT[j - 1];$ 
5           $prem[j] \leftarrow prem[j - 1];$ 
6      sinon
7           $OPT[j] \leftarrow r[j] + OPT[p[j]];$ 
8           $prem[j] \leftarrow j;$ 
9   $OPT \leftarrow OPT[n];$ 
10  $k \leftarrow prem[n];$ 
11  $S \leftarrow (k);$ 
12 tant que  $p[k] > 0$  faire
13      $k \leftarrow prem[p[k]];$ 
14      $S \leftarrow S.(k);$ 
15 retourner  $(OPT, S);$ 

```

Il est aise de verifier que la complexite de l'algorithme 2 est  $O(n)$ . Toute les instructions sont elementaires et prennent un temps constant, y compris la concatenation de deux listes ligne 14 avec une structure de donnee adequate (dans laquelle les listes sont representees avec un pointeur sur leur premier et sur leur dernier element). La boucle "pour" de la ligne 2 s'execute exactement  $n$  fois et la boucle "tant que" de la ligne 12

au plus  $n$  fois, car comme  $p[k] < k$  pour tout  $k$ ,  $p[k]$  croît strictement (ligne 13) à chaque itération de la boucle.

## Exercice 2.

*Un sac de valeur*

Dans le problème du sac à dos, on donne une collection d'objets numérotés de 1 à  $n$  et chaque objet a une valeur  $v_i \in \mathbb{R}^+$  et un poids  $w_i \in \mathbb{R}^+$ , pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Le problème est à valeurs entières si de plus les valeurs  $v_i$  sont des entiers, c.a.d.  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v_i \in \mathbb{N}$ . Pour une collection d'objets  $S \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $v(S) = \sum_{i \in S} v_i$  la valeur de la collection  $S$  et  $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$  son poids (avec par convention  $v(\emptyset) = 0$  et  $w(\emptyset) = 0$ ). On donne aussi un poids limite  $W \geq 0$  pour le sac à dos et on demande la valeur maximum  $OPT$  d'une collection d'objets  $S$  telle que  $w(S) \leq W$ . En clair, on veut maximiser la valeur de ce que l'on prend en ayant une limite ferme sur le poids total. Ce problème est un grand classique de l'optimisation combinatoire, utilisé pour modéliser de nombreux problèmes pratiques. Il est NP-difficile et on se propose de faire un algorithme pseudopolynomial pour le résoudre de manière exacte, en utilisant l'approche de la programmation dynamique. Cet algorithme a une complexité théorique exponentielle mais est très efficace en pratique lorsque les valeurs entières restent relativement petites (c'est à dire du même ordre de grandeur que le nombre d'objets).

On considère le sous-problème  $PoidsSac(i, V)$  suivant : quel est le poids limite minimum d'un sac qui peut recevoir une collection d'objets de valeur au moins  $V$ , avec  $V \leq \sum_{j=1}^i v_j$ , qui sont choisis uniquement parmi les objets d'indice  $j \leq i$  ? Ce poids minimum est noté  $\overline{OPT}(i, V)$ . Soit  $O$  une solution qui atteint le poids minimum  $\overline{OPT}(i, V)$ .

a. Que vaut  $\overline{OPT}(i, V)$  si  $i \in O$  et  $i$  est l'unique objet de  $O$  ?

**Solution.**  $\overline{OPT}(i, V) = w(O) = w_i$ .

b. Que vaut  $\overline{OPT}(i, V)$  si  $i \in O$  et  $i$  n'est pas l'unique objet de  $O$  ?

**Solution.**  $\overline{OPT}(i, V) = w(O) = w_i + \overline{OPT}(i-1, V - v_i)$ .

c. Montrer que dans le cas où  $i \in O$ , on a toujours  $\overline{OPT}(i, V) = w_i + \overline{OPT}(i-1, \max\{0, V - v_i\})$ .

**Solution.** Si  $i$  est le seul objet de  $O$ , alors  $v_i \geq V$  et la formule donne  $\overline{OPT}(i, V) = w_i + \overline{OPT}(i-1, \max\{0, V - v_i\}) = w_i + \overline{OPT}(i-1, 0) = w_i$ , ce qui est correct d'après la question a. Si  $i$  n'est pas le seul objet de  $O$ , alors  $v_i < V$  et la formule donne  $\overline{OPT}(i, V) = w_i + \overline{OPT}(i-1, \max\{0, V - v_i\}) = w_i + \overline{OPT}(i-1, V - v_i)$ , ce qui est correct d'après la question b.

d. Que vaut  $\overline{OPT}(i, V)$  si  $i \notin O$  ?

**Solution.** Si  $i \notin O$  alors il existe une solution optimale à  $PoidsSac(i, V)$  qui n'utilise que les objets  $j < i$ . Cette solution est donc aussi une solution optimale à  $PoidsSac(i-1, V)$ . Dans ce cas, on a donc  $\overline{OPT}(i, V) = \overline{OPT}(i-1, V)$ .

e. Donnez une formule de récurrence pour  $\overline{OPT}(i, V)$  dans le cas où  $V > \sum_{j=1}^{i-1} v_j$  ?

**Solution.** Lorsque  $V > \sum_{j=1}^{i-1} v_j$ , nécessairement  $i$  appartient à toute solution optimale à  $PoidsSac(i, V)$ . D'après la question c, on a donc  $\overline{OPT}(i, V) = w_i + \overline{OPT}(i-1, \max\{0, V - v_i\})$ .

f. Donnez une formule de récurrence pour  $\overline{OPT}(i, V)$  dans le cas où  $V \leq \sum_{j=1}^{i-1} v_j$  ?

**Solution.** Dans ce cas, il est possible qu'il existe une solution optimale qui ne contienne pas  $i$ . La valeur de  $\overline{OPT}(i, V)$  est donc le min entre l'optimum des solutions qui ne contiennent pas  $i$ , c'est à dire  $\overline{OPT}(i-1, V)$ , et l'optimum des solutions qui contiennent  $i$ , qui vaut  $w_i + \overline{OPT}(i-1, \max\{0, V - v_i\})$  comme on l'a déjà montré à la question c. On obtient donc, dans le cas où  $V \leq \sum_{j=1}^{i-1} v_j$ ,  $\overline{OPT}(i, V) = \min\{\overline{OPT}(i-1, V), w_i + \overline{OPT}(i-1, \max\{0, V - v_i\})\}$ .

g. En utilisant les formules des deux questions précédentes, écrivez un algorithme qui calcule  $\overline{OPT}(i, V)$  pour toutes les valeurs possibles et pertinentes de  $i$  et  $V$  et qui retourne  $OPT$ , la valeur de la solution optimale au problème du sac à dos à valeurs entières.

**Solution.**

L'algorithme 3 fait un simple parcours de tous les couples  $(i, V)$  valides, c'est à dire avec  $V \leq \sum_{j=1}^i v_j$ , et affecte pour chacun d'eux la valeur de  $\overline{OPT}(i, V)$  dans une table, en suivant les formules de récurrence trouvées aux questions e et f (disjonction de cas des lignes 4 à 7). L'initialisation de la récurrence se fait par les valeurs de  $\overline{OPT}(i, 0)$  qui sont 0 pour tous les  $i$  (ligne 2). Le calcul de  $OPT$  se fait à la fin en parcourant la dernière ligne de la table,  $\overline{OPT}(n, V)$  pour  $1 \leq V \leq \sum_{j=1}^n v_j$ , et en y sélectionnant la valeur maximale de  $V$  telle que  $\overline{OPT}(n, V) \leq W$ . Notez que sur cette dernière ligne, le problème  $PoidsSac(n, V)$  n'est pas contraint sur le choix des objets  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  qui peuvent être utilisés dans la solution. Il est donc identique au problème initial du sac à dos.

---

**Algorithme 3 :** Algorithme pour le calcul de  $\overline{OPT}(i, V)$  et de la valeur  $OPT$  de la solution optimum au probleme du sac a dos a valeurs entieres.

---

```

1 pour i de 1 a n faire
2    $\overline{OPT}[i, 0] \leftarrow 0;$ 
3   pour V de 1 a  $\sum_{j=1}^i v_j$  faire
4     si  $V > \sum_{j=1}^{i-1} v_j$  alors
5        $\overline{OPT}(i, V) \leftarrow w_i + \overline{OPT}(i - 1, \max\{0, V - v_i\});$ 
6     sinon
7        $\overline{OPT}(i, V) \leftarrow \min\{\overline{OPT}(i - 1, V), w_i + \overline{OPT}(i - 1, \max\{0, V - v_i\})\};$ 
8  $OPT \leftarrow 0;$ 
9 pour V de 1 a  $\sum_{i=1}^n v_i$  faire
10  si  $\overline{OPT}(n, V) \leq W$  alors
11   $OPT \leftarrow V;$ 
12 retourner  $OPT;$ 

```

---

On note  $v^* = \max_{1 \leq i \leq n} \{v_i\}$ .

**h.** Donnez la complexite de votre algorithme en fonction de  $n$  et  $v^*$ .

**Solution.** Remarquez que le calcul de la somme  $\sum_{j=1}^i v_j$  pour tous les  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  peut etre fait preliminairement et prend seulement un temps  $O(n)$ . Le calcul de la formule de recurrence (lignes 4 a 7) se fait en temps constant grace a la table  $\overline{OPT}(\cdot, \cdot)$ . En plus de la boucle "pour" principale (ligne 1) qui s'execute  $n$  fois et de la boucle "pour" de la ligne 9 qui s'execute  $\sum_{j=1}^n v_j = O(nv^*)$ , le temps d'execution de l'algorithme depend du nombre d'execution de la boucle "pour" interne (ligne 3) qui s'execute exactement  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i v_j = O(n^2v^*)$ . Au total on obtient donc une complexite de  $O(n + nv^* + n^2v^*) = O(n^2v^*)$ .

On note aussi  $w^* = \max_{1 \leq i \leq n} \{w_i\}$ .

**i.** Exprimez la taille  $t$ , en nombre de bits, de l'entree de l'algorithme en fonction de  $n, v^*$  et  $w^*$ .

**Solution.** Comme chaque valeur  $v_i$  est code en binaire sur  $\log v_i$  bits et chaque poids  $w_i$  est code sur  $\log w_i$  bits, cela prend au total un espace  $t = \sum_{i=1}^n (\log v_i + \log w_i) = O(n(\log v^* + \log w^*))$ .

**j.** La valeur de  $v^*$  est-elle polynomiale en fonction de  $t$ ?

**Solution.** Comme  $t$  depend logarithmiquement de  $v^*$ , on ne peut borner  $v^*$  qu'exponentiellement en fonction de  $t$ . C'est pour ca que la complexite de l'algorithme 3 telle que nous l'avons exprimee depend en fait exponentiellement de la taille  $t$  de l'entree, malgre son aspect a premiere vue polynomial :  $O(n^2v^*)$ . Remarquez que si dans l'entree les nombres etaient codes en unaire (a ne pas faire!), alors cette complexite serait bien polynomiale en la taille de l'entree car on aurait alors  $t = O(n(v^* + w^*))$ , et surtout  $t \geq v^*$  et  $t \geq n$  (ainsi  $O(n^2v^*) = O(t^3)$ ). Dans ce cas, on dit que la complexite de l'algorithme est pseudo-polynomiale. C'est a dire polynomiale avec un codage de l'entree en unaire (qui est mauvais), et exponentielle avec un codage naturel en binaire (qui est le bon codage a utiliser).